III. KAPITEL

Bestimmung der Zeit oder der Polhöhe mit Hilfe von Almukantaratdurchgängen

a) Bestimmung der Zeit mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch denselben Almukantarat (Zingersche Methode)[1]

1. *Ableitung der Reduktionsformeln*

Wir unterscheiden die Größen, die sich auf die beiden Sterne beziehen, durch die Indizes w und e, indem wir annehmen, es sei, um den günstigsten Umständen zu entsprechen, der eine Stern im Westen und der andere im Osten beobachtet. Es seien

U_w, U_e die Uhrzeiten des Durchganges durch denselben Horizontalfaden im Westen und Osten,

n_w, n_e die aus den Ablesungen der Blasenenden abgeleiteten Stellungen der Blasenmitte des Niveaus,

α_w, α_e die Rektaszensionen und

p_w, p_e die Poldistanzen der beiden Sterne.

Je nachdem der Nullstrich der durchgehenden Bezifferung des Niveaus außen, das heißt gegen den Stern hin, oder innen, das heißt vom Stern abgewendet, liegt, ist die Differenz der Zenitdistanzen im W und im E gleich

$$z_w - z_e = \pm (n_w - n_e) \cdot p_0 \begin{cases} + \text{Nullstrich außen,} \\ - \text{Nullstrich innen,} \end{cases}$$

worin p_0 den Parswert des Niveaus bezeichnet. Es wird also, da

$$z = \frac{z_w + z_e}{2} = z_w - \frac{z_w - z_e}{2} = z_e + \frac{z_w - z_e}{2}$$

ist:

$$z = z_w \mp \frac{n_w - n_e}{2} p_0 \begin{cases} - \text{Nullstrich außen,} \\ + \text{Nullstrich innen,} \end{cases}$$

und

$$z = z_e \pm \frac{n_w - n_e}{2} p_0 \begin{cases} + \text{Nullstrich außen,} \\ - \text{Nullstrich innen.} \end{cases}$$

Sind U'_w und U'_e die Uhrzeiten des Durchganges durch den der Instrumentalzenitdistanz z entsprechenden Almukantarat, so ist

$$U'_w = U_w \mp \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a_w},$$
$$U'_e = U_e \pm \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a_e}.$$

Sind die Deklinationen der Sterne nicht stark voneinander verschieden, so darf man $a_w = \frac{1}{2}(a_w - a_e) = -a_e$ setzen; es wird dann mit $a = \frac{1}{2}(a_w - a_e)$:

$$\frac{U'_w + U'_e}{2} = \frac{U_w + U_e}{2} \mp \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a} \begin{cases} - \text{Nullstrich außen} \\ + \text{Nullstrich innen} \end{cases} \tag{13}$$

und

$$\frac{U'_w - U'_e}{2} = \frac{U_w - U_e}{2}. \tag{14}$$

Sind t_w und t_e die Stundenwinkel der beiden Sterne, wenn sie in der *gleichen* Zenitdistanz z beobachtet werden, so ist, wenn u die Uhrkorrektion bezeichnet:

$$U'_w + u = \alpha_w + t_w,$$
$$U'_e + u = \alpha_e + t_e,$$

also

$$u = \frac{\alpha_w + \alpha_e}{2} - \frac{U_w + U_e}{2} + \frac{t_w + t_e}{2} \pm \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a} \begin{cases} + \text{Nullstrich außen,} \\ - \text{Nullstrich innen.} \end{cases} \tag{15}$$

Zur Kenntnis der halben Summe der Stundenwinkel $\frac{1}{2}(t_w + t_e)$ gelangt man auf folgendem Weg. Eliminiert man aus den Beziehungen

$$\cos z = \cos \Phi \cos p_w + \sin \Phi \sin p_w \cos t_w,$$
$$\cos z = \cos \Phi \cos p_e + \sin \Phi \sin p_e \cos t_e$$

die unbekannte Zenitdistanz z, so erhält man

$$\sin p_w \cos t_w - \sin p_e \cos t_e = \operatorname{cotg} \Phi (\cos p_e - \cos p_w). \tag{16}$$

