takten beobachtet ist als die Südsterne, das heißt an mehr Kontakten als zur Erfüllung der Bedingung

$$m_{U'} \sin p' = m_U \sin p$$

nötig ist, so erhöhen wir dadurch die beiden Fehlerbeträge. Es wird

$$m_u = \pm 0{,}^s023 \operatorname{cosec} \Phi,$$
$$m_k = \pm 0{,}034 \operatorname{cosec} \Phi;$$

und das Schlußresultat lautet:

$$u = -1^m 27{,}^s518 \pm 0{,}^s034,$$
$$k = + \qquad 0{,}863 \pm 0{,}050.$$

b) Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe von Durchgängen durch den Vertikal des Polarsternes (Döllenmethode) [4])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Wir nehmen an, der Beobachter habe das Instrument bei der Beobachtung des Südsternes umgelegt und in beiden Lagen den beweglichen Faden auf den Polarstern eingestellt; vor und nach dem Umlegen sei ferner der Stand der Niveaublase abgelesen worden. Es stehen dann folgende Daten zur Ableitung der Uhrkorrektion zur Verfügung:

aus der Polarisbeobachtung die Uhrzeiten U'_v und U'_n und die zugehörigen Trommelablesungen M_v und M_n;

aus der Beobachtung des Südsternes die Uhrzeiten U_{iv} und U_{in} $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

ferner die Blasenmitten n_v und n_n, wobei der Index v die vor dem Umlegen und der Index n die nach dem Umlegen beobachteten Werte bezeichnet.

Die aus den Blasenmitten ermittelte Neigung des mittleren Achsenäquators sei i; sie werde auf das Westende der Achse bezogen. Ferner sehen wir als bekannt an die Zenitdistanzen z und z'; die Zenitdistanz z des Südsternes nehmen wir nach Süden positiv, nach Norden negativ, die Zenitdistanz z' des Polarsternes nach Norden positiv. Der Revolutionswert der Mikrometerschraube sei R.

Der Abstand des Polarsternes vom *westlichen* Pol Q des mittleren Achsenäquators zur Zeit

$$U' = \frac{1}{2}(U'_v + U'_n)$$

sei $90^0 + \bar{f}$. Setzt man

$$m'' = 2 \sin^2 \frac{U'_n - U'_v}{2} \Big/ \sin 1''$$

und nimmt das Azimut k^* des Polarsternes von Norden nach Westen positiv, so ist nach der Beziehung (8b), Seite 38, in Zeitsekunden:

$$\bar{f} = \pm \frac{1}{2}(M_v - M_n) R - \frac{m''}{15} \cos p' \sin k^* \sin \Phi.$$

Nehmen die Mikrometerablesungen zu, wenn vor dem Umlegen der Faden in größere Distanz vom Pol Q gebracht wird, so ist das positive Zeichen, und wenn die Ablesungen abnehmen, das negative Zeichen zu nehmen. Steht keine Tabelle zur Verfügung, welcher die Werte von m'' entnommen werden können, so ergibt sich der Wert von $m''/15$ auch bequem aus der Beziehung

$$\frac{m''}{15} = \left(\frac{U'_n - U'_v}{5{,}53}\right)^2,$$

worin die Differenz $(U'_n - U'_v)$ in Zeitminuten auszudrücken ist. Den Cosinus der Poldistanz p' des Polarsternes wird man meist gleich 1 setzen dürfen.

Setzt man

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\left[\frac{U_{iv} + U_{in}}{2}\right] = \frac{1}{n}\,[\overline{U}_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und $$\overline{m}'' = \frac{1}{n}\,[m''_i]$$

mit $$m''_i = 2\sin^2\frac{U_{in} - U_{iv}}{2} \Big/ \sin 1''$$

und $$\overline{b} = \frac{1}{n}\,[b_i],$$

wo b_i die halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang ist, so wird die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Achsenäquator gleich (vergleiche Seite 37):

$$U_0 = \overline{U} - \frac{\overline{m}''}{15}\operatorname{cotg}(\mu - \overline{t}) + \overline{b}\operatorname{cosec} p \sec q.$$

Das zweite Glied rechter Hand darf vernachlässigt werden, da das Argument $(\mu - \overline{t})$ der Kotangente in mittlerer Breite im Maximum um rund 1^0 von 90^0 abweicht. Im letzten Glied darf, da $\overline{b}$ klein ist, $\sec q = 1 + \cdots$ gesetzt werden.

