III. KAPITEL

Bestimmung der Zeit oder der Polhöhe mit Hilfe von Almukantaratdurchgängen

a) Bestimmung der Zeit mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch denselben Almukantarat (Zingersche Methode) [1]

1. *Ableitung der Reduktionsformeln*

Wir unterscheiden die Größen, die sich auf die beiden Sterne beziehen, durch die Indizes w und e, indem wir annehmen, es sei, um den günstigsten Umständen zu entsprechen, der eine Stern im Westen und der andere im Osten beobachtet. Es seien

U_w, U_e die Uhrzeiten des Durchganges durch denselben Horizontalfaden im Westen und Osten,

n_w, n_e die aus den Ablesungen der Blasenenden abgeleiteten Stellungen der Blasenmitte des Niveaus,

α_w, α_e die Rektaszensionen und

p_w, p_e die Poldistanzen der beiden Sterne.

Je nachdem der Nullstrich der durchgehenden Bezifferung des Niveaus außen, das heißt gegen den Stern hin, oder innen, das heißt vom Stern abgewendet, liegt, ist die Differenz der Zenitdistanzen im W und im E gleich

$$z_w - z_e = \pm\, (n_w - n_e) \cdot p_0 \begin{cases} + \text{ Nullstrich außen,} \\ - \text{ Nullstrich innen,} \end{cases}$$

worin p_0 den Parswert des Niveaus bezeichnet. Es wird also, da

$$z = \frac{z_w + z_e}{2} = z_w - \frac{z_w - z_e}{2} = z_e + \frac{z_w - z_e}{2}$$

ist:

$$z = z_w \mp \frac{n_w - n_e}{2}\, p_0 \begin{cases} - \text{ Nullstrich außen,} \\ + \text{ Nullstrich innen,} \end{cases}$$

und

$$z = z_e \pm \frac{n_w - n_e}{2}\, p_0 \begin{cases} + \text{ Nullstrich außen,} \\ - \text{ Nullstrich innen.} \end{cases}$$

Sind U_w' und U_e' die Uhrzeiten des Durchganges durch den der Instrumentalzenitdistanz z entsprechenden Almukantarat, so ist

$$U_w' = U_w \mp \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a_w},$$
$$U_e' = U_e \pm \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a_e}.$$

Sind die Deklinationen der Sterne nicht stark voneinander verschieden, so darf man $a_w = \frac{1}{2}(a_w - a_e) = -a_e$ setzen; es wird dann mit $a = \frac{1}{2}(a_w - a_e)$:

$$\frac{U_w' + U_e'}{2} = \frac{U_w + U_e}{2} \mp \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a} \begin{cases} - \text{Nullstrich außen} \\ + \text{Nullstrich innen} \end{cases} \tag{13}$$

und

$$\frac{U_w' - U_e'}{2} = \frac{U_w - U_e}{2}. \tag{14}$$

Sind t_w und t_e die Stundenwinkel der beiden Sterne, wenn sie in der *gleichen* Zenitdistanz z beobachtet werden, so ist, wenn u die Uhrkorrektion bezeichnet:

$$U_w' + u = \alpha_w + t_w,$$
$$U_e' + u = \alpha_e + t_e,$$

also

$$u = \frac{\alpha_w + \alpha_e}{2} - \frac{U_w + U_e}{2} + \frac{t_w + t_e}{2} \pm \frac{(n_w - n_e)\, p_0}{2 \sin \Phi \sin a} \begin{cases} + \text{Nullstrich außen,} \\ - \text{Nullstrich innen.} \end{cases} \tag{15}$$

Zur Kenntnis der halben Summe der Stundenwinkel $\frac{1}{2}(t_w + t_e)$ gelangt man auf folgendem Weg. Eliminiert man aus den Beziehungen

$$\cos z = \cos \Phi \cos p_w + \sin \Phi \sin p_w \cos t_w,$$
$$\cos z = \cos \Phi \cos p_e + \sin \Phi \sin p_e \cos t_e$$

die unbekannte Zenitdistanz z, so erhält man

$$\sin p_w \cos t_w - \sin p_e \cos t_e = \operatorname{cotg} \Phi (\cos p_e - \cos p_w). \tag{16}$$

Setzt man in

$$\frac{1}{2}(t_w + t_e) = \frac{1}{2}(U_w' + U_e') - \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e) + u,$$
$$\frac{1}{2}(t_w - t_e) = \frac{1}{2}(U_w' - U_e') - \frac{1}{2}(\alpha_w - \alpha_e)$$

zur Abkürzung

$$\varkappa = \frac{1}{2}(U_w' + U_e') - \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_e),$$
$$\lambda = \frac{1}{2}(U_w' - U_e') - \frac{1}{2}(\alpha_w - \alpha_e), \tag{17a}$$
$$\bar{t} = \frac{1}{2}(t_w + t_e),$$

so wird

$$\frac{1}{2}(t_w + t_e) = \varkappa + u,$$
$$\frac{1}{2}(t_w - t_e) = \lambda,$$

und
$$t_w = \bar{t} + \lambda = \varkappa + u + \lambda,$$
$$t_e = \bar{t} - \lambda = \varkappa + u - \lambda.$$

Ferner setzen wir
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(p_w + p_e) &= p,\\ \frac{1}{2}(p_w - p_e) &= \Delta p,\end{aligned}\right\} \tag{17b}$$

so daß
$$p_w = p + \Delta p,$$
$$p_e = p - \Delta p$$

wird. Führt man diese Werte von t_w, t_e, p_w und p_e in die Gleichung (16) ein, so ergibt eine leichte Umformung:

$$\left.\begin{aligned}\sin p \cos \Delta p \sin \lambda \sin \bar{t}\\ - \cos p \sin \Delta p \cos \lambda \cos \bar{t}\end{aligned}\right\} = -\operatorname{cotg} \Phi \sin p \sin \Delta p. \tag{18}$$

Um hieraus den Stundenwinkel $\bar{t}$, der als Argument eines Sinus und eines Cosinus auftritt, zu berechnen, führt man einen Hilfswinkel ein; definiert man den Winkel m durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} m \sin p \cos \Delta p \sin \lambda = + \cos p \sin \Delta p \cos \lambda, \tag{19}$$

so geht die Gleichung (18) über in

$$\frac{-\sin \bar{t} \cos m + \cos \bar{t} \sin m}{\cos m} \sin p \cos \Delta p \sin \lambda = + \operatorname{cotg} \Phi \sin p \sin \Delta p,$$

so daß

$$\sin (m - \bar{t}) = + \operatorname{cotg} \Phi \operatorname{tg} \Delta p \operatorname{cosec} \lambda \cos m \tag{20}$$

wird. Ist $(m - \bar{t})$ hieraus berechnet, so wird

$$\frac{1}{2}(t_w + t_e) \equiv \bar{t} = -(m - \bar{t}) + m.$$

Da in die Berechnung von λ die Differenz $(U'_w - U'_e)$, die gleich $(U_w - U_e)$ ist, eingeht, ist es zur Berechnung von $(m - \bar{t})$ nach (19) nicht nötig, die beobachteten Uhrzeiten wegen der Zenitdistanzdifferenz zu korrigieren.

2. *Die Berücksichtigung der täglichen Aberration*

Es empfiehlt sich nicht, die tägliche Aberration an den scheinbaren Örtern anzubringen; ihr Einfluß kann leicht nachträglich berücksichtigt werden.

