

IV. KAPITEL

Bestimmung der Zeit oder der Polhöhe mit Hilfe von Vertikaldurchgängen

a) Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe der Durchgänge von zwei oder mehr Sternen durch denselben meridiannahen Vertikal (Meridianzeitbestimmung)

1. *Die Reduktionsformeln.* Im Fall der Beobachtungen in unmittelbarer Nähe des Meridians nehmen die Ausdrücke, nach welchen die Durchgangszeiten auf den Achsenäquator und von diesem auf den Instrumentenvertikal zu reduzieren sind, eine einfache Gestalt an. Fällt die Richtung der horizontalen Umdrehungsachse mit der Richtung der Ostwestlinie im Horizont zusammen, so hat man als Stundenwinkel μ des Poles des Achsenäquators und als Poldistanz ν dieses Punktes, ferner als Näherungswert \bar{t} des Stundenwinkels des Sternes und als Größe e die folgenden Werte einzuführen:

	μ	ν	\bar{t}	e	q
Obere Kulmination südlich des Zenites . .	90°	90°	0°	+ 1	0°
nördlich des Zenites . .	270°	90°	0°	- 1	180°
Untere Kulmination	270°	90°	180°	+ 1	0°

Die Uhrzeit U des Durchganges durch den Achsenäquator wird somit, wenn U_v und U_n die Uhrzeiten des Durchganges durch denselben Faden oder die Kontaktzeiten vor und nach dem Umlegen sind, sowohl in oberer Kulmination als in unterer Kulmination gleich

$$U = \frac{1}{2} (U_v + U_n) + b \operatorname{cosec} \phi,$$

worin b die halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang bezeichnet. Nimmt man die Poldistanz des Sternes in oberer Kulmination positiv, in unterer Kulmination negativ, so ist zu setzen

$$U = \frac{1}{2} (U_v + U_n) + eb \operatorname{cosec} \phi \begin{cases} \text{obere Kulmination } e = + 1 \\ \text{untere Kulmination } e = - 1 \end{cases}$$

Nimmt man in der Beziehung, welche die Reduktion der Uhrzeit U auf die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Instrumentenvertikal gibt, das ist

$$U_0 = U + i \cos z \operatorname{cosec} \phi \sec q,$$

die Neigung i positiv, wenn das Westende der Achse über dem Horizont liegt, und die Poldistanz ϕ in unterer Kulmination negativ, so gilt allgemein

$$U_0 = U + i \cos z \operatorname{cosec} \phi.$$

Das Azimut des Westendes der Achse sei gleich

$$90^\circ - k.$$

Ist t_0 der Stundenwinkel des Sternes im Instrumentenvertikal, so ist

$$\operatorname{cotg} \phi \sin \Phi = \cos \Phi \cos t_0 + \sin t_0 \operatorname{cotg} k.$$

Unter der Voraussetzung, es sei k so klein, daß

$$\operatorname{tg} k = k + \dots$$

und

$$\sin t_0 = t_0 - \dots,$$

$$\cos t_0 = 1 - \dots$$

gesetzt werden darf, wird

$$\begin{aligned} t_0 &= -k (\cos \Phi - \operatorname{cotg} \phi \sin \Phi) \\ &= -k \sin (\phi - \Phi) \operatorname{cosec} \phi. \end{aligned}$$

Es wird also mit $\phi - \Phi = z$:

$$t_0 = -k \sin z \operatorname{cosec} \phi.$$

Ist t der Stundenwinkel des Sternes im Achsenäquator:

$$t = U + u - \alpha,$$

so ist

$$t - t_0 = U - U_0 = -i \cos z \operatorname{cosec} \phi,$$

also

$$t = - (k \sin z + i \cos z) \operatorname{cosec} \phi. \quad (39a)$$

Befindet sich der Stern zur Zeit U nicht im Abstand $i \cos z$, sondern im Abstand $i \cos z + c$ vom Instrumentenvertikal, wo c die Kollimation bedeutet, so ist

$$t = - (k \sin z + i \cos z + c) \operatorname{cosec} \phi. \quad (39b)$$

Diese Beziehung ist als MAYERSche Reduktionsformel bekannt.

Die Beziehungen (39a) und (39b) gelten zunächst nur in oberer Kulmination; sie dürfen auch auf Durchgänge in unterer Kulmination angewendet werden, wenn man den Stundenwinkel t vom Moment der unteren Kulmination an zählt und

$$t = U + u - \alpha + 12^h$$

setzt und die Poldistanz negativ nimmt.

Zur Abkürzung führen wir ein

$$l = \alpha - U \quad \text{respektive} = \alpha - U + 12^h,$$

es wird dann, wenn $c = 0$ zu setzen ist:

$$u + (k \sin z + i \cos z) \operatorname{cosec} p = l. \quad (40a)$$

Beziehen sich die Größen z' , p' , $l' = \alpha' - U'$ auf einen zweiten Stern, der im gleichen Azimut k und bei der gleichen Neigung i beobachtet worden ist, so gilt die Beziehung

$$u + (k \sin z' + i \cos z') \operatorname{cosec} p' = l'. \quad (40b)$$

Löst man diese beiden Gleichungen nach u und k als Unbekannten auf, so erhält man:

$$u = \frac{l \sin p \cdot \sin z' - l' \sin p' \cdot \sin z}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'} - i \frac{\cos z \sin z' - \cos z' \sin z}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'},$$

$$k = \frac{-l \sin p \cdot \sin p' + l' \sin p' \cdot \sin p}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'} + i \frac{\cos z \sin p' - \cos z' \sin p}{\sin z' \sin p - \sin z \sin p'}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$p = \Phi + z,$$

$$p' = \Phi + z',$$

$$p - p' = z - z'$$

in die folgenden Formen bringen:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{l' \sin p' \sin z - l \sin p \sin z'}{\sin(z - z') \sin \Phi} - i \operatorname{cosec} \Phi, \\ k &= \frac{-l' \sin p' \sin p + l \sin p \sin p'}{\sin(p - p') \sin \Phi} + i \operatorname{cotg} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, daß der Einfluß der Achsenneigung auf die Uhrkorrektur und auf das Azimut um so größer wird, je näher die Beobachtungsstation am Pol des Äquators liegt. Es ist schon die Ansicht geäußert worden, es lasse sich der Einfluß der Achsenneigung auf die Uhrkorrektur durch eine besondere Wahl der Sterne herabmindern; diese Ansicht ist offensichtlich nicht begründet.

Wählt man zwei Sterne, die symmetrisch zum Zenit in Kulmination kommen, so ist $z' = -z$, also

$$u + k \sin z \operatorname{cosec} p = l - i \cos z \operatorname{cosec} p$$

und

$$u - k \sin z \operatorname{cosec} p' = l' - i \cos z \operatorname{cosec} p'.$$

Läßt man z gegen Null gehen, so daß $p = \Phi = p'$ wird, so ist

$$u = l - i \operatorname{cosec} \Phi$$

und

$$u = l' - i \operatorname{cosec} \Phi,$$

also

$$u = \frac{1}{2} (l + l') - i \operatorname{cosec} \Phi.$$

In diesem Fall läßt sich wohl die Uhrkorrektur u , nicht aber das Instrumentenazimut k , das mit $z = 0$ in den Gleichungen (40a) und (40b) verschwindet, bestimmen.

Wählt man zwei Sterne, die symmetrisch zum Pol des Äquators in Kulmination kommen, so ist $p' = -p$, also

$$u \sin p + k \sin z = l \sin p - i \cos z$$

und

$$-u \sin p + k \sin z' = -l' \sin p - i \cos z'.$$

Läßt man p gegen Null gehen, so daß $z = -\Phi = z'$ wird, so geben beide Gleichungen

$$k = i \cotg \Phi.$$

Diese Beziehung sagt aus: Wenn der Achsenäquator durch den Pol P geht, so ist das Azimut k des Instrumentenvertikals gleich $i \cotg \Phi$.

2. Die mittleren Fehler der beiden Unbekannten und die günstigsten Umstände der Beobachtung^{3a}). Wir sehen vom Einfluß, den ein Fehler der Neigung i ausübt, ab und betrachten nur den Einfluß der zufälligen Fehler, mit welchen die Größen l und l' behaftet sind. Da in

$$l = \alpha - U$$

α und U voneinander unabhängige Größen sind, steht der mittlere Fehler m_l zu den mittleren Fehlern m_α und m_U in der Beziehung

$$m_l^2 = m_\alpha^2 + m_U^2,$$

und der mittlere Fehler von $l \sin p$ wird somit gegeben durch:

$$(m_l \sin p)^2 = m_\alpha^2 \sin^2 p + m_U^2 \sin^2 p.$$

Hierin ist

$$m_\alpha \sin p = m^*,$$

und $m_U \sin p$ wird, wenn U auf insgesamt $2n$ Faden- oder Kontaktbeobachtungen beruht, gegeben durch

$$m_U^2 \sin^2 p = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Da für den zweiten Stern die Beziehung

$$m_U^2 \sin^2 p' = \frac{1}{2n'} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

anzusetzen ist, ist im allgemeinen

$$m_U \sin p \neq m_U' \sin p'.$$

Diese beiden Fehlerbeträge werden aber einander gleich, wenn die Zahl der Faden- oder Kontaktbeobachtungen so gewählt wird, daß

$$\frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \frac{1}{2n'} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \text{konstans} = m_0^2$$

ist. Als konstanter Wert kann zum Beispiel der Wert m_0^2 genommen werden, den der Klammerausdruck im Falle $p = 90^\circ$ annimmt; es ist dann

$$2n = \frac{1}{m_0^2} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

und

$$2n' = \frac{1}{m_0^2} \left(a_0^2 \sin^2 p' + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Unter dieser Voraussetzung wird dann, wenn man zur Abkürzung

$$m^2 = m^{*2} + m_0^2$$

setzt:

$$m_i^2 \sin^2 p = m_i^2 \sin^2 p' = m^2.$$

Die mittleren Fehler m_u und m_k werden dann durch die Beziehungen

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 z'}{\sin^2 (z - z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi \quad (42a)$$

und

$$m_k^2 = m^2 \frac{\sin^2 p + \sin^2 p'}{\sin^2 (p - p')} \operatorname{cosec}^2 \Phi \quad (42b)$$

gegeben. Es ist somit der mittlere Fehler der Uhrkorrektur in derselben Weise funktional abhängig von den Zenitdistanzen wie der mittlere Fehler des Azimutes von den Poldistanzen der Sterne. Definiert man die Funktion F der beiden Variablen v und v' durch die Gleichung

$$F(v, v') = \frac{\sin^2 v + \sin^2 v'}{\sin^2 (v - v')},$$

so kommt diese Gleichheit der funktionalen Abhängigkeit in den folgenden Formen zum Ausdruck:

$$\begin{aligned} m_u^2 &= F(z, z') \cdot m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi, \\ m_k^2 &= F(p, p') \cdot m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi. \end{aligned}$$

Die Funktion F hat folgende Eigenschaften:

1. Setzt man $v' = v$ oder $v' = 180^\circ - v$, das heißt, läßt man die beiden Sterne zusammenfallen oder gehen sie an diametralen Stellen durch den Meridian, so ist

$$m_u = m_k = \pm \infty.$$

2. Wählt man die Sterne so, daß $v - v' = 90^\circ$ wird, das heißt so, daß sie den Meridian im Abstand von 90° passieren, so wird

$$F(v, v' = v - 90^\circ) = 1$$

und

$$m_u = m_k = \pm m \operatorname{cosec} \Phi.$$

Es wird also die Uhrkorrektur und das Azimut mit der gleichen Genauigkeit bestimmt.

3. Setzt man $v' = -v$, so gehen die beiden Sterne entweder symmetrisch zum Zenit oder symmetrisch zum Pol des Äquators durch den Meridian. Es ist dann

$$v - v' = 2v$$

und somit

$$F(v, -v) = \frac{1}{2} \sec^2 v.$$

Läßt man nun v gleich Null werden, so ist

$$F(v = 0, -v = 0) = \frac{1}{2},$$

und somit, wenn man die Variablen v mit den Zenitdistanzen identifiziert:

$$m_u^2 = \frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

$$m_k^2 = \infty.$$

Identifiziert man sie mit den Poldistanzen, so ist

$$m_u^2 = \infty,$$

$$m_k^2 = \frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Im ersten Fall läßt sich nur die Uhrkorrektur und im zweiten Fall nur das Azimut bestimmen.

4. Die Funktion F nimmt bei festgehaltenem Wert von v' einen Minimalwert an für einen Wert von $v = v_0$, der durch die Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

bestimmt ist. Aus

$$\frac{1}{2} \sin^2 (v - v') \frac{\partial F}{\partial v} = \sin^2 (v - v') \sin v \cos v$$

$$- (\sin^2 v + \sin^2 v') \sin (v - v') \cos (v - v') = 0$$

folgt

$$\operatorname{tg} v_0 = - \frac{\operatorname{tg} v'}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 v'},$$

was sich in die Form

$$\operatorname{tg} (v_0 - v') = - 2 \operatorname{tg} v'$$

bringen läßt. Die Funktion F nimmt dann den Wert

$$F(v_0, v') = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 v')$$

an. Setzt man

$$\frac{\partial \operatorname{tg} v_0}{\partial v'} = 0,$$

so genügt dieser Bedingung der Wert $v' = v'_0$, der durch die Beziehung

$$\sin^2 v_0 = \frac{1}{3}, \quad v'_0 = -35^{\circ}3$$

gegeben wird. Es wird dann

$$F(v_0, v'_0) = \frac{2}{3}.$$

Verschiedenen Werten von $z' = v'$ sind hiernach die folgenden Werte von $z_0 = v_0$ und von $F(z_0, z')$ zuzuordnen:

z'	0°	-10°	-20°	-30°	$-35^{\circ}3$	-40°	-50°	-60°	-70°	-80°	-90°
z_0	$0^{\circ}0$	$+9^{\circ}4$	$+16^{\circ}1$	$+19^{\circ}1$	$+19^{\circ}5$	$+19^{\circ}2$	$+17^{\circ}2$	$+13^{\circ}9$	$+9^{\circ}7$	$+5^{\circ}0$	$0^{\circ}0$
$F(z_0, z')$	0,50	0,52	0,56	0,62	0,67	0,71	0,79	0,88	0,94	0,98	1,00

5. Setzt man $v = 0$, so wird

$$F(0, v') = 1.$$

Identifiziert man v mit der Zenitdistanz, so daß der eine Stern im Zenit beobachtet wird, so wird

$$m_u^2 = m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Man kann dann die Frage stellen, wo nun der zweite Stern beobachtet werden müsse, wenn das Azimut so genau als möglich bestimmt werden soll. Allgemein folgt der Wert von $p' = p'_0$, der die Funktion F bei einem gegebenen Wert von p zu einem Minimum macht, aus der Bedingung

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{\operatorname{tg} p}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 p}$$

und somit, wenn $p = \Phi$ ist, aus der Bedingung

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{\operatorname{tg} \Phi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \Phi}$$

oder aus

$$\operatorname{tg}(p'_0 - \Phi) = -2 \operatorname{tg} \Phi.$$

Im speziellen Fall $\Phi = 45^{\circ}$ wird

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad p'_0 = -18^{\circ}4$$

und

$$F(p = \Phi, p'_0 = -18^{\circ}) = \frac{1 + \sin^2 p}{2} = \frac{3}{4},$$

so daß

$$m_k^2 = \frac{3}{4} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

wird. Der zweite Stern ist also in unterer Kulmination (in der Poldistanz $p' = -18^{\circ}4$) zu beobachten.

