

5. *Die Beobachtung von Sternen in beliebigen Zenitdistanzen.* Sind die Deklinationen der Sterne sehr verschieden, so müssen die Vorschriften der Ausgleichungsrechnung zur Ermittlung der Unbekannten angewendet werden. Die Fehlergleichungen lauten:

$$u + k \frac{\sin z}{\sin p} = l + \lambda;$$

die Gewichte  $g$  der Beobachtungsgrößen

$$l = \alpha - \left( U + i \frac{\cos z}{\sin p} \right)$$

sind umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler von  $l$  anzusetzen:

$$g = \frac{\text{const}}{m_l^2}.$$

Sieht man vom Fehler der Neigungskorrektur ab, so ist

$$m_l^2 = m_\alpha^{*2} + m_U^2.$$

Hierin ist

$$m_\alpha^{*2} = m^{*2} \operatorname{cosec}^2 p$$

und

$$m_U^2 = \frac{1}{2n} \left( a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) \operatorname{cosec}^2 p.$$

Werden die Sterne an so viel Fäden oder Kontakten beobachtet, daß

$$\frac{1}{2n} \left( a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{2V^2} \right) = \text{const} \quad (\text{a})$$

ist, so wird

$$g = \text{const} \cdot \sin^2 p.$$

Die auf gleiches Gewicht reduzierten Fehlergleichungen lauten dann mit  $g = \sin^2 p$ :

$$u \sin p + k \sin z = l' + \lambda', \quad (\text{b})$$

mit

$$l' = (\alpha - U) \sin p - i \cos z.$$

Bei der Durchführung der Beobachtungen wählt man in der Regel die Zahl der Fäden oder Kontakte nicht entsprechend der Bedingung (a), sondern beobachtet alle Sterne an gleich viel Fäden oder Kontakten. Legt man dann trotzdem der Ausgleichung die Fehlergleichungen (b) zugrunde, so wird man nicht die besten Werte der Unbekannten erhalten. Da aber der Ansatz  $g = \sin^2 p$  eine gute Annäherung an die wahren Gewichte ist, so ist der dabei begangene Fehler unerheblich.

6) *Der Einfluß einer seitlichen Refraktion auf Uhrkorrektur und Azimut.* Wir nehmen eine seitliche Refraktion an, durch welche die beiden Sterne oder die beiden Sterngruppen in der Richtung senkrecht zum Instrumentenvertikal

um den Betrag  $dr$  respektive  $dr'$  verschoben werden; die Abstände der wahren Örter vom westlichen Pol des Instrumentenvertikales seien  $90^\circ + dr$  respektive  $90^\circ + dr'$  im Moment des Durchganges durch den Instrumentenvertikal. Von den Koordinaten  $k$  und  $i$  dieses Poles sollen die Koordinaten des Poles des größten Kreises, der die wahren Örter verbindet, um  $dk$  und um  $di$  abweichen; es ist dann

$$dr = dk \sin z + di \cos z,$$

$$dr' = dk \sin z' + di \cos z';$$

durch Auflösung nach  $dk$  und  $di$  erhält man:

$$dk \sin(z - z') = dr \cos z' - dr' \cos z,$$

$$di \sin(z - z') = -dr \sin z' + dr' \sin z.$$

Die Zenitdistanzen sind hierin nach Süden positiv zu nehmen.

Den wahren Wert  $u$  der Uhrkorrektion und das Azimut  $90^\circ - (k + dk)$  des Poles des die wahren Örter verbindenden größten Kreises erhält man aus den beiden Beziehungen:

$$u + (k + dk) \sin z \operatorname{cosec} p + (i + di) \cos z \operatorname{cosec} p = l,$$

$$u + (k + dk) \sin z' \operatorname{cosec} p' + (i + di) \cos z' \operatorname{cosec} p' = l';$$

sie führen zu folgenden Werten:

$$u = \frac{l' \sin p' \sin z - l \sin p \sin z'}{\sin(z - z') \sin \Phi} - \frac{i + di}{\sin \Phi},$$

$$k + dk = \frac{-l' \sin p' \sin p + l \sin p \sin p'}{\sin(p - p') \sin \Phi} + \frac{i + di}{\operatorname{tg} \Phi}.$$