Die Korrektionen der Koordinaten α und p wegen der täglichen Aberration sind:

$$d\alpha \sin p = \quad 0''\!,322 \sin \Phi \cos t,$$
$$dp \quad = -\, 0{,}322 \sin \Phi \sin t \cos p.$$

Setzt man im Differentialausdruck des Cosinussatzes die Verbesserungen $d\Phi$ und dU gleich null, so ist

$$dz - \sin a\, du \sin \Phi = - \sin q\, d\alpha \sin p + \cos q\, dp.$$

Da aber

$$\sin q \cos t + \cos q \sin t \cos p = \sin a \cos z$$

ist, wird

$$dz - \sin a\, du \sin \Phi = -0{,}''322 \sin \Phi \sin a \cos z.$$

Eliminiert man nun dz aus den beiden Beziehungen

$$dz - \sin a_w\, du \sin \Phi = -0{,}''322 \sin \Phi \sin a_w \cos z,$$
$$dz - \sin a_c\, du \sin \Phi = -0{,}322 \sin \Phi \sin a_e \cos z,$$

so erhält man mit $0{,}''322 = 0{,}^s0215$ als Korrektion von u wegen der täglichen Aberration:

$$du = +0{,}^s0215 \cos z. \qquad (21)$$

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

An Stelle der Poldistanzen führen wir die Deklinationen $\delta = 90^0 - p$ ein, welche den astronomischen Jahrbüchern, die Ephemeriden veröffentlichen, direkt entnommen werden können.

Sind

U_w, U_e die beobachteten Uhrzeiten,

n_w, n_e die Blasenmitten des Niveaus,

α_w, α_e die Rektaszensionen,

δ_w, δ_e die Deklinationen

der beiden Sterne,

p_0 der Parswert des Niveaus in Zeitsekunden,

φ die Polhöhe,

so erhält man die Uhrkorrektion aus der Durchrechnung des folgenden Gleichungssystemes:

$$\delta = \frac{\delta_e + \delta_w}{2},\ \Delta\delta = \frac{\delta_e - \delta_w}{2},\ \lambda = \frac{U_w - U_e}{2} - \frac{\alpha_w - \alpha_e}{2},$$

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \Delta\delta \operatorname{cotg} \lambda,$$

$$\sin(m - \bar{t}) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Delta\delta \operatorname{cosec} \lambda \cos m,$$

$$\bar{t} = m - (m - \bar{t}),$$

$$u = \frac{\alpha_e + \alpha_w}{2} - \frac{U_e + U_w}{2} + \bar{t} \mp \frac{(n_e - n_w)\, p_0}{2 \cos \varphi \sin a} + 0{,}^s021 \cos z.$$

(− Nullstrich außen, + Nullstrich innen.)

3. Die günstigsten Umstände der Beobachtung und der mittlere Fehler der Uhrkorrektion

Aus den beiden Differentialbeziehungen

$$dz - \sin a_w du \sin\Phi = \sin a_w d\,(U_w - \alpha_w) \sin\Phi + \cos q_w dp_w - \cos a_w d\Phi - dr_w,$$
$$dz - \sin a_e du \sin\Phi = \sin a_e d\,(U_e - \alpha_e) \sin\Phi + \cos q_e dp_e - \cos a_e d\Phi - dr_e$$

erhält man durch Elimination von dz:

$$
\begin{aligned}
(\sin a_w - \sin a_e)\, du \sin\Phi = \\
&- \sin\Phi \left(\sin a_w d(U_w - \alpha_w) - \sin a_e d(U_e - \alpha_e)\right) \\
&- \cos q_w dp_w + \cos q_e dp_e + (\cos a_w - \cos a_e)\, d\Phi \\
&+ dr_w - dr_e.
\end{aligned}
$$

Wird gemäß (17a)

$$
\begin{aligned}
d(U_w - \alpha_w) &= d\varkappa + d\lambda, \\
d(U_e - \alpha_e) &= d\varkappa - d\lambda
\end{aligned}
$$

eingeführt, so ist aus der Form

$$
\begin{aligned}
(\sin a_w - \sin a_e)\, du \sin\Phi = \\
&- \sin\Phi \left((\sin a_w - \sin a_e)\, d\varkappa + (\sin a_w + \sin a_e)\, d\lambda \right) \\
&+ (\cos a_w - \cos a_e)\, d\Phi - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

ersichtlich, daß die Fehler $d\lambda$ und $d\Phi$ keinen Einfluß ausüben, wenn die beiden Sterne symmetrisch zum Meridian beobachtet werden. Wir machen diese Annahme und setzen

$$a_e = - a_w = - a;$$

es wird dann

$$
\begin{aligned}
\sin a_w - \sin a_e &= 2 \sin a, \\
\sin a_w + \sin a_e &= 0, \\
\cos a_w - \cos a_e &= 0,
\end{aligned}
$$

und für du erhält man die Beziehung

$$du = - d\varkappa - \frac{\cos q_w dp_w - \cos q_e dp_e - dr_w + dr_e}{2 \sin a \sin \Phi}.$$

Hieraus ist weiter ersichtlich, daß die Fehler der Poldistanzen und die Refraktionsfehler den kleinsten Einfluß ausüben, wenn die Beobachtungen im ersten Vertikal gemacht werden; es ist dann $\sin a = 1$, und

$$
\begin{aligned}
du = - \frac{1}{2} d\,(U_w + U_e) + \frac{1}{2} d\,(\alpha_w + \alpha_e) \\
&- \frac{1}{2} d\,(p_w - p_e) \cos q_0 \operatorname{cosec}\Phi \\
&+ \frac{1}{2} d\,(r_w - r_e) \operatorname{cosec}\Phi;
\end{aligned}
\tag{22}
$$

hierin bedeutet q_0 den parallaktischen Winkel des Sterns im West- oder Ostvertikal.

Im Ausdruck (22) betrachten wir nun die Verbesserungen du, dU usw. als wahre Fehler und gehen von ihnen zu den mittleren Fehlern über. Es bezeichne m_x den mittleren Fehler, der dem wahren Fehler dx entspricht; es wird dann, wenn der Refraktionsfehler nicht berücksichtigt wird:

$$m_u^2 = \frac{1}{2}\,(m_U^2 + m_\alpha^2 + m_p^2 \cos^2 q_0 \operatorname{cosec}^2 \Phi).$$

Da die atmosphärischen Verhältnisse sich im Verlaufe einer Nacht nur wenig ändern werden, ist zu erwarten, daß sich Refraktionsanomalien in systematischer Weise, meist sogar in konstanter Weise, zum Beispiel als Zenitverschiebung, auswirken werden. Werden dagegen die Resultate, die am gleichen Ort in verschiedenen Nächten während eines längeren Zeitraumes erhalten wurden, miteinander verglichen oder die Resultate, die an weit voneinander entfernten Orten, wie etwa bei Längenbestimmungen, zu gleicher Zeit gewonnen wurden, so dürfen die durch Refraktionsanomalien erzeugten Verfälschungen der Uhrkorrektion Fehlern zufälliger Natur gleichgestellt werden.

