Wird nur eine Genauigkeit von  $\pm 0$ 901 verlangt, so genügt es, zur Berechnung fünfstellige Logarithmen anzuwenden. Die Berechnung der Uhrkorrektion ist nachfolgend dargestellt:

	Uhrkorrektion = $-1^{m} 28,42$ , Ep. 17 <sup>h</sup> 9.
	Korrektur wegen täglicher Aberration $= +$ 0,014
	Niveaukorrektion $= +$ 0,097
(26	$\frac{1}{2} (\alpha_e + \alpha_w) - \frac{1}{2} (U_e + U_w)  \dots  = -2  37,92$
	$\overline{t} = + 1  09,39$
	$m-\overline{t}=-1  44,84$
	$m = -0^{\text{m}} 35,45 \text{ find being all }$
in noch, c	$+\sigma (m - \bar{t})$ 7 88 217
124 Treact	$tg m \dots 7,41124_n$
	$\cos m \dots 0$
	$\cot \lambda$ 9,91154 $\operatorname{cosec} \lambda$ 0,11076
	$tg \Delta \delta$ 7,73285, $tg \varphi$ 0,03857
	$\operatorname{tg}\delta$ 9,76 685 $\operatorname{tg}\Delta\delta$ 7,73 285 <sub>n</sub>

Ein zweites, unmittelbar anschließend beobachtetes Sternpaar ( $\alpha$  Lac und  $\eta$  Urs ma hat ergeben  $u=-1^{\rm m}28,36$ , Ep.  $18^{\rm h}1$ .

## Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch denselben Almukantarat (Pewzowsche Methode)<sup>2</sup>)

1. Ableitung der Reduktionsformeln. Wir unterscheiden die Größen, die sich auf die beiden Sterne beziehen, durch die Indizes s und n, indem wir annehmen, es seien die beiden Sterne, um die günstigsten Umstände einzuhalten, symmetrisch zum ersten Vertikal, der eine im Süden und der andere im Norden, beobachtet worden.

Es seien

Us, Un die beobachteten Uhrzeiten des Durchganges

 $\alpha_s$ ,  $\alpha_n$  die Rektaszensionen,

 $p_s$ ,  $p_n$  die Poldistanzen der Sterne.

Die Zenitdistanz  $z_s$ , in der der Südstern beobachtet worden ist, sei nicht genau gleich der Zenitdistanz  $z_n$  des Nordsternes; die Ablesungen des Niveaus sollen zu  $n_s$ ,  $n_n$  als Blasenmitten geführt haben. Mit  $p_0$  als Parswert des Niveaus ist dann

$$z_s - z_n \equiv \Delta z = \pm (n_s - n_n) p_0 \begin{cases} + \text{ Nullstrich außen,} \\ - \text{ Nullstrich innen.} \end{cases}$$
 (24)

Wir korrigieren die Uhrzeit  $U_s$  des Südsternes auf die bei der Beobachtung des Nordsternes vorhandene Zenitdistanz; die korrigierte Uhrzeit wird gleich

$$U_s = rac{\Delta z}{\sin \Phi \sin a_s}$$
 . We take much shows said

Die Stundenwinkel der beiden Sterne beim Durchgang durch den Almukantarat von der Zenitdistanz  $z_n$  werden also gleich:

$$t_s = U_s + u - \alpha_s - \Delta t,$$
  
 $t_n = U_n + u - \alpha_n,$ 

mit

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\sin \Phi \sin a_s} \,. \tag{25}$$

Es wird dann

$$\cos t_s = \cos (t'_s - \Delta t) = \cos t'_s + \Delta t \sin t'_s + \cdots,$$

wenn

$$t' = U_s + u - \alpha_s \tag{26}$$

gesetzt wird.