Sind nun  $u_0$  und  $k_0$  die Werte, in welche  $u$  und  $k + dk$  übergehen, wenn in diesen Beziehungen  $di$  gleich null gesetzt wird, so erhält man für die Differenzen  $u - u_0$  und  $k - k_0$  die folgenden Werte:

$$u - u_0 = -di \operatorname{cosec} \Phi = (dr \sin z' - dr' \sin z) \operatorname{cosec} \Phi \operatorname{cosec} (z - z'),$$

$$k - k_0 = -dk + di \cotg \Phi = -(dr \sin p' - dr' \sin p) \operatorname{cosec} \Phi \operatorname{cosec} (p - p').$$

Diese Ausdrücke geben die Beträge an, um welche die Uhrkorrektion und das Azimut durch die seitliche Refraktion verfälscht werden. Im speziellen Fall der Kombination einer Zenitsterngruppe mit einer Polsterngruppe hat man zu setzen:

$$z = 0, \quad p = \Phi; \quad z' = -\Phi, \quad p' = 0,$$

so daß

$$u - u_0 = -dr \operatorname{cosec} \Phi,$$

$$k - k_0 = +dr' \operatorname{cosec} \Phi$$

wird. Die Uhrkorrektion wird dann nur durch die Zenitstörung, das Azimut nur durch die in der Richtung nach dem Pol vorhandene seitliche Refraktion verfälscht. Man darf diese Fehlerquelle nicht unterschätzen, wenn auch die

seitliche Refraktion nur unter besonders ungünstigen atmosphärischen und topographischen Verhältnissen den Betrag von rund einer Bogensekunde annehmen wird <sup>3c</sup>).

#### ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen.  
 Instrument: Bambergisches Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer; Vergrößerung 86fach.  
 Beobachter: Dr. J. O. FLECKENSTEIN.  
 Datum: 1941, 20. Juni.

Die Beobachtungsdaten sind in Tabelle 1 zusammengestellt; sie enthält die Mittel  $\bar{U}$  der vor und nach dem Umlegen an denselben Kontakten beobachteten Uhrzeiten, die scheinbaren Rektaszensionen der Sterne, an welchen die tägliche Aberration angebracht ist, ferner die zur Reduktion notwendigen Werte von  $\sin z$ ,  $\cos z$  und  $\sin p$ .

Nach dem Umlegen ist das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild der Südsterne beobachtet worden, während beim Durchgang des Polsternes sowohl vor als nach dem Umlegen je das direkte und das reflektierte Bild beobachtet wurde. In der Kolonne «Okular» geben die Buchstaben «d» und «r» an, ob das direkte oder das reflektierte Bild zur Beobachtung gekommen ist.  $N$  ist die Zahl der vor und nach dem Umlegen beobachteten Kontaktzeiten.

Tabelle 1

| Stern             | Okular | $\bar{U}$                                            | $\alpha$                             | $\sin z$ | $\cos z$ | $\sin p$           | $N$ |
|-------------------|--------|------------------------------------------------------|--------------------------------------|----------|----------|--------------------|-----|
| $\epsilon$ Serp   | Wd-Er  | 15 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 21 <sup>s</sup> .626 | 47 <sup>m</sup> 54 <sup>s</sup> .814 | 0,681    | 0,733    | 0,997              | 11  |
| $\delta$ Oph      | Ed-Wr  | 16 12 44,578                                         | 11 17,697                            | ,778     | ,628     | ,998               | 11  |
| $\epsilon$ Oph    | Wd-Er  | 16 41,218                                            | 15 14,473                            | ,789     | ,614     | ,997               | 11  |
| $\lambda$ Oph     | Ed-Wr  | 29 25,612                                            | 27 58,727                            | ,712     | ,702     | ,999               | 11  |
| $\epsilon$ Urs mi | Wd-Ed  | 53 31,995                                            | 52 01,746                            | -0,568   | ,823     | ,136 <sub>72</sub> | 22  |
|                   | Wr-Er  | 53 33,035                                            |                                      |          |          |                    |     |