Die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Achsenäquator wird dann gleich

$$U_0 = \overline{U} + \overline{b}\operatorname{cosec} p.$$

Zur Ableitung der Uhrkorrektion stehen nun folgende Daten zur Verfügung:

$$U', \overline{t};\ \alpha', p'$$

und

$$U_0;\ \alpha, p;\ i,$$

so daß die Differenz der Stundenwinkel gleich

$$t' - t = (U' - \alpha') - (U_0 - \alpha)$$

wird.

Ein vollständig strenges System von Gleichungen zur Berechnung der Uhrkorrektion u läßt sich auf folgendem Weg aufstellen (Fig. 17). Der erste Vertikal schneide den größten Kreis, der den Ort S' des Polarsternes zur Zeit

U' mit dem Ort S des Südsternes zur Zeit U_0 im Achsenäquator verbindet, im Punkt Z_1 und es sei die Entfernung dieses Punktes vom Zenit Z gleich i_1 und seine Entfernung vom Pol P des Äquators gleich Φ_1. Es sei Δt der Stundenwinkel des Punktes Z_1; es ist dann

$$U_0 + u = \alpha + t = \alpha + \Delta t + (t - \Delta t).$$

Die beiden Teile Δt und $(t - \Delta t)$, in die der Stundenwinkel t zerlegt wird, lassen sich wie folgt berechnen.

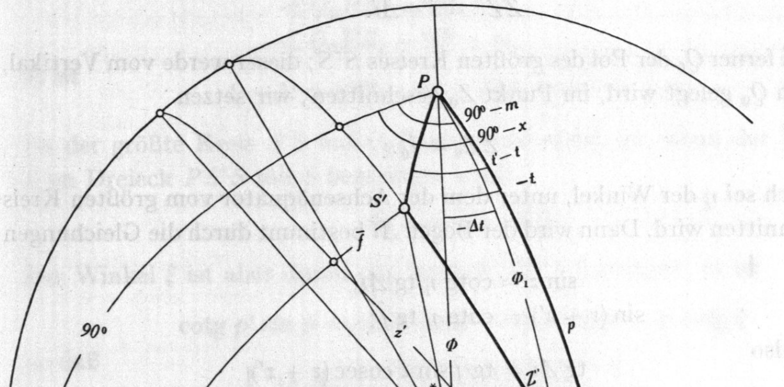

Fig. 17

a) Berechnung von Δt.

Es ist

$$\operatorname{tg} \Delta t = - \operatorname{tg} i_1 \operatorname{cosec} \Phi.$$

Der Bogen i_1 läßt sich mit Hilfe der Zenitdistanzen z und z' auf die Neigung i und den Abstand $\bar{f}$ des Polarsternes vom Achsenäquator zurückführen. Es schneide der durch den Pol Q des mittleren Achsenäquators gelegte Vertikal den Achsenäquator im Punkt Z' und den größten Kreis $S'S$ im Punkt Z''. Dann ist

$$ZZ' = i$$

die mittlere Neigung der Instrumentenachse; wird

$$Z'Z'' = \Delta i,$$

gesetzt, so ist

$$ZZ'' = i + \Delta i.$$

Es sei ferner Q_0 der Pol des größten Kreises $S'S$; dieser werde vom Vertikal, der durch Q_0 gelegt wird, im Punkt Z_0 geschnitten; wir setzen

$$ZZ_0 = i_0.$$

Schließlich sei η der Winkel, unter dem der Achsenäquator vom größten Kreis $S'S$ geschnitten wird. Dann wird der Bogen Δi bestimmt durch die Gleichungen

$$\sin z = \operatorname{cotg} \eta \operatorname{tg} \Delta i,$$
$$\sin (z + z') = \operatorname{cotg} \eta \operatorname{tg} \bar{f};$$

es wird also

$$\operatorname{tg} \Delta i = \operatorname{tg} \bar{f} \sin z \operatorname{cosec} (z + z')$$

und

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \bar{f} \operatorname{cosec} (z + z').$$