3. *Vergleichung der Genauigkeit der Meridianmethode mit der Genauigkeit der Zingerschen Methode^{3c)}*. Der mittlere Fehler der Uhrkorrektion eines

Sternpaares, das nach der Zingerschen Methode in der Nähe des ersten Vertikales beobachtet wird, ist gleich groß wie der mittlere Fehler der Uhrkorrektion, die aus der Beobachtung der Meridiandurchgänge zweier *Zenitsterne* abgeleitet wird, nämlich gleich

$$\frac{1}{2} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Diese Feststellung bleibt auch dann zu Recht bestehen, wenn man in Berücksichtigung zieht, daß man an den beobachteten Durchgangszeiten eine Neigungskorrektion anbringen muß, in der Zingerschen Methode wegen der Ungleichheit der Zenitdistanz im Osten und Westen, in der Meridianmethode wegen der Neigung der horizontalen Achse; diese Neigungskorrekturen lassen sich in beiden Verfahren mit derselben Genauigkeit bestimmen.

Nun kann man in der Meridianmethode die Benützung eines Niveaus und damit die Anbringung einer Neigungskorrektion überflüssig machen dadurch, daß man vor dem Umlegen das direkte Bild des Sternes und nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild beobachtet. Da dieses Verfahren aber erst von etwa 30° Zenitdistanz an angewendet werden kann, ist es nicht möglich, die mit der Beobachtung in größeren Zenitdistanzen verbundene Beeinträchtigung der Genauigkeit durch dieses Mittel wieder gutzumachen. Es ist deshalb die Zingersche Methode als dasjenige Beobachtungsverfahren anzusehen, das die Uhrkorrektion *ceteris paribus* am genauesten liefert, genauer als die Meridianmethode und als die mit dieser gleichzustellende Döllnermethode.

4. *Die Beobachtung von Sterngruppen.* Wenn man die Genauigkeit der Uhrkorrektion durch Wiederholung der Durchgangsbeobachtungen steigern will und auf die Kenntnis des Azimutes nur insofern Wert legt, als dadurch die Unveränderlichkeit der Instrumentenaufstellung während der Dauer der Beobachtungen kontrolliert werden soll, so beobachtet man neben einem Nordstern mehrere Südsterne. Man hat in diesem Fall empfohlen, die Südsterne zu beiden Seiten des Zenites so zu wählen, daß die Summe der Azimutkoeffizienten $\sin z \operatorname{cosec} p$ annähernd gleich null wird, weil dadurch «die aus der ungenauen Kenntnis des Azimutes hervorgehenden Fehler auf ein möglichst geringes Maß herabgemindert» werden*). Von anderer Seite ist einer solchen Zenitsterngruppe außerdem die Eigenschaft zugesprochen worden, eine «stabile» Lösung zu liefern, das heißt, es soll die Genauigkeit am wenigsten beeinträchtigt werden, wenn infolge des Ausfalles eines Sternes die Bedingung «Summe der Azimutkoeffizienten gleich Null» nicht mehr genau eingehalten wird**) ^{3b}).

*) TH. ALBRECHT, Formeln und Hilfstafeln, 4. Auflage. S. 106.

**) N. E. NÖRLUND, Astronomical Longitude and Azimuth Determinations, Monthly Notices, Vol. 97, Nr. 7, S. 496–497 (1937).

Um diese Ansichten zu prüfen, nehmen wir eine Gruppe von n Südsternen und eine Gruppe von n' Nordsternen an. Die Poldistanzen sollen so wenig streuen, daß man in jeder Gruppe das arithmetische Mittel der Fehlergleichungen bilden darf und nicht genötigt ist, die Unbekannten nach den strengen Vorschriften der Ausgleichsrechnung zu ermitteln. Die Größen l und l' in den Gleichungen (41) sind dann das Mittel aus n respektive n' Einzelwerten. Die mittleren Fehler der Uhrkorrektur und des Azimutes werden also durch die folgenden Beziehungen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} m_u^2 &= m^2 \left(\frac{1}{n'} \sin^2 z + \frac{1}{n} \sin^2 z' \right) \cdot \operatorname{cosec}^2 \Phi \operatorname{cosec}^2 (z - z'), \\ m_k^2 &= m^2 \left(\frac{1}{n'} \sin^2 p + \frac{1}{n} \sin^2 p' \right) \cdot \operatorname{cosec}^2 \Phi \operatorname{cosec}^2 (p - p'), \end{aligned} \right\} \quad (43a)$$

oder durch

$$\left. \begin{aligned} m_u^2 &= m^2 F(z, z'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi, \\ m_k^2 &= m^2 F(p, p'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (43b)$$

wenn $F(v, v'; n, n')$ die folgende Funktion der beiden Variablen v und v' und der Parameter n und n' bezeichnet:

$$F(v, v'; n, n') = \left(\frac{1}{n'} \sin^2 v + \frac{1}{n} \sin^2 v' \right) \operatorname{cosec}^2 (v - v').$$

Die Funktion F nimmt in speziellen Fällen folgende Werte an:

1. Wenn $v - v' = 90^\circ$, ist

$$F(v, v - 90^\circ; n, n') = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n - n'}{n'} \sin^2 v \right).$$

Es wird jetzt

$$m_u \neq m_k,$$

ausgenommen wenn $n = n'$ ist.

2. Setzt man $v' = -v$, so wird

$$F(v, -v; n, n') = \frac{n + n'}{4 n n'} \sec^2 v.$$

Läßt man zwei gleich starke Gruppen im Zenit zusammenfallen, so wird mit $n = n'$:

$$\begin{aligned} m_u^2 &= \frac{m^2}{2n} \operatorname{cosec}^2 \Phi, \\ m_k^2 &= \infty. \end{aligned}$$

3. Bei festgehaltenem Wert von v' nimmt F einen Minimalwert an für einen Wert $v = v_0$, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} v_0 = - \frac{n' \operatorname{tg} v'}{n + (n + n') \operatorname{tg}^2 v'}$$

oder durch die gleichwertige Beziehung

$$\operatorname{tg}(v_0 - v') = -\frac{n + n'}{n} \operatorname{tg} v'$$

gegeben wird. Es wird dann

$$F(v_0, v'; n, n') = \frac{n + n' \sin^2 v'}{n(n + n')}.$$

Nachstehend sind für die Annahmen $n = 4$, $n' = 1$ die den Werten $v' = z'$ entsprechenden Werte von $v_0 = z_0$ sowie die Funktionswerte $F(z_0, z'; n, n')$ angegeben:

z'	0^0	-10^0	-20^0	-30^0	-40^0	$-41^0,8$	-50^0	-60^0	-70^0	-80^0	-90^0
z_0	0^0	$2^0,4$	$4^0,3$	$5^0,8$	$6^0,4$	$6^0,4$	$6^0,2$	$5^0,2$	$3^0,6$	$2^0,8$	0^0
$F(z_0, z'; 4, 1)$	1,00	1,01	1,03	1,06	1,11	1,11	1,14	1,19	1,22	1,24	1,25

Den größten Wert nimmt z_0 an für einen Wert von z' , der durch die Bedingung

$$\frac{\partial \operatorname{tg} z_0}{\partial z'} = 0$$

gegeben wird; der diese Bedingung erfüllende Wert $z' = z'_0$ wird durch die Beziehung

$$\sin^2 z'_0 = \frac{n}{2n + n'}$$

gegeben. Für $n = 4$, $n' = 1$ wird $\sin z' = -\frac{2}{3}$ und $z' = -41^0,8$.

4. Für $v = 0$ erhält man

$$F(0, v'; n, n') = \frac{1}{n}.$$

Im Fall der Beobachtung einer Zenitsterngruppe wird also ($z = 0$, $p = \Phi$):

$$m_u^2 = \frac{m^2}{n} \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

$$m_k^2 = m^2 \frac{n \sin^2 \Phi + n' \sin^2 p'}{n n' \sin^2 (\Phi - p')} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Im speziellen Fall, wo die Polsterngruppe um den Pol des Äquators streut, ist

$$m_k^2 = \frac{m^2}{n'} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Man erhält das Azimut aber genauer, wenn man die Nordsterngruppe nicht um den Wert $p' = 0$ streuen läßt, sondern um den Wert $p' = p'_0$, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} p'_0 = -\frac{n \operatorname{tg} p}{n' + (n + n') \operatorname{tg}^2 p}$$

gegeben wird. Da die Poldistanz der Zenitsterngruppe gleich Φ zu setzen ist,

wird

$$\operatorname{tg} \rho'_0 = - \frac{n \operatorname{tg} \Phi}{n' + (n + n') \operatorname{tg}^2 \Phi}$$

oder

$$\operatorname{tg} (\rho'_0 - \Phi) = - \frac{n' + n}{n'} \operatorname{tg} \Phi.$$

Da die Funktion F für $\rho' = \rho'_0$ den Wert

$$F(\rho, \rho'_0; n, n') = \frac{n' + n \sin^2 \rho}{n'(n + n')}$$

annimmt, wird

$$F(\Phi, \rho'_0; n, n') = \frac{n' + n \sin^2 \Phi}{n'(n + n')}$$

und

$$m_k^2 = \frac{m^2}{n'} \cdot \frac{n' + n \sin^2 \Phi}{n + n'} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Da aber

$$\frac{n' + n \sin^2 \Phi}{n + n'} < 1$$

ist, ist m_k^2 bei der Wahl $\rho' = \rho'_0$ kleiner als bei der Wahl $\rho' = 0$. Im speziellen Fall $\Phi = 45^\circ$, $n = 4$, $n' = 1$ ist

$$\rho'_0 = - 33,7,$$

$$m_k^2 = \frac{3}{5} m^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Zusammenfassend ergibt sich somit:

Wird die Südsternegruppe in die durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} (z_0 - z') = - \frac{n' + n}{n} \operatorname{tg} z'$$

gegebene Zenitdistanz z_0 gelegt, so fällt der mittlere Fehler der Uhrkorrektur kleiner aus als bei der Wahl einer Zenitsternegruppe.

Wird die Südsternegruppe auf das Zenit gelegt, so wird der mittlere Fehler des Azimutes kleiner, wenn die Nordsternegruppe um den Wert $\rho' = \rho'_0$ streut, der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} (\rho'_0 - \Phi) = - \frac{n' + n}{n'} \operatorname{tg} \Phi$$

gegeben wird, als wenn sie um den Pol des Äquators streut.

Die Ansicht, daß der mittlere Fehler der Uhrkorrektur durch den Ausfall eines Sternes in der Zenitsternegruppe weniger vergrößert werde, als wenn ein Stern in einer um z_0 vom Zenit entfernten Gruppe verlorengelht, bedarf kaum einer ausführlichen Widerlegung; es genügt, darauf hinzuweisen, daß die mittlere Zenitdistanz einer Zenitsternegruppe sich dem günstigsten Wert z_0 nähert oder sich von ihm entfernt, je nachdem ein nördlich oder südlich des Zenites kulminierender Stern der Zenitgruppe ausfällt. Der mittlere Fehler einer unvollständigen Zenitsternegruppe, deren mittlere Zenitdistanz sich wegen des Ausfalles eines Sternes der günstigsten Zenitdistanz z_0 genähert hat, bleibt aber größer als der mittlere Fehler einer Gruppe, die ursprünglich um z_0 gestreut hat und durch einen Sternausfall unvollständig geworden ist, weil der mittlere Fehler dieser Gruppe ein Extremwert ist.

5. *Die Beobachtung von Sternen in beliebigen Zenitdistanzen.* Sind die Deklinationen der Sterne sehr verschieden, so müssen die Vorschriften der Ausgleichsrechnung zur Ermittlung der Unbekannten angewendet werden. Die Fehlergleichungen lauten:

$$u + k \frac{\sin z}{\sin \rho} = l + \lambda;$$

die Gewichte g der Beobachtungsgrößen

$$l = \alpha - \left(U + i \frac{\cos z}{\sin \rho} \right)$$

sind umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler von l anzusetzen:

$$g = \frac{\text{const}}{m_l^2}.$$

Sieht man vom Fehler der Neigungskorrektur ab, so ist

$$m_l^2 = m_\alpha^2 + m_U^2.$$

Hierin ist

$$m_\alpha^2 = m^2 \operatorname{cosec}^2 \rho$$

und

$$m_U^2 = \frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 \rho + \frac{b_0^2}{V^2} \right) \operatorname{cosec}^2 \rho.$$

Werden die Sterne an so viel Fäden oder Kontakten beobachtet, daß

$$\frac{1}{2n} \left(a_0^2 \sin^2 \rho + \frac{b_0^2}{2V^2} \right) = \text{const} \quad (\text{a})$$

ist, so wird

$$g = \text{const} \cdot \sin^2 \rho.$$

Die auf gleiches Gewicht reduzierten Fehlergleichungen lauten dann mit $g = \sin^2 \rho$:

$$u \sin \rho + k \sin z = l' + \lambda', \quad (\text{b})$$

mit

$$l' = (\alpha - U) \sin \rho - i \cos z.$$

Bei der Durchführung der Beobachtungen wählt man in der Regel die Zahl der Fäden oder Kontakte nicht entsprechend der Bedingung (a), sondern beobachtet alle Sterne an gleich viel Fäden oder Kontakten. Legt man dann trotzdem der Ausgleichung die Fehlergleichungen (b) zugrunde, so wird man nicht die besten Werte der Unbekannten erhalten. Da aber der Ansatz $g = \sin^2 \rho$ eine gute Annäherung an die wahren Gewichte ist, so ist der dabei begangene Fehler unerheblich.