Eliminiert man aus den Beziehungen

$$\cos z_n = \cos \Phi \cos p_s + \sin \Phi \sin p_s (\cos t'_s + \Delta t \sin t'_s),$$
  
 $\cos z_n = \cos \Phi \cos p_n + \sin \Phi \sin p_n \cos t_n$ 

die gemeinsame Zenit<br/>distanz  $z_n$ , so erhält man mit der Abkürzung

$$\frac{1}{N} = \cos p_n - \cos p_s$$

zur Berechnung von  $\Phi$  die Beziehung

$$\cot \Phi = N \left( \sin \phi_s \cos t'_s - \sin \phi_n \cos t_n + \Delta t \sin \phi_s \sin t'_s \right)$$

oder, wenn  $\Phi'$  durch die Beziehung

$$\cot \Phi' = N \left( \sin p_s \cos t'_s - \sin p_n \cos t_n \right) \tag{27}$$

definiert wird:

$$\cot \Phi = \cot \Phi' + \Delta t \cdot N \sin \phi_s \sin t'_s$$
.

Hieraus folgt

$$\frac{\sin(\Phi' - \Phi)}{\sin \Phi \sin \Phi'} = \Delta z \cdot N \frac{\sin p_s \sin t_s'}{\sin \Phi \sin a_s}$$

oder in immer ausreichender Annäherung

$$\Phi' - \Phi = \Delta z \cdot N \frac{\sin p_s \sin t_s'}{\sin a_s} \sin \Phi' + \cdots$$
 (28)

Die Größe N kann in folgender Weise umgeformt werden. Setzt man

$$p=\frac{1}{2}\left(p_s+p_n\right)$$

und

$$\Delta p = \frac{1}{2} (p_s - p_n),$$

so wird

$$\frac{1}{N} = 2\sin\phi\sin\Delta\phi. \tag{29a}$$

Eine zweite Form folgt aus den Beziehungen

$$\cos p_n = \cos \Phi \cos z_n - \sin \Phi \sin z_n \cos a_n,$$
  
$$\cos p_s = \cos \Phi \cos z_s - \sin \Phi \sin z_s \cos a_s;$$

es wird, da  $z_s = z_n$  ist:

$$\frac{1}{N} = \sin \Phi \sin z_n \left(\cos a_s - \cos a_n\right). \tag{29b}$$

Wird dieser Wert von N in die Beziehung (28) eingeführt und berücksichtigt man noch, daß

$$\sin p_s \sin t_s = \sin z_n \sin a_s$$

ist, so erhält man

$$\Phi' - \Phi = \frac{\Delta z}{\cos a_s - \cos a_n} = \frac{\Delta z}{2\cos a_s}$$

mit  $\cos a_n = -\cos a_s$ , so daß schließlich

$$\Phi = \Phi' \mp \frac{(n_s - n_n) \cdot p_0}{2} \sec a_s \begin{cases}
- \text{Nullstrich außen} \\
+ \text{Nullstrich innen}
\end{cases}$$
(30)

wird.

2. Berechnung der Polhöhe mit Hilfe des arithmetischen Mittels der Uhrzeiten. Berechnet man  $\Phi$  mit den Mittelwerten  $\overline{U}_s$  und  $\overline{U}_n$  der einzelnen Uhrzeiten, so ist eine Verbesserung  $d\Phi$  anzubringen, die durch die Beziehung

$$(\cos a_s - \cos a_n) d\Phi = \sin \Phi (d\overline{U}_s \sin a_s - d\overline{U}_n \sin a_n)$$

gegeben wird; sie folgt aus dem Differentialausdruck (32), wenn darin

$$\frac{\sin p_s \sin q_s = \sin \Phi \sin a_s}{\sin p_n \sin q_n = \sin \Phi \sin a_n} da = dp = du = 0$$

gesetzt wird;  $d\overline{U}_s$  und  $d\overline{U}_n$  sind die Verbesserungen, durch welche die mittleren Uhrzeiten  $\overline{U}_s$ und  $\overline{U}_n$  auf die mittlere Zenitdistanz z bezogen werden. Die Werte von  $d\overline{U}_s$  und  $d\overline{U}_n$  werden in Bogensekunden gleich (vergl. Seite 57/58)

$$egin{align} d\overline{U}_s &= rac{[m_s'']}{n} \left( \cot t_s - rac{\partial z_s}{\partial t} \cot t_s 
ight), \ d\overline{U}_n &= rac{[m_n'']}{n} \left( \cot t_n - rac{\partial z_n}{\partial t} \cot t_s 
ight). \end{align}$$