Setzt man in

$$\frac{1}{2}(t_w + t_e) = \frac{1}{2}(U'_w + U'_e) - \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e) + u,$$
$$\frac{1}{2}(t_w - t_e) = \frac{1}{2}(U'_w - U'_e) - \frac{1}{2}(\alpha_w - \alpha_e)$$

zur Abkürzung

$$\varkappa = \frac{1}{2}(U'_w + U'_e) - \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e),$$
$$\lambda = \frac{1}{2}(U'_w - U'_e) - \frac{1}{2}(\alpha_w - \alpha_e), \tag{17a}$$
$$\bar{t} = \frac{1}{2}(t_w + t_e),$$

so wird

$$\frac{1}{2}(t_w + t_e) = \varkappa + u,$$
$$\frac{1}{2}(t_w - t_e) = \lambda,$$

und
$$t_w = \bar{t} + \lambda = \varkappa + u + \lambda,$$
$$t_e = \bar{t} - \lambda = \varkappa + u - \lambda.$$

Ferner setzen wir
$$\frac{1}{2}(p_w + p_e) = p,$$
$$\frac{1}{2}(p_w - p_e) = \Delta p, \tag{17b}$$

so daß
$$p_w = p + \Delta p,$$
$$p_e = p - \Delta p$$

wird. Führt man diese Werte von t_w, t_e, p_w und p_e in die Gleichung (16) ein, so ergibt eine leichte Umformung:

$$\left.\begin{array}{r}\sin p \cos \Delta p \sin \lambda \sin \bar{t} \\ -\cos p \sin \Delta p \cos \lambda \cos \bar{t}\end{array}\right\} = -\operatorname{cotg} \Phi \sin p \sin \Delta p. \tag{18}$$

Um hieraus den Stundenwinkel $\bar{t}$, der als Argument eines Sinus und eines Cosinus auftritt, zu berechnen, führt man einen Hilfswinkel ein; definiert man den Winkel m durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} m \sin p \cos \Delta p \sin \lambda = + \cos p \sin \Delta p \cos \lambda, \tag{19}$$

so geht die Gleichung (18) über in

$$\frac{-\sin \bar{t} \cos m + \cos \bar{t} \sin m}{\cos m} \sin p \cos \Delta p \sin \lambda = + \operatorname{cotg} \Phi \sin p \sin \Delta p,$$

so daß
$$\sin (m - \bar{t}) = + \operatorname{cotg} \Phi \operatorname{tg} \Delta p \operatorname{cosec} \lambda \cos m \tag{20}$$

wird. Ist $(m - \bar{t})$ hieraus berechnet, so wird

$$\frac{1}{2}(t_w + t_e) \equiv \bar{t} = -(m - \bar{t}) + m.$$

Da in die Berechnung von λ die Differenz $(U'_w - U'_e)$, die gleich $(U_w - U_e)$ ist, eingeht, ist es zur Berechnung von $(m - \bar{t})$ nach (19) nicht nötig, die beobachteten Uhrzeiten wegen der Zenitdistanzdifferenz zu korrigieren.

2. *Die Berücksichtigung der täglichen Aberration*

Es empfiehlt sich nicht, die tägliche Aberration an den scheinbaren Örtern anzubringen; ihr Einfluß kann leicht nachträglich berücksichtigt werden.