6) *Der Einfluß einer seitlichen Refraktion auf Uhrkorrektur und Azimut.* Wir nehmen eine seitliche Refraktion an, durch welche die beiden Sterne oder die beiden Sterngruppen in der Richtung senkrecht zum Instrumentenvertikal

um den Betrag dr respektive dr' verschoben werden; die Abstände der wahren Örter vom westlichen Pol des Instrumentenvertikales seien $90^\circ + dr$ respektive $90^\circ + dr'$ im Moment des Durchganges durch den Instrumentenvertikal. Von den Koordinaten k und i dieses Poles sollen die Koordinaten des Poles des größten Kreises, der die wahren Örter verbindet, um dk und um di abweichen; es ist dann

$$\begin{aligned} dr &= dk \sin z + di \cos z, \\ dr' &= dk \sin z' + di \cos z'; \end{aligned}$$

durch Auflösung nach dk und di erhält man:

$$\begin{aligned} dk \sin(z - z') &= dr \cos z' - dr' \cos z, \\ di \sin(z - z') &= -dr \sin z' + dr' \sin z. \end{aligned}$$

Die Zenitdistanzen sind hierin nach Süden positiv zu nehmen.

Den wahren Wert u der Uhrkorrektion und das Azimut $90^\circ - (k + dk)$ des Poles des die wahren Örter verbindenden größten Kreises erhält man aus den beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} u + (k + dk) \sin z \operatorname{cosec} \phi + (i + di) \cos z \operatorname{cosec} \phi &= l, \\ u + (k + dk) \sin z' \operatorname{cosec} \phi' + (i + di) \cos z' \operatorname{cosec} \phi' &= l'; \end{aligned}$$

sie führen zu folgenden Werten:

$$\begin{aligned} u &= \frac{l' \sin \phi' \sin z - l \sin \phi \sin z'}{\sin(z - z') \sin \Phi} - \frac{i + di}{\sin \Phi}, \\ k + dk &= \frac{-l' \sin \phi' \sin \phi + l \sin \phi \sin \phi'}{\sin(\phi - \phi') \sin \Phi} + \frac{i + di}{\operatorname{tg} \Phi}. \end{aligned}$$

Sind nun u_0 und k_0 die Werte, in welche u und $k + dk$ übergehen, wenn in diesen Beziehungen di gleich null gesetzt wird, so erhält man für die Differenzen $u - u_0$ und $k - k_0$ die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} u - u_0 &= -di \operatorname{cosec} \Phi = (dr \sin z' - dr' \sin z) \operatorname{cosec} \Phi \operatorname{cosec} (z - z'), \\ k - k_0 &= -dk + di \cotg \Phi = -(dr \sin \phi' - dr' \sin \phi) \operatorname{cosec} \Phi \operatorname{cosec} (\phi - \phi'). \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke geben die Beträge an, um welche die Uhrkorrektion und das Azimut durch die seitliche Refraktion verfälscht werden. Im speziellen Fall der Kombination einer Zenitsterngruppe mit einer Polsterngruppe hat man zu setzen:

$$z = 0, \quad \phi = \Phi; \quad z' = -\Phi, \quad \phi' = 0,$$

so daß

$$\begin{aligned} u - u_0 &= -dr \operatorname{cosec} \Phi, \\ k - k_0 &= +dr' \operatorname{cosec} \Phi \end{aligned}$$

wird. Die Uhrkorrektion wird dann nur durch die Zenitstörung, das Azimut nur durch die in der Richtung nach dem Pol vorhandene seitliche Refraktion verfälscht. Man darf diese Fehlerquelle nicht unterschätzen, wenn auch die

seitliche Refraktion nur unter besonders ungünstigen atmosphärischen und topographischen Verhältnissen den Betrag von rund einer Bogensekunde annehmen wird^{3c)}.

ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen.
 Instrument: Bambergisches Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer; Vergrößerung 86fach.
 Beobachter: Dr. J. O. FLECKENSTEIN.
 Datum: 1941, 20. Juni.

Die Beobachtungsdaten sind in Tabelle 1 zusammengestellt; sie enthält die Mittel \bar{U} der vor und nach dem Umlegen an denselben Kontakten beobachteten Uhrzeiten, die scheinbaren Rektaszensionen der Sterne, an welchen die tägliche Aberration angebracht ist, ferner die zur Reduktion notwendigen Werte von $\sin z$, $\cos z$ und $\sin \phi$.

Nach dem Umlegen ist das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild der Südsterne beobachtet worden, während beim Durchgang des Polsternes sowohl vor als nach dem Umlegen je das direkte und das reflektierte Bild beobachtet wurde. In der Kolonne «Okular» geben die Buchstaben «d» und «r» an, ob das direkte oder das reflektierte Bild zur Beobachtung gekommen ist. N ist die Zahl der vor und nach dem Umlegen beobachteten Kontaktzeiten.

Tabelle 1

Stern	Okular	\bar{U}	α	$\sin z$	$\cos z$	$\sin \phi$	N
ϵ Serp	Wd-Er	15 ^h 49 ^m 21 ^s .626	47 ^m 54 ^s .814	0,681	0,733	0,997	11
δ Oph	Ed-Wr	16 12 44,578	11 17,697	,778	,628	,998	11
ϵ Oph	Wd-Er	16 41,218	15 14,473	,789	,614	,997	11
λ Oph	Ed-Wr	29 25,612	27 58,727	,712	,702	,999	11
ϵ Urs mi	Wd-Ed	53 31,995					
	Wr-Er	53 33,035	52 01,746	-0,568	,823	,136 ₇₂	22

Im Mittel der Uhrzeiten eines Sternes, der vor und nach dem Umlegen in der gleichen Zenitdistanz beobachtet wird, hebt sich der Einfluß der Kollimation, auch wenn sich diese mit der Zenitdistanz ändert. Eine solche Veränderlichkeit hat man aber bei der Verwendung eines gebrochenen Fernrohres anzunehmen als Folge einer Durchbiegung der Achse. Fällt die Visierlinie im Horizont mit der Umdrehungsachse zusammen, so hat die Kollimation im Zenit, wenn die Achse nach unten durchgebogen ist, den Wert $-c$ und im Nadir den Wert $+c$, in der Zenitdistanz z den Wert

$$-c \cos z.$$

Der Stern wird also bei Ok Wd-Er um den Betrag

$$c \cos z \operatorname{cosec} \phi$$

zu spät beobachtet, dagegen bei Ok Ed-Wr um den gleichen Betrag zu früh. Die Korrektion, die wegen dieser Verfrühung oder Verspätung an der Uhrzeit \bar{U} anzubringen ist, kann mit der Korrektion wegen der mittleren Neigung der Achse vereinigt werden; denn diese beträgt, wenn κ die Zapfenungleichheit ist, die positiv zu nehmen ist, wenn der Okularzapfen der dickere ist:

$$\pm \kappa \cos z \operatorname{cosec} \phi \begin{cases} \text{Ok Wd-Er} \\ \text{Ok Ed-Wr} \end{cases}.$$

Setzt man also

$$\alpha_0 = \alpha - c,$$

so wird durch die Korrektur

$$\pm \alpha_0 \cos z \operatorname{cosec} p \left\{ \begin{array}{l} \text{Ok Wd-Er} \\ \text{Ok Ed-Wr} \end{array} \right\}$$

sowohl der mittleren Achsenneigung als der Biegungskollimation Rechnung getragen.

Die mittlere Durchgangszeit des Polsternes bedarf keiner Korrektur.

Die Konstante α_0 läßt sich aus den Beobachtungen des Polsternes ableiten. Sind U'_d und U''_d die mittleren Uhrzeiten, zu welchen sich der Stern vor und nach dem Umlegen im Abstand $F_d + c_0$ vom Achsenäquator bei der Beobachtung des direkten Bildes befunden hat, und sind U'_r, U''_r und $F_r + c_0$ die entsprechenden Größen bei der Beobachtung des reflektierten Bildes und setzt man zur Abkürzung

$$\Delta U_d = \frac{1}{2} (U''_d - U'_d) \sin p - F_d,$$

$$\Delta U_r = \frac{1}{2} (U''_r - U'_r) \sin p - F_r,$$

so wird

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} (\Delta U_d - \Delta U_r) \sec z.$$

Wird vor und nach dem Umlegen je zuerst das direkte und dann das reflektierte Bild beobachtet, so läßt sich die Konstante α_0 ohne Kenntnis des Schraubenswertes ermitteln. Ist bei der Okularfolge W-E

\bar{U}_{dr} das Mittel der bei Ok Wd und Ok Er und

\bar{U}_{rd} das Mittel der bei Ok Wr und Ok Ed

beobachteten Uhrzeiten, so wird α_0 aus der Beziehung

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} (\bar{U}_{rd} - \bar{U}_{dr}) \frac{\sin p}{\cos z}$$

erhalten. Bei der Okularfolge E-W ist das Zeichen umzukehren.

Die Beobachtung des Polsternes hat am 20. Juni 1941 die nachstehend zusammengestellten Daten ergeben. Die Abstände F_d und F_r beziehen wir auf die mittlere Revolution der Schraube; die Kollimation c_0 des Fadens bei dieser Stellung hebt sich bei der Differenzbildung. Es ist

$$\left. \begin{array}{l} F_d = 3^R_5 \\ F_r = 1,3 \end{array} \right\} 1 R = 10^8,540.$$

	$F_d = 3^R_5$	$F_r = 1^R_3$
U'	16 ^h 49 ^m 03 ^s 754	51 ^m 54 ^s 990
U''	58 00,236	55 11,080
\bar{U}	53 31,995	53 33,035
$\frac{1}{2} (U'' - U')$	268 ^s 241	98 ^s 045
$\frac{1}{2} (U'' - U') \sin p$	36,675	13,405
F	36,890	13,702
ΔU	- 0,215	- 0,297
$\left. \begin{array}{l} \Delta U_d - \Delta U_r = + 0^s,082 \\ \frac{1}{2} \sec z = 0,608 \end{array} \right\} \alpha_0 = + 0^s,050$		

Im Mittel aus zehn solchen Bestimmungen hat sich als Wert der Instrumentalkonstanten \varkappa_0 ergeben:

$$\varkappa_0 = 0,055.$$

Dieser Wert ist zur Reduktion der Beobachtungen, die in Tabelle 2 gegeben wird, verwendet worden. Die halbe Summe b von Kontaktbreite und totem Gang beträgt $0,047$. Ferner sind Näherungswerte u_0 der Uhrkorrektion und k_0 des Azimutes eingeführt worden; es wurde gesetzt:

$$u = -1,27500 + du$$

und

$$k = +1,000 + dk.$$

Tabelle 2

Stern	$\frac{b}{\sin p}$	$\pm \varkappa_0 \frac{\cos z}{\sin p}$	$k_0 \frac{\sin z}{\sin p}$	Summe der Korrektion	$\alpha - \bar{U} - u_0$	$\frac{du + dk \frac{\sin z}{\sin p}}{\sin p}$	λ
ε Serp	+ 0,047	+ 0,040	+ 0,683	+ 0,770	+ 0,688	- 0,082	- 0,029
δ Oph	+ 0,047	- 0,035	+ 0,780	+ 0,792	+ 0,619	- 0,173	+ 0,048
ε Oph	+ 0,047	+ 0,034	+ 0,791	+ 0,872	+ 0,755	- 0,117	- 0,009
λ Oph	+ 0,047	- 0,039	+ 0,713	+ 0,721	+ 0,615	- 0,106	- 0,010
ε Urs mi	+ 0,334	-	- 4,153	- 3,819	- 3,269	+ 0,550	-

Da die Deklinationen der Südsterne in einem engen Bereich liegen, dürfen ihre Fehlgleichungen zu einem Mittel zusammengezogen werden; es stehen dann die beiden folgenden Gleichungen zur Ermittlung der beiden Unbekannten du und dk zur Verfügung:

$$\text{Südsterne: } du + 0,742 dk = - 0,120,$$

$$\text{Polstern: } du - 4,153 dk = + 0,550;$$

sie führen zu folgenden Werten der Unbekannten:

$$du = - 0,018, \quad dk = - 0,137$$

und zu den in der Tabelle angegebenen scheinbaren Fehlern λ .

Die mittleren Fehler der Unbekannten berechnen wir mit Hilfe der Beziehungen (43a), Seite 87:

$$m_u^2 = m^2 F(z, z'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

$$m_k^2 = m^2 F(p, p'; n, n') \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

worin F dieselbe Funktion zweier Variablen v, v' bedeutet:

$$F = \left(\frac{1}{n} \sin^2 v + \frac{1}{n'} \sin^2 v' \right) \operatorname{cosec}^2 (v - v').$$

Es ist

$$F(z, z'; n, n') = 0,475,$$

$$F(p, p'; n, n') = 1,016.$$

Für m , das ist der mittlere Fehler von $\bar{U} \sin p$, führen wir den aus der Quadratsumme

$$[\lambda\lambda] = 0,003326 \sim [\lambda \sin p]^2$$

folgenden Wert ein:

$$m^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{5-2} = 0,001109;$$

da wir damit keine Rücksicht darauf nehmen, daß der Polstern an mehr Kon-

takten beobachtet ist als die Südsterne, das heißt an mehr Kontakten als zur Erfüllung der Bedingung

$$m_U' \sin p' = m_U \sin p$$

nötig ist, so erhöhen wir dadurch die beiden Fehlerbeträge. Es wird

$$\begin{aligned} m_u &= \pm 0,023 \operatorname{cosec} \Phi, \\ m_k &= \pm 0,034 \operatorname{cosec} \Phi; \end{aligned}$$

und das Schlußresultat lautet:

$$\begin{aligned} u &= -1^m 27,518 \pm 0,034, \\ k &= + 0,863 \pm 0,050. \end{aligned}$$

b) Die Bestimmung der Zeit mit Hilfe von Durchgängen durch den Vertikal des Polarsternes (Döllensmethode)⁴⁾

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Wir nehmen an, der Beobachter habe das Instrument bei der Beobachtung des Südsterne umgelegt und in beiden Lagen den beweglichen Faden auf den Polarstern eingestellt; vor und nach dem Umlegen sei ferner der Stand der Niveaubläse abgelesen worden. Es stehen dann folgende Daten zur Ableitung der Uhrkorrektion zur Verfügung:

aus der Polarisbeobachtung die Uhrzeiten U'_v und U'_n und die zugehörigen Trommelablesungen M_v und M_n ;

aus der Beobachtung des Südsterne die Uhrzeiten U_{iv} und U_{in} ($i = 1, 2, \dots, n$);

ferner die Blasenmitten n_v und n_n , wobei der Index v die vor dem Umlegen und der Index n die nach dem Umlegen beobachteten Werte bezeichnet.

Die aus den Blasenmitten ermittelte Neigung des mittleren Achsenäquators sei i ; sie werde auf das Westende der Achse bezogen. Ferner sehen wir als bekannt an die Zenitdistanzen z und z' ; die Zenitdistanz z des Südsterne nehmen wir nach Süden positiv, nach Norden negativ, die Zenitdistanz z' des Polarsternes nach Norden positiv. Der Revolutionswert der Mikrometerschraube sei R .

