

Sternpaares, das nach der Zingerschen Methode in der Nähe des ersten Vertikales beobachtet wird, ist gleich groß wie der mittlere Fehler der Uhrkorrektion, die aus der Beobachtung der Meridiandurchgänge zweier Zenitsterne abgeleitet wird, nämlich gleich

$$\frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Diese Feststellung bleibt auch dann zu Recht bestehen, wenn man in Berücksichtigung zieht, daß man an den beobachteten Durchgangszeiten eine Neigungskorrektur anbringen muß, in der Zingerschen Methode wegen der Ungleichheit der Zenitdistanz im Osten und Westen, in der Meridianmethode wegen der Neigung der horizontalen Achse; diese Neigungskorrekturen lassen sich in beiden Verfahren mit derselben Genauigkeit bestimmen.

Nun kann man in der Meridianmethode die Benützung eines Niveaus und damit die Anbringung einer Neigungskorrektur überflüssig machen dadurch, daß man vor dem Umlegen das direkte Bild des Sternes und nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild beobachtet. Da dieses Verfahren aber erst von etwa 30° Zenitdistanz an angewendet werden kann, ist es nicht möglich, die mit der Beobachtung in größeren Zenitdistanzen verbundene Beeinträchtigung der Genauigkeit durch dieses Mittel wieder gutzumachen. Es ist deshalb die Zingersche Methode als dasjenige Beobachtungsverfahren anzusehen, das die Uhrkorrektur *ceteris paribus* am genauesten liefert, genauer als die Meridianmethode und als die mit dieser gleichzustellende Döllensmethode.

4. *Die Beobachtung von Sterngruppen.* Wenn man die Genauigkeit der Uhrkorrektur durch Wiederholung der Durchgangsbeobachtungen steigern will und auf die Kenntnis des Azimutes nur insofern Wert legt, als dadurch die Unveränderlichkeit der Instrumentenaufstellung während der Dauer der Beobachtungen kontrolliert werden soll, so beobachtet man neben einem Nordstern mehrere Südsterne. Man hat in diesem Fall empfohlen, die Südsterne zu beiden Seiten des Zenites so zu wählen, daß die Summe der Azimutkoeffizienten $\sin z \operatorname{cosec} p$ annähernd gleich null wird, weil dadurch «die aus der ungenauen Kenntnis des Azimutes hervorgehenden Fehler auf ein möglichst geringes Maß herabgemindert» werden*). Von anderer Seite ist einer solchen Zenitsterngruppe außerdem die Eigenschaft zugesprochen worden, eine «stabile» Lösung zu liefern, das heißt, es soll die Genauigkeit am wenigsten beeinträchtigt werden, wenn infolge des Ausfalles eines Sternes die Bedingung «Summe der Azimutkoeffizienten gleich Null» nicht mehr genau eingehalten wird**) ^{3b}).

*) TH. ALBRECHT, Formeln und Hilfstafeln, 4. Auflage. S. 106.

**) N. E. NÖRLUND, Astronomical Longitude and Azimuth Determinations, Monthly Notices, Vol. 97, Nr. 7, S. 496–497 (1937).

Um diese Ansichten zu prüfen, nehmen wir eine Gruppe von n Südsternen und eine Gruppe von n' Nordsternen an. Die Poldistanzen sollen so wenig streuen, daß man in jeder Gruppe das arithmetische Mittel der Fehlergleichungen bilden darf und nicht genötigt ist, die Unbekannten nach den strengen Vorschriften der Ausgleichungsrechnung zu ermitteln. Die Größen l und l' in den Gleichungen (41) sind dann das Mittel aus n respektive n' Einzelwerten. Die mittleren Fehler der Uhrkorrektur und des Azimutes werden also durch die folgenden Beziehungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} m_u^2 &= m^2 \left(\frac{1}{n'} \sin^2 z + \frac{1}{n} \sin^2 z' \right) \cdot \operatorname{cosec}^2 \Phi \operatorname{cosec}^2 (z - z'), \\ m_k^2 &= m^2 \left(\frac{1}{n'} \sin^2 p + \frac{1}{n} \sin^2 p' \right) \cdot \operatorname{cosec}^2 \Phi \operatorname{cosec}^2 (p - p'), \end{aligned} \right\} \quad (43a)$$

oder durch

$$\left. \begin{aligned} m_u^2 &= m^2 F(z, z'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi, \\ m_k^2 &= m^2 F(p, p'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (43b)$$

wenn $F(v, v'; n, n')$ die folgende Funktion der beiden Variablen v und v' und der Parameter n und n' bezeichnet:

$$F(v, v'; n, n') = \left(\frac{1}{n'} \sin^2 v + \frac{1}{n} \sin^2 v' \right) \operatorname{cosec}^2 (v - v').$$

Die Funktion F nimmt in speziellen Fällen folgende Werte an:

1. Wenn $v - v' = 90^\circ$, ist

$$F(v, v - 90^\circ; n, n') = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n - n'}{n'} \sin^2 v \right).$$

Es wird jetzt

$$m_u \neq m_k,$$

ausgenommen wenn $n = n'$ ist.