Die mittleren Fehler $m_\alpha \sin p$ und m_p darf man gleich groß annehmen; wir setzen

$$m_\alpha \sin p = m_p = m^*.$$

Da im ersten Vertikal

$$\sin p \sin q_0 = \sin \Phi$$

ist, wird

$$m_\alpha^2 + m_p^2 \cos^2 q_0 \operatorname{cosec}^2 \Phi = m^{*2} (\sin^2 q_0 + \cos^2 q_0) \operatorname{cosec}^2 \Phi = m^{*2} \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Werden die Durchgänge an n Fäden beobachtet, so ist

$$m_U^2 = \frac{1}{n}\left(a_0^2 + b_0^2 \frac{\operatorname{cosec}^2 p}{V^2 \sin^2 q}\right) = \frac{1}{n}\left(a_0^2 \sin^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2}\right) \operatorname{cosec}^2 \Phi.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{n}\left(a_0^2 \sin^2 \Phi + \frac{b_0^2}{V^2}\right) = m_0^2;$$

es wird dann

$$m_u^2 = \frac{1}{2}(m_0^2 + m^{*2}) \operatorname{cosec}^2 \Phi. \tag{23}$$

Die – Seite 46 – angegebenen Werte der Konstanten a_0 und b_0 führen in den verschiedenen Beobachtungsmethoden zu den folgenden Werten des mittleren Fehlers m_u, wenn

$$\Phi = 45^0, \quad n = 10, \quad V = 80 \quad \text{und} \quad m^* = \pm 0^s\!,02$$

gesetzt wird:

Methode	Mittlerer Fehler der Uhrkorrektion u
1. Aug- und Ohrmethode	$\pm 0^s\!,035$
2. Registriermethode	,031
3. Unpersönliches Mikrometer:	
a) Handnachführung (Potsdamer Konstanten) . . .	,027
b) Handnachführung (Schweizerische Konstanten) .	,023

4. *Berechnung der Uhrkorrektion mit Hilfe des arithmetischen Mittels der einzelnen Uhrzeiten.*

Benützt man zur Berechnung von u an Stelle der Einzelwerte U_i deren Mittelwert $\overline{U}$:

$$\overline{U} = \frac{1}{n}[U_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist nur dann eine Korrektion anzubringen, wenn die beiden Sterne in Azimuten beobachtet werden, die nicht symmetrisch zum Meridian sind, wie sich aus Folgendem ergibt.

Es sei $\overline{z}$ das arithmetische Mittel der einzelnen Zenitdistanzen:

$$\overline{z} = \frac{1}{n}[z_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist $\overline{U}$ nicht identisch mit der Uhrzeit U_0 des Durchganges durch den Almukantarat der Zenitdistanz $\overline{z}$; den Unterschied

$$d\overline{U} = U_0 - \overline{U}$$

erhält man auf folgendem Weg. Es sei z_0 die der Uhrzeit $\overline{U}$ entsprechende Zenitdistanz; dann ist

$$z_0 = z(\overline{U}) = z(U_0 - d\overline{U}) = \overline{z} - \frac{\partial \overline{z}}{\partial t} d\overline{U} + \cdots$$

oder

$$d\overline{U} \equiv U_0 - \overline{U} = \frac{(\overline{z} - z_0)}{\frac{\partial \overline{z}}{\partial t}}.$$

Nun ist

$$z_i = z(U_i) = z(\overline{U} + dU_i)$$

$$= z_0 + \frac{\partial z}{\partial t} dU_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dU_i^2 + \cdots,$$

also

$$\frac{1}{n}[z_i - z_0] \equiv \overline{z} - z_0 = \frac{1}{n}\frac{\partial z}{\partial t}[dU_i] + \frac{1}{2n}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}[dU_i^2] + \cdots.$$

Da die Werte dU_i die Abweichungen vom arithmetischen Mittel sind, ist

$$[dU_i] = 0.$$

Aus

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sin \Phi \sin p \frac{\sin t}{\sin z}$$

folgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sin \Phi \sin p \frac{\cos t}{\sin z} - \sin \Phi \sin p \sin t \frac{\cos z}{\sin^2 z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial t}\left(\operatorname{cotg} t - \frac{\partial z}{\partial t}\operatorname{cotg} z\right) = \frac{\partial z}{\partial t}\cdot C$$

mit der Abkürzung

$$C = \operatorname{cotg} t - \frac{\partial z}{\partial t}\operatorname{cotg} z.$$

Es wird also

$$d\bar{U} \equiv U_0 - \bar{U} = \frac{\bar{z} - z_0}{\frac{\partial z}{\partial t}} = \frac{C}{2\,n}\,[(U_i - \bar{U})^2].$$

Setzt man

$$\frac{1}{2}\,(U_i - \bar{U})^2 = 2\sin^2\frac{U_i - \bar{U}}{2} + \cdots = m''\sin 1'',$$

so kann man bekannte Tafeln benützen zur Berechnung der Glieder der Summe $[(U_i - U)^2]$.

Als Verbesserung von du wegen der Verbesserungen $d\bar{U}_w$ und $d\bar{U}_e$ erhält man, da

$$du = -\frac{1}{2}\,(d\bar{U}_w + d\bar{U}_e)$$

ist, in Zeitsekunden:

$$du^{\sec} = -\frac{1}{30\,n}\,(C_w\,[m''_w] + C_e\,[m''_e]).$$

Ist $a_e = -a_w$, so ist $C_w = -C_e$ und $m''_w = m''_e$, also $du = 0$.

5. *Die Aufstellung eines Beobachtungsprogrammes.*

Es seien α_w, δ_w und α_e, δ_e die Koordinaten zweier Sterne, deren Deklinationen nur wenig voneinander verschieden sind. Die Sternzeit, zu welcher sie in die gleiche Zenitdistanz kommen, fällt dann nahe auf $\frac{1}{2}\,(\alpha_w + \alpha_e)$. Setzt man in der Beziehung (15) $n_w = n_e$ und $u = 0$, so daß U_w und U_e in die Sternzeiten Θ_w und Θ_e des Durchganges der beiden Sterne durch denselben Almukantarat übergehen, so wird

$$0 = \frac{1}{2}\,(\alpha_w + \alpha_e) - \frac{1}{2}\,(\Theta_w + \Theta_e) + \frac{1}{2}\,(t_w + t_e),$$

oder wenn

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,(\alpha_w + \alpha_e), \quad \Theta_0 = \frac{1}{2}\,(\Theta_w + 0_w), \quad \bar{t}_0 = \frac{1}{2}\,(t_w + t_w)$$

gesetzt wird:

$$\bar{t}_0 = \Theta_0 - \alpha_0.$$

Ist λ_0 der Wert, den λ für $U'_w = U'_e$ annimmt:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\,(\alpha_e - \alpha_w),$$

und m_0 der mit diesem Wert von λ_0 berechnete Wert von m, so ist

$$\operatorname{tg} m_0 = \operatorname{tg}\delta\,\operatorname{tg}\Delta\delta\,\operatorname{cotg}\lambda_0$$

und

$$\sin\,(m_0 - \bar{t}_0) = \operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{tg}\Delta\delta\,\operatorname{cosec}\lambda_0\,\cos m_0.$$

Bei nicht zu großen Werten von $\Delta\delta$ darf man, in Anbetracht der geringeren

Ansprüche, die an die Genauigkeit eines Betrachtungsprogrammes gestellt werden, hiefür schreiben:

$$m_0 = \Delta\delta \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \lambda_0,$$

$$m_0 - \bar{t}_0 = \Delta\delta \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} \lambda_0,$$

so daß

$$\bar{t}_0 = -\Delta\delta \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \lambda_0}{\sin \lambda_0}$$

wird. Ist $\Delta\delta'$ der Wert von $\Delta\delta$ in Bogenminuten, so wird $\bar{t}_0$ in Zeitminuten gegeben durch

$$\bar{t}_0^{\,\min} = -\frac{\Delta\delta'}{15} \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta \cos \lambda_0}{\sin \lambda_0}.$$