Die Korrektionen der Koordinaten α und p wegen der täglichen Aberration sind:

$$d\alpha \sin p = \quad 0{,}''322 \sin \Phi \cos t,$$
$$dp \quad = -\, 0{,}322 \sin \Phi \sin t \cos p.$$

Setzt man im Differentialausdruck des Cosinussatzes die Verbesserungen $d\Phi$ und dU gleich null, so ist

$$dz - \sin a\, du \sin \Phi = - \sin q\, d\alpha \sin p + \cos q\, dp.$$

Da aber

$$\sin q \cos t + \cos q \sin t \cos p = \sin a \cos z$$

ist, wird

$$dz - \sin a \, du \sin \Phi = - 0{,}''322 \sin \Phi \sin a \cos z.$$

Eliminiert man nun dz aus den beiden Beziehungen

$$dz - \sin a_w \, du \sin \Phi = - 0{,}''322 \sin \Phi \sin a_w \cos z,$$
$$dz - \sin a_e \, du \sin \Phi = - 0{,}322 \sin \Phi \sin a_e \cos z,$$

so erhält man mit $0{,}''322 = 0{,}^s0215$ als Korrektion von u wegen der täglichen Aberration:

$$du = + 0{,}^s0215 \cos z. \tag{21}$$

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

An Stelle der Poldistanzen führen wir die Deklinationen $\delta = 90^0 - p$ ein, welche den astronomischen Jahrbüchern, die Ephemeriden veröffentlichen, direkt entnommen werden können.

Sind

U_w, U_e die beobachteten Uhrzeiten,
n_w, n_e die Blasenmitten des Niveaus,
α_w, α_e die Rektaszensionen,
δ_w, δ_e die Deklinationen

der beiden Sterne,

p_0 der Parswert des Niveaus in Zeitsekunden,
φ die Polhöhe,

so erhält man die Uhrkorrektion aus der Durchrechnung des folgenden Gleichungssystemes:

$$\delta = \frac{\delta_e + \delta_w}{2}, \ \Delta\delta = \frac{\delta_e - \delta_w}{2}, \ \lambda = \frac{U_w - U_e}{2} - \frac{\alpha_w - \alpha_e}{2},$$
$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \Delta\delta \operatorname{cotg} \lambda,$$
$$\sin(m - \bar{t}) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Delta\delta \operatorname{cosec} \lambda \cos m,$$
$$\bar{t} = m - (m - \bar{t}),$$
$$u = \frac{\alpha_e + \alpha_w}{2} - \frac{U_e + U_w}{2} + \bar{t} \mp \frac{(n_e - n_w)\, p_0}{2 \cos \varphi \sin a} + 0{,}^s021 \cos z.$$

($-$ Nullstrich außen, $+$ Nullstrich innen.)

3. Die günstigsten Umstände der Beobachtung und der mittlere Fehler der Uhrkorrektion

Aus den beiden Differentialbeziehungen

$$dz - \sin a_w du \sin\Phi = \sin a_w d\,(U_w - \alpha_w) \sin\Phi + \cos q_w dp_w - \cos a_w d\Phi - dr_w,$$
$$dz - \sin a_e du \sin\Phi = \sin a_e d\,(U_e - \alpha_e) \sin\Phi + \cos q_e dp_e - \cos a_e d\Phi - dr_e$$

erhält man durch Elimination von dz:

$$(\sin a_w - \sin a_e)\, du \sin\Phi = \\ - \sin\Phi\left(\sin a_w d(U_w - \alpha_w) - \sin a_e d(U_e - \alpha_e)\right) \\ - \cos q_w dp_w + \cos q_e dp_e + (\cos a_w - \cos a_e)\, d\Phi \\ + dr_w - dr_e.$$

Wird gemäß (17a)

$$d(U_w - \alpha_w) = d\varkappa + d\lambda,$$
$$d(U_e - \alpha_e) = d\varkappa - d\lambda$$

eingeführt, so ist aus der Form

$$(\sin a_w - \sin a_e)\, du \sin\Phi = \\ - \sin\Phi\left((\sin a_w - \sin a_e)\, d\varkappa + (\sin a_w + \sin a_e)\, d\lambda\right) \\ + (\cos a_w - \cos a_e)\, d\Phi - \text{etc.}$$