Der Abstand des Polarsternes vom westlichen Pol Q des mittleren Achsenäquators zur Zeit

$$U' = \frac{1}{2} (U'_v + U'_n)$$

sei $90^\circ + \bar{f}$. Setzt man

$$m'' = 2 \sin^2 \frac{U'_n - U'_v}{2} / \sin 1''$$

und nimmt das Azimut k^* des Polarsternes von Norden nach Westen positiv, so ist nach der Beziehung (8b), Seite 38, in Zeitsekunden:

$$\bar{f} = \pm \frac{1}{2} (M_v - M_n) R - \frac{m''}{15} \cos p' \sin k^* \sin \Phi.$$

Nehmen die Mikrometerablesungen zu, wenn vor dem Umlegen der Faden in größere Distanz vom Pol Q gebracht wird, so ist das positive Zeichen, und wenn die Ablesungen abnehmen, das negative Zeichen zu nehmen. Steht keine Tabelle zur Verfügung, welcher die Werte von m'' entnommen werden können, so ergibt sich der Wert von $m''/15$ auch bequem aus der Beziehung

$$\frac{m''}{15} = \left(\frac{U'_n - U'_v}{5,53} \right)^2,$$

worin die Differenz ($U'_n - U'_v$) in Zeitminuten auszudrücken ist. Den Cosinus der Poldistanz p' des Polarsternes wird man meist gleich 1 setzen dürfen.

Setzt man

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \left[\frac{U_{iv} + U_{in}}{2} \right] = \frac{1}{n} [\bar{U}_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und $\bar{m}'' = \frac{1}{n} [m''_i]$

mit $m''_i = 2 \sin^2 \frac{U_{in} - U_{iv}}{2} / \sin 1''$

und $\bar{b} = \frac{1}{n} [b_i]$,

wo b_i die halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang ist, so wird die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Achsenäquator gleich (vergleiche Seite 37):

$$U_0 = \bar{U} - \frac{\bar{m}''}{15} \cotg(\mu - \bar{i}) + \bar{b} \operatorname{cosec} p \sec q.$$

Das zweite Glied rechter Hand darf vernachlässigt werden, da das Argument ($\mu - \bar{i}$) der Kotangente in mittlerer Breite im Maximum um rund 1^0 von 90^0 abweicht. Im letzten Glied darf, da \bar{b} klein ist, $\sec q = 1 + \dots$ gesetzt werden.

Die Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Achsenäquator wird dann gleich

$$U_0 = \bar{U} + \bar{b} \operatorname{cosec} p.$$

Zur Ableitung der Uhrkorrektur stehen nun folgende Daten zur Verfügung:

$$U', \bar{f}; \alpha', p'$$

und

$$U_0; \alpha, p; i,$$

so daß die Differenz der Stundenwinkel gleich

$$t' - t = (U' - \alpha') - (U_0 - \alpha)$$

wird.

Ein vollständig strenges System von Gleichungen zur Berechnung der Uhrkorrektur u läßt sich auf folgendem Weg aufstellen (Fig. 17). Der erste Vertikal schneide den größten Kreis, der den Ort S' des Polarsternes zur Zeit

U' mit dem Ort S des Südsternes zur Zeit U_0 im Achsenäquator verbindet, im Punkt Z_1 und es sei die Entfernung dieses Punktes vom Zenit Z gleich i_1 und seine Entfernung vom Pol P des Äquators gleich Φ_1 . Es sei Δt der Stundenwinkel des Punktes Z_1 ; es ist dann

$$U_0 + u = \alpha + t = \alpha + \Delta t + (t - \Delta t).$$

Die beiden Teile Δt und $(t - \Delta t)$, in die der Stundenwinkel t zerlegt wird, lassen sich wie folgt berechnen.

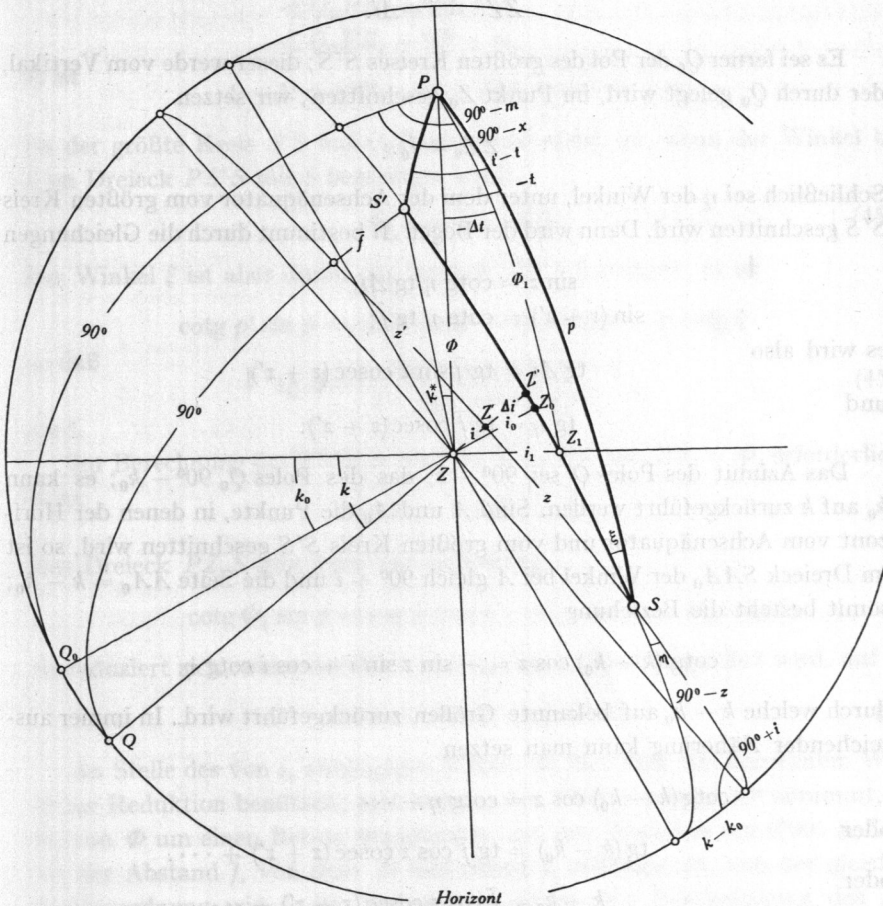


Fig. 17

a) Berechnung von Δt .

Es ist

$$\operatorname{tg} \Delta t = - \operatorname{tg} i_1 \operatorname{cosec} \Phi.$$

Der Bogen i_1 läßt sich mit Hilfe der Zenitdistanzen z und z' auf die Neigung i und den Abstand \bar{f} des Polarsternes vom Achsenäquator zurückführen. Es

schneide der durch den Pol Q des mittleren Achsenäquators gelegte Vertikal den Achsenäquator im Punkt Z' und den größten Kreis $S'S$ im Punkt Z'' . Dann ist

$$ZZ' = i$$

die mittlere Neigung der Instrumentenachse; wird

$$Z'Z'' = \Delta i,$$

gesetzt, so ist

$$ZZ'' = i + \Delta i.$$

Es sei ferner Q_0 der Pol des größten Kreises $S'S$; dieser werde vom Vertikal, der durch Q_0 gelegt wird, im Punkt Z_0 geschnitten; wir setzen

$$ZZ_0 = i_0.$$

Schließlich sei η der Winkel, unter dem der Achsenäquator vom größten Kreis $S'S$ geschnitten wird. Dann wird der Bogen Δi bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin z &= \cotg \eta \operatorname{tg} \Delta i, \\ \sin(z + z') &= \cotg \eta \operatorname{tg} \bar{f}; \end{aligned}$$

es wird also

$$\operatorname{tg} \Delta i = \operatorname{tg} \bar{f} \sin z \operatorname{cosec}(z + z')$$

und

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \bar{f} \operatorname{cosec}(z + z').$$

Das Azimut des Poles Q sei $90^\circ - k$, das des Poles Q_0 $90^\circ - k_0$; es kann k_0 auf k zurückgeführt werden. Sind A und A_0 die Punkte, in denen der Horizont vom Achsenäquator und vom größten Kreis $S'S$ geschnitten wird, so ist im Dreieck $SA A_0$ der Winkel bei A gleich $90^\circ + i$ und die Seite $AA_0 = k - k_0$; somit besteht die Beziehung

$$\cotg(k - k_0) \cos z = -\sin z \sin i + \cos i \cotg \eta,$$

durch welche $k - k_0$ auf bekannte Größen zurückgeführt wird. In immer ausreichender Näherung kann man setzen

$$\cotg(k - k_0) \cos z = \cotg \eta - \dots$$

oder

$$\operatorname{tg}(k - k_0) = \operatorname{tg} \bar{f} \cos z \operatorname{cosec}(z + z') + \dots$$

oder

$$k - k_0 = \bar{f} \cos z \operatorname{cosec}(z + z') + \dots$$

Das rechtwinklige Dreieck ZZ_0Z'' gibt jetzt den Wert von i_0 :

$$\operatorname{tg} i_0 = \operatorname{tg}(i + \Delta i) \cos(k - k_0)$$

und schließlich das rechtwinklige Dreieck ZZ_0Z_1 den Wert von i_1 :

$$\operatorname{tg} i_1 = \operatorname{tg} i_0 \sec k_0.$$

Für Δt erhält man also

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta t &= -\operatorname{tg} i_1 \operatorname{cosec} \Phi, \\ &= -\operatorname{tg} i_0 \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi, \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tg} \Delta t = -\operatorname{tg}(i + \Delta i) \cos(k - k_0) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi. \quad (44)$$

b) Berechnung von $(t - \Delta t)$.

Setzt man

$$\begin{aligned} \sphericalangle Q_0 P S &= 90^\circ - x, \\ \sphericalangle Q_0 P Z_1 &= 90^\circ - m, \end{aligned}$$

so ist

$$t - \Delta t = (90^\circ - m) - (90^\circ - x) = x - m.$$

Da der größte Kreis $S'S$ auf Q_0P senkrecht steht, ist, wenn der Winkel bei S im Dreieck $PS'S$ mit ξ bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \xi \cos \phi. \quad (45a)$$

Der Winkel ξ ist aber durch das Dreieck $PS'S$ bestimmt; es ist

$$\operatorname{cotg} \phi' \sin \phi = \cos \phi \cos(t' - t) + \sin(t' - t) \operatorname{cotg} \xi$$

so daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} \phi' \operatorname{cotg} \phi \sin(t' - t)}{1 - \operatorname{tg} \phi' \operatorname{cotg} \phi \cos(t' - t)} \quad (45b)$$

wird.

Zur Berechnung des Winkels m ist die Kenntnis von $PZ_1 = \Phi_1$ erforderlich; es ist

$$\cos \Phi_1 = \cos \Phi \cos i_1.$$

Das Dreieck PZ_1S gibt jetzt die Beziehung

$$\operatorname{cotg} \Phi_1 \sin \phi = \cos \phi \cos(x - m) - \sin(x - m) \operatorname{cotg} \xi;$$

sie reduziert sich, wenn der Wert von $\operatorname{tg} \xi$ nach (45a) eingeführt wird, auf

$$\sin m = \operatorname{cotg} \Phi_1 \operatorname{tg} \phi \sin x. \quad (46)$$

An Stelle des von i_1 abhängigen Wertes Φ_1 darf man den konstanten Wert Φ zur Reduktion benutzen; erst wenn i_1 den Wert von rund 30^s annimmt, ist Φ_1 von Φ um einen Betrag verschieden, der den Winkel m um 0^s001 ändert. Da der Abstand \bar{f} , von dem Δi und damit i_1 abhängig ist, von der gleichen Größenordnung wie i_1 ist, bedeutet es kaum eine Beschränkung des Beobachters, wenn man ihm die Verpflichtung auferlegt, den Polarstern nicht in größeren Abständen vom Achsenäquator als 30^s zu beobachten. Man darf dann zur Berechnung des Winkels Δt die Beziehung

$$\Delta t = -\left(i + \bar{f} \frac{\sin z}{\sin(z + z')}\right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi \quad (47)$$

verwenden.

Das Azimut k des Instrumentenvertikales folgt aus dem Azimut k^* des Polarsternes mit Hilfe der Beziehung

$$k = k^* + (i \cos z' + \bar{f}) \operatorname{cosec} z';$$

den Wert von k^* wird man einer Einstellungsstafel des Polarsternes entnehmen oder, wenn eine solche nicht zur Verfügung steht, mit Hilfe eines Näherungswertes der Uhrkorrektur aus den Beobachtungen selber berechnen.

2. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Die tägliche Aberration kann leicht nachträglich berücksichtigt werden. Setzt man im Differentialausdruck

$$\cos q \, du \sin p - \sin z \, da = \cos q \, d\alpha \sin p + \sin q \, dp$$

für die Verbesserungen $d\alpha \sin p$ und dp die Korrekturen wegen der täglichen Aberration

$$\begin{aligned} d\alpha \sin p &= 0'',322 \sin \Phi \cos t, \\ dp &= -0'',322 \sin \Phi \sin t \cos p \end{aligned}$$

ein und berücksichtigt die Beziehung

$$\cos a = -\cos q \cos t - \sin q \sin t \cos p,$$

so erhält man

$$\cos q \, du \sin p - \sin z \, da = +0'',322 \sin \Phi \cos a.$$

Läßt man diese Beziehung für den Südsterne gelten und setzt für den Polarstern, dessen Azimut gleich $180^\circ + a$ wird,

$$\cos q' \, du \sin p' - \sin z' \, da = -0'',322 \sin \Phi \cos a,$$

so folgt durch Elimination von da unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin p \cos q &= \cos \Phi \sin z + \sin \Phi \cos z \cos a, \\ \sin p' \cos q' &= \cos \Phi \sin z' - \sin \Phi \cos z' \cos a \end{aligned}$$

der Ausdruck

$$\sin \Phi \cos a (\sin z + \sin z') \, du = 0'',322 \sin \Phi \cos a (\sin z + \sin z'),$$

so daß die Verbesserung wegen der täglichen Aberration gleich

$$du = 0^s,0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')}$$

wird. Im Fall, daß an der Rektaszension des Südsterne die Korrektur wegen der täglichen Aberration angebracht worden ist, geht dieser Ausdruck über in

$$du = 0^s,0215 \frac{\sin z}{\sin(z + z')}.$$

Da $(z + z')$ nur unerheblich von der Poldistanz p des Südsterne abweicht, darf

du auch nach dem Ausdruck

$$du = 0^{\circ}0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\sin p} \text{ respektive } 0^{\circ}0215 \frac{\sin z}{\sin p}$$

berechnet werden.