Sternzeit und Stundenwinkel der gemeinsamen Zenitdistanz werden gleich:

$$\Theta_0 = \alpha_0 + \bar{t}_0,$$

$$t_w = \Theta_0 - \alpha_w,$$

$$t_e = \Theta_0 - \alpha_e;$$

die gemeinsame Zenitdistanz z_0 folgt aus den Beziehungen

$$\cos z_0 = \cos \Phi \sin \delta_w + \sin \Phi \cos \delta_w \cos t_w \equiv \cos \Phi \sin \delta_e + \sin \Phi \cos \delta_e \cos t_e.$$

Zur Berechnung der Azimute kann man die Beziehungen verwenden:

$$\sin a_w = \cos \delta_w \sin t_w \operatorname{cosec} z_0,$$

$$\sin a_e = \cos \delta_e \sin t_e \operatorname{cosec} z_0,$$

wenn man mit fünfstelligen Logarithmen rechnet, damit auch in der Nähe von 90⁰ und 270⁰ die Azimutwerte sich mit ausreichender Genauigkeit ergeben. Um den Quadranten, in dem die Azimute zu nehmen sind, zu entscheiden, kann man den Stundenwinkel t_{I} des Durchganges durch den ersten Vertikal berechnen:

$$\cos t_{\mathrm{I}} = \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \varphi.$$

Ist im Westen t_{I} größer als t_w, so liegt a_w im ersten Quadranten, ist im Osten t_{I} kleiner als t_e, so liegt a_e im vierten Quadranten.

In die berechnete Zenitdistanz z_0 kommen die beiden Sterne zur gleichen Zeit. Damit sie hintereinander beobachtet werden können, wählt man eine etwas größere oder kleinere Zenitdistanz, je nachdem der Ost- oder der Weststern zuerst beobachtet werden soll. Das Zeitintervall zwischen den beiden Durchgangsbeobachtungen macht man nicht länger als notwendig ist; man braucht dafür nicht mehr als 5–7 Zeitminuten anzusetzen, wenn der Beobachtungsvertikal nicht mehr als 10–20⁰ vom ersten Vertikal abweicht.

Das Azimut ist dann um einen Betrag Δa zu ändern, der durch die Beziehung

$$\Delta a = \Delta t \cos \delta \cos q \operatorname{cosec} z_0$$

$$= \Delta t (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{cotg} z_0 \cos a)$$

gegeben wird. In Bogenminuten wird $\Delta a'$, wenn Δt in Zeitminuten gegeben ist, gleich:

$$\Delta a' = 15 \Delta t^{\min} \sin\varphi \cdot (1 + \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cotg} z_0 \cos a).$$

Die Aufstellung eines Beobachtungsprogrammes ist ohne lange Vorbereitungsrechnungen möglich, wenn die *Working Ephemerides* zur Verfügung stehen, die von russischen Astronomen berechnet und von ZVETKOW 1929 herausgegeben wurden; sie sind dem *Superior Geodetic Survey* der UdSSR. zum zehnjährigen Bestehen gewidmet.

ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel, $\varphi = 47^0 32' 27''$.
Instrument: Repsoldsches Universalinstrument; 70fache Vergrößerung. $p_0 = 1{,}''17 = 0{,}^s078$.
Beobachter: Cand. phil. E. HERZOG.
Datum: 18. August 1944.
Sternpaar: ζ Cyg im Osten
ϱ Boo im Westen.

Die russischen Ephemeriden geben auf Grund der mittleren Sternörter 1950,0:

Sternzeit der gemeinsamen Zenitdistanz	$17^h 51{,}^m 2$
Gemeinsame Zenitdistanz	$42^0 11'$
Azimut des Oststernes	$-\ 84\ 09$
Azimut des Weststernes	$+\ 85\ 15$

Nullstrich des Niveaus innen, also Neigungskorrektion gleich $\frac{1}{2}(n_e - n_w)\, p_0 \sec\varphi \operatorname{cosec} a$.

Die scheinbaren Örter sind:

$$\alpha_e = 21^h 10^m 35^s 50, \qquad \delta_e = 30^0 00' 01{,}''24,$$
$$\alpha_w = 14\ 29\ 25{,}28, \qquad \delta_w = 30\ 37' 11{,}20.$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha_e + \alpha_w) = 17\ 50\ 00{,}39; \quad \tfrac{1}{2}(\delta_e + \delta_w) = 30\ 18\ 36{,}22,$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha_e - \alpha_w) = 3\ 20\ 35{,}11; \quad \tfrac{1}{2}(\delta_e - \delta_w) = -\ 18\ 34{,}98.$$

Die beiden Sterne sind an denselben zehn Fäden des Netzes beobachtet worden; die Fadendurchgänge wurden mit einem Handtaster auf einem Chronographen registriert. Das arithmetische Mittel der Durchgangszeiten beträgt:

$$U_e = 17^h 50^m 02^s 60$$
$$U_w = 17\ 55\ 14{,}02$$
$$\tfrac{1}{2}(U_e + U_w) = 17\ 52\ 38{,}31$$
$$\tfrac{1}{2}(U_e - U_w) = \quad 02\ 35{,}71$$
$$\lambda = \left\{ \begin{matrix} 3\ 20\ 35{,}11 \\ +\ 02\ 35{,}71 \end{matrix} \right\} = +\ 3^h 23^m 10{,}^s 82.$$

Die Niveauablesungen haben ergeben:

	Oststern		Weststern	
	innen	außen	innen	außen
vor der Durchgangsbeobachtung	11,3	34,0	9,0	32,0
nach der Durchgangsbeobachtung	11,3	34,0	10,0	32,9

Somit ist «Summe der Ostablesungen minus Summe der Westablesungen» gleich $4\,(n_e - n_w) = +\ 90{,}6 - 83{,}9 = +\ 6{,}7$ Partes.

Wird nur eine Genauigkeit von $\pm 0^s\!,01$ verlangt, so genügt es, zur Berechnung fünfstellige Logarithmen anzuwenden. Die Berechnung der Uhrkorrektion ist nachfolgend dargestellt:

$\operatorname{tg}\delta$ . . .	$9{,}76\,685$	$\operatorname{tg}\Delta\delta$ . . .	$7{,}73\,285_n$
$\operatorname{tg}\Delta\delta$ . .	$7{,}73\,285_n$	$\operatorname{tg}\varphi$	$0{,}03\,857$
$\operatorname{cotg}\lambda$ . . .	$9{,}91\,154$	$\operatorname{cosec}\lambda$ . .	$0{,}11\,076$
		$\cos m$ . . .	0
$\operatorname{tg} m$ . . .	$7{,}41\,124_n$		
		$\operatorname{tg}(m-\bar{t})$.	$7{,}88\,217_n$
		$m =$	$-\ 0^m\ 35^s\!,45$
		$m-\bar{t} =$	$-\ 1\ \ 44{,}84$
		$\bar{t} =$	$+\ 1\ \ 09{,}39$

$\frac{1}{2}(\alpha_e+\alpha_w)-\frac{1}{2}(U_e+U_w)$	$= -\ 2\ \ 37{,}92$
Niveaukorrektion	$= +\ \ 0{,}097$
Korrektur wegen täglicher Aberration	$= +\ \ 0{,}014$
Uhrkorrektion	$= -\ 1^m\ 28^s\!,42$, Ep. 17^h9.