Hierin ist, da die Sterne symmetrisch zum ersten Vertikal beobachtet werden, zu setzen

$$a_n = 180^{\circ} - a_s$$
;  $\frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial z_n}{\partial t} = \sin \Phi \sin a_s$ ;

es ist dann, von Beobachtungsfehlern abgesehen, auch

$$[m_s''] = [m_n''] = [m''].$$

Aus den Beziehungen

$$\cot z \sin \Phi = -\cos \Phi \cos a_s + \sin a_s \cot t_s,$$
 $\cot z \sin \Phi = \cos \Phi \cos a_s + \sin a_s \cot t_n,$ 

64

$$\cot t_s - \cot t_n = 2 \cos \Phi \cot t_s,$$

so daß

$$\sin \Phi \sin a_s (d\overline{U}_s - d\overline{U}_n) = \frac{[m'']}{n} \cdot 2 \sin \Phi \cos \Phi \cos a_s$$
 and below as

wird; in Bogensekunden wird schließlich

$$d\varphi = -d\Phi = -\frac{[n'']}{2n}\sin 2\varphi. \tag{31}$$

3. Der Einfluß der täglichen Aberration. Führt man die Verbesserungen wegen der täglichen Aberration

$$d\alpha \sin \phi = + 0,322 \sin \Phi \cos t,$$
  
$$d\phi = -0,322 \sin \Phi \sin t \cos \phi$$

in die Beziehung (32), in der alle Verbesserungen außer den von der Rektaszension und der Poldistanz abhängigen gleich Null gesetzt sind, ein:

$$(\cos a_s - \cos a_n) d\Phi = -\sin q_s d\alpha_s \sin p_s + \cos q_s dp_s + \sin q_n d\alpha_n \sin p_n - \cos q_n dp_n$$

und berücksichtigt, daß

$$\cos t \sin q + \sin t \cos q \cos p = \sin a \cos z$$

ist, so erhält man

$$(\cos a_s - \cos a_n) d\Phi = -0\%322 \sin \Phi \cos z (\sin a_s - \sin a_n);$$
es wird also  $d\Phi = 0$ , wenn  $a_s + a_n = 180^\circ$ .

## Zusammenstellung der Reduktionsformeln

Sind

 $U_s$ ,  $U_n$  die beobachteten Uhrzeiten,

as, an die Rektaszensionen

 $\delta_s$ ,  $\delta_n$  die Deklinationen der Sterne,

 $n_s$ ,  $n_n$  die Blasenmitten,

po der Parswert des Niveaus in Bogensekunden,

u die Uhrkorrektion,

so erhält man die Polhöhe  $\varphi=90^{0}-\Phi$  aus der Durchrechnung des folgenden Systems:  $t_{s}=U_{s}+u-\alpha_{s}; \quad t_{n}=U_{n}+u-\alpha_{n};$ 

$$\begin{split} \frac{1}{N} &= 2\cos\frac{\delta_s + \delta_n}{2}\sin\frac{\delta_n - \delta_s}{2};\\ \operatorname{tg} \varphi' &= N\left(\cos\delta_s\cos t_s - \cos\delta_n\cos t_n\right)\\ \varphi &= \varphi' \pm \frac{(n_s - n_n)\; p_0}{\cos a_s - \cos a_n} \left( \begin{array}{c} + \operatorname{Nullstrich\;außen} \\ - \operatorname{Nullstrich\;innen} \end{array} \right); \end{split}$$

Die rechte Seite ist noch durch die Korrektion  $d\varphi$  nach Beziehung (31) zu ergänzen, wenn die Berechnung mit den Mittelwerten  $\overline{U}_s$  und  $\overline{U}_n$  der Uhrzeiten durchgeführt wurde.