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

Bezeichnet

- U' die Uhrzeit, zu welcher sich der Polarstern im Abstand $90^{\circ} + \bar{f}$ vom westlichen Pol des Achsenäquators befindet,
 U_0 die Zeit des Durchganges des Südsterne durch den Achsenäquator,
 i die auf das Westende bezogene Neigung der Achse,
 α', δ' } den Ephemeridenort des { Polarsternes,
 α, δ } { Südsterne,
 z, z' die Zenitdistanzen (z nach Süden, z' nach Norden positiv),
 $90^{\circ} - k$ das Azimut des Westendes der Achse,
 $k_0 = k - \bar{f} \cos z \operatorname{cosec}(z + z') = k - \dots,$

so folgt u aus der Durchrechnung des folgenden Systemes:

$$\begin{aligned} t' - t &= (U' - \alpha') - (U_0 - \alpha), \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg} \delta' \operatorname{tg} \delta \sin(t' - t) / (1 - \operatorname{cotg} \delta' \operatorname{tg} \delta \cos(t' - t)), \\ \sin m &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} x \cos x, \\ \Delta t &= - (i + \bar{f} \sin z \operatorname{cosec}(z + z')) \sec k_0 \sec \varphi, \\ u &= (\alpha - U_0) + (x - m) + \Delta t + 0^{\circ}0215 \frac{\sin z + \sin z'}{\cos \delta}. \end{aligned}$$

Wird das Instrument während des Sterndurchganges nicht umgelegt, so beobachtet man, um die Kollimation zu eliminieren, verschiedene Sterne abwechselnd in der einen oder anderen Lage; der Polarstern wird dann vorteilhaft auf den Mittelfaden eingestellt, auf welchen die Durchgangszeiten des Südsterne reduziert werden; in diesem Fall hat man, wenn die Kollimation mit c bezeichnet wird, als Wert von Δt einzuführen

$$\Delta t = - \left(i \pm c \frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')} \right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi \begin{cases} + \text{Lage I} \\ - \text{Lage II} \end{cases}$$

3. *Der mittlere Fehler der Uhrkorrektion und die günstigsten Umstände der Beobachtung*⁵⁾. Die Änderung, welche die Uhrkorrektion erfährt als Folge von Verbesserungen, die an den Ausgangsgrößen angebracht werden, kann entweder durch Differentiation des Ausdruckes für u abgeleitet werden oder aus den beiden Differentialausdrücken, die man einzeln für den Polarstern und den Südsterne aufstellen kann. Wir schlagen einen Mittelweg ein, der uns die geometrische Bedeutung der Beziehung, durch welche die wahren Fehler miteinander verbunden werden, leicht erkennen läßt.

Die Lage des Zenites Z wird gegeben als Schnittpunkt des Kleinkreises, der um den Pol P des Äquators mit dem Radius Φ geschlagen wird, mit dem Kleinkreis um den Pol Q des Achsenäquators mit dem Radius $90^\circ - i$; und Q wird gegenüber dem Dreieck $PS'S$ bestimmt durch den Schnittpunkt des Kleinkreises, der um S' mit dem Radius $90^\circ + \bar{f}$ geschlagen wird, mit der Polare des Punktes S . Werden Φ und i als fehlerfrei betrachtet, so übertragen sich die Fehler in der Lage der Punkte S' und S auf das Zenit nur durch den Fehler in der Lage des Punktes Q . Man kann das Dreieck $PS'S$ als fehlerfrei ansehen, wenn man die Fehler der Punkte S' und S den Abständen $S'Q$ und SQ zur Last legt. Als Fehler dieser Abstände kommen aber nur die Projektionen der Vektoren, durch welche die fehlerhaften Orte der Punkte S' und S mit den wahren Orten verbunden werden, auf die Richtungen von S' und S nach Q in Betracht. Diese Komponenten erhält man aus dem Differentialausdruck des Kotangentensatzes. Ist a das Azimut des Sternes, so besteht, wenn $d\Phi = 0$ angenommen wird, die Beziehung

$$\sin z \, da = \cos q \, dt \sin p - \sin q \, dp.$$

Die rechte Seite ist aber die Projektion des Vektors, der den Ort (t, p) mit dem Ort $(t + dt, p + dp)$ verbindet, auf die Richtung des Sternvertikales; setzt man

$$df = \cos q \, dt \sin p - \sin q \, dp,$$

so ist $(90^\circ + df)$ der Abstand des Ortes $(t + dt, p + dp)$ vom Pol des Sternvertikales, der im Azimut $90^\circ + a$ liegt. Wir scheiden aus df die von den Verbesserungen dU , $d\alpha$ und dp herrührenden Anteile aus und setzen

$$df_U = \cos q \, dU \sin p$$

$$df^* = \cos q \, d\alpha \sin p + \sin q \, dp;$$

es wird dann

$$\sin z \, da - \cos q \, du \sin p = df_U - df^* \equiv df.$$

Für den Polarstern hat man die analoge Gleichung

$$\sin z' \, da' - \cos q' \, du \sin p' = df_{U'} - df'^* \equiv df'.$$

Führt man da und da' auf die Verbesserung des gemeinsamen Instrumentenazimutes zurück und eliminiert dann diese Verbesserung aus den beiden Gleichungen, so erhält man die Verbesserung du als Funktion der beiden Verbesserungen df und df' .

Wirft man nun aber die Verbesserungen df und df' auf die Abstände SQ und $S'Q$, so hat man im Ausdruck

$$u = (\alpha - U) + (x - m) + \Delta t$$

nur Δt als fehlerhaft anzusehen; es wird also

$$du = \frac{\partial (\Delta t)}{\partial f} df + \frac{\partial (\Delta t)}{\partial f'} df';$$

hierin ist $d\bar{f} = -df'$ zu setzen, da $90^\circ + \bar{f}$ den Abstand des Punktes S' vom Pol des Vertikales oder Achsenäquators im Azimut $a' - 90^\circ$ bezeichnet.

Um die Ableitungen von Δt nach f und \bar{f} bilden zu können, ist Δt als Funktion von f und \bar{f} anzugeben. Aus der Superposition der Werte, die Δt annimmt, wenn entweder S' im Abstand \bar{f} oder S im Abstand f vom Achsenäquator angenommen wird, folgt

$$\Delta t = - \left(i + \frac{\bar{f} \sin z + f \sin z'}{\sin(z + z')} \right) \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi,$$

so daß

$$du = \frac{d\bar{f} \sin z + df \sin z'}{\sin(z + z')} \sec k_0 \operatorname{cosec} \Phi$$

wird.

Sind nun m' und m die mittleren Fehler, die den wahren Fehlern $d\bar{f}$ und df entsprechen, so wird der mittlere Fehler m_u , wenn $\sec k_0 = 1 + \dots$ gesetzt wird, gegeben durch den Ausdruck:

$$m_u^2 = \frac{m'^2 \sin^2 z + m^2 \sin^2 z'}{\sin^2(z + z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Die mittleren Fehler m' und m sind auf ihre Komponenten zurückzuführen:

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m_{U'}^2 + m_{\alpha'}^2) \cos^2 q' \sin^2 p' + \sin^2 q' m_{p'}^2, \\ m^2 &= (m_U^2 + m_{\alpha}^2) \cos^2 q \sin^2 p + \sin^2 q m_p^2. \end{aligned}$$

Beruhet die Polarisbeobachtung auf n' Einstellungen, die wir als Durchgangsbeobachtungen ansehen, so ist zu setzen:

$$\begin{aligned} m_{U'}^2 \cos^2 q' \sin^2 p' &= \frac{1}{n'} \cos^2 q' \left(a_0'^2 \sin^2 p' + \frac{b_0'^2}{V^2} \right), \\ m_{\alpha'}^2 \cos^2 q' \sin^2 p' + m_{p'}^2 \sin^2 q' &= m^{*2}. \end{aligned}$$

In der letzten Beziehung ist angenommen, daß dem absoluten Betrage nach $m_{\alpha'} \sin p'$ und $m_{p'}$ gleich groß seien. In der ersten Beziehung darf das erste Glied der Klammer wegen des kleinen Wertes von p' neben dem zweiten Glied vernachlässigt werden, und für $\cos^2 q'$ führen wir den Mittelwert $\frac{1}{2}$ aller möglichen gleichmäßig verteilten Fälle ein; es wird dann

$$m_{U'}^2 \cos^2 q' \sin^2 p' = \frac{1}{n'} \frac{b_0'^2}{2V^2} = \frac{1}{n'} m_0'^2$$

mit

$$m_0'^2 = \frac{b_0'^2}{2V^2},$$

so daß

$$m'^2 = \frac{1}{n'} m_0'^2 + m^{*2}$$

wird.

Ist der Südsterne an n Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$m_U^2 \cos^2 q \sin^2 p = \frac{1}{n} \cos^2 q \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right),$$

oder, da wegen der Meridiannähe $\cos^2 q = 1$ gesetzt werden darf:

$$m_U^2 \cos^2 q \sin^2 p = \frac{1}{n} \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = \frac{m_0^2}{n},$$

mit

$$m_0^2 = \left(a_0^2 \sin^2 p + \frac{b_0^2}{V^2} \right).$$

Ferner wird

$$m_x^2 \cos^2 q \sin^2 p + m_p^2 \sin^2 q = m^{*2},$$

und somit

$$m^2 = \frac{m_0^2}{n} + m^{*2}.$$

Somit nimmt der Ausdruck für m_u^2 die Form an:

$$m_u^2 = m'^2 \frac{\sin^2 z + \nu \sin^2 z'}{\sin^2(z+z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi,$$

worin zur Abkürzung

$$\nu = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{m_0^2/n + m^{*2}}{m_0'^2/n' + m^{*2}}$$

gesetzt ist. Kennt der Beobachter die Zahlenwerte der in den mittleren Fehlern m und m' auftretenden Komponenten, so kann er die Zahlen n und n' so wählen, daß

$$\nu = 1,$$

also $m' = m$ ist; es wird dann

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 z'}{\sin^2(z+z')} \operatorname{cosec}^2 \Phi$$

oder auch, wenn man den Unterschied zwischen z' und Φ vernachlässigt:

$$m_u^2 = m^2 \frac{\sin^2 z + \sin^2 \Phi}{\sin^2(z+\Phi)} \operatorname{cosec}^2 \Phi. \quad (48)$$

Die Funktion

$$F(z, \Phi) = \frac{\sin^2 z + \sin^2 \Phi}{\sin^2(z+\Phi)}$$

hat einen Minimalwert für den Wert $z = z_0$, der durch die Bedingung

$$\operatorname{tg}(z_0 + \Phi) = 2 \operatorname{tg} \Phi$$

gegeben wird, und $F(z_0, \Phi)$ nimmt dann den Wert

$$F(z_0, \Phi) = \frac{1 + \sin^2 \Phi}{2}$$

an. Nachstehend sind zusammengehörige Werte von z_0 und $F(z_0, \Phi)$ für verschiedene Werte von Φ angegeben.

Φ	z_0	$F(z_0, \Phi)$
0°	0°0	0,50
10	4,0	0,52
20	9,9	0,56
30	13,9	0,62
40	17,2	0,71
50	19,2	0,79
60	19,1	0,88
70	16,1	0,94
80	9,4	0,98
90	0,0	1,00

In mittleren Breiten von $\varphi = 30^\circ$ bis $\varphi = 70^\circ$ liegt die günstigste Stelle in der Nähe von 15° Zenitdistanz. Geht man, um die Sterne aus einem breiteren Deklinationsbereich auswählen zu können, im Norden von z_0 bis ins Zenit und legt die südliche Grenze des Bereiches in die Zenitdistanz z_u , für welchen Wert $F(z_u, \Phi) = F(0, \Phi)$ wird, so ist z_u bestimmt durch die Bedingung

$$\operatorname{tg} z_u = \frac{\sin 2 \Phi}{1 - 2 \cos 2 \Phi} \equiv \operatorname{cotg} \Phi,$$

das heißt $z_u = \varphi$; der Bereich darf dann im Süden des Zenites bis zum Äquator ausgedehnt werden.

An Stationen, deren Breite unterhalb $\varphi = 30^\circ$ liegt, wird man die Döllensche Methode wegen der großen Zenitdistanz des Polarsternes nicht verwenden; sie hat vor der Zeitbestimmung im Meridian den Vorteil, daß das Azimut des Instrumentes nur während der kurzen Dauer der Beobachtung des Polarsternes und des Südsternes als konstant vorausgesetzt werden muß. Der Zeit proportionale Azimutänderungen werden übrigens in weitgehendem Maß unschädlich gemacht, wenn der Polarstern vor und nach dem Umlegen eingestellt wird.

ZAHLENBEISPIEL

Die Schweizerische geodätische Kommission hat im Jahre 1927 den Längenunterschied der Sternwarten in Zürich und Genf bestimmen lassen; zur Ermittlung der Uhrkorrekturen wurde die Döllensche Methode der Zeitbestimmung verwendet (vergleiche Band XXI der Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz). Diesen Beobachtungen entnehmen wir die folgenden Daten:

Ort: Zürich, $\varphi = 47^\circ 22' 38'' 5$.

Datum: 30. August 1927.

Beobachter: Dr. P. ENGI.

Instrument: Bambergisches Passageninstrument, Vergrößerung 86fach, unpersönliches Mikrometer.

Der bewegliche Faden ist auf den Polarstern je zweimal in beiden Lagen eingestellt worden; es ist

$$\text{zur Uhrzeit } U' = 21^{\text{h}}21^{\text{m}}00^{\text{s}}, \quad \bar{f} = -0^{\text{s}}826, \quad z' = 42^{\circ}08'1.$$

Ferner ist

$$U_0 = 21^{\text{h}}21^{\text{m}}34^{\text{s}}732, \quad i = +0^{\text{s}}009, \quad z = 27^{\circ}54'9$$

Das genäherte Azimut des Instrumentes ist

$$k_0 = -1^{\circ}27'.$$

Hiernach ist

$$\Delta t = - \left(+0^{\text{s}}009 - 0^{\text{s}}826 \frac{0,468}{0,940} \right) \cdot 1,0003 \cdot 1,477 = +0^{\text{s}}594.$$

Die Berechnung der Uhrkorrektur ist in der folgenden Tabelle dargestellt. Die Koordinaten des Polarsternes enthalten die Korrektur wegen der täglichen Aberration nicht.