ersichtlich, daß die Fehler $d\lambda$ und $d\Phi$ keinen Einfluß ausüben, wenn die beiden Sterne symmetrisch zum Meridian beobachtet werden. Wir machen diese Annahme und setzen

$$a_e = - a_w = - a;$$

es wird dann

$$\sin a_w - \sin a_e = 2 \sin a,$$
$$\sin a_w + \sin a_e = 0,$$
$$\cos a_w - \cos a_e = 0,$$

und für du erhält man die Beziehung

$$du = - d\varkappa - \frac{\cos q_w dp_w - \cos q_e dp_e - dr_w + dr_e}{2 \sin a \sin \Phi}.$$

Hieraus ist weiter ersichtlich, daß die Fehler der Poldistanzen und die Refraktionsfehler den kleinsten Einfluß ausüben, wenn die Beobachtungen im ersten Vertikal gemacht werden; es ist dann $\sin a = 1$, und

$$du = - \frac{1}{2} d\,(U_w + U_e) + \frac{1}{2} d\,(\alpha_w + \alpha_e) \\ - \frac{1}{2} d\,(p_w - p_e) \cos q_0 \operatorname{cosec}\Phi \\ + \frac{1}{2} d\,(r_w - r_e) \operatorname{cosec}\Phi; \tag{22}$$

hierin bedeutet q_0 den parallaktischen Winkel des Sterns im West- oder Ostvertikal.

Im Ausdruck (22) betrachten wir nun die Verbesserungen du, dU usw. als wahre Fehler und gehen von ihnen zu den mittleren Fehlern über. Es bezeichne m_x den mittleren Fehler, der dem wahren Fehler dx entspricht; es wird dann, wenn der Refraktionsfehler nicht berücksichtigt wird:

$$m_u^2 = \frac{1}{2}\,(m_U^2 + m_\alpha^2 + m_p^2 \cos^2 q_0 \operatorname{cosec}^2 \Phi).$$

Da die atmosphärischen Verhältnisse sich im Verlaufe einer Nacht nur wenig ändern werden, ist zu erwarten, daß sich Refraktionsanomalien in systematischer Weise, meist sogar in konstanter Weise, zum Beispiel als Zenitverschiebung, auswirken werden. Werden dagegen die Resultate, die am gleichen Ort in verschiedenen Nächten während eines längeren Zeitraumes erhalten wurden, miteinander verglichen oder die Resultate, die an weit voneinander entfernten Orten, wie etwa bei Längenbestimmungen, zu gleicher Zeit gewonnen wurden, so dürfen die durch Refraktionsanomalien erzeugten Verfälschungen der Uhrkorrektion Fehlern zufälliger Natur gleichgestellt werden.

Die mittleren Fehler $m_\alpha \sin p$ und m_p darf man gleich groß annehmen; wir setzen

$$m_\alpha \sin p = m_p = m^*.$$

Da im ersten Vertikal

$$\sin p \sin q_0 = \sin \Phi$$

ist, wird

$$m_\alpha^2 + m_p^2 \cos^2 q_0 \operatorname{cosec}^2 \Phi = m^{*2} (\sin^2 q_0 + \cos^2 q_0) \operatorname{cosec}^2 \Phi = m^{*2} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Werden die Durchgänge an n Fäden beobachtet, so ist

$$m_U^2 = \frac{1}{n}\left(a_0^2 + b_0^2 \frac{\operatorname{cosec}^2 p}{V^2 \sin^2 q} \right) = \frac{1}{n}\left(a_0^2 \sin^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2} \right) \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{n}\left(a_0^2 \sin^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2} \right) = m_0^2;$$

es wird dann

$$m_u^2 = \frac{1}{2} (m_0^2 + m^{*2}) \operatorname{cosec}^2 \Phi. \tag{23}$$

Die – Seite 46 – angegebenen Werte der Konstanten a_0 und b_0 führen in den verschiedenen Beobachtungsmethoden zu den folgenden Werten des mittleren Fehlers m_u, wenn

$$\Phi = 45^0, \quad n = 10, \quad V = 80 \quad \text{und} \quad m^* = \pm 0^s\!,02$$

gesetzt wird:

Methode	Mittlerer Fehler der Uhrkorrektion u
1. Aug- und Ohrmethode	$\pm 0^s\!,035$
2. Registriermethode	,031
3. Unpersönliches Mikrometer:	
a) Handnachführung (Potsdamer Konstanten) . . .	,027
b) Handnachführung (Schweizerische Konstanten) .	,023

4. *Berechnung der Uhrkorrektion mit Hilfe des arithmetischen Mittels der einzelnen Uhrzeiten.*

Benützt man zur Berechnung von u an Stelle der Einzelwerte U_i deren Mittelwert $\overline{U}$:

$$\overline{U} = \frac{1}{n}[U_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist nur dann eine Korrektion anzubringen, wenn die beiden Sterne in Azimuten beobachtet werden, die nicht symmetrisch zum Meridian sind, wie sich aus Folgendem ergibt.

Es sei $\overline{z}$ das arithmetische Mittel der einzelnen Zenitdistanzen:

$$\overline{z} = \frac{1}{n}[z_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist $\overline{U}$ nicht identisch mit der Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Almukantarat der Zenitdistanz $\overline{z}$; den Unterschied

$$d\overline{U} = U_0 - \overline{U}$$

erhält man auf folgendem Weg. Es sei z_0 die der Uhrzeit $\overline{U}$ entsprechende Zenitdistanz; dann ist

$$z_0 = z(\overline{U}) = z(U_0 - d\overline{U}) = \overline{z} - \frac{\partial \overline{z}}{\partial t}\, d\overline{U} + \cdots$$

oder

$$d\overline{U} \equiv U_0 - \overline{U} = \frac{(\overline{z} - z_0)}{\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial t}}.$$

Nun ist

$$z_i = z(U_i) = z(\overline{U} + dU_i)$$
$$= z_0 + \frac{\partial z}{\partial t}\, dU_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\, dU_i^2 + \cdots,$$

also

$$\frac{1}{n}[z_i - z_0] \equiv \overline{z} - z_0 = \frac{1}{n}\frac{\partial z}{\partial t}[dU_i] + \frac{1}{2n}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}[dU_i^2] + \cdots.$$

Da die Werte dU_i die Abweichungen vom arithmetischen Mittel sind, ist

$$[dU_i] = 0.$$

Aus

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sin \Phi \sin p \,\frac{\sin t}{\sin z}$$

folgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sin\Phi \sin p \,\frac{\cos t}{\sin z} - \sin\Phi \sin p \sin t \,\frac{\cos z}{\sin^2 z}\,\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial t}\left(\operatorname{cotg} t - \frac{\partial z}{\partial t}\operatorname{cotg} z\right) = \frac{\partial z}{\partial t}\cdot C$$

mit der Abkürzung

$$C = \operatorname{cotg} t - \frac{\partial z}{\partial t}\operatorname{cotg} z.$$

Es wird also

$$d\bar{U} \equiv U_0 - \bar{U} = \frac{\bar{z} - z_0}{\frac{\partial z}{\partial t}} = \frac{C}{2n} [(U_i - \bar{U})^2].$$

Setzt man

$$\frac{1}{2}(U_i - \bar{U})^2 = 2 \sin^2 \frac{U_i - \bar{U}}{2} + \cdots = m'' \sin 1'',$$

so kann man bekannte Tafeln benützen zur Berechnung der Glieder der Summe $[(U_i - U)^2]$.

Als Verbesserung von du wegen der Verbesserungen $d\bar{U}_w$ und $d\bar{U}_e$ erhält man, da

$$du = -\frac{1}{2}(d\bar{U}_w + d\bar{U}_e)$$

ist, in Zeitsekunden:

$$du^{\sec} = -\frac{1}{30n}(C_w[m''_w] + C_e[m''_e]).$$

Ist $a_e = -a_w$, so ist $C_w = -C_e$ und $m''_w = m''_e$, also $du = 0$.

