

IV. KAPITEL

Bestimmung der Zeit oder der Polhöhe mit Hilfe von Vertikaldurchgängen

a) Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe der Durchgänge von zwei oder mehr Sternen durch denselben meridiannahen Vertikal (Meridianzeitbestimmung)

1. *Die Reduktionsformeln.* Im Fall der Beobachtungen in unmittelbarer Nähe des Meridians nehmen die Ausdrücke, nach welchen die Durchgangszeiten auf den Achsenäquator und von diesem auf den Instrumentenvertikal zu reduzieren sind, eine einfache Gestalt an. Fällt die Richtung der horizontalen Umdrehungsachse mit der Richtung der Ostwestlinie im Horizont zusammen, so hat man als Stundenwinkel μ des Poles des Achsenäquators und als Poldistanz ν dieses Punktes, ferner als Näherungswert $\bar{t}$ des Stundenwinkels des Sternes und als Größe e die folgenden Werte einzuführen:

	μ	ν	$\bar{t}$	e	q
Obere Kulmination südlich des Zenites . .	90°	90°	0°	+ 1	0°
nördlich des Zenites . .	270°	90°	0°	- 1	180°
Untere Kulmination	270°	90°	180°	+ 1	0°

Die Uhrzeit U des Durchganges durch den Achsenäquator wird somit, wenn U_v und U_n die Uhrzeiten des Durchganges durch denselben Faden oder die Kontaktzeiten vor und nach dem Umlegen sind, sowohl in oberer Kulmination als in unterer Kulmination gleich

$$U = \frac{1}{2} (U_v + U_n) + b \operatorname{cosec} p,$$

worin b die halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang bezeichnet. Nimmt man die Poldistanz des Sternes in oberer Kulmination positiv, in unterer Kulmination negativ, so ist zu setzen

$$U = \frac{1}{2} (U_v + U_n) + e b \operatorname{cosec} p \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{obere Kulmination } e = + 1 \\ \text{untere Kulmination } e = - 1 \end{array} \right\}$$

Nimmt man in der Beziehung, welche die Reduktion der Uhrzeit U auf die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Instrumentenvertikal gibt, das ist

$$U_0 = U + i \cos z \operatorname{cosec} p \sec q,$$

die Neigung i positiv, wenn das Westende der Achse über dem Horizont liegt, und die Poldistanz p in unterer Kulmination negativ, so gilt allgemein

$$U_0 = U + i \cos z \operatorname{cosec} p.$$

Das Azimut des Westendes der Achse sei gleich

$$90^\circ - k.$$

Ist t_0 der Stundenwinkel des Sternes im Instrumentenvertikal, so ist

$$\cotg p \sin \Phi = \cos \Phi \cos t_0 + \sin t_0 \cotg k.$$

Unter der Voraussetzung, es sei k so klein, daß

$$\operatorname{tg} k = k + \dots$$

und

$$\sin t_0 = t_0 - \dots,$$

$$\cos t_0 = 1 - \dots$$

gesetzt werden darf, wird

$$\begin{aligned} t_0 &= -k(\cos \Phi - \cotg p \sin \Phi) \\ &= -k \sin(p - \Phi) \operatorname{cosec} p. \end{aligned}$$

Es wird also mit $p - \Phi = z$:

$$t_0 = -k \sin z \operatorname{cosec} p.$$

Ist t der Stundenwinkel des Sternes im Achsenäquator:

$$t = U + u - \alpha,$$

so ist

$$t - t_0 = U - U_0 = -i \cos z \operatorname{cosec} p,$$

also

$$t = - (k \sin z + i \cos z) \operatorname{cosec} p. \quad (39a)$$

Befindet sich der Stern zur Zeit U nicht im Abstand $i \cos z$, sondern im Abstand $i \cos z + c$ vom Instrumentenvertikal, wo c die Kollimation bedeutet, so ist

$$t = - (k \sin z + i \cos z + c) \operatorname{cosec} p. \quad (39b)$$

Diese Beziehung ist als MAYERSche Reduktionsformel bekannt.

Die Beziehungen (39a) und (39b) gelten zunächst nur in oberer Kulmination; sie dürfen auch auf Durchgänge in unterer Kulmination angewendet werden, wenn man den Stundenwinkel t vom Moment der unteren Kulmination an zählt und

$$t = U + u - \alpha + 12^h$$

setzt und die Poldistanz negativ nimmt.