$U'_0 =$	$21^{\text{h}}21^{\text{m}}00^{\text{s}}$	$\cotg \delta' \operatorname{tg} \delta \cos(t' - t) = a \dots$	$7,46218$
$\alpha' =$	$1 \ 36 \ 05^{\text{s}}92$	$1:(1-a) \dots \dots \dots$	$+1261$
		$\cotg \delta' \operatorname{tg} \delta \sin(t' - t) \dots \dots$	$7,783345_n$
$U_0 =$	$21 \ 21 \ 34^{\text{s}}732$	$\operatorname{tg} x \dots \dots \dots$	$7,784606_n$
$\alpha =$	$21 \ 18 \ 44,802$	$\cos x \dots \dots \dots$	-8
		$\cotg \delta \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots$	$0,487056$
		$\sin m \dots \dots \dots$	$8,271654_n$
$U' - \alpha' =$	$19 \ 44 \ 54^{\text{s}}08$		
$U_0 - \alpha =$	$+ \ 02 \ 49,930$		
$t' - t =$	$19 \ 42 \ 04,150$		
$\delta' =$	$88^{\circ}54'40",18$	$x = -0^{\circ}20'56",10$	
$\delta =$	$19 \ 29 \ 41,70$	$m = -1 \ 04 \ 15,71$	
$\cotg \delta' \dots$	$8,278893$	$x - m = +0 \ 43 \ 19,61$	
$\operatorname{tg} \delta \dots$	$9,549026$		
		$x - m = +2^{\text{m}}53^{\text{s}}307$	
		$\Delta t = +0 \ 00,594$	
		$\alpha - U_0 = -2 \ 49,930$	
		Korrektur wegen täglicher Aberration	
		$= +0 \ 00,011$	
$\sin(t' - t) \dots$	$9,955426_n$		
$\cotg \delta' \operatorname{tg} \delta \dots$	$7,827919$		
$\cos(t' - t) \dots$	$9,63426$		
		$u = +0^{\text{m}}03^{\text{s}}982$	

c) Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch den ersten Vertikal⁶⁾

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Es seien U_w und U_e die Uhrzeiten des Durchganges zweier Sterne durch den mittleren Achsenäquator, von denen der eine im Westen, der andere im Osten beobachtet worden ist. Wir nehmen die Absolutwerte der Stundenwinkel und setzen

$$t_w = (U_w + u) - \alpha_w,$$

$$t_e = \alpha_e - (U_e + u).$$

Der nördliche Pol Q des mittleren Achsenäquators habe den Stundenwinkel $180^{\circ} + \mu_N$ und die Poldistanz ν . Der größte Kreis, der Q mit dem Pol des Äquators verbindet, schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z' ; es

sei $PZ' = \Phi'$; der Meridian schneide den mittleren Achsenäquator im Punkte Z_0 ; es sei $PZ_0 = \Phi_0$.

Befindet sich der Weststern zur Uhrzeit U_w im Punkte S_w , der Oststern zur Uhrzeit U_e im Punkte S_e , so sind PS_wZ' und PS_eZ' rechtwinklige Dreiecke, so daß die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} \cos(t_w - \mu_N) &= \cotg p_w \operatorname{tg} \Phi', \\ \cos(t_e + \mu_N) &= \cotg p_e \operatorname{tg} \Phi'. \end{aligned} \quad (49)$$

Setzt man hierin

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \frac{t_w + t_e}{2}; \quad t_w = t_0 + \Delta t, \\ \Delta t &= \frac{t_w - t_e}{2}; \quad t_e = t_0 - \Delta t, \end{aligned} \right\} \quad (49a)$$

so erhält man durch Elimination von $\operatorname{tg} \Phi'$ die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\Delta t - \mu_N) = \cotg t_0 \frac{\sin(p_w - p_e)}{\sin(p_w + p_e)}; \quad (49b)$$

sie liefert den Wert von $(\Delta t - \mu_N)$, so daß

$$\mu_N = \Delta t - (\Delta t - \mu_N)$$

wird. Da Φ' und Φ_0 durch die Beziehung

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} \Phi'$$

miteinander verbunden werden, erhält man, wenn hierin der Wert von $\operatorname{tg} \Phi'$ nach den Beziehungen (49) eingeführt wird:

$$\cos \mu_N \operatorname{tg} \Phi_0 = \operatorname{tg} p_w \cos(t_w - \mu_N) \equiv \operatorname{tg} p_e \cos(t_e + \mu_N).$$

Schließlich erhält man $\Phi = PZ$ mit Hilfe der Beziehung

$$\operatorname{tg}(\Phi_0 - \Phi) = \operatorname{tg} i \sec a_N, \quad (50a)$$

in welcher i die Erhebung des Punktes Q über den Horizont, das ist die Neigung des mittleren Achsenäquators, und a_N das von N nach E positiv genommene Azimut des Punktes Q bedeutet. Da man die Neigung und das Azimut so klein als möglich hält, genügt es, zu setzen:

$$\Phi = \Phi_0 - i. \quad (50b)$$

Die Reduktion der Stundenwinkel auf den Durchgang durch den mittleren Achsenäquator

In der Beziehung (6a) setzen wir bei der Beobachtung des

$$\left. \begin{aligned} \text{Weststernes: } t &= t_{iw}; \quad \mu = 180^\circ + \mu_N; \quad \bar{t} = \bar{t}_{iw}, \quad t_{iw} - \bar{t}_{iw} = dt_{iw}, \\ \text{Oststernes: } t &= -t_{ie}; \quad \mu = \mu_N; \quad \bar{t} = -\bar{t}_{ie}, \quad t_{ie} - \bar{t}_{ie} = dt_{ie}; \end{aligned} \right\} e = +1;$$

es wird dann

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{dt_{iw}}{2} &= \operatorname{cosec} \left(\frac{\bar{t}_{iw} + t_{iw}}{2} - \mu_N \right) \\ &\times \left\{ \cos(\bar{t}_{iw} - \mu_N) 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} + \frac{\sin k}{\sin p \sin \nu} \right\}, *W, \\ 2 \sin \frac{dt_{ie}}{2} &= \operatorname{cosec} \left(\frac{\bar{t}_{ie} + t_{ie}}{2} + \mu_N \right) \\ &\times \left\{ \cos(\bar{t}_{ie} + \mu_N) 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{\sin k}{\sin p \sin \nu} \right\}, *E, \end{aligned} \right\} (51a)$$

worin k die halbe Summe der Kontaktbreite und des toten Ganges bezeichnet.

Am arithmetischen Mittel $t_{w,e} = \frac{1}{n} [\bar{t}_i]_{w,e}$ der Stundenwinkel ist dann die Korrektur

$$dt_{w,e} = \frac{1}{n} [dt_i]_{w,e}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

anzubringen.

Werden die Sterne nicht in sehr kleinen Zenitdistanzen beobachtet, so genügt die Näherungsformel

$$\left. \begin{aligned} *W \\ *E \end{aligned} \right\} dt_i = \operatorname{cosec}(\bar{t} \mp \mu_N) \left\{ \cos(\bar{t} \mp \mu_N) \frac{m''}{15} \pm k \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu \right\}, \quad (51b)$$

(in sec)

worin k in Zeitsekunden auszudrücken ist.

Die Benützung eines Niveaus zur Bestimmung der Achsenneigung wird überflüssig, wenn vor dem Umlegen das direkte Bild und nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes beobachtet wird. Im Moment des Durchganges durch den mittleren Achsenäquator befindet sich dann der Stern im Abstand $\varkappa_0 \cos z$ vom Instrumentenvertikal; bei der Benützung eines gebrochenen Fernrohres ist \varkappa_0 gleich der Differenz «Zapfenungleichheit \varkappa minus Biegungskollimation c » (vergleiche Seite 92/93). In der Beziehung (50b) hat man an Stelle von i entweder $+\varkappa_0$ oder $-\varkappa_0$ einzuführen, je nachdem der West- und der Oststern bei der Okularfolge Nord-Süd oder Süd-Nord beobachtet wird. Der Einfluß der Neigung auf die Polhöhe kann somit dadurch eliminiert werden, daß man die beobachteten Sternpaare gleichmäßig auf die Okularfolgen N-S und S-N verteilt.

Beobachtet man die beiden Sterne eines Paares nicht in der gleichen Okularfolge, sondern den Weststern zum Beispiel in der Folge N-S und den Oststern in der Folge S-N (oder beide in der umgekehrten Folge), so wird, wenn die Zenitdistanzen der beiden Sterne gleich groß sind, der Einfluß von \varkappa_0 schon im Resultat des einzelnen Paares eliminiert; sind die Zenitdistanzen nur angenähert gleich, so kann der verbleibende Rest dieses Einflusses dadurch unschädlich gemacht werden, daß an einem zweiten Abend die umgekehrte Okularfolge eingehalten wird. Leitet man aus solchen Beobachtungen den Zahlenwert von \varkappa_0 ab, so können die Einzelwerte von Φ wegen des Einflusses

von \varkappa_0 korrigiert werden; diese Korrektion beträgt

$$d\Phi = \Phi - \Phi_0 = \mp \varkappa_0 \frac{\sin(z_e - z_w)}{\sin(z_e + z_w)}, \quad \begin{cases} *W, N-S; *E, S-N, \\ *W, S-N; *E, N-S, \end{cases} \quad (51c)$$

wie sich aus dem Differentialausdruck des Kotangentensatzes ergibt. Setzt man darin

$$df = \sin p \cos q dt,$$

so bedeutet $90^\circ - df$ den Abstand des in den Ort $(t + dt, dp)$ verschobenen Sternes von demjenigen Pol des Instrumentalvertikales, dessen Azimut um 90° größer ist als das Azimut des Sternes. Es lauten also, da df gleich $\pm \varkappa_0 \cos z$ zu setzen ist, die beiden Differentialausdrücke

$$\begin{aligned} *W: \sin z_w da &= \cos z_w d\Phi \sin a_w \pm \varkappa_0 \cos z_w, & \begin{cases} \text{Ok N-S,} \\ \text{Ok S-N,} \end{cases} \\ *E: \sin z_e da &= \cos z_e d\Phi \sin a_e \pm \varkappa_0 \cos z_e, & \begin{cases} \text{Ok S-N,} \\ \text{Ok N-S.} \end{cases} \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\sin a_w = -\sin a_e = +1$ und eliminiert aus je zweien dieser Beziehungen die Azimutverbesserung da , indem man die Okularfolge «*W, N-S» mit der Okularfolge «*E, S-N» oder «*W, S-N» mit «*E, N-S» kombiniert, so erhält man die Beziehung (51c).

2. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Setzt man im Differentialausdruck des Kotangentensatzes $dU = du = 0$ und

$$\begin{aligned} d\alpha \sin p &= + 0,322 \sin \Phi \cos t, \\ dp &= - 0,322 \sin \Phi \sin t \cos p, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \sin z da^* - \cos z d\Phi \sin a^* &= - (\cos q d\alpha \sin p + \sin q dp) \\ &= + 0,322 \sin \Phi \cos a^*, \end{aligned}$$

da

$$\cos a^* = \cos t \cos q - \sin t \sin q \cos p$$

ist. Im ersten Vertikal ist aber $\cos a^* = 0$; es bedarf also weder $d\Phi$ noch da^* einer Verbesserung wegen der täglichen Aberration, wenn in die Rechnung die Ephemeridenörter eingeführt worden sind.

3. *Der mittlere Fehler der Polhöhe und die günstigsten Umstände der Beobachtung.* Wir setzen die Differentialbeziehung des Kotangentensatzes für den im Westen und im Osten beobachteten Stern an:

$$\begin{aligned} \sin z_w da^* - \cos z_w d\Phi \sin a^* &= \cos q_w d(U + u - \alpha)_w \sin p_w + \sin q_w dp_w, \\ \sin z_e da^* + \cos z_e d\Phi \sin a^* &= \cos q_e d(U + u - \alpha)_e \sin p_e + \sin q_e dp_e \end{aligned}$$

und eliminieren die Verbesserung da^* , indem wir $\sin a^* = 1$ setzen; die an Φ

anzubringende Verbesserung wird dann unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\cos q \sin \phi = \cos \Phi \sin z$$

gegeben durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \sin(z_w + z_e) d\Phi = & - \sin z_w \sin z_e (dU_w - dU_e) \cos \Phi \\ & - \sin z_w \sin z_e (du_w - du_e) \cos \Phi \\ & + (\cos q d\alpha \sin \phi + \sin q d\phi)_w \sin z_e \\ & - (\cos q d\alpha \sin \phi + \sin q d\phi)_e \sin z_w. \end{aligned} \quad (52)$$

Das von den Uhrkorrekturen abhängige Glied verschwindet, wenn $du_w = du_e$ ist, das heißt, wenn die Uhr keinen Gang hat; es ist aber, auch wenn ein Gang vorhanden ist, dafür kaum ein Fehlerbetrag in Rechnung zu stellen, wenn nur die Sterne so ausgewählt werden, daß sie kurz hintereinander zur Beobachtung kommen; es ist leicht, den Gang der Uhr so genau zu ermitteln, daß seine Unsicherheit keinen merklichen Fehler zur Folge hat.

Sehen wir die Verbesserungen als wahre Fehler an und gehen wir zu den mittleren Fehlern über, so erhalten wir die Beziehung:

$$\begin{aligned} \sin^2(z_w + z_e) m_\Phi^2 = & \sin^2 z_w \sin^2 z_e (m_{U_w}^2 + m_{U_e}^2) \cos^2 \Phi \\ & + (\sin^2 z_w + \sin^2 z_e) m^{*2}, \end{aligned} \quad (53a)$$

in welcher m_{U_w} und m_{U_e} die mittleren Fehler bezeichnen, die den wahren Fehlern dU_w und dU_e entsprechen; ferner ist der mittlere Fehler $m_\alpha \sin \phi$ und m_ρ gleich m^* gesetzt.

Ist der Weststern an n_w und der Oststern an n_e Fäden oder Kontakten beobachtet, so wird

$$\begin{aligned} m_{U_w}^2 \sin^2 z_w \cos^2 \Phi = & \frac{1}{n_w} \left(a_0^2 \sin^2 z_w \cos^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2} \right), \\ m_{U_e}^2 \sin^2 z_e \cos^2 \Phi = & \frac{1}{n_e} \left(a_0^2 \sin^2 z_e \cos^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2} \right). \end{aligned}$$

Sind die beiden Sterne in gleichen Zenitdistanzen und an gleich viel Fäden oder Kontakten beobachtet worden, so sind die rechten Seiten dieser Ausdrücke gleich groß. Sind die Zenitdistanzen nicht gleich groß, so nehmen wir an, es seien die Zahlen n_w und n_e so gewählt worden, daß die rechten Seiten einander gleich werden; ihr gemeinsamer Betrag sei m_0^2 . Es wird dann, wenn $m_0^2 + m^{*2} = m^2$ gesetzt wird:

$$m_\Phi^2 = \frac{\sin^2 z_w + \sin^2 z_e}{\sin^2(z_w + z_e)} m^2. \quad (53b)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für den mittleren Fehler m_Φ mit dem mittleren Fehler m_u der Uhrkorrektur, die aus den Durchgängen zweier Sterne durch denselben meridiannahen Vertikal ermittelt wird (vergleiche Seite 83), so ist ersichtlich, daß diese beiden mittleren Fehler in der gleichen Weise von

den Zenitdistanzen der beiden Sterne abhängig sind. Den kleinsten Wert nimmt die Funktion

$$F(z_w, z_e) = \frac{\sin^2 z_w + \sin^2 z_e}{\sin^2(z_w + z_e)}$$

an, wenn man $z_w = z_e = 0$ werden läßt, nämlich den Wert

$$F(0, 0) = \frac{1}{2};$$

es ist also am günstigsten, die Sterne so nahe als möglich beim Zenit zu beobachten. Beobachtet man einen Stern, zum Beispiel den Oststern, in der Zenitdistanz z_e , so erhält man eine größere Genauigkeit, wenn man den Weststern nicht in der Zenitdistanz $z_w = z_e$ beobachtet, sondern in der Zenitdistanz $z_w = z_0$, die so bestimmt wird, daß $F(z_0, z_e)$ einen Minimalwert annimmt; das ist dann der Fall, wenn z_0 auf Grund der Bedingung

$$\operatorname{tg}(z_0 + z_e) = 2 \operatorname{tg} z_e$$

gewählt wird. Zusammengehörige Werte von z_0 und z_e können der kleinen Tabelle auf Seite 85 entnommen werden, in welcher $-z'$ mit z_e zu identifizieren ist. Die Funktion F nimmt dann den Wert

$$F(z_0, z_e) = \frac{1 + \sin^2 z_e}{2}$$

an. Wenn man zum Beispiel zu einem gegebenen Oststern unter zwei verschiedenen Weststernen den zugehörigen Stern wählen kann, so wird man sich für den Stern entscheiden, dessen Zenitdistanz z_w der durch die Bedingung $\operatorname{tg}(z_w + z_e) = 2 \operatorname{tg} z_e$ bestimmten näher liegt.