Ein zweites, unmittelbar anschließend beobachtetes Sternpaar (α Lac und η Urs *ma* hat ergeben $u = -\ 1^m\ 28^s\!,36$, Ep. 18^h1.

Die Bestimmung der Polhöhe mit Hilfe der Durchgänge zweier Sterne durch denselben Almukantarat (Pewzowsche Methode) [2])

1. *Ableitung der Reduktionsformeln.* Wir unterscheiden die Größen, die sich auf die beiden Sterne beziehen, durch die Indizes s und n, indem wir annehmen, es seien die beiden Sterne, um die günstigsten Umstände einzuhalten, symmetrisch zum ersten Vertikal, der eine im Süden und der andere im Norden, beobachtet worden.

Es seien

U_s, U_n die beobachteten Uhrzeiten des Durchganges

α_s, α_n die Rektaszensionen,

p_s, p_n die Poldistanzen der Sterne.

Die Zenitdistanz z_s, in der der Südstern beobachtet worden ist, sei nicht genau gleich der Zenitdistanz z_n des Nordsternes; die Ablesungen des Niveaus sollen zu n_s, n_n als Blasenmitten geführt haben. Mit p_0 als Parswert des Niveaus ist dann

$$z_s - z_n \equiv \Delta z = \pm\,(n_s - n_n)\,p_0 \begin{cases} +\ \text{Nullstrich außen,} \\ -\ \text{Nullstrich innen.} \end{cases} \tag{24}$$

Wir korrigieren die Uhrzeit U_s des Südsternes auf die bei der Beobachtung des Nordsternes vorhandene Zenitdistanz; die korrigierte Uhrzeit wird gleich

$$U_s - \frac{\Delta z}{\sin\Phi\,\sin a_s}$$

Die Stundenwinkel der beiden Sterne beim Durchgang durch den Almukantarat von der Zenitdistanz z_n werden also gleich:

$$t_s = U_s + u - \alpha_s - \Delta t,$$
$$t_n = U_n + u - \alpha_n,$$

mit

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\sin \Phi \sin a_s}. \tag{25}$$

Es wird dann

$$\cos t_s = \cos (t'_s - \Delta t) = \cos t'_s + \Delta t \sin t'_s + \cdots,$$

wenn

$$t' = U_s + u - \alpha_s \tag{26}$$

gesetzt wird.

Eliminiert man aus den Beziehungen

$$\cos z_n = \cos \Phi \cos p_s + \sin \Phi \sin p_s (\cos t'_s + \Delta t \sin t'_s),$$
$$\cos z_n = \cos \Phi \cos p_n + \sin \Phi \sin p_n \cos t_n$$

die gemeinsame Zenitdistanz z_n, so erhält man mit der Abkürzung

$$\frac{1}{N} = \cos p_n - \cos p_s$$

zur Berechnung von Φ die Beziehung

$$\operatorname{cotg} \Phi = N (\sin p_s \cos t'_s - \sin p_n \cos t_n + \Delta t \sin p_s \sin t'_s)$$

oder, wenn Φ' durch die Beziehung

$$\operatorname{cotg} \Phi' = N (\sin p_s \cos t'_s - \sin p_n \cos t_n) \tag{27}$$

definiert wird:

$$\operatorname{cotg} \Phi = \operatorname{cotg} \Phi' + \Delta t \cdot N \sin p_s \sin t'_s.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sin (\Phi' - \Phi)}{\sin \Phi \sin \Phi'} = \Delta z \cdot N \frac{\sin p_s \sin t'_s}{\sin \Phi \sin a_s}$$

oder in immer ausreichender Annäherung

$$\Phi' - \Phi = \Delta z \cdot N \frac{\sin p_s \sin t'_s}{\sin a_s} \sin \Phi' + \cdots. \tag{28}$$

Die Größe N kann in folgender Weise umgeformt werden. Setzt man

$$p = \frac{1}{2} (p_s + p_n)$$

und

$$\Delta p = \frac{1}{2} (p_s - p_n),$$

so wird

$$\frac{1}{N} = 2 \sin p \sin \Delta p. \tag{29a}$$

Eine zweite Form folgt aus den Beziehungen

$$\cos p_n = \cos \Phi \cos z_n - \sin \Phi \sin z_n \cos a_n,$$
$$\cos p_s = \cos \Phi \cos z_s - \sin \Phi \sin z_s \cos a_s;$$

es wird, da $z_s = z_n$ ist:

$$\frac{1}{N} = \sin\Phi \sin z_n (\cos a_s - \cos a_n). \tag{29 b}$$

Wird dieser Wert von N in die Beziehung (28) eingeführt und berücksichtigt man noch, daß

$$\sin p_s \sin t_s = \sin z_n \sin a_s$$

ist, so erhält man

$$\Phi' - \Phi = \frac{\Delta z}{\cos a_s - \cos a_n} = \frac{\Delta z}{2 \cos a_s}$$

mit $\cos a_n = -\cos a_s$, so daß schließlich

$$\Phi = \Phi' \mp \frac{(n_s - n_n) \cdot p_0}{2} \sec a_s \begin{cases} - \text{ Nullstrich außen} \\ + \text{ Nullstrich innen} \end{cases} \tag{30}$$

wird.

2. *Berechnung der Polhöhe mit Hilfe des arithmetischen Mittels der Uhrzeiten.* Berechnet man Φ mit den Mittelwerten $\overline{U}_s$ und $\overline{U}_n$ der einzelnen Uhrzeiten, so ist eine Verbesserung $d\Phi$ anzubringen, die durch die Beziehung

$$(\cos a_s - \cos a_n)\, d\Phi = \sin \Phi\, (d\overline{U}_s \sin a_s + d\overline{U}_n \sin a_n)$$

gegeben wird; sie folgt aus dem Differentialausdruck (32), wenn darin

$$\left.\begin{aligned} \sin p_s \sin q_s &= \sin \Phi \sin a_s, \\ \sin p_n \sin q_n &= \sin \Phi \sin a_n, \end{aligned}\right\} da = dp = du = 0$$

gesetzt wird; $d\overline{U}_s$ und $d\overline{U}_n$ sind die Verbesserungen, durch welche die mittleren Uhrzeiten $\overline{U}_s$ und $\overline{U}_n$ auf die mittlere Zenitdistanz z bezogen werden. Die Werte von $d\overline{U}_s$ und $d\overline{U}_n$ werden in Bogensekunden gleich (vergl. Seite 57/58)

$$d\overline{U}_s = \frac{[m_s'']}{n} \left(\operatorname{cotg} t_s - \frac{\partial z_s}{\partial t} \operatorname{cotg} z \right),$$
$$d\overline{U}_n = \frac{[m_n'']}{n} \left(\operatorname{cotg} t_n - \frac{\partial z_n}{\partial t} \operatorname{cotg} z \right).$$