Im Mittel der Uhrzeiten eines Sternes, der vor und nach dem Umlegen in der gleichen Zenitdistanz beobachtet wird, hebt sich der Einfluß der Kollimation, auch wenn sich diese mit der Zenitdistanz ändert. Eine solche Veränderlichkeit hat man aber bei der Verwendung eines gebrochenen Fernrohres anzunehmen als Folge einer Durchbiegung der Achse. Fällt die Visierlinie im Horizont mit der Umdrehungsachse zusammen, so hat die Kollimation im Zenit, wenn die Achse nach unten durchgebogen ist, den Wert  $-c$  und im Nadir den Wert  $+c$ , in der Zenitdistanz  $z$  den Wert

$$-c \cos z.$$

Der Stern wird also bei Ok Wd-Er um den Betrag

$$c \cos z \operatorname{cosec} p$$

zu spät beobachtet, dagegen bei Ok Ed-Wr um den gleichen Betrag zu früh. Die Korrektur, die wegen dieser Verfrühung oder Verspätung an der Uhrzeit  $\bar{U}$  anzubringen ist, kann mit der Korrektur wegen der mittleren Neigung der Achse vereinigt werden; denn diese beträgt, wenn  $\kappa$  die Zapfenungleichheit ist, die positiv zu nehmen ist, wenn der Okularzapfen der dickere ist:

$$\pm \kappa \cos z \operatorname{cosec} p \begin{cases} \text{Ok Wd-Er} \\ \text{Ok Ed-Wr} \end{cases}.$$

Setzt man also

$$\kappa_0 = \kappa - c,$$

so wird durch die Korrektur

$$\pm \kappa_0 \cos z \operatorname{cosec} p \left\{ \begin{array}{l} \text{Ok Wd-Er} \\ \text{Ok Ed-Wr} \end{array} \right\}$$

sowohl der mittleren Achsenneigung als der Biegunskollimation Rechnung getragen.

Die mittlere Durchgangszeit des Polsternes bedarf keiner Korrektur.

Die Konstante  $\kappa_0$  läßt sich aus den Beobachtungen des Polsternes ableiten. Sind  $U'_d$  und  $U''_d$  die mittleren Uhrzeiten, zu welchen sich der Stern vor und nach dem Umlegen im Abstand  $F_d + c_0$  vom Achsenäquator bei der Beobachtung des direkten Bildes befunden hat, und sind  $U'_r$ ,  $U''_r$  und  $F_r + c_0$  die entsprechenden Größen bei der Beobachtung des reflektierten Bildes und setzt man zur Abkürzung

$$\Delta U_d = \frac{1}{2} (U''_d - U'_d) \sin p - F_d,$$

$$\Delta U_r = \frac{1}{2} (U''_r - U'_r) \sin p - F_r,$$

so wird

$$\kappa_0 = \frac{1}{2} (\Delta U_d - \Delta U_r) \sec z.$$

Wird vor und nach dem Umlegen je zuerst das direkte und dann das reflektierte Bild beobachtet, so läßt sich die Konstante  $\kappa_0$  ohne Kenntnis des Schraubenwertes ermitteln. Ist bei der Okularfolge W-E

$\bar{U}_{dr}$  das Mittel der bei Ok Wd und Ok Er und

$\bar{U}_{rd}$  das Mittel der bei Ok Wr und Ok Ed

beobachteten Uhrzeiten, so wird  $\kappa_0$  aus der Beziehung

$$\kappa_0 = \frac{1}{2} (\bar{U}_{rd} - \bar{U}_{dr}) \frac{\sin p}{\cos z}$$

erhalten. Bei der Okularfolge E-W ist das Zeichen umzukehren.