2. Setzt man $v' = -v$, so wird

$$F(v, -v; n, n') = \frac{n + n'}{4 n n'} \sec^2 v.$$

Läßt man zwei gleich starke Gruppen im Zenit zusammenfallen, so wird mit $n = n'$:

$$\begin{aligned} m_u^2 &= \frac{m^2}{2n} \operatorname{cosec}^2 \Phi, \\ m_k^2 &= \infty. \end{aligned}$$

3. Bei festgehaltenem Wert von v' nimmt F einen Minimalwert an für einen Wert $v = v_0$, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} v_0 = - \frac{n' \operatorname{tg} v'}{n + (n + n') \operatorname{tg}^2 v'}$$

oder durch die gleichwertige Beziehung

$$\operatorname{tg}(v_0 - v') = -\frac{n + n'}{n} \operatorname{tg} v'$$

gegeben wird. Es wird dann

$$F(v_0, v'; n, n') = \frac{n + n' \sin^2 v'}{n(n + n')}.$$

Nachstehend sind für die Annahmen $n = 4$, $n' = 1$ die den Werten $v' = z'$ entsprechenden Werte von $v_0 = z_0$ sowie die Funktionswerte $F(z_0, z'; n, n')$ angegeben:

z'	0°	-10°	-20°	-30°	-40°	$-41^\circ 8'$	-50°	-60°	-70°	-80°	-90°
z_0 $F(z_0, z'; 4, 1)$	0° 1,00	$2^\circ 4'$ 1,01	$4^\circ 3'$ 1,03	$5^\circ 8'$ 1,06	$6^\circ 4'$ 1,11	$6^\circ 4'$ 1,11	$6^\circ 2'$ 1,14	$5^\circ 2'$ 1,19	$3^\circ 6'$ 1,22	$2^\circ 8'$ 1,24	0° 1,25

Den größten Wert nimmt z_0 an für einen Wert von z' , der durch die Bedingung

$$\frac{\partial \operatorname{tg} z_0}{\partial z'} = 0$$

gegeben wird; der diese Bedingung erfüllende Wert $z' = z'_0$ wird durch die Beziehung

$$\sin^2 z'_0 = \frac{n}{2n + n'}$$

gegeben. Für $n = 4$, $n' = 1$ wird $\sin z' = -\frac{2}{3}$ und $z' = -41^\circ 8'$.

4. Für $v = 0$ erhält man

$$F(0, v'; n, n') = \frac{1}{n}.$$

Im Fall der Beobachtung einer Zenitsterngruppe wird also ($z = 0$, $p = \Phi$):

$$m_u^2 = \frac{m^2}{n} \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

$$m_k^2 = m^2 \frac{n \sin^2 \Phi + n' \sin^2 p'}{n n' \sin^2 (\Phi - p')} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Im speziellen Fall, wo die Polsterngruppe um den Pol des Äquators streut, ist

$$m_k^2 = \frac{m^2}{n'} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Man erhält das Azimut aber genauer, wenn man die Nordsterngruppe nicht um den Wert $p' = 0$ streuen läßt, sondern um den Wert $p' = p'_0$, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{n \operatorname{tg} p}{n' + (n + n') \operatorname{tg}^2 p}$$

gegeben wird. Da die Poldistanz der Zenitsterngruppe gleich Φ zu setzen ist,

wird

$$\operatorname{tg} p'_0 = - \frac{n \operatorname{tg} \Phi}{n' + (n + n') \operatorname{tg}^2 \Phi}$$

oder

$$\operatorname{tg} (p'_0 - \Phi) = - \frac{n' + n}{n'} \operatorname{tg} \Phi.$$

Da die Funktion F für $p' = p'_0$ den Wert

$$F(p, p'_0; n, n') = \frac{n' + n \sin^2 p}{n'(n + n')}$$

annimmt, wird

$$F(\Phi, p'_0; n, n') = \frac{n' + n \sin^2 \Phi}{n'(n + n')}$$

und

$$m_k^2 = \frac{m^2}{n'} \cdot \frac{n' + n \sin^2 \Phi}{n + n'} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Da aber

$$\frac{n' + n \sin^2 \Phi}{n + n'} < 1$$

ist, ist m_k^2 bei der Wahl $p' = p'_0$ kleiner als bei der Wahl $p' = 0$. Im speziellen Fall $\Phi = 45^\circ$, $n = 4$, $n' = 1$ ist

$$p'_0 = - 33^\circ 7,$$

$$m_k^2 = \frac{3}{5} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Zusammenfassend ergibt sich somit:

Wird die Südsternguppe in die durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} (z_0 - z') = - \frac{n' + n}{n} \operatorname{tg} z'$$

gegebene Zenitdistanz z_0 gelegt, so fällt der mittlere Fehler der Uhrkorrektion kleiner aus als bei der Wahl einer Zenitsternguppe.

Wird die Südsternguppe auf das Zenit gelegt, so wird der mittlere Fehler des Azimutes kleiner, wenn die Nordsternguppe um den Wert $p' = p'_0$ streut, der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} (p'_0 - \Phi) = - \frac{n' + n}{n'} \operatorname{tg} \Phi$$

gegeben wird, als wenn sie um den Pol des Äquators streut.

Die Ansicht, daß der mittlere Fehler der Uhrkorrektion durch den Ausfall eines Sternes in der Zenitsternguppe weniger vergrößert werde, als wenn ein Stern in einer um z_0 vom Zenit entfernten Gruppe verlorengelht, bedarf kaum einer ausführlichen Widerlegung; es genügt, darauf hinzuweisen, daß die mittlere Zenitdistanz einer Zenitsternguppe sich dem günstigsten Wert z_0 nähert oder sich von ihm entfernt, je nachdem ein nördlich oder südlich des Zenites kulminierender Stern der Zenitgruppe ausfällt. Der mittlere Fehler einer unvollständigen Zenitsternguppe, deren mittlere Zenitdistanz sich wegen des Ausfalles eines Sternes der günstigsten Zenitdistanz z_0 genähert hat, bleibt aber größer als der mittlere Fehler einer Gruppe, die ursprünglich um z_0 gestreut hat und durch einen Sternausfall unvollständig geworden ist, weil der mittlere Fehler dieser Gruppe ein Extremwert ist.