Das Azimut des Poles Q sei $90^0 - k$, das des Poles Q_0 $90^0 - k_0$; es kann k_0 auf k zurückgeführt werden. Sind A und A_0 die Punkte, in denen der Horizont vom Achsenäquator und vom größten Kreis $S'S$ geschnitten wird, so ist im Dreieck SAA_0 der Winkel bei A gleich $90^0 + i$ und die Seite $AA_0 = k - k_0$; somit besteht die Beziehung

$$\operatorname{cotg} (k - k_0) \cos z = - \sin z \sin i + \cos i \operatorname{cotg} \eta,$$

durch welche $k - k_0$ auf bekannte Größen zurückgeführt wird. In immer ausreichender Näherung kann man setzen

$$\operatorname{cotg} (k - k_0) \cos z = \operatorname{cotg} \eta - \cdots$$

oder

$$\operatorname{tg} (k - k_0) = \operatorname{tg} \bar{f} \cos z \operatorname{cosec} (z + z') + \cdots.$$

oder

$$k - k_0 = \bar{f} \cos z \operatorname{cosec} (z + z') + \cdots.$$

Das rechtwinklige Dreieck ZZ_0Z'' gibt jetzt den Wert von i_0:

$$\operatorname{tg} i_0 = \operatorname{tg} (i + \Delta i) \cos (k - k_0)$$

und schließlich das rechtwinklige Dreieck ZZ_0Z_1 den Wert von i_1:

$$\operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg} i_0 \sec k_0.$$

Für $\varDelta t$ erhält man also

$$\operatorname{tg} \varDelta t = -\operatorname{tg} i_1 \operatorname{cosec} \varPhi,$$
$$= -\operatorname{tg} i_0 \sec k_0 \operatorname{cosec} \varPhi,$$

oder

$$\operatorname{tg} \varDelta t = -\operatorname{tg}(i + \varDelta i) \cos(k - k_0) \sec k_0 \operatorname{cosec} \varPhi. \tag{44}$$

b) Berechnung von $(t - \varDelta t)$.

Setzt man

$$\sphericalangle Q_0PS = 90^0 - x,$$
$$\sphericalangle Q_0PZ_1 = 90^0 - m,$$

so ist

$$t - \varDelta t = (90^0 - m) - (90^0 - x) = x - m.$$

Da der größte Kreis $S'S$ auf Q_0P senkrecht steht, ist, wenn der Winkel bei S im Dreieck $PS'S$ mit ξ bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \xi \cos p. \tag{45a}$$

Der Winkel ξ ist aber durch das Dreieck $PS'S$ bestimmt; es ist

$$\operatorname{cotg} p' \sin p = \cos p \cos(t' - t) + \sin(t' - t) \operatorname{cotg} \xi$$

so daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} p' \operatorname{cotg} p \sin(t' - t)}{1 - \operatorname{tg} p' \operatorname{cotg} p \cos(t' - t)} \tag{45b}$$

wird.

Zur Berechnung des Winkels m ist die Kenntnis von $PZ_1 = \varPhi_1$ erforderlich; es ist

$$\cos \varPhi_1 = \cos \varPhi \cos i_1.$$

Das Dreieck PZ_1S gibt jetzt die Beziehung

$$\operatorname{cotg} \varPhi_1 \sin p = \cos p \cos(x - m) - \sin(x - m) \operatorname{cotg} \xi;$$

sie reduziert sich, wenn der Wert von $\operatorname{tg} \xi$ nach (45a) eingeführt wird, auf