Zur Abkürzung führen wir ein

$$l = \alpha - U \quad \text{respektive} \quad \alpha - U + 12^h,$$

es wird dann, wenn $c = 0$ zu setzen ist:

$$u + (k \sin z + i \cos z) \operatorname{cosec} p = l. \quad (40a)$$

Beziehen sich die Größen z' , p' , $l' = \alpha' - U'$ auf einen zweiten Stern, der im gleichen Azimut k und bei der gleichen Neigung i beobachtet worden ist, so gilt die Beziehung

$$u + (k \sin z' + i \cos z') \operatorname{cosec} p' = l'. \quad (40b)$$

Löst man diese beiden Gleichungen nach u und k als Unbekannten auf, so erhält man:

$$u = \frac{l \sin p \cdot \sin z' - l' \sin p' \cdot \sin z}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'} - i \frac{\cos z \sin z' - \cos z' \sin z}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'},$$

$$k = \frac{-l \sin p \cdot \sin p' + l' \sin p' \cdot \sin p}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'} + i \frac{\cos z \sin p' - \cos z' \sin p}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$p = \Phi + z,$$

$$p' = \Phi + z',$$

$$p - p' = z - z'$$

in die folgenden Formen bringen:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{l' \sin p' \sin z - l \sin p \sin z'}{\sin(z - z') \sin \Phi} - i \operatorname{cosec} \Phi, \\ k &= \frac{-l' \sin p' \sin p + l \sin p \sin p'}{\sin(p - p') \sin \Phi} + i \cotg \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, daß der Einfluß der Achsenneigung auf die Uhrkorrektur und auf das Azimut um so größer wird, je näher die Beobachtungsstation am Pol des Äquators liegt. Es ist schon die Ansicht geäußert worden, es lasse sich der Einfluß der Achsenneigung auf die Uhrkorrektur durch eine besondere Wahl der Sterne herabmindern; diese Ansicht ist offensichtlich nicht begründet.

Wählt man zwei Sterne, die symmetrisch zum Zenit in Kulmination kommen, so ist $z' = -z$, also

$$u + k \sin z \operatorname{cosec} p = l - i \cos z \operatorname{cosec} p$$

und

$$u - k \sin z \operatorname{cosec} p' = l' - i \cos z \operatorname{cosec} p'.$$

Läßt man z gegen Null gehen, so daß $p = \Phi = p'$ wird, so ist

$$u = l - i \operatorname{cosec} \Phi$$

und

$$u = l' - i \operatorname{cosec} \Phi,$$

also

$$u = \frac{1}{2} (l + l') - i \operatorname{cosec} \Phi.$$

In diesem Fall läßt sich wohl die Uhrkorrektur u , nicht aber das Instrumentenazimut k , das mit $z = 0$ in den Gleichungen (40a) und (40b) verschwindet, bestimmen.

Wählt man zwei Sterne, die symmetrisch zum Pol des Äquators in Kulmination kommen, so ist $p' = -p$, also

$$u \sin p + k \sin z = l \sin p - i \cos z$$

und

$$-u \sin p + k \sin z' = -l' \sin p - i \cos z'.$$

Läßt man p gegen Null gehen, so daß $z = -\Phi = z'$ wird, so geben beide Gleichungen

$$k = i \cotg \Phi.$$

Diese Beziehung sagt aus: Wenn der Achsenäquator durch den Pol P geht, so ist das Azimut k des Instrumentenvertikals gleich $i \cotg \Phi$.

2. Die mittleren Fehler der beiden Unbekannten und die günstigsten Umstände der Beobachtung^{3a}). Wir sehen vom Einfluß, den ein Fehler der Neigung i ausübt, ab und betrachten nur den Einfluß der zufälligen Fehler, mit welchen die Größen l und l' behaftet sind. Da in

$$l = \alpha - U$$

α und U voneinander unabhängige Größen sind, steht der mittlere Fehler m_l zu den mittleren Fehlern m_α und m_U in der Beziehung

$$m_l^2 = m_\alpha^2 + m_U^2,$$

und der mittlere Fehler von $l \sin p$ wird somit gegeben durch:

$$(m_l \sin p)^2 = m_\alpha^2 \sin^2 p + m_U^2 \sin^2 p.$$

Hierin ist

$$m_\alpha \sin p = m^*,$$

und $m_U \sin p$ wird, wenn U auf insgesamt $2n$ Faden- oder Kontaktbeobachtungen beruht, gegeben durch

$$m_U^2 \sin^2 p = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Da für den zweiten Stern die Beziehung

$$m_U^2 \sin^2 p' = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

anzusetzen ist, ist im allgemeinen

$$m_U \sin p \neq m_U \sin p'.$$