4. *Vergleichung mit der Horrebaw-Talcott-Methode.* Läßt man in der Beziehung (53b) z_e und z_w gegen Null gehen, so nimmt der mittlere Fehler m_ϕ denselben Wert an, wie in der HORREBOW-TALCOTT-Methode; sein Quadrat ist gleich

$$m_\phi^2 = \frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b_0^2}{n V^2} + m^{*2} \right).$$

Das Analogon zur HORREBOW-TALCOTT-Methode würde ein Verfahren bilden, das so nahe Zenitsterne benützt, daß an Stelle von Durchgangsbeobachtungen Pointierungen eines beweglichen Vertikalfadens auf den Stern zur Messung seines Abstandes vom Achsenäquator treten. In der Praxis wird dieses Verfahren dadurch unmöglich gemacht, daß man nicht genügend viel helle Sterne zur Verfügung hat, die bei lotrechter Stellung des Fernrohres durch das Gesichtsfeld gehen. Man muß also bei Durchgangsbeobachtungen in größerer Zenitdistanz bleiben. Der Nachteil, daß man damit einen größeren mittleren Fehler gegenüber der HORREBOW-TALCOTT-Methode in Kauf nehmen muß, wird dadurch behoben, daß man während des Durchganges mehr Einzel-

beobachtungen anstellen kann. Während man bei der HORREBOW-TALCOTT-Methode nur drei bis höchstens fünf Pointierungen auf den Stern machen kann, ist es im ersten Vertikal möglich, den Stern vor und nach dem Umlegen an 10 Kontakten mit dem Registriermikrometer zu beobachten. Übrigens besteht hier wieder die Möglichkeit, nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes zu beobachten und dadurch die Verwendung des Niveaus überflüssig zu machen. Die HORREBOW-TALCOTT-Methode wird immer darauf angewiesen sein, die Ungleichheit der Zenitdistanz bei der Beobachtung der beiden Sterne mit Hilfe des Niveaus festzustellen.

5. *Die Beobachtung des gleichen Sternes im Osten und Westen* (Struvesche Methode). Man hat bisher empfohlen, die Polhöhe nicht aus den Durchgängen verschiedener Sterne, sondern aus den Durchgängen des gleichen Sternes durch den Ost- und Westvertikal abzuleiten. Zwischen der Beobachtung des Sternes im Osten und im Westen liegt dann ein großes Zeitintervall; es erreicht in mittleren Breiten, wenn $p - \Phi = 2^0$ ist, schon nahe 3^h . Die Methode der Polhöhenbestimmung mit Hilfe von Vertikaldurchgängen beruht nun aber auf der Voraussetzung, daß sich das Azimut des Instrumentes zwischen der Ost- und Westbeobachtung nicht ändere. Es liegt auf der Hand, daß man um so mehr Grund hat, Azimutänderungen zu befürchten, je größer das Intervall zwischen dem Ost- und Westdurchgang ist. Beobachtet man verschiedene Sterne und wählt sie so aus, daß sie kurz hintereinander beobachtet werden, so besteht weniger Grund, an der Konstanz des Azimutes zu zweifeln. Das ist aber nicht der einzige Vorteil, der mit der Beobachtung verschiedener Sterne verbunden ist. Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß man bei verschiedenen Sternen unbedenklich $du_w = du_e$ setzen darf. Wenn man diese Annahme auch im Fall der Beobachtung des gleichen Sternes machen will, so muß der Gang der Uhr sehr genau bekannt sein.

Um allgemein die mittleren Fehler, die in der einen oder andern Methode der Polhöhenbestimmung zu erwarten sind, miteinander zu vergleichen, spezialisieren wir den Ausdruck für den mittleren Fehler m_Φ im Fall der Beobachtung verschiedener Sterne auf die Annahme $z_w = z_e = z$; es wird dann

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2} \sec^2 z (m_0^2 + m^{*2}). \quad (54)$$

Um den Ausdruck für m_Φ im Fall der Beobachtung des gleichen Sternes im Osten und im Westen aufzustellen, greifen wir auf den Differentialausdruck (52) zurück und setzen darin

$$d\alpha_w = d\alpha_e = d\alpha; \quad dp_w = dp_e = dp; \quad q_e = -q_w = -q;$$

ferner nehmen wir $du_w = du_e$ an, um diese Methode nicht von vorneherein zu benachteiligen. Es wird dann

$$2 \cos z d\Phi = \sin z \cos \Phi (dU_w - dU_e) + 2 \sin q dp. \quad (55a)$$

Gehen wir zu den mittleren Fehlern über und nehmen wir für die mittleren Fehler von \bar{U}_w und \bar{U}_e die gleichen Werte an wie im Fall der Beobachtung verschiedener Sterne, so erhält man, da

$$\sin \Phi = \sin p \sin q$$

ist, den Ausdruck:

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2} \sec^2 z \left(m_0^2 + 2 \frac{\sin^2 \Phi}{\sin^2 p} m^{*2} \right). \quad (55b)$$

Die Ausdrücke (54) und (55b) unterscheiden sich nur durch die Komponente, welche von der Unsicherheit m^* des Sternortes herrührt. Der Koeffizient von m^{*2} in (55b) nimmt im allgemeinen wegen $\sin p \sim \sin \Phi$ Werte an, die zwischen 1 und 2 liegen. Der Koeffizient von m^{*2} wird gleich 1, wenn $\Phi = 45^\circ$ und $p = 90^\circ$ ist, das heißt, der Stern müßte in der Zenitdistanz $z = 90^\circ$ beobachtet werden, was – ganz abgesehen vom ungünstigen Einfluß der Refraktion – schon wegen des großen Zeitintervalles zwischen der Ost- und Westbeobachtung nicht in Frage kommt.

Die Beobachtung verschiedener Sterne an Stelle der Beobachtung des gleichen Sternes im Osten und Westen bietet somit folgende Vorteile:

1. Die Grundvoraussetzung der Methode, das ist die Konstanz des Azimutes während der Beobachtungen, kann leichter erfüllt werden.
2. Die Unsicherheit des Sternortes beeinflußt die Polhöhe weniger stark.
3. Der Uhrgang muß weniger genau bestimmt werden.
4. Da die Durchgänge in größeren Zenitdistanzen beobachtet werden dürfen, wird die Aufstellung eines gedrängten Beobachtungsprogrammes erleichtert.
5. Da sich die Beobachtungen der beiden Sterne unmittelbar folgen, können auch kurzdauernde Aufhellungen des Himmels ausgenützt werden.

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

α_w, p_w und α_e, p_e scheinbarer Ort des im Westen respektive im Osten beobachteten Sternes,

i Erhebung des nördlichen Achsenendes über dem Horizont,

a_N Azimut des nördlichen Achsenendes, positiv von N nach E,

z halbe Summe der Kontaktbreite und des toten Ganges in Zeitsekunden,

u Uhrkorrektion,

U'_i, U''_i ($i = 1, 2, \dots, n$) die am gleichen Kontakt oder Faden vor und nach dem Umlegen beobachtete Durchgangszeit,

$$\bar{U}_i = \frac{1}{2} (U'_i + U''_i), \quad \bar{U} = \frac{1}{n} [\bar{U}_i], \quad \bar{t}_i = |\bar{U}_i + u - \alpha|,$$

$$m''_i = 2 \sin^2 \frac{U''_i - U'_i}{2} / \sin 1'',$$

$\mu_N + 12^h$ Stundenwinkel } des nördlichen Poles des Achsenäquators.
 ν Poldistanz }

Bei kleinen Werten von i und a_N ist

$$\mu_N = a_N \sec \Phi, \quad \nu = 90^\circ - \Phi.$$

$$dt_i^{\text{sec}} = \text{cosec}(\bar{t}_i \mp \mu_N) \cdot \left(\cos(\bar{t}_i \mp \mu_N) \cdot \frac{m''_i}{15} \pm \varkappa \text{cosec } p \text{ cosec } \nu \right) \begin{cases} * \text{ West} \\ * \text{ Ost} \end{cases}$$

$$dt = \frac{1}{n} [dt_i].$$

Meist genügt es mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{n} [t_i] \\ \bar{m}'' &= \frac{1}{n} [m''_i] \end{aligned} \right\} \text{ zu setzen:}$$

$$dt^{\text{sec}} = \text{cosec}(\bar{t} \mp \mu_N) \cdot \left(\cos(\bar{t} \mp \mu_N) \cdot \frac{\bar{m}''}{15} \pm \varkappa \text{cosec } p \text{ cosec } \nu \right) \begin{cases} * \text{ West} \\ * \text{ Ost} \end{cases}$$

$$t_w = \frac{1}{n} [t_i]_w + dt_w; \quad t_e = \frac{1}{n} [t_i]_e + dt_e;$$

$$t_0 = \frac{1}{2} (t_w + t_e); \quad \Delta t = \frac{1}{2} (t_w - t_e);$$

$$\text{tg}(\Delta t - \mu_N) = \text{cotg } t_0 \frac{\sin(p_w - p_e)}{\sin(p_w + p_e)},$$

$$\mu_N = \Delta t - (\Delta t - \mu_N),$$

$$\cos \mu_N \text{tg } \Phi_0 = \text{tg } p_w \cos(t_w - \mu_N) \equiv \text{tg } p_e \cos(t_e + \mu_N),$$

$$\Phi = \Phi_0 - i.$$

Bleibt die Neigung nicht völlig konstant, so kann die Durchgangszeit des einen Sternes auf die beim Durchgang des anderen Sternes vorhandene Neigung mittels der Beziehung (9b) Seite 40, reduziert werden.

ERSTES ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen.

Instrument: Bambergisches Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer und mit automatischer Nachführung des Fernrohres in Zenitdistanz; Vergrößerung 86fach.

Beobachter: Dr. J. O. FLECKENSTEIN.

Zeit: 26. November 1940.

Im Westen ist α Cyg, im Osten λ Andr an je 11 Kontakten vor und nach dem Umlagen beobachtet worden. Die folgende Tabelle 1 enthält die Werte von \bar{U}_i und von $\vartheta_i = \frac{1}{2} (U''_i - U'_i)$.

Tabelle 1

α Cyg W			λ Andr E		
\bar{U}_i	ϑ_i	m_i''	\bar{U}_i	ϑ_i	m_i
22 ^h 13 ^m 43 ^s 11	1 ^m 39 ^s 81	5,33	22 ^h 24 ^m 09 ^s 34	1 ^m 56 ^s 64	7,42
43,29	34,91	4,91	08,87	50,27	6,03
43,48	29,58	4,38	08,76	43,42	5,83
43,50	24,82	3,92	08,81	37,01	5,13
43,40	18,96	3,40	08,54	30,16	4,42
43,83	14,75	3,05	08,31	23,01	3,77
44,00	09,82	2,65	08,32	16,50	3,19
43,92	04,53	2,27	07,98	10,35	2,70
43,90	0 59,62	1,93	07,94	04,04	2,23
44,20	54,03	1,59	08,36	0 56,06	1,71
44,59	48,21	1,27	08,09	49,68	1,34
Mittel 43,747		3,15	Mittel 08,484		3,98

Es beträgt die genäherte Uhrkorrektur $u = - 30,36$
 die Neigung der Achse $i = + 0,82$
 (Kontaktbreite + toter Gang): 2 $\varkappa = + 0,047$
 das Azimut des Nordendes der Achse $\alpha_N = + 1,0$

Ferner ist $\Phi = 42^{\circ}27'33''$
 und genähert: $\mu_N = \alpha_N \sec \Phi = + 1,4$
 $\nu = 47^{\circ}32'27''$.

Die Berechnung der Reduktion der Durchgangszeiten auf den Achsenäquator und die Berechnung der Polhöhe ist in den beiden folgenden Tabellen 2 und 3 dargestellt.

Tabelle 2

	α Cyg W	λ Andr E
$\bar{U} =$	22 ^h 13 ^m 43 ^s 747	22 ^h 24 ^m 08 ^s 484
$u =$	- 30,36	- 30,36
$\bar{U} + u =$	22 13 13,387	22 23 38,124
$\alpha =$	20 39 24,57	23 34 41,10
$\bar{i} =$	1 33 48,817	1 11 02,976
$\phi =$	44 ^o 55'30,90	43 ^o 51'25,67
$\mp \mu_N =$	- 1 ^s 4	+ 1 ^s 4
$\bar{i} \mp \mu_N =$	1 ^h 33 ^m 47,4	1 ^h 11 ^m 04,4
$\operatorname{cosec} \phi =$	1,416	1,443
$\operatorname{cosec} \nu =$	1,356	1,356
$\operatorname{cosec} (\bar{i} \mp \mu_N) =$	2,513	3,277
$\operatorname{cosec} \phi \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec} (\bar{i} \mp \mu_N) =$	4,824	6,411
$\operatorname{cotg} (\bar{i} \mp \mu_N) =$	2,306	3,120
$\frac{1}{15} \bar{m}'' =$	0,210	0,265
$\operatorname{cotg} (\bar{i} \mp \mu_N) \frac{\bar{m}''}{15} =$	+ 0,484	+ 0,826
$\pm \varkappa \operatorname{cosec} \phi \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec} (\bar{i} \mp \mu_N) =$	+ 0,227	- 0,301
$\bar{d}t =$	+ 0,711	+ 0,525
$t_w, t_e =$	1 ^h 33 ^m 49,53	1 ^h 11 ^m 03,50

Tabelle 3

$t_0 = \frac{1}{2}(t_w + t_e) = 1^{\text{h}}22^{\text{m}}26^{\text{s}}.515$; $p_w + p_e = 88^{\circ}46'56''.57$ $\Delta t = \frac{1}{2}(t_w - t_e) = 0 \ 11 \ 23,015$; $p_w - p_e = + 1 \ 04 \ 05,23$			
cotg t_0	0,4247151	$\Delta t - \mu_N = 0^{\text{h}}11^{\text{m}}21^{\text{s}}.183$	
sin $(p_w - p_e)$	8,2704721	$\mu_N = + 1,832$	
cosec $(p_w + p_e)$	0,0000981	$t_w - \mu_N = 1^{\text{h}}33^{\text{m}}47^{\text{s}}.70$	
tg $(\Delta t - \mu_N)$	8,6952853	$t_e + \mu_N = 1 \ 11 \ 05,33$	
cos $(t_w - \mu_N)$	9,9625665	cos $(t_e + \mu_N)$	9,9787636
tg p_w	9,9988668	tg p_e	9,9826699
cos μ_N tg Φ_0	9,9614333	cos μ_N tg Φ_0	9,9614335
$\cos \mu_N = 1$; $\Phi_0 = 42^{\circ}27'33''.54$ $- i = - 0''.82$ $\Phi = 42 \ 27 \ 32''.72$			

ZWEITES ZAHLENBEISPIEL (STRUVESCHE METHODE)

Wird der gleiche Stern nach der Struveschen Methode im Osten und Westen beobachtet, so ergibt sich die Poldistanz Φ nach den folgenden Beziehungen.