$$\sin m = \operatorname{cotg} \varPhi_1 \operatorname{tg} p \sin x. \tag{46}$$

An Stelle des von i_1 abhängigen Wertes $\varPhi_1$ darf man den konstanten Wert $\varPhi$ zur Reduktion benützen; erst wenn i_1 den Wert von rund 30^s annimmt, ist $\varPhi_1$ von $\varPhi$ um einen Betrag verschieden, der den Winkel m um $0^s\!,001$ ändert. Da der Abstand $\bar{f}$, von dem $\varDelta i$ und damit i_1 abhängig ist, von der gleichen Größenordnung wie i_1 ist, bedeutet es kaum eine Beschränkung des Beobachters, wenn man ihm die Verpflichtung auferlegt, den Polarstern nicht in größeren Abständen vom Achsenäquator als 30^s zu beobachten. Man darf dann zur Berechnung des Winkels $\varDelta t$ die Beziehung

$$\varDelta t = -\left(i + \bar{f} \frac{\sin z}{\sin(z + z')}\right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \varPhi \tag{47}$$

verwenden.

Das Azimut k des Instrumentenvertikales folgt aus dem Azimut k^* des Polarsternes mit Hilfe der Beziehung

$$k = k^* + (i \cos z' + \bar{f}) \operatorname{cosec} z';$$

den Wert von k^* wird man einer Einstellungstafel des Polarsternes entnehmen oder, wenn eine solche nicht zur Verfügung steht, mit Hilfe eines Näherungswertes der Uhrkorrektion aus den Beobachtungen selber berechnen.

2. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Die tägliche Aberration kann leicht nachträglich berücksichtigt werden. Setzt man im Differentialausdruck

$$\cos q \, du \sin p - \sin z \, da = \cos q \, d\alpha \sin p + \sin q \, dp$$

für die Verbesserungen $d\alpha \sin p$ und dp die Korrektionen wegen der täglichen Aberration

$$d\alpha \sin p = 0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \cos t,$$
$$dp = - 0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \sin t \cos p$$

ein und berücksichtigt die Beziehung

$$\cos a = - \cos q \cos t - \sin q \sin t \cos p,$$

so erhält man

$$\cos q \, du \sin p - \sin z \, da = + 0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \cos a.$$

Läßt man diese Beziehung für den Südstern gelten und setzt für den Polarstern, dessen Azimut gleich $180^0 + a$ wird,

$$\cos q' \, du \sin p' - \sin z' \, da = - 0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \cos a,$$

so folgt durch Elimination von da unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\sin p \cos q = \cos \Phi \sin z + \sin \Phi \cos z \cos a,$$
$$\sin p' \cos q' = \cos \Phi \sin z' - \sin \Phi \cos z' \cos a$$

der Ausdruck

$$\sin \Phi \cos a \sin (z + z') \, du = 0\overset{''}{,}322 \sin \Phi \cos a (\sin z + \sin z'),$$

so daß die Verbesserung wegen der täglichen Aberration gleich

$$du = 0\overset{s}{,}0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\sin (z + z')}$$

wird. Im Fall, daß an der Rektaszension des Südsternes die Korrektion wegen der täglichen Aberration angebracht worden ist, geht dieser Ausdruck über in

$$du = 0\overset{s}{,}0215 \frac{\sin z}{\sin (z + z')}.$$

Da $(z + z')$ nur unerheblich von der Poldistanz p des Südsternes abweicht, darf

du auch nach dem Ausdruck

$$du = 0^s\!.0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\sin p} \text{ respektive } 0^s\!.0215 \frac{\sin z}{\sin p}$$

berechnet werden.

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

Bezeichnet

U' die Uhrzeit, zu welcher sich der Polarstern im Abstand $90^0 + \bar{f}$ vom westlichen Pol des Achsenäquators befindet,