5. *Die Aufstellung eines Beobachtungsprogrammes.*

Es seien α_w, δ_w und α_e, δ_e die Koordinaten zweier Sterne, deren Deklinationen nur wenig voneinander verschieden sind. Die Sternzeit, zu welcher sie in die gleiche Zenitdistanz kommen, fällt dann nahe auf $\frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e)$. Setzt man in der Beziehung (15) $n_w = n_e$ und $u = 0$, so daß U_w und U_e in die Sternzeiten Θ_w und Θ_e des Durchganges der beiden Sterne durch denselben Almukantarat übergehen, so wird

$$0 = \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e) - \frac{1}{2}(\Theta_w + \Theta_e) + \frac{1}{2}(t_w + t_e),$$

oder wenn

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e), \quad \Theta_0 = \frac{1}{2}(\Theta_w + 0_w), \quad \bar{t}_0 = \frac{1}{2}(t_w + t_w)$$

gesetzt wird:

$$\bar{t}_0 = \Theta_0 - \alpha_0.$$

Ist λ_0 der Wert, den λ für $U'_w = U'_e$ annimmt:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(\alpha_e - \alpha_w),$$

und m_0 der mit diesem Wert von λ_0 berechnete Wert von m, so ist

$$\operatorname{tg} m_0 = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\Delta\delta \operatorname{cotg}\lambda_0$$

und

$$\sin(m_0 - \bar{t}_0) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Delta\delta \operatorname{cosec}\lambda_0 \cos m_0.$$

Bei nicht zu großen Werten von $\Delta\delta$ darf man, in Anbetracht der geringeren

Ansprüche, die an die Genauigkeit eines Betrachtungsprogrammes gestellt werden, hiefür schreiben:

$$m_0 = \Delta\delta \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\lambda_0,$$

$$m_0 - \bar{t}_0 = \Delta\delta \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec}\lambda_0,$$

so daß

$$\bar{t}_0 = -\Delta\delta \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos\lambda_0}{\sin\lambda_0}$$

wird. Ist $\Delta\delta'$ der Wert von $\Delta\delta$ in Bogenminuten, so wird $\bar{t}_0$ in Zeitminuten gegeben durch

$$\bar{t}_0^{\,\min} = -\frac{\Delta\delta'}{15}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos\lambda_0}{\sin\lambda_0}.$$

Sternzeit und Stundenwinkel der gemeinsamen Zenitdistanz werden gleich:

$$\Theta_0 = \alpha_0 + \bar{t}_0,$$

$$t_w = \Theta_0 - \alpha_w,$$

$$t_e = \Theta_0 - \alpha_e;$$

die gemeinsame Zenitdistanz z_0 folgt aus den Beziehungen

$$\cos z_0 = \cos\Phi\sin\delta_w + \sin\Phi\cos\delta_w\cos t_w \equiv \cos\Phi\sin\delta_e + \sin\Phi\cos\delta_e\cos t_e.$$

Zur Berechnung der Azimute kann man die Beziehungen verwenden:

$$\sin a_w = \cos\delta_w \sin t_w \operatorname{cosec} z_0,$$

$$\sin a_e = \cos\delta_e \sin t_e \operatorname{cosec} z_0,$$

wenn man mit fünfstelligen Logarithmen rechnet, damit auch in der Nähe von 90° und 270° die Azimutwerte sich mit ausreichender Genauigkeit ergeben. Um den Quadranten, in dem die Azimute zu nehmen sind, zu entscheiden, kann man den Stundenwinkel t_{I} des Durchganges durch den ersten Vertikal berechnen:

$$\cos t_{\mathrm{I}} = \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi.$$

Ist im Westen t_{I} größer als t_w, so liegt a_w im ersten Quadranten, ist im Osten t_{I} kleiner als t_e, so liegt a_e im vierten Quadranten.

