

In diesem Fall läßt sich wohl die Uhrkorrektur u , nicht aber das Instrumentenazimut k , das mit $z = 0$ in den Gleichungen (40a) und (40b) verschwindet, bestimmen.

Wählt man zwei Sterne, die symmetrisch zum Pol des Äquators in Kulmination kommen, so ist $p' = -p$, also

$$u \sin p + k \sin z = l \sin p - i \cos z$$

und

$$-u \sin p + k \sin z' = -l' \sin p - i \cos z'.$$

Läßt man p gegen Null gehen, so daß $z = -\Phi = z'$ wird, so geben beide Gleichungen

$$k = i \cotg \Phi.$$

Diese Beziehung sagt aus: Wenn der Achsenäquator durch den Pol P geht, so ist das Azimut k des Instrumentenvertikals gleich $i \cotg \Phi$.

2. Die mittleren Fehler der beiden Unbekannten und die günstigsten Umstände der Beobachtung^{3a}). Wir sehen vom Einfluß, den ein Fehler der Neigung i ausübt, ab und betrachten nur den Einfluß der zufälligen Fehler, mit welchen die Größen l und l' behaftet sind. Da in

$$l = \alpha - U$$

α und U voneinander unabhängige Größen sind, steht der mittlere Fehler m_l zu den mittleren Fehlern m_α und m_U in der Beziehung

$$m_l^2 = m_\alpha^2 + m_U^2,$$

und der mittlere Fehler von $l \sin p$ wird somit gegeben durch:

$$(m_l \sin p)^2 = m_\alpha^2 \sin^2 p + m_U^2 \sin^2 p.$$

Hierin ist

$$m_\alpha \sin p = m^*,$$

und $m_U \sin p$ wird, wenn U auf insgesamt $2n$ Faden- oder Kontaktbeobachtungen beruht, gegeben durch

$$m_U^2 \sin^2 p = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Da für den zweiten Stern die Beziehung

$$m_U^2 \sin^2 p' = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

anzusetzen ist, ist im allgemeinen

$$m_U \sin p \neq m_U \sin p'.$$

Diese beiden Fehlerbeträge werden aber einander gleich, wenn die Zahl der Faden- oder Kontaktbeobachtungen so gewählt wird, daß

$$\frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \frac{1}{2n'} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \text{konstans} = m_0^2$$

ist. Als konstanter Wert kann zum Beispiel der Wert m_0^2 genommen werden, den der Klammerausdruck im Falle $p = 90^\circ$ annimmt; es ist dann

$$2n = \frac{1}{m_0^2} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

und

$$2n' = \frac{1}{m_0^2} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Unter dieser Voraussetzung wird dann, wenn man zur Abkürzung

$$m^2 = m^{*2} + m_0^2$$

setzt:

$$m_i^2 \sin^2 p = m_i^2 \sin^2 p' = m^2.$$

Die mittleren Fehler m_u und m_k werden dann durch die Beziehungen

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 z'}{\sin^2 (z - z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi \quad (42a)$$

und

$$m_k^2 = m^2 \frac{\sin^2 p + \sin^2 p'}{\sin^2 (p - p')} \operatorname{cosec}^2 \Phi \quad (42b)$$

gegeben. Es ist somit der mittlere Fehler der Uhrkorrektur in derselben Weise funktional abhängig von den Zenitdistanzen wie der mittlere Fehler des Azimutes von den Poldistanzen der Sterne. Definiert man die Funktion F der beiden Variablen v und v' durch die Gleichung

$$F(v, v') = \frac{\sin^2 v + \sin^2 v'}{\sin^2 (v - v')},$$

so kommt diese Gleichheit der funktionalen Abhängigkeit in den folgenden Formen zum Ausdruck:

$$\begin{aligned} m_u^2 &= F(z, z') \cdot m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi, \\ m_k^2 &= F(p, p') \cdot m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi. \end{aligned}$$

Die Funktion F hat folgende Eigenschaften:

1. Setzt man $v' = v$ oder $v' = 180^\circ - v$, das heißt, läßt man die beiden Sterne zusammenfallen oder gehen sie an diametralen Stellen durch den Meridian, so ist

$$m_u = m_k = \pm \infty.$$

2. Wählt man die Sterne so, daß $v - v' = 90^\circ$ wird, das heißt so, daß sie den Meridian im Abstand von 90° passieren, so wird

$$F(v, v' = v - 90^\circ) = 1$$

und

$$m_u = m_k = \pm m \operatorname{cosec} \Phi.$$

Es wird also die Uhrkorrektur und das Azimut mit der gleichen Genauigkeit bestimmt.