U_0 die Zeit des Durchganges des Südsternes durch den Achsenäquator,

i die auf das Westende bezogene Neigung der Achse,

$\left.\begin{matrix}\alpha', \delta' \\ \alpha, \delta\end{matrix}\right\}$ den Ephemeridenort des $\left\{\begin{matrix}\text{Polarsternes,} \\ \text{Südsternes,}\end{matrix}\right.$

z, z' die Zenitdistanzen (z nach Süden, z' nach Norden positiv),

$90^0 - k$ das Azimut des Westendes der Achse,

$k_0 = k - \bar{f} \cos z \operatorname{cosec}(z + z') = k - \cdots,$

so folgt u aus der Durchrechnung des folgenden Systemes:

$$\begin{aligned} t' - t &= (U' - \alpha') - (U_0 - \alpha), \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg} \delta' \operatorname{tg} \delta \sin(t' - t) \big/ \big(1 - \operatorname{cotg} \delta' \operatorname{tg} \delta \cos(t' - t)\big), \\ \sin m &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} x \cos x, \\ \Delta t &= -\big(i + \bar{f} \sin z \operatorname{cosec}(z + z')\big) \sec k_0 \sec \varphi, \\ u &= (\alpha - U_0) + (x - m) + \Delta t + 0^s\!.0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\cos \delta}. \end{aligned}$$

Wird das Instrument während des Sterndurchganges nicht umgelegt, so beobachtet man, um die Kollimation zu eliminieren, verschiedene Sterne abwechselnd in der einen oder anderen Lage; der Polarstern wird dann vorteilhaft auf den Mittelfaden eingestellt, auf welchen die Durchgangszeiten des Südsternes reduziert werden; in diesem Fall hat man, wenn die Kollimation mit c bezeichnet wird, als Wert von Δt einzuführen

$$\Delta t = -\left(i \pm c \frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')}\right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi \left\{\begin{matrix} + \text{ Lage I} \\ - \text{ Lage II} \end{matrix}\right. .$$

3. *Der mittlere Fehler der Uhrkorrektion und die günstigsten Umstände der Beobachtung*[5]). Die Änderung, welche die Uhrkorrektion erfährt als Folge von Verbesserungen, die an den Ausgangsgrößen angebracht werden, kann entweder durch Differentiation des Ausdruckes für u abgeleitet werden oder aus den beiden Differentialausdrücken, die man einzeln für den Polarstern und den Südstern aufstellen kann. Wir schlagen einen Mittelweg ein, der uns die geometrische Bedeutung der Beziehung, durch welche die wahren Fehler miteinander verbunden werden, leicht erkennen läßt.

Die Lage des Zenites Z wird gegeben als Schnittpunkt des Kleinkreises, der um den Pol P des Äquators mit dem Radius Φ geschlagen wird, mit dem Kleinkreis um den Pol Q des Achsenäquators mit dem Radius $90^0 - i$; und Q wird gegenüber dem Dreieck $PS'S$ bestimmt durch den Schnittpunkt des Kleinkreises, der um S' mit dem Radius $90^0 + \bar{f}$ geschlagen wird, mit der Polare des Punktes S. Werden Φ und i als fehlerfrei betrachtet, so übertragen sich die Fehler in der Lage der Punkte S' und S auf das Zenit nur durch den Fehler in der Lage des Punktes Q. Man kann das Dreieck $PS'S$ als fehlerfrei ansehen, wenn man die Fehler der Punkte S' und S den Abständen $S'Q$ und SQ zur Last legt. Als Fehler dieser Abstände kommen aber nur die Projektionen der Vektoren, durch welche die fehlerhaften Orte der Punkte S' und S mit den wahren Orten verbunden werden, auf die Richtungen von S' und S nach Q in Betracht. Diese Komponenten erhält man aus dem Differentialausdruck des Kotangentensatzes. Ist a das Azimut des Sternes, so besteht, wenn $d\Phi = 0$ angenommen wird, die Beziehung

$$\sin z\, da = \cos q\, dt \sin p - \sin q\, dp.$$

Die rechte Seite ist aber die Projektion des Vektors, der den Ort (t, p) mit dem Ort $(t + dt, p + dp)$ verbindet, auf die Richtung des Sternvertikales; setzt man

$$df = \cos q\, dt \sin p - \sin q\, dp,$$

so ist $(90^0 + df)$ der Abstand des Ortes $(t + dt,\ p + dp)$ vom Pol des Sternvertikales, der im Azimut $90^0 + a$ liegt. Wir scheiden aus df die von den Verbesserungen dU, $d\alpha$ und dp herrührenden Anteile aus und setzen