Hierin ist, da die Sterne symmetrisch zum ersten Vertikal beobachtet werden, zu setzen

$$a_n = 180^0 - a_s;\quad \frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial z_n}{\partial t} = \sin\Phi \sin a_s;$$

es ist dann, von Beobachtungsfehlern abgesehen, auch

$$[m_s''] = [m_n''] = [m''].$$

Aus den Beziehungen

$$\operatorname{cotg} z \sin\Phi = -\cos\Phi \cos a_s + \sin a_s \operatorname{cotg} t_s,$$
$$\operatorname{cotg} z \sin\Phi = \cos\Phi \cos a_s + \sin a_s \operatorname{cotg} t_n$$

folgt
$$\operatorname{cotg} t_s - \operatorname{cotg} t_n = 2 \cos \Phi \operatorname{cotg} a_s,$$
so daß
$$\sin\Phi \sin a_s (d\overline{U}_s - d\overline{U}_n) = \frac{[m'']}{n} \cdot 2 \sin\Phi \cos\Phi \cos a_s$$
wird; in Bogensekunden wird schließlich
$$d\varphi = - d\Phi = - \frac{[m'']}{2n} \sin 2\varphi. \tag{31}$$

3. *Der Einfluß der täglichen Aberration.* Führt man die Verbesserungen wegen der täglichen Aberration
$$d\alpha \sin p = + 0\overset{''}{.}322 \sin\Phi \cos t,$$
$$dp = - 0\overset{''}{.}322 \sin\Phi \sin t \cos p$$
in die Beziehung (32), in der alle Verbesserungen außer den von der Rektaszension und der Poldistanz abhängigen gleich Null gesetzt sind, ein:
$$(\cos a_s - \cos a_n)\, d\Phi = - \sin q_s\, d\alpha_s \sin p_s + \cos q_s\, dp_s$$
$$+ \sin q_n\, d\alpha_n \sin p_n - \cos q_n\, dp_n$$
und berücksichtigt, daß
$$\cos t \sin q + \sin t \cos q \cos p = \sin a \cos z$$
ist, so erhält man
$$(\cos a_s - \cos a_n)\, d\Phi = - 0\overset{''}{.}322 \sin \Phi \cos z\, (\sin a_s - \sin a_n);$$
es wird also $d\Phi = 0$, wenn $a_s + a_n = 180^0$.

Zusammenstellung der Reduktionsformeln

Sind U_s, U_n die beobachteten Uhrzeiten,
α_s, α_n die Rektaszensionen
δ_s, δ_n die Deklinationen der Sterne,
n_s, n_n die Blasenmitten,
p_0 der Parswert des Niveaus in Bogensekunden,
u die Uhrkorrektion,

so erhält man die Polhöhe $\varphi = 90^0 - \Phi$ aus der Durchrechnung des folgenden Systems:
$$t_s = U_s + u - \alpha_s; \quad t_n = U_n + u - \alpha_n;$$
$$\frac{1}{N} = 2 \cos \frac{\delta_s + \delta_n}{2} \sin \frac{\delta_n - \delta_s}{2};$$
$$\operatorname{tg} \varphi' = N (\cos \delta_s \cos t_s - \cos \delta_n \cos t_n)$$
$$\varphi = \varphi' \pm \frac{(n_s - n_n)\, p_0}{\cos a_s - \cos a_n} \begin{pmatrix} + \text{Nullstrich außen} \\ - \text{Nullstrich innen} \end{pmatrix};$$

Die rechte Seite ist noch durch die Korrektion $d\varphi$ nach Beziehung (31) zu ergänzen, wenn die Berechnung mit den Mittelwerten $\overline{U}_s$ und $\overline{U}_n$ der Uhrzeiten durchgeführt wurde.

4. *Die günstigsten Umstände der Beobachtung und der mittlere Fehler der Polhöhe.* Aus den beiden Differentialbeziehungen

$$dz' + \cos a_s\, d\Phi - \sin a_s\, du \sin\Phi = \sin q_s\, d(U_s - \alpha_s) \sin p_s + \cos q_s\, dp_s - dr_s,$$
$$dz' + \cos a_n\, d\Phi - \sin a_n\, du \sin\Phi = \sin q_n\, d(U_n - \alpha_n) \sin p_n + \cos q_n\, dp_n - dr_n$$

folgt

$$\begin{aligned}(\cos a_s - \cos a_n)\, d\Phi - (\sin a_s - \sin a_n)\, du \sin\Phi &\\ = (\sin q_s\, dU_s \sin p_s - \sin q_n\, dU_n \sin p_n)&\\ - (\sin q_s\, d\alpha_s \sin p_s - \sin q_n\, d\alpha_n \sin p_n)&\\ + (\cos q_s\, dp_s - \cos q_n\, dp_n) - (dr_s - dr_n).&\end{aligned} \tag{32}$$

Beobachtet man die Sterne in Azimuten, die symmetrisch zum West- oder Ostvertikal liegen, so ist

$$a_n = 180^0 - a_s$$

und somit

$$\sin a_s - \sin a_n = 0$$

und

$$\cos a_s - \cos a_n = 2 \cos a_s.$$

In diesem Fall hat ein Fehler du keinen Einfluß auf die Polhöhe, und es wird

$$\begin{aligned}2 \cos a_s\, d\Phi = \sin q_s\, dU_s \sin p_s - \sin q_n\, dU_n \sin p_n&\\ - (\sin q_s\, d\alpha_s \sin p_s - \cos q_s\, dp_s)&\\ + (\sin q_n\, d\alpha_n \sin p_n - \cos q_n\, dp_n) - (dr_s - dr_n).&\end{aligned}$$

Geht man von den wahren Fehlern dx zu den mittleren Fehlern m_x über, so erhält man ohne Berücksichtigung des Refraktionsfehlers, wenn man beachtet, daß die mittleren Fehler m_{U_s} und m_{U_n} bei gleicher Faden- oder Kontaktzahl wegen

$$\sin q_s \sin p_s = \sin q_n \sin p_n = \sin\Phi \sin a_s$$

gleich groß werden, und wenn man

$$m_\alpha \sin p = m_p = m^*$$

setzt:

$$4 \cos^2 a_s \cdot m_\Phi^2 = 2 \sin^2\Phi \sin^2 a_s \cdot m_U^2 + 2\, m^{*2},$$

oder wenn man

$$\sin^2\Phi \sin^2 a_s \cdot m_U^2 = \frac{1}{n}\left(a_0^2 \sin^2\Phi \sin^2 a_s + \frac{b_0^2}{V^2}\right)$$

einführt:

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{n} \sin^2\Phi \sin^2 a_s + \left(\frac{b_0^2}{n V^2} + m^{*2}\right)\right) \sec^2 a_s. \tag{33}$$

Setzt man $a_s = 20^0$, $\Phi = 45^0$, $m^* = \pm 0^s\!,02$, $n = 10$ und $V = 80$, so sind die folgenden Fehler von Φ zu erwarten:

Methode	Mittlerer Fehler m_Φ der Polhöhe
1. Aug- und Ohrmethode	$\pm 0\overset{''}{,}33$
2. Registriermethode	,32
3. Unpersönliches Mikrometer:	
a) Handnachführung (Potsdamer Konstanten) . . .	,27
b) Handnachführung (Schweizer Konstanten) . . .	,26

5. *Die Aufstellung eines Beobachtungsprogrammes.* Um Sternpaare auszusuchen, die nach der Pewzowschen Methode beobachtet werden können, bedient man sich am besten einer Sternkarte, auf welche man ein durchsichtiges Blatt mit einem Netz von Kurven gleicher Zenitdistanz und gleichen Azimutes legt. Hat man zwei Sterne gefunden, die ungefähr zu gleicher Zeit symmetrisch zum ersten Vertikal in gleiche Zenitdistanz kommen, so ergibt die folgende Rechnung, ob und unter welchen Umständen sie beobachtet werden können.