In die berechnete Zenitdistanz z_0 kommen die beiden Sterne zur gleichen Zeit. Damit sie hintereinander beobachtet werden können, wählt man eine etwas größere oder kleinere Zenitdistanz, je nachdem der Ost- oder der Weststern zuerst beobachtet werden soll. Das Zeitintervall zwischen den beiden Durchgangsbeobachtungen macht man nicht länger als notwendig ist; man braucht dafür nicht mehr als 5–7 Zeitminuten anzusetzen, wenn der Beobachtungsvertikal nicht mehr als 10–20° vom ersten Vertikal abweicht.

Das Azimut ist dann um einen Betrag Δa zu ändern, der durch die Beziehung

$$\Delta a = \Delta t \cos\delta\cos q \operatorname{cosec} z_0$$

$$= \Delta t(\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg} z_0 \cos a)$$

gegeben wird. In Bogenminuten wird $\Delta a'$, wenn Δt in Zeitminuten gegeben ist, gleich:

$$\Delta a' = 15 \Delta t^{\min} \sin \varphi \cdot (1 + \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cotg} z_0 \cos a).$$

Die Aufstellung eines Beobachtungsprogrammes ist ohne lange Vorbereitungsrechnungen möglich, wenn die *Working Ephemerides* zur Verfügung stehen, die von russischen Astronomen berechnet und von ZVETKOW 1929 herausgegeben wurden; sie sind dem *Superior Geodetic Survey* der UdSSR. zum zehnjährigen Bestehen gewidmet.

ZAHLENBEISPIEL

Ort:	Astronomische Anstalt der Universität Basel, $\varphi = 47^0 32' 27''$.
Instrument:	Repsoldsches Universalinstrument; 70fache Vergrößerung. $p_0 = 1{,}''17 = 0{,}^s078$.
Beobachter:	Cand. phil. E. HERZOG.
Datum:	18. August 1944.
Sternpaar:	ζ Cyg im Osten ϱ Boo im Westen.

Die russischen Ephemeriden geben auf Grund der mittleren Sternörter 1950,0:

Sternzeit der gemeinsamen Zenitdistanz	$17^h 51{,}^m 2$
Gemeinsame Zenitdistanz	$42^0 11'$
Azimut des Oststernes	$-84\ 09$
Azimut des Weststernes	$+85\ 15$

Nullstrich des Niveaus innen, also Neigungskorrektion gleich $\frac{1}{2}(n_e - n_w)\, p_0 \sec \varphi \operatorname{cosec} a$.

Die scheinbaren Örter sind:

$$\begin{aligned}
\alpha_e &= 21^h 10^m 35^s 50, & \delta_e &= 30^0 00' 01{,}''24,\\
\alpha_w &= 14\ 29\ 25{,}28, & \delta_w &= 30\ 37' 11,20.\\
\tfrac{1}{2}(\alpha_e + \alpha_w) &= 17\ 50\ 00{,}39; & \tfrac{1}{2}(\delta_e + \delta_w) &= 30\ 18\ 36,22,\\
\tfrac{1}{2}(\alpha_e - \alpha_w) &= 3\ 20\ 35{,}11; & \tfrac{1}{2}(\delta_e - \delta_w) &= -\ 18\ 34,98.
\end{aligned}$$

Die beiden Sterne sind an denselben zehn Fäden des Netzes beobachtet worden; die Fadendurchgänge wurden mit einem Handtaster auf einem Chronographen registriert. Das arithmetische Mittel der Durchgangszeiten beträgt:

$$\begin{aligned}
U_e &= 17^h 50^m 02^s 60\\
U_w &= 17\ 55\ 14{,}02\\
\tfrac{1}{2}(U_e + U_w) &= 17\ 52\ 38{,}31\\
\tfrac{1}{2}(U_e - U_w) &= \ 02\ 35{,}71
\end{aligned}$$

$$\lambda = \left\{\begin{array}{l} 3\ 20\ 35{,}11 \\ +\ 02\ 35{,}71 \end{array}\right\} = +\ 3^h 23^m 10{,}^s 82.$$