$$df_U = \cos q\, dU \sin p$$
$$df^* = \cos q\, d\alpha \sin p + \sin q\, dp;$$

es wird dann

$$\sin z\, da - \cos q\, du \sin p = df_U - df^* \equiv df.$$

Für den Polarstern hat man die analoge Gleichung

$$\sin z'\, da' - \cos q'\, du \sin p' = df_{U'} - df'^* \equiv df'.$$

Führt man da und da' auf die Verbesserung des gemeinsamen Instrumentenazimutes zurück und eliminiert dann diese Verbesserung aus den beiden Gleichungen, so erhält man die Verbesserung du als Funktion der beiden Verbesserungen df und df'.

Wirft man nun aber die Verbesserungen df und df' auf die Abstände SQ und $S'Q$, so hat man im Ausdruck

$$u = (\alpha - U) + (x - m) + \Delta t$$

nur Δt als fehlerhaft anzusehen; es wird also

$$du = \frac{\partial\,(\Delta t)}{\partial f}\, df + \frac{\partial\,(\Delta t)}{\partial \bar{f}}\, d\bar{f};$$

hierin ist $d\bar{f} = - df'$ zu setzen, da $90^0 + \bar{f}$ den Abstand des Punktes S' vom Pol des Vertikales oder Achsenäquators im Azimut $a' - 90^0$ bezeichnet.

Um die Ableitungen von Δt nach f und $\bar{f}$ bilden zu können, ist Δt als Funktion von f und $\bar{f}$ anzugeben. Aus der Superposition der Werte, die Δt annimmt, wenn entweder S' im Abstand $\bar{f}$ oder S im Abstand f vom Achsenäquator angenommen wird, folgt

$$\Delta t = -\left(i + \frac{\bar{f}\sin z + f\sin z'}{\sin(z+z')}\right)\sec k_0 \operatorname{cosec}\Phi,$$

so daß

$$du = \frac{d\bar{f}\sin z + df\sin z'}{\sin(z+z')}\sec k_0 \operatorname{cosec}\Phi$$

wird.

Sind nun m' und m die mittleren Fehler, die den wahren Fehlern $d\bar{f}$ und df entsprechen, so wird der mittlere Fehler m_u, wenn $\sec k_0 = 1 + \cdots$ gesetzt wird, gegeben durch den Ausdruck:

$$m_u^2 = \frac{m'^2\sin^2 z + m^2\sin^2 z'}{\sin^2(z+z')}\operatorname{cosec}^2\Phi.$$

Die mittleren Fehler m' und m sind auf ihre Komponenten zurückzuführen:

$$m'^2 = (m_{U'}^2 + m_{\alpha'}^2)\cos^2 q'\sin^2 p' + \sin^2 q'\, m_{p'}^2\,,$$
$$m^2 = (m_U^2 + m_\alpha^2)\cos^2 q\sin^2 p + \sin^2 q\, m_p^2\,.$$

Beruht die Polarisbeobachtung auf n' Einstellungen, die wir als Durchgangsbeobachtungen ansehen, so ist zu setzen:

$$m_{U'}^2\cos^2 q'\sin^2 p' = \frac{1}{n'}\cos^2 q'\left(a_0'^2\sin^2 p' + \frac{b_0'^2}{V^2}\right),$$
$$m_{\alpha'}^2\cos^2 q'\sin^2 p' + m_{p'}^2\sin^2 q' = m^{*\prime 2}.$$

In der letzten Beziehung ist angenommen, daß dem absoluten Betrage nach $m_{\alpha'}\sin p'$ und $m_{p'}$ gleich groß seien. In der ersten Beziehung darf das erste Glied der Klammer wegen des kleinen Wertes von p' neben dem zweiten Glied vernachlässigt werden, und für $\cos^2 q'$ führen wir den Mittelwert $\frac{1}{2}$ aller möglichen gleichmäßig verteilten Fälle ein; es wird dann

$$m_{U'}^2\cos^2 q'\sin^2 p' = \frac{1}{n'}\,\frac{b_0'^2}{2V^2} = \frac{1}{n'}\,m_0'^2$$

mit

$$m_0'^2 = \frac{b_0'^2}{2V^2}\,,$$

so daß

$$m'^2 = \frac{1}{n'}\,m_0'^2 + m^{*\prime 2}$$

wird.