Sind a_s und $a_n = 180^0 - a_s$ die Azimute der beiden Sterne, so bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\cos p_s &= \cos\Phi\cos z - \sin\Phi\sin z\cos a_s,\\ \cos p_n &= \cos\Phi\cos z + \sin\Phi\sin z\cos a_s.\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

Das arithmetische Mittel liefert die gemeinsame Zenitdistanz

$$\cos z = \frac{1}{2}(\cos p_s + \cos p_n)\sec\Phi.$$

Führt man das arithmetische Mittel und die halbe Differenz der Deklinationen ein:

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta_s + \delta_n),\qquad \varDelta\delta = \frac{1}{2}(\delta_n - \delta_s),$$

so erhält man

$$\cos z = \sin\delta\cos\varDelta\delta\operatorname{cosec}\varphi.$$

Die halbe Differenz der Beziehungen (A) führt nun zur Kenntnis des Azimutes:

$$\cos a_s = \frac{1}{2}(\cos p_n - \cos p_s)\operatorname{cosec} z\operatorname{cosec}\Phi$$

oder

$$\cos a_s = \cos\delta\sin\varDelta\delta\operatorname{cosec} z\sec\varphi.$$

Die Stundenwinkel der beiden Sterne folgen nun aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned}\sin t_s &= \sin z\sin a_s\sec\delta_s,\\ \sin t_n &= \sin z\sin a_n\sec\delta_n.\end{aligned}$$

Die Sternzeiten Θ_s und Θ_n der Beobachtung am ersten Seitenfaden im Abstand $\varDelta z$ vom Mittelfaden werden dann gleich:

$$\begin{aligned}\Theta_s &= \alpha_s + t_s - \varDelta t,\\ \Theta_n &= \alpha_n + t_n - \varDelta t,\end{aligned}$$

worin
$$\Delta t = \frac{1}{15} \frac{\Delta z'}{\sin a_s \cos \varphi}$$
in Zeitminuten erhalten wird, wenn $\Delta z'$ in Bogenminuten ausgedrückt wird.

ZAHLENBEISPIEL

Ort: Astronomische Anstalt der Universität Basel.
Instrument: Repsoldsches Universalinstrument, 70fache Vergrößerung; $p_0 = 1\overset{''}{.}17$.
Beobachter: Cand. phil. E. HERZOG.
Datum: 18. August 1944.

Mit Hilfe einer Sternkarte und eines Netzes mit Linien gleicher Zenitdistanz und gleichen Azimutes wurde festgestellt, daß die Sterne α Oph und β Urs mi ungefähr zur Sternzeit 18^h30^m bis 18^h50^m in gleiche Zenitdistanz symmetrisch zum ersten Vertikal auf der Westseite des Meridians kommen. Die genauere Berechnung nach den Formeln der Seite 66 hat zu folgendem Beobachtungsprogramm geführt:

Gemeinsame Zenitdistanz	$36^0 49'$	
Azimut des Südsternes	$22^0 58'$,	Sternzeit $18^h 27\overset{m}{.}8$,
des Nordsternes	$180^0 - 22^0 58'$,	$18\ 52, 0$.

Der erste von den 10 Fäden, an welchen die beiden Sterne beobachtet wurden, hat einen Abstand von $20\overset{s}{.}5$ vom Mittelfaden; die Sterne treten um
$$20\overset{s}{.}5 \sec \varphi \operatorname{cosec} a_s = 1\overset{m}{.}3$$
vor der berechneten Zeit an den ersten Faden.

Die beobachteten Uhrzeiten U_i, die mit einem Handtaster registriert wurden, ihre Abweichungen $U_i - \overline{U}$ vom Mittelwert $\overline{U}$ und die diesen Abweichungen entsprechenden Werte von m_i'' sind nachstehend zusammengestellt:

Faden	Südstern			Nordstern		
	U_i	$U_i - \overline{U}$	m_i''	U_i	$U_i - \overline{U}$	m_i''
1	$18^h29^m16\overset{s}{.}44$	$-76\overset{s}{.}80$	$3\overset{''}{.}21$	$18^h53^m23\overset{s}{.}76$	$-79\overset{s}{.}96$	$3\overset{''}{.}49$
2	34,28	− 58,96	1,89	44,00	− 59,72	1,94
3	54,96	− 38,28	0,80	63,76	− 39,96	0,87
4	73,46	− 19,78	0,22	84,02	− 19,70	0,21
5	89,64	− 3,60	0,01	100,40	− 3,32	0,00
6	96,90	3,66	0,01	107,38	3,66	0,01
7	113,18	19,94	0,22	123,82	20,10	0,22
8	132,24	39,00	0,83	143,74	40,02	0,87
9	150,88	57,64	1,81	162,74	59,02	1,89
10	170,42	77,18	3,25	183,56	79,84	3,48
Mittel	18 30 33,24		1,22	18 54 43,72		1,30

Die Niveauablesungen haben ergeben:

	Südstern		Nordstern	
	innen	außen	innen	außen
Vor der Durchgangsbeobachtung .	12,0	35,1	10,4	34,0
Nach der Durchgangsbeobachtung .	13,5	36,9	9,2	32,9

Somit ist
Summe der Nordablesungen minus Summe der Südablesungen gleich

$$4\,(n_n - n_s) = 86{,}5 - 97{,}5 = -11{,}0 \text{ Partes}$$

und die Korrektion wegen Neigung ist gleich

$$+\frac{1}{2}\,(n_n - n_s)\,p_0 \cdot \sec a_s = -1''{,}75.$$

Die Korrektion wegen der Benützung des Mittelwertes $\overline{U}$ wird gleich

$$-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\frac{\overline{m_s''} + \overline{m_n''}}{2} = -0''{,}63 \sin 2\varphi = -0''{,}63.$$

Zur Berechnung dieser Korrektion kann man auch ausgehen von der halben Differenz der Durchgangszeiten zweier zum Mittelfaden symmetrischer Fäden; man hat dann nur halb so viele Werte von m_i'' zu bilden und zu mitteln.

Die scheinbaren Örter der beiden Sterne sind:

$$\alpha_s = 17^{\mathrm{h}}32^{\mathrm{m}}21^{\mathrm{s}}{,}58,\quad \delta_s = 12^0 36' 10''{,}68,\quad \tfrac{1}{2}(\delta_n + \delta_s) = 43^0 29' 46''{,}08,$$
$$\alpha_n = 14\;\;50\;\;49{,}08,\quad \delta_n = 74\;\;23\;\;21{,}48,\quad \tfrac{1}{2}(\delta_n - \delta_s) = 30\;\;53\;\;35{,}40.$$

Die Uhrkorrektion ist auf Grund der am gleichen Tag nach der Zingerschen Methode beobachteten Sterne unter Berücksichtigung des Uhrganges angesetzt worden zu

$$u_s = -1^{\mathrm{m}}28^{\mathrm{s}}{,}43 = u_n;$$

die Stundenwinkel werden gleich

$$t_s = \overline{U}_s + u_s - a_s = +\,0^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}43^{\mathrm{s}}{,}23,$$
$$t_n = \overline{U}_n + u_n - a_n = +\,4\;\;02\;\;26{,}21.$$

Die Größe $\frac{1}{N}$ und tg φ' ergeben sich durch folgende Rechnung (unter Verwendung von Subtraktionslogarithmen):