4. Die günstigsten Umstände der Beobachtung und der mittlere Fehler der Polhöhe. Aus den beiden Differentialbeziehungen

$$\begin{aligned} dz' + \cos a_s \ d\Phi - \sin a_s \ du \sin \Phi &= \sin q_s \ d(U_s - \alpha_s) \sin p_s + \cos q_s \ dp_s - dr_s, \\ dz' + \cos a_n \ d\Phi - \sin a_n \ du \sin \Phi &= \sin q_n \ d(U_n - \alpha_n) \sin p_n + \cos q_n \ dp_n - dr_n \end{aligned}$$
 folgt

$$(\cos a_s - \cos a_n) d\Phi - (\sin a_s - \sin a_n) du \sin \Phi$$

$$= (\sin q_s dU_s \sin p_s - \sin q_n dU_n \sin p_n)$$

$$- (\sin q_s d\alpha_s \sin p_s - \sin q_n d\alpha_n \sin p_n)$$

Beobachtet man die Sterne in Azimuten, die symmetrisch zum West- oder Ostvertikal liegen, so ist

+  $(\cos q_s dp_s - \cos q_n dp_n) - (dr_s - dr_n)$ .

$$a_n = 180^0 - a_s$$

und somit

$$\sin a_s - \sin a_n = 0$$

und

$$\cos a_s - \cos a_n = 2\cos a_s.$$

In diesem Fall hat ein Fehler du keinen Einfluß auf die Polhöhe, und es wird

$$2 \cos a_s d\Phi = \sin q_s dU_s \sin p_s - \sin q_n dU_n \sin p_n$$

$$- (\sin q_s d\alpha_s \sin p_s - \cos q_s dp_s)$$

$$+ (\sin q_n d\alpha_n \sin p_n - \cos q_n dp_n) - (dr_s - dr_n).$$

Geht man von den wahren Fehlern dx zu den mittleren Fehlern  $m_x$  über, so erhält man ohne Berücksichtigung des Refraktionsfehlers, wenn man beachtet, daß die mittleren Fehler  $m_{U_g}$  und  $m_{U_n}$  bei gleicher Faden- oder Kontaktzahl wegen

$$\sin q_s \sin p_s = \sin q_n \sin p_n = \sin \Phi \sin a_s$$

gleich groß werden, und wenn man

$$m_{\alpha} \sin p = m_{p} = m^{*}$$

setzt:

$$4\cos^2 a_s \cdot m_{\Phi}^2 = 2\sin^2 \Phi \sin^2 a_s \cdot m_U^2 + 2m^{*2}$$
,

oder wenn man

$$\sin^2 \Phi \sin^2 a_s \cdot m_U^2 = \frac{1}{n} \left( a_0^2 \sin^2 \Phi \sin^2 a_s + \frac{b_0^2}{V^2} \right)$$

einführt:

$$m_{\Phi}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{n} \sin^2 \Phi \sin^2 a_s + \left( \frac{b_0^2}{n V^2} + m^{*2} \right) \right) \sec^2 a_s. \tag{33}$$

Setzt man  $a_s=20^{\circ}$ ,  $\Phi=45^{\circ}$ ,  $m^*=\pm 0^{\circ}, 02$ , n=10 und V=80, so sind die folgenden Fehler von  $\Phi$  zu erwarten:

5 Niethammer

Methode	Mittlerer Fehler $m_{\Phi}$ der Polhöhe	
1. Aug- und Ohrmethode	±0″,33	
<ul> <li>3. Unpersönliches Mikrometer:</li> <li>a) Handnachführung (Potsdamer Konstanten)</li> <li>b) Handnachführung (Schweizer Konstanten)</li> <li></li> </ul>	,27 ,26	

5. Die Aufstellung eines Beobachtungsprogrammes. Um Sternpaare auszusuchen, die nach der Pewzowschen Methode beobachtet werden können, bedient man sich am besten einer Sternkarte, auf welche man ein durchsichtiges Blatt mit einem Netz von Kurven gleicher Zenitdistanz und gleichen Azimutes legt. Hat man zwei Sterne gefunden, die ungefähr zu gleicher Zeit symmetrisch zum ersten Vertikal in gleiche Zenitdistanz kommen, so ergibt die folgende Rechnung, ob und unter welchen Umständen sie beobachtet werden können.