3. Setzt man $v' = -v$, so gehen die beiden Sterne entweder symmetrisch zum Zenit oder symmetrisch zum Pol des Äquators durch den Meridian. Es ist dann

$$v - v' = 2v$$

und somit

$$F(v, -v) = \frac{1}{2} \sec^2 v.$$

Läßt man nun v gleich Null werden, so ist

$$F(v = 0, -v = 0) = \frac{1}{2},$$

und somit, wenn man die Variablen v mit den Zenitdistanzen identifiziert:

$$m_u^2 = \frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

$$m_k^2 = \infty.$$

Identifiziert man sie mit den Poldistanzen, so ist

$$m_u^2 = \infty,$$

$$m_k^2 = \frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Im ersten Fall läßt sich nur die Uhrkorrektur und im zweiten Fall nur das Azimut bestimmen.

4. Die Funktion F nimmt bei festgehaltenem Wert von v' einen Minimalwert an für einen Wert von $v = v_0$, der durch die Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

bestimmt ist. Aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin^2 (v - v') \frac{\partial F}{\partial v} &= \sin^2 (v - v') \sin v \cos v \\ &- (\sin^2 v + \sin^2 v') \sin (v - v') \cos (v - v') = 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\operatorname{tg} v_0 = - \frac{\operatorname{tg} v'}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 v'},$$

was sich in die Form

$$\operatorname{tg} (v_0 - v') = - 2 \operatorname{tg} v'$$

bringen läßt. Die Funktion F nimmt dann den Wert

$$F(v_0, v') = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 v')$$

an. Setzt man

$$\frac{\partial \operatorname{tg} v_0}{\partial v'} = 0,$$

so genügt dieser Bedingung der Wert $v' = v'_0$, der durch die Beziehung

$$\sin^2 v_0 = \frac{1}{3}, \quad v'_0 = -35^\circ 3'$$

gegeben wird. Es wird dann

$$F(v_0, v'_0) = \frac{2}{3}.$$

Verschiedenen Werten von $z' = v'$ sind hiernach die folgenden Werte von $z_0 = v_0$ und von $F(z_0, z')$ zuzuordnen:

z'	0°	-10°	-20°	-30°	$-35^\circ 3'$	-40°	-50°	-60°	-70°	-80°	-90°
z_0	$0^\circ 0'$	$+9^\circ 4'$	$+16^\circ 1'$	$+19^\circ 1'$	$+19^\circ 5'$	$+19^\circ 2'$	$+17^\circ 2'$	$+13^\circ 9'$	$+9^\circ 7'$	$+5^\circ 0'$	$0^\circ 0'$
$F(z_0, z')$	0,50	0,52	0,56	0,62	0,67	0,71	0,79	0,88	0,94	0,98	1,00

5. Setzt man $v = 0$, so wird

$$F(0, v') = 1.$$

Identifiziert man v mit der Zenitdistanz, so daß der eine Stern im Zenit beobachtet wird, so wird

$$m_u^2 = m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Man kann dann die Frage stellen, wo nun der zweite Stern beobachtet werden müsse, wenn das Azimut so genau als möglich bestimmt werden soll. Allgemein folgt der Wert von $p' = p'_0$, der die Funktion F bei einem gegebenen Wert von p zu einem Minimum macht, aus der Bedingung

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{\operatorname{tg} p}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 p}$$

und somit, wenn $p = \Phi$ ist, aus der Bedingung

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{\operatorname{tg} \Phi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \Phi}$$

oder aus

$$\operatorname{tg} (p'_0 - \Phi) = -2 \operatorname{tg} \Phi.$$

Im speziellen Fall $\Phi = 45^\circ$ wird

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad p'_0 = -18^\circ 4'$$

und

$$F(p = \Phi, p'_0 = -18^\circ) = \frac{1 + \sin^2 p}{2} = \frac{3}{4},$$

so daß

$$m_k^2 = \frac{3}{4} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

wird. Der zweite Stern ist also in unterer Kulmination (in der Poldistanz $p' = -18^\circ 4'$) zu beobachten.

3. *Vergleichung der Genauigkeit der Meridianmethode mit der Genauigkeit der Zingerschen Methode^{3c)}*. Der mittlere Fehler der Uhrkorrektur eines