Ist der Südstern an n Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$m_U^2 \cos^2 q \sin^2 p = \frac{1}{n} \cos^2 q \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right),$$

oder, da wegen der Meridiannähe $\cos^2 q = 1$ gesetzt werden darf:

$$m_U^2 \cos^2 q \sin^2 p = \frac{1}{n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \frac{m_0^2}{n},$$

mit
$$m_0^2 = \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Ferner wird
$$m_\alpha^2 \cos^2 q \sin^2 p + m_p^2 \sin^2 q = m^{*2},$$

und somit
$$m^2 = \frac{m_0^2}{n} + m^{*2}.$$

Somit nimmt der Ausdruck für m_u^2 die Form an:

$$m_u^2 = m'^2 \frac{\sin^2 z + \nu \sin^2 z'}{\sin^2(z + z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

worin zur Abkürzung

$$\nu = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{m_0^2/n + m^{*2}}{m_0'^2/n' + m^{*\prime 2}}$$

gesetzt ist. Kennt der Beobachter die Zahlenwerte der in den mittleren Fehlern m und m' auftretenden Komponenten, so kann er die Zahlen n und n' so wählen, daß

$$\nu = 1,$$

also $m' = m$ ist; es wird dann

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 z'}{\sin^2(z + z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

oder auch, wenn man den Unterschied zwischen z' und Φ vernachlässigt:

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 \Phi}{\sin^2(z + \Phi)} \operatorname{cosec}^2 \Phi. \tag{48}$$

Die Funktion

$$F(z, \Phi) = \frac{\sin^2 z + \sin^2 \Phi}{\sin^2(z + \Phi)}$$

hat einen Minimalwert für den Wert $z = z_0$, der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg}(z_0 + \Phi) = 2 \operatorname{tg} \Phi$$

gegeben wird, und $F(z_0, \Phi)$ nimmt dann den Wert

$$F(z_0, \Phi) = \frac{1 + \sin^2 \Phi}{2}$$

an. Nachstehend sind zusammengehörige Werte von z_0 und $F(z_0, \Phi)$ für verschiedene Werte von Φ angegeben.

Φ	z_0	$F(z_0, \Phi)$
0^0	$0{,}^0 0$	0,50
10	4,0	0,52
20	9,9	0,56
30	13,9	0,62
40	17,2	0,71
50	19,2	0,79
60	19,1	0,88
70	16,1	0,94
80	9,4	0,98
90	0,0	1,00

In mittleren Breiten von $\varphi = 30^0$ bis $\varphi = 70^0$ liegt die günstigste Stelle in der Nähe von 15^0 Zenitdistanz. Geht man, um die Sterne aus einem breiteren Deklinationsbereich auswählen zu können, im Norden von z_0 bis ins Zenit und legt die südliche Grenze des Bereiches in die Zenitdistanz z_u, für welchen Wert $F(z_u, \Phi) = F(0, \Phi)$ wird, so ist z_u bestimmt durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} z_u = \frac{\sin 2\,\Phi}{1 - 2\cos 2\,\Phi} \equiv \operatorname{cotg} \Phi,$$

das heißt $z_u = \varphi$; der Bereich darf dann im Süden des Zenites bis zum Äquator ausgedehnt werden.

An Stationen, deren Breite unterhalb $\varphi = 30^0$ liegt, wird man die Döllenmethode wegen der großen Zenitdistanz des Polarsternes nicht verwenden; sie hat vor der Zeitbestimmung im Meridian den Vorteil, daß das Azimut des Instrumentes nur während der kurzen Dauer der Beobachtung des Polarsternes und des Südsternes als konstant vorausgesetzt werden muß. Der Zeit proportionale Azimutänderungen werden übrigens in weitgehendem Maß unschädlich gemacht, wenn der Polarstern vor und nach dem Umlegen eingestellt wird.