Sind  $a_s$  und  $a_n = 180^{\circ} - a_s$  die Azimute der beiden Sterne, so bestehen die Beziehungen

$$\cos p_s = \cos \Phi \cos z - \sin \Phi \sin z \cos a_s, \cos p_n = \cos \Phi \cos z + \sin \Phi \sin z \cos a_s.$$
 (A)

Das arithmetische Mittel liefert die gemeinsame Zenitdistanz

$$\cos z = \frac{1}{2} (\cos p_s + \cos p_n) \sec \Phi.$$

Führt man das arithmetische Mittel und die halbe Differenz der Deklinationen ein:

$$\delta = rac{1}{2} \left( \delta_s + \delta_n 
ight), \quad arDelta \delta = rac{1}{2} \left( \delta_n - \delta_s 
ight),$$

so erhält man

$$\cos z = \sin \delta \cos \Delta \delta \csc \varphi$$
.

Die halbe Differenz der Beziehungen (A) führt nun zur Kenntnis des Azimutes:

$$\cos a_s = \frac{1}{2} (\cos p_n - \cos p_s) \csc z \csc \Phi$$

oder

$$\cos a_s = \cos \delta \sin \Delta \delta \csc z \sec \varphi$$
.

Die Stundenwinkel der beiden Sterne folgen nun aus den Beziehungen:

$$\sin t_s = \sin z \sin a_s \sec \delta_s,$$
  
 $\sin t_n = \sin z \sin a_n \sec \delta_n.$ 

Die Sternzeiten  $\Theta_s$  und  $\Theta_n$  der Beobachtung am ersten Seitenfaden im Abstand  $\Delta z$  vom Mittelfaden werden dann gleich:

$$\Theta_s = \alpha_s + t_s - \Delta t,$$
 $\Theta_n = \alpha_n + t_n - \Delta t,$ 

worin

$$\Delta t = \frac{1}{15} \frac{\Delta z'}{\sin a_s \cos \varphi}$$

in Zeitminuten erhalten wird, wenn  $\Delta z'$  in Bogenminuten ausgedrückt wird.

## ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel.

Instrument: Repsoldsches Universalinstrument, 70fache Vergrößerung;  $p_0 = 1$ , 17.

Beobachter: Cand. phil. E. HERZOG.

Datum: 18. August 1944.

Mit Hilfe einer Sternkarte und eines Netzes mit Linien gleicher Zenitdistanz und gleichen Azimutes wurde festgestellt, daß die Sterne  $\alpha$  Oph und  $\beta$  Urs mi ungefähr zur Sternzeit  $18^h30^m$  bis  $18^h50^m$  in gleiche Zenitdistanz symmetrisch zum ersten Vertikal auf der Westseite des Meridians kommen. Die genauere Berechnung nach den Formeln der Seite 66 hat zu folgendem Beobachtungsprogramm geführt:

Gemeinsame Zenitdistanz

36049'

Azimut des Südsternes

22058', Sternzeit 18h27m8.

des Nordsternes

1800-22058', 18 52, 0.

Der erste von den 10 Fäden, an welchen die beiden Sterne beobachtet wurden, hat einen Abstand von 20,5 vom Mittelfaden; die Sterne treten um

20,5 sec 
$$\varphi$$
 cosec  $a_s = 1,3$ 

vor der berechneten Zeit an den ersten Faden.

Die beobachteten Uhrzeiten  $U_i$ , die mit einem Handtaster registriert wurden, ihre Abweichungen  $U_i-\overline{U}$  vom Mittelwert  $\overline{U}$  und die diesen Abweichungen entsprechenden Werte von  $m_i^n$  sind nachstehend zusammengestellt:

Faden	Südstern			Nordstern		
	$U_i$	$U_i - \overline{U}$	$m_i''$	$U_i$	$U_i - \bar{U}$	$m_i''$
1	18h29m16s44	- 76,80	3,21	18h53m23s76	- 79896	3,49
2	34,28	- 58,96	1,89	44,00	- 59,72	1,94
3	54,96	- 38,28	0,80	63,76	- 39,96	0,87
4	73,46	- 19,78	0, 22	84,02	-19,70	0, 21
5	89,64	- 3,60	0,01	100,40	- 3,32	0,00
6	96,90	3,66	0,01	107,38	3,66	0,01
7	113,18	19,94	0,22	123,82	20,10	0, 22
8	132,24	39,00	0,83	143,74	40,02	0,87
9	150,88	57,64	1,81	162,74	59,02	1,89
10	170,42	77,18	3, 25	183,56	79,84	3,48
Mittel	18 30 33,24	referi Pol	1, 22	18 54 43,72	brolf aid.	1,30