Nach der Beziehung (49b) ist wegen $p_e = p_w = p$

$$\Delta t - \mu_N = 0,$$

also

$$\mu_N = \frac{1}{2}(t_w - t_e).$$

Es wird dann

$$\text{tg } \Phi_0 = \text{tg } p \cos t_0 \sec \mu_N$$

mit

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_w + t_e),$$

und

$$\Phi = \Phi_0 - i \sec \mu_N.$$

Wir entnehmen dem Band 10 der Astronomisch-geodätischen Arbeiten in der Schweiz, Seite 157, die folgenden Daten:

Station: Suchet (Triangulationspunkt erster Ordnung des schweizerischen Dreiecknetzes); $\Phi = 43^{\circ}13'44''$.

Instrument: Repsold'sches Universalinstrument; 72fache Vergrößerung.

Beobachter: TH. NIETHAMMER.

Am 25. Juli 1900 ist der Stern α Cyg vor und nach dem Umlegen an je 4 Fäden des festen Netzes nach der Aug- und Ohrmethode beobachtet worden. Der scheinbare Ort des Sternes ist:

$$\alpha = 20^{\text{h}}10^{\text{m}}32^{\text{s}}.79; \quad p = 43^{\circ}33'28''.07.$$

In der folgenden Tabelle sind die auf Sternzeit reduzierten Durchgangszeiten

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(U' + U'')$$

und die halben Differenzen

$$\vartheta = \frac{1}{2}(U'' - U')$$

zusammengestellt; ferner sind die vor und nach dem Umlegen bestimmten Neigungen i' und i'' angeben.

Tabelle 1

Faden	Ostdurchgang Okular N-S		Westdurchgang Okular S-N	
	\bar{U}	ϑ	\bar{U}	ϑ
6	19h36m04 ^s 85	4m43 ^s 04	20h44m57 ^s 87	4m43 ^s 44
5	35 56,59	3 31,30	45 06,77	3 31,34
4	35 50,85	2 22,74	45 11,77	2 23,14
3	35 46,89	1 12,00	45 15,52	1 11,89
$i' = - 3'',76$		$i'' = - 6'',90$	$i' = - 7'',36$	$i'' = - 3'',72$

Tabelle 2

Ostdurchgang					
Faden		6	5	4	3
$\bar{t}_{ie} =$	0h34m +	27 ^s 94	36 ^s 20	41 ^s 94	45 ^s 90
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{ie} + t_e) =$	0 34 +	37,5	41,6	44,5	46,5
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{ie} + t_e) + \mu_N =$	0 34 +	36,0	40,1	43,0	45,0
$t_{ie} + \mu_N =$	0 34 +	26,4	34,7	40,4	44,4
$\lg \operatorname{cosec} (\frac{1}{2}(\bar{t}_{ie} + t_e) + \mu_N) =$		0,8228	0,8219	0,8213	0,8209
$\lg \cos (\bar{t}_{ie} + \mu_N) =$		9,9951	9,9950	9,9950	9,9950
$\lg 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} / \sin 1'' =$		1,6404	1,3866	1,0458	0,4514
$C \lg 15 =$		8,8239			
$\lg dt_{ie} =$		1,2822	1,0274	0,6860	0,0912
Westdurchgang					
$\bar{t}_{iw} =$	0h34m +	25 ^s 08	33 ^s 98	38 ^s 98	42 ^s 73
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{iw} + t_w) =$	0 34 +	34,5	39,0	41,5	43,4
$\frac{1}{2}(\bar{t}_{iw} + t_w) - \mu_N =$	0 34 +	36,0	40,5	43,0	44,9
$t_{iw} - \mu_N =$	0 34 +	26,6	35,5	40,5	44,2
$\lg \operatorname{cosec} (\frac{1}{2}(\bar{t}_{iw} + t_w) - \mu_N) =$		0,8230	0,8218	0,8213	0,8209
$\lg \cos (\bar{t}_{iw} - \mu_N) =$		9,9951	9,9950	9,9950	9,9950
$\lg 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} / \sin 1'' =$		1,6416	1,3867	1,0482	0,4502
$C \lg 15 =$		8,8239			
$\lg dt_{iw} =$		1,2836	1,0274	0,6884	0,0900
$dt_{ie} =$		19 ^s 15	10 ^s 65	4 ^s 85	1 ^s 23
$dt_{iw} =$		19,21	10,65	4,88	1,23
$t_{ie} =$	0h34m +	47,09	46,85	46,79	47,13
$t_{iw} =$	0 34 +	44,29	44,63	43,86	43,96

Die Berechnung der Stundenwinkel t_{ie} und t_{iw} des Durchganges durch den Achsenäquator aus den einzelnen Fadenbeobachtungen ist in Tabelle 2 dar-

gestellt. Der kleinen Zenitdistanzen respektive Stundenwinkel wegen muß dieser Berechnung die genaue Beziehung (51a) zugrunde gelegt werden. Als Näherungswerte der Stundenwinkel t_e und t_w des Durchgangs durch den Achsenäquator und als Näherungswert von μ_N sind angenommen worden

$$\left. \begin{array}{l} t_e = 0^{\text{h}}34^{\text{m}}47^{\text{s}},0 \\ t_w = 0^{\text{h}}34^{\text{m}}44,0 \end{array} \right\} \mu_N = -1^{\text{s}},50;$$

sie weichen von den damit berechneten Werten

$$\left. \begin{array}{l} t_e = \frac{1}{n} [t_{ie}] = 0^{\text{h}}34^{\text{m}}46^{\text{s}},96 \\ \quad \quad \quad \pm 0,085 \\ t_w = \frac{1}{n} [t_{iw}] = 0^{\text{h}}34^{\text{m}}44^{\text{s}},18 \\ \quad \quad \quad \pm 0,174 \end{array} \right\} \mu_N = -1^{\text{s}},38$$

so wenig ab, daß die Rechnung nicht wiederholt zu werden braucht; es ist definitiv

$$\mu_N = \frac{1}{2} (t_w - t_e) = -1^{\text{s}},38,$$

$$t_0 = \frac{1}{2} (t_w + t_e) = 0^{\text{h}}34^{\text{m}}45^{\text{s}},57.$$

Es wird somit:

$$\begin{array}{r} \lg \operatorname{tg} p = 9,978\ 1274 \\ \lg \cos t_0 = 9,994\ 9857 \\ \lg \sec \mu_N = 0 \\ \hline \lg \operatorname{tg} \Phi_0 = 9,973\ 1131 \\ \Phi_0 = 43^{\circ}13'39'',22 \\ - i = + 5,44 \\ \hline \Phi = 43^{\circ}13'44'',66 \end{array}$$

i ist das Mittel der vier beobachteten Neigungen.

Die innere Genauigkeit des Φ -Wertes läßt sich mit Hilfe der Beziehung

$$m_{\Phi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} z \cos \Phi \sqrt{m_{t_e}^2 + m_{t_w}^2}$$

abschätzen; sie folgt aus der Beziehung (55a), wenn darin $dp = 0$ gesetzt wird. Mit den angegebenen mittleren Fehlern der Stundenwinkel t_e und t_w , mit welchen die mittleren Fehler m_{U_e} und m_{U_w} zu identifizieren sind und mit den Werten $\operatorname{tg} z = 0,105$ und $\cos \Phi = 0,729$ erhält man in Bogensekunden:

$$m_{\Phi} = \pm 15 \cdot 0,038 \sqrt{0^{\text{s}},085^2 + 0^{\text{s}},174^2} = \pm 0^{\text{s}},11.$$

DRITTES ZAHLENBEISPIEL

Beobachtung des direkten Bildes vor dem Umlegen und des von einem Quecksilberhorizont reflektierten Bildes nach dem Umlegen.

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel in Binningen.

Instrument: Bambergisches Passageninstrument mit mechanischer Nachführung des beweglichen Fadens und automatischer Nachführung des Fernrohres in Zenitdistanz; Vergrößerung 86fach.

Beobachter: Dr. J. O. FLECKENSTEIN.

Datum: 20. Oktober 1945.

Die scheinbaren Rektaszensionen und Poldistanzen der beobachteten Sterne sowie ihre Zenitdistanzen sind in Tabelle 1 aufgeführt; die angegebenen Uhrkorrekturen sind aus den Zeitsignalen der Neuenburger Sternwarte abgeleitet.

Die mittleren Örter der beiden letzten Sterne sind dem Preliminary General Catalogue von Boss entnommen unter Berücksichtigung der systematischen Deklinationsreduktionen auf den Neuen Fundamentalkatalog FK 3, auf welchen sich die Örter der beiden ersten Sterne beziehen. Die kurzperiodischen Mondglieder sind nicht berücksichtigt.

Tabelle 1

Stern	α	p	z	u
β Lyr	18 ^h 48 ^m 03 ^s .382	56 ^o 41'50",33	41 ^o 54'	- 24 ^s 759
β Triang	02 06 18,838	55 16 05,83	39 27	- 24,771
Boss 746	03 15 20,096	55 58 29,86	40 40	- 24,801
λ Cyg	20 45 17,254	53 42 22,06	36 50	- 24,804

In der Tabelle 2 sind die mittleren Stundenwinkel \bar{t} mit ihren mittleren Fehlern angegeben; sie beruhen auf je 10 Doppelkontakten:

$$\bar{t} = \bar{U} + u - \alpha;$$

sie enthält ferner die an diesen Stundenwinkeln anzubringenden Reduktionen dt als Summe der beiden Reduktionen dt' und dt'' :

$$dt' = \frac{1}{10} \left[\frac{m''}{15} \right] \cotg \bar{t},$$

$$dt'' = \pm k \operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu \operatorname{cosec} \bar{t},$$

in welchen einzuführen ist:

$$k = 0^s0135,$$

$$\nu = 90^\circ - \Phi = 47^\circ32',5.$$

μ_N ist gleich Null angenommen worden.

Tabelle 2

Stern	Okularfolge	\bar{t}	m. F.	dt'	dt''	dt	t
β Lyr W	N-S	3 ^h 32 ^m 12 ^s .24	$\pm 0^s024$	+ 0 ^s 165	+ 0 ^s 274	+ 0 ^s 44	3 ^h 32 ^m 12 ^s .68
β Triang E	S-N	3 22 30,87	$\pm 0,018$	+ 0,205	- 0,288	- 0,08	3 22 30,79
Boss 746 E	N-S	3 27 22,68	$\pm 0,032$	+ 0,203	- 0,281	- 0,08	3 27 22,60
λ Cyg W	S-N	3 11 06,58	$\pm 0,036$	+ 0,278	+ 0,306	+ 0,58	3 11 07,16

Zur Berechnung der Polhöhe kombinieren wir die in der gleichen Okularfolge beobachteten Sterne miteinander. Die Berechnung ist in der Tabelle 3, Seite 120, dargestellt.

Die angegebenen mittleren Fehler bringen nur die innere Genauigkeit zum Ausdruck; sie sind mit Hilfe der Beziehung

$$m_\Phi^2 = \frac{\sin^2 z_w \sin^2 z_e}{\sin^2 (z_w + z_e)} (m_{U_w}^2 + m_{U_e}^2) \cos^2 \Phi$$

berechnet. Als Endwert ist anzunehmen

$$\Phi = 42^\circ27'32'',26 \pm 0'',13.$$

Tabelle 3

	β Lyr - Boss 746	β Triang - λ Cyg
$t_0 = \dots \dots \dots$	3h29m47 ^s ,64	3h16m48 ^s ,975
$\Delta t = \dots \dots \dots$	+ 2 25,04	- 5 41,815
$p_w - p_e = \dots \dots \dots$	+ 0 ^o 43'20",47	- 1 ^o 33'43",77
$p_w + p_e = \dots \dots \dots$	112 40 20,19	108 58 27,89
$\cotg t_0 \dots \dots \dots$	9,885 7885	9,936 0385
$\sin(p_w - p_e) \dots \dots \dots$	8,100 6152	8,435 5486 _n
$\operatorname{cosec}(p_w + p_e) \dots \dots \dots$	0,034 9284	0,024 2632
$\operatorname{tg}(\Delta t - \mu_N) \dots \dots \dots$	8,021 3321	8,395 8503 _n
$\Delta t - \mu_N = \dots \dots \dots$	+ 2m24 ^s ,43	- 5m42 ^s ,054
$\mu_N = \dots \dots \dots$	+ 0,61	+ 0,24
$t_w - \mu_N = \dots \dots \dots$	3h32m12 ^s ,07	3h11m06 ^s ,92
$t_e + \mu_N = \dots \dots \dots$	3 27 23,21	3 22 31,03
$\operatorname{tg} p_w \dots \dots \dots$	0,182 4714	0,134 0624
$\cos(t_w - \mu_N) \dots \dots \dots$	9,778 9565	9,827 3656
$\operatorname{tg} \Phi_0 \dots \dots \dots$	9,961 4279	9,961 4280
$\operatorname{tg} p_e \dots \dots \dots$	0,170 6033	0,159 1088
$\cos(t_e + \mu_N) \dots \dots \dots$	9,790 8251	9,802 3189
$\operatorname{tg} \Phi_0 \dots \dots \dots$	9,961 4284	9,961 4277
$\Phi = \Phi_0 \pm \alpha_0 = \dots \dots \dots$	42 ^o 27'32",31 ± 0,19	42 ^o 27'32",20 ± 0,18