ZAHLENBEISPIEL

Die Schweizerische geodätische Kommission hat im Jahre 1927 den Längenunterschied der Sternwarten in Zürich und Genf bestimmen lassen; zur Ermittlung der Uhrkorrektionen wurde die Döllensche Methode der Zeitbestimmung verwendet (vergleiche Band XXI der Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz). Diesen Beobachtungen entnehmen wir die folgenden Daten:

Ort:	Zürich, $\varphi = 47^0 22' 38{,}''5$.
Datum:	30. August 1927.
Beobachter:	Dr. P. Engi.
Instrument:	Bambergsches Passageninstrument, Vergrößerung 86fach, unpersönliches Mikrometer.

Der bewegliche Faden ist auf den Polarstern je zweimal in beiden Lagen eingestellt worden; es ist

$$\text{zur Uhrzeit } U' = 21^h21^m00^s, \quad \bar{f} = -0{,}^s826, \; z' = 42^0 08{,}'1.$$

Ferner ist

$$U_0 = 21^h21^m34{,}^s732, \; i = +0{,}^s009, \; z = 27^0 54{,}'9$$

Das genäherte Azimut des Instrumentes ist

$$k_0 = -1^0 27'.$$

Hiernach ist

$$\Delta t = -\left(+0{,}^s009 - 0{,}^s826 \frac{0{,}468}{0{,}940}\right) \cdot 1{,}0003 \cdot 1{,}477 = +0{,}^s594.$$

Die Berechnung der Uhrkorrektion ist in der folgenden Tabelle dargestellt. Die Koordinaten des Polarsternes enthalten die Korrektion wegen der täglichen Aberration nicht.

$U' =$	$21^h21^m00^s$	$\cot\delta' \operatorname{tg}\delta \cos(t'-t) = a$	7,46218
$\alpha' =$	1 36 05,^{s}92	$1:(1-a)$	+1261
		$\cot\delta' \operatorname{tg}\delta \sin(t'-t)$	$7{,}783345_n$
$U_0 =$	21 21 34,^{s}732	$\operatorname{tg}\varkappa$	$7{,}784606_n$
$\alpha =$	21 18 44,802	$\cos\varkappa$	-8
$U' - \alpha' =$	19 44 54,^{s}08	$\cot\delta \operatorname{tg}\varphi$	0,487056
$U_0 - \alpha =$	+ 02 49,930	$\sin m$	$8{,}271654_n$
$t' - t =$	19 42 04,150	$\varkappa = -0^0 20' 56{,}''10$	
$\delta' =$	$88^0 54' 40{,}''18$	$m = -1\ 04\ 15{,}71$	
$\delta =$	19 29 41,70	$\varkappa - m = +0\ 43\ 19{,}61$	
$\cot\delta'$ . .	8,278893	$\varkappa - m = +\ 2^m53{,}^s307$	
$\operatorname{tg}\delta$	9,549026	$\Delta t = +\ 0\ 00{,}594$	
$\sin(t'-t)$.	$9{,}955426_n$	$\alpha - U_0 = -\ 2\ 49{,}930$	
$\cot\delta' \operatorname{tg}\delta$.	7,827919	Korrektion wegen täglicher Aberration $= +\ 0\ 00{,}011$	
$\cos(t'-t)$.	9,63426	$u = +\ 0^m03{,}^s982$	

c) Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch den ersten Vertikal[6])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Es seien U_w und U_e die Uhrzeiten des Durchganges zweier Sterne durch den mittleren Achsenäquator, von denen der eine im Westen, der andere im Osten beobachtet worden ist. Wir nehmen die Absolutwerte der Stundenwinkel und setzen

$$t_w = (U_w + u) - \alpha_w,$$
$$t_e = \alpha_e - (U_e + u).$$

Der nördliche Pol Q des mittleren Achsenäquators habe den Stundenwinkel $180^0 + \mu_N$ und die Poldistanz ν. Der größte Kreis, der Q mit dem Pol des Äquators verbindet, schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z'; es