Die Niveauablesungen haben ergeben:

Miller Larw es .	Südstern		Nordstern	
and the second of the second o	innen	außen	innen	außen
Vor der Durchgangsbeobachtung	12,0	35,1	10,4	34,0
Nach der Durchgangsbeobachtung .	13,5	36,9	9,2	32,9

Somit ist

Summe der Nordablesungen minus Summe der Südablesungen gleich

$$4(n_n - n_s) = 86.5 - 97.5 = -11.0 \text{ Partes}$$

und die Korrektion wegen Neigung ist gleich

$$+\frac{1}{2}(n_n-n_s)p_0\cdot\sec a_s=-1,75.$$

Die Korrektion wegen der Benützung des Mittelwertes  $\overline{U}$  wird gleich

$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi \frac{\overline{m}_{s}'' + \overline{m}_{n}''}{2} = -0\%63\sin 2\varphi = -0\%63.$$

Zur Berechnung dieser Korrektion kann man auch ausgehen von der halben Differenz der Durchgangszeiten zweier zum Mittelfaden symmetrischer Fäden; man hat dann nur halb so viele Werte von  $m_i''$  zu bilden und zu mitteln.

Die scheinbaren Örter der beiden Sterne sind:

Die Uhrkorrektion ist auf Grund der am gleichen Tag nach der Zingerschen Methode beobachteten Sterne unter Berücksichtigung des Uhrganges angesetzt worden zu

$$u_s = -1^m 28;43 = u_n;$$

die Stundenwinkel werden gleich

$$t_s = \overline{U}_s + u_s - a_s = + 0^{\text{h}}56^{\text{m}}43^{\text{s}}, 23,$$
  
 $t_n = \overline{U}_n + u_n - a_n = + 4 \ 02 \ 26, 21.$ 

Die Größe  $\frac{1}{N}$  und tg  $\varphi'$  ergeben sich durch folgende Rechnung (unter Verwendung von Subtraktionslogarithmen):

Voll Subtraktionerogarian		是在美国的企业不同地区域的中央区域的现在分词	9,8605900
$\cos \delta_s$	9,9894078	$\cos \frac{1}{2} (\delta_n + \delta_s) \cdot \cdot \cdot \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta_n - d_s) \cdot \cdot \cdot \cdot$	9,7104888
$\cos t_s \dots \dots$	9,986 5614	$2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	0,3010300
$\cos \delta_s \cos t_s = a \cdot \cdot \cdot$	9,975 9692		9,8721088
$\cos \delta_n \cdot \cos t_n \cdot \cdot$	9,4299132 9,6908725	$tg \varphi' = (a - b) \cdot N$	0,038 5720
$\cos \delta_n \cos t_n = b  .  .$	9,1207857	$\varphi' = \dots \dots$ Neigungskorrektion =	47°32′27″,72 — 1″,75
$B = \lg a - \lg b =$	0,8551835	Korrektion (wegen Be-	- 0,63
$C = \dots \dots \dots$ $\lg (a - b) = \lg a + C =$	9,9347116 9,9106808	rechnung mit $\overline{U}$ ) = $\varphi = \cdots \cdots$	

## c) Die Horrebow-Talcott-Methode der Polhöhenbestimmung

1. Allgemeines. Der Ausdruck (33) für den mittleren Fehler  $m_{\phi}$  der Polhöhe in der Pewzowschen Methode nimmt den kleinstmöglichen Wert an, wenn man  $a_s = 180^{o} - a_n$  gleich Null werden läßt; es wird dann

$$m_{\phi}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{b_0^2}{nV^2} + m^{*2} \right). \tag{34}$$

Will man in den Meridian selber gehen, wo keine Almukantaratdurchgänge beobachtet werden können, so ersetzt man die Durchgangsbeobachtungen durch