Die Niveauablesungen haben ergeben:

	Oststern		Weststern	
	innen	außen	innen	außen
vor der Durchgangsbeobachtung	11,3	34,0	9,0	32,0
nach der Durchgangsbeobachtung	11,3	34,0	10,0	32,9

Somit ist «Summe der Ostablesungen minus Summe der Westablesungen» gleich $4\,(n_e - n_w) = +\ 90{,}6 - 83{,}9 = +\ 6{,}7$ Partes.

Wird nur eine Genauigkeit von $\pm 0^s\!,01$ verlangt, so genügt es, zur Berechnung fünfstellige Logarithmen anzuwenden. Die Berechnung der Uhrkorrektion ist nachfolgend dargestellt:

$\operatorname{tg}\delta$ . . .	9,76685	$\operatorname{tg}\Delta\delta$ . . .	$7{,}73285_n$
$\operatorname{tg}\Delta\delta$ . .	$7{,}73285_n$	$\operatorname{tg}\varphi$ . . .	0,03857
$\operatorname{cotg}\lambda$ . . .	9,91154	$\operatorname{cosec}\lambda$ . .	0,11076
		$\cos m$ . . .	0
$\operatorname{tg} m$ . . .	$7{,}41124_n$		
		$\operatorname{tg}(m-\bar{t})$.	$7{,}88217_n$
		$m =$	$-\ 0^m\ 35^s\!,45$
		$m-\bar{t} =$	$-\ 1\ \ 44{,}84$
		$\bar{t} =$	$+\ 1\ \ 09{,}39$

$\frac{1}{2}(\alpha_e+\alpha_w) - \frac{1}{2}(U_e+U_w)$	$= -\ 2\ \ 37{,}92$	
Niveaukorrektion	$= +\ \ 0{,}097$	
Korrektur wegen täglicher Aberration	$= +\ \ 0{,}014$	
Uhrkorrektion	$= -\ 1^m\ 28^s\!,42$,	Ep. $17^h\!9$.

Ein zweites, unmittelbar anschließend beobachtetes Sternpaar (α Lac und η Urs *ma* hat ergeben $u = -\ 1^m\ 28^s\!,36$, Ep. $18^h\!1$.

Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch denselben Almukantarat (Pewzowsche Methode) [2])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Wir unterscheiden die Größen, die sich auf die beiden Sterne beziehen, durch die Indizes s und n, indem wir annehmen, es seien die beiden Sterne, um die günstigsten Umstände einzuhalten, symmetrisch zum ersten Vertikal, der eine im Süden und der andere im Norden, beobachtet worden.

Es seien

U_s, U_n die beobachteten Uhrzeiten des Durchganges

α_s, α_n die Rektaszensionen,

p_s, p_n die Poldistanzen der Sterne.

Die Zenitdistanz z_s, in der der Südstern beobachtet worden ist, sei nicht genau gleich der Zenitdistanz z_n des Nordsternes; die Ablesungen des Niveaus sollen zu n_s, n_n als Blasenmitten geführt haben. Mit p_0 als Parswert des Niveaus ist dann

$$z_s - z_n \equiv \Delta z = \pm\,(n_s - n_n)\,p_0 \begin{cases} + \text{ Nullstrich außen,} \\ - \text{ Nullstrich innen.} \end{cases} \tag{24}$$

Wir korrigieren die Uhrzeit U_s des Südsternes auf die bei der Beobachtung des Nordsternes vorhandene Zenitdistanz; die korrigierte Uhrzeit wird gleich

$$U_s - \frac{\Delta z}{\sin\Phi\,\sin a_s}\,.$$