Die Beobachtung des Polsternes hat am 20. Juni 1941 die nachstehend zusammengestellten Daten ergeben. Die Abstände  $F_d$  und  $F_r$  beziehen wir auf die mittlere Revolution der Schraube; die Kollimation  $c_0$  des Fadens bei dieser Stellung hebt sich bei der Differenzbildung. Es ist

$$\left. \begin{array}{l} F_d = 3^R,5 \\ F_r = 1,3 \end{array} \right\} 1 R = 10^8,540.$$

|                                                                                                                                       | $F_d = 3^R,5$                                       | $F_r = 1^R,3$                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $U'$                                                                                                                                  | 16 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 03 <sup>s</sup> 754 | 51 <sup>m</sup> 54 <sup>s</sup> 990 |
| $U''$                                                                                                                                 | 58 00,236                                           | 55 11,080                           |
| $\bar{U}$                                                                                                                             | 53 31,995                                           | 53 33,035                           |
| $\frac{1}{2} (U'' - U')$                                                                                                              | 268 <sup>s</sup> 241                                | 98 <sup>s</sup> 045                 |
| $\frac{1}{2} (U'' - U') \sin p$                                                                                                       | 36,675                                              | 13,405                              |
| $F$                                                                                                                                   | 36,890                                              | 13,702                              |
| $\Delta U$                                                                                                                            | - 0,215                                             | - 0,297                             |
| $\left. \begin{array}{l} \Delta U_d - \Delta U_r = + 0^s,082 \\ \frac{1}{2} \sec z = 0,608 \end{array} \right\} \kappa_0 = + 0^s,050$ |                                                     |                                     |

Im Mittel aus zehn solchen Bestimmungen hat sich als Wert der Instrumentalkonstanten  $\kappa_0$  ergeben:

$$\kappa_0 = 0^{\circ}055.$$

Dieser Wert ist zur Reduktion der Beobachtungen, die in Tabelle 2 gegeben wird, verwendet worden. Die halbe Summe  $b$  von Kontaktbreite und totem Gang beträgt  $0^{\circ}047$ . Ferner sind Näherungswerte  $u_0$  der Uhrkorrektion und  $k_0$  des Azimutes eingeführt worden; es wurde gesetzt:

$$u = -1^{\text{m}}27^{\text{s}}500 + du$$

und

$$k = +1^{\circ}000 + dk.$$

Tabelle 2

| Stern             | $\frac{b}{\sin p}$ | $\pm \kappa_0 \frac{\cos z}{\sin p}$ | $k_0 \frac{\sin z}{\sin p}$ | Summe<br>der<br>Korrektion | $\alpha - \bar{U} - u_0$ | $\frac{du + dk}{\sin p} \frac{\sin z}{\sin p}$ | $\lambda$        |
|-------------------|--------------------|--------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------------------------------|------------------|
| $\epsilon$ Serp   | $+ 0^{\circ}047$   | $+ 0^{\circ}040$                     | $+ 0^{\circ}683$            | $+ 0^{\circ}770$           | $+ 0^{\circ}688$         | $- 0^{\circ}082$                               | $- 0^{\circ}029$ |
| $\delta$ Oph      | $+ 0,047$          | $- 0,035$                            | $+ 0,780$                   | $+ 0,792$                  | $+ 0,619$                | $- 0,173$                                      | $+ 0,048$        |
| $\epsilon$ Oph    | $+ 0,047$          | $+ 0,034$                            | $+ 0,791$                   | $+ 0,872$                  | $+ 0,755$                | $- 0,117$                                      | $- 0,009$        |
| $\lambda$ Oph     | $+ 0,047$          | $- 0,039$                            | $+ 0,713$                   | $+ 0,721$                  | $+ 0,615$                | $- 0,106$                                      | $- 0,010$        |
| $\epsilon$ Urs mi | $+ 0,334$          | —                                    | $- 4,153$                   | $- 3,819$                  | $- 3,269$                | $+ 0,550$                                      | —                |

Da die Deklinationen der Südsterne in einem engen Bereich liegen, dürfen ihre Fehlergleichungen zu einem Mittel zusammengezogen werden; es stehen dann die beiden folgenden Gleichungen zur Ermittlung der beiden Unbekannten  $du$  und  $dk$  zur Verfügung:

$$\text{Südsterne: } du + 0,742 dk = - 0^{\circ}120,$$

$$\text{Polsterne: } du - 4,153 dk = + 0,550;$$

sie führen zu folgenden Werten der Unbekannten:

$$du = - 0^{\circ}018, \quad dk = - 0^{\circ}137$$

und zu den in der Tabelle angegebenen scheinbaren Fehlern  $\lambda$ .

Die mittleren Fehler der Unbekannten berechnen wir mit Hilfe der Beziehungen (43a), Seite 87:

$$m_u^2 = m^2 F(z, z'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

$$m_k^2 = m^2 F(p, p'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

worin  $F$  dieselbe Funktion zweier Variablen  $v, v'$  bedeutet:

$$F = \left( \frac{1}{n'} \sin^2 v + \frac{1}{n} \sin^2 v' \right) \operatorname{cosec}^2 (v - v').$$

Es ist

$$F(z, z'; n, n') = 0,475,$$

$$F(p, p'; n, n') = 1,016.$$

Für  $m$ , das ist der mittlere Fehler von  $\bar{U} \sin p$ , führen wir den aus der Quadratsumme

$$[\lambda\lambda] = 0,003326 \sim [\lambda \sin p]^2$$

folgenden Wert ein:

$$m^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{5-2} = 0,001109;$$

da wir damit keine Rücksicht darauf nehmen, daß der Polstern an mehr Kon-

takten beobachtet ist als die Südsterne, das heißt an mehr Kontakten als zur Erfüllung der Bedingung

$$m_U' \sin p' = m_U \sin p$$

nötig ist, so erhöhen wir dadurch die beiden Fehlerbeträge. Es wird

$$\begin{aligned} m_u &= \pm 0,023 \operatorname{cosec} \Phi, \\ m_k &= \pm 0,034 \operatorname{cosec} \Phi; \end{aligned}$$

und das Schlußresultat lautet:

$$\begin{aligned} u &= -1^m 27,518 \pm 0,034, \\ k &= +0,863 \pm 0,050. \end{aligned}$$

### b) Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe von Durchgängen durch den Vertikal des Polarsternes (Döllensmethode)<sup>4)</sup>

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Wir nehmen an, der Beobachter habe das Instrument bei der Beobachtung des Südsterne umgelegt und in beiden Lagen den beweglichen Faden auf den Polarstern eingestellt; vor und nach dem Umlegen sei ferner der Stand der Niveaublase abgelesen worden. Es stehen dann folgende Daten zur Ableitung der Uhrkorrektur zur Verfügung:

aus der Polarisbeobachtung die Uhrzeiten  $U'_v$  und  $U'_n$  und die zugehörigen Trommelablesungen  $M_v$  und  $M_n$ ;

aus der Beobachtung des Südsterne die Uhrzeiten  $U_{iv}$  und  $U_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

ferner die Blasenmitten  $n_v$  und  $n_n$ , wobei der Index  $v$  die vor dem Umlegen und der Index  $n$  die nach dem Umlegen beobachteten Werte bezeichnet.

Die aus den Blasenmitten ermittelte Neigung des mittleren Achsenäquators sei  $i$ ; sie werde auf das Westende der Achse bezogen. Ferner sehen wir als bekannt an die Zenitdistanzen  $z$  und  $z'$ ; die Zenitdistanz  $z$  des Südsterne nehmen wir nach Süden positiv, nach Norden negativ, die Zenitdistanz  $z'$  des Polarsternes nach Norden positiv. Der Revolutionswert der Mikrometerschraube sei  $R$ .

Der Abstand des Polarsternes vom westlichen Pol  $Q$  des mittleren Achsenäquators zur Zeit

$$U' = \frac{1}{2} (U'_v + U'_n)$$

sei  $90^\circ + \bar{f}$ . Setzt man

$$m'' = 2 \sin^2 \frac{U'_n - U'_v}{2} / \sin 1''$$

und nimmt das Azimut  $k^*$  des Polarsternes von Norden nach Westen positiv, so ist nach der Beziehung (8b), Seite 38, in Zeitsekunden:

$$\bar{f} = \pm \frac{1}{2} (M_v - M_n) R - \frac{m''}{15} \cos p' \sin k^* \sin \Phi.$$