$\cos\delta_s$	9,9894078
$\cos t_s$	9,9865614
$\cos\delta_s \cos t_s = a$ . . .	9,9759692
$\cos\delta_n$	9,4299132
$\cos t_n$	9,6908725
$\cos\delta_n \cos t_n = b$ . . .	9,1207857
$B = \lg a - \lg b$ = . .	0,8551835
C = ...	9,9347116
$\lg(a-b) = \lg a + C$ =	9,9106808

$\cos\frac{1}{2}(\delta_n + \delta_s)$	9,8605900
$\sin\frac{1}{2}(\delta_n - d_s)$	9,7104888
2	0,3010300
1/N	9,8721088
$\operatorname{tg}\varphi' = (a-b)\cdot N$.	0,0385720
φ' = ...	$47^0 32' 27''{,}72$
Neigungskorrektion =	$-1''{,}75$
Korrektion (wegen Berechnung mit $\overline{U}$) =	$-0''{,}63$
φ = ...	$47^0 32' 25''{,}34$

c) Die Horrebow-Talcott-Methode der Polhöhenbestimmung

1. *Allgemeines.* Der Ausdruck (33) für den mittleren Fehler m_Φ der Polhöhe in der Pewzowschen Methode nimmt den kleinstmöglichen Wert an, wenn man $a_s = 180^0 - a_n$ gleich Null werden läßt; es wird dann

$$m_\Phi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b_0^2}{nV^2} + m^{*2}\right). \tag{34}$$

Will man in den Meridian selber gehen, wo keine Almukantaratdurchgänge beobachtet werden können, so ersetzt man die Durchgangsbeobachtungen durch

Einstellungen eines beweglichen Horizontalfadens auf den Stern. Es sei M_w die Ablesung an der Mikrometertrommel bei der Einstellung auf den *Südstern* in der Westlage des Instrumentes, und es sollen in dieser Lage die Ablesungen zunehmen, wenn der Faden im Sinn zunehmender Zenitdistanz bewegt wird. Entspricht der Ablesung M_0 an der Mikrometertrommel die wahre Zenitdistanz ζ_0, so ist die wahre Zenitdistanz ζ_s des Südsternes, wenn wir von der Wirkung der Refraktion absehen, gleich

$$\zeta_s = \zeta_0 + (M_w - M_0)\, R;$$

R bezeichnet den Revolutionswert der Schraube.

Nach der Drehung des Instrumentes um 180° sei M_e die Trommelablesung. Nimmt man die Zenitdistanzen nach *Norden* negativ, so wird die wahre Zenitdistanz des Nordsternes ζ_n gleich

$$\zeta_n = -\left(\zeta_0 + (M_e - M_0)\, R\right).$$

Es ist also

$$\zeta_s + \zeta_n = (M_w - M_e)\, R.$$

Da die Poldistanz Φ des Zenites gleich

$$\Phi = p_s - \zeta_s$$

und gleich

$$\Phi = p_n - \zeta_n$$

ist, so wird das arithmetische Mittel gleich

$$\Phi = \frac{1}{2}\,(p_s + p_n) - \frac{1}{2}\,(\zeta_s + \zeta_n)$$

oder

$$\Phi = \frac{1}{2}\,(p_s + p_n) - \frac{1}{2}\,(M_w - M_e)\, R.$$

2. *Der Einfluß der Instrumentalfehler*. Damit tatsächlich die Summe $(\zeta_s + \zeta_n)$, das ist die Differenz der absoluten Zenitdistanzen, mit dem Mikrometer gemessen wird, muß der Übergang vom Süd- zum Nordstern oder der umgekehrte Übergang erfolgen durch Drehung des Instrumentes um die Lotrichtung. Wir nehmen vorläufig an, es falle die vertikale Umdrehungsachse mit der Lotrichtung zusammen, und fragen, welche weiteren Bedingungen erfüllt sein müssen. Zunächst ist erforderlich, daß bei der Drehung des Fernrohres um die horizontale Umdrehungsachse die Visierlinie einen Vertikalkreis beschreibt, das heißt die Umdrehungsachse muß horizontal liegen und die Visierrichtung muß auf der Umdrehungsachse senkrecht stehen. Damit Meridianzenitdistanzen gemessen werden, muß ferner die Umdrehungsachse in die Ost-West-Richtung fallen. Es ist also der Einfluß dreier Fehler zu untersuchen. 1. der Neigung i der Achse über dem Horizont; 2. des Kollimationsfehlers c der Visierlinie; und 3. der Abweichung k der Richtung der Horizontalachse von der

Ost-West-Richtung. Die Neigung i nehmen wir positiv, wenn das Westende der Achse über dem Horizont liegt; mit der Richtung des Westendes bilde die Visierrichtung den Winkel $90^0 + c$; das Azimut des Westendes sei $90^0 - k$.

Im sphärischen Dreieck, dessen Eckpunkte vom Westpunkt W der Achse, vom Zenit Z und vom scheinbaren Ort S des Sternes gebildet werden, ist der Winkel bei W die Instrumentaldistanz z':

$$\sphericalangle ZWS = z'.$$

Ferner ist

$$ZW = 90^0 - i$$

und

$$SW = 90^0 + c;$$

die Seite ZS ist die scheinbare Zenitdistanz des Sternes; wir setzen

$$ZS = z.$$

Der Cosinussatz gibt dann die Beziehung

$$\cos z = -\sin i \sin c + \cos i \cos c \cos z'$$

Entwickelt man den Sinus und Cosinus der kleinen Größen i und c, so erhält man leicht

$$z = z' + i\,c \operatorname{cosec} z + \frac{i^2 + c^2}{2} \operatorname{cotg} z + \cdots.$$

Die wahre Zenitdistanz $(z + r)$ wird jetzt mit dem Stundenwinkel t des Sternes durch die Beziehung

$$\cos(z + r) = \cos\Phi \cos p + \sin\Phi \sin p \cos t$$

verbunden, so daß wegen

$$\cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\cos(z + r) = \cos(p - \Phi) - \sin\Phi \sin p \cdot 2\sin^2\frac{t}{2}$$

oder gleich

$$= \cos(\Phi - p) - \sin\Phi \sin p \cdot 2\sin^2\frac{t}{2}$$

wird.

Wir führen die nach Süden positiv genommene Meridianzenitdistanz ζ ein:

$$\zeta = p - \Phi$$

und nehmen auch $(z + r)$ nach Süden positiv; es wird dann, da

$$\cos(z + r) - \cos\zeta = -2\sin\frac{z + r + \zeta}{2}\sin\frac{z + r - \zeta}{2}$$

$$= (\zeta - z - r)\cdot\sin z + \cdots$$

ist und

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{t^2}{4} + \cdots$$

gesetzt werden darf:

$$\zeta - z = -\frac{t^2}{2} \sin \Phi \sin p \operatorname{cosec} z + r + \cdots .$$

Nun ist (vergleiche Seite 80, (39b)):

$$t \sin p = -(k \sin z + i \cos z + c),$$

worin k das Instrumentenazimut (positiv von S gegen E), i die Achsenneigung und c die Kollimation des Fernrohres bezeichnet; es wird also

$$\zeta - z = -\frac{1}{2}(k \sin z + i \cos z + c)^2 \sin \Phi \operatorname{cosec} z \operatorname{cosec} p + r.$$

Ist der Stern in der Nähe der unteren Kulmination beobachtet, so ist hierin die Poldistanz p negativ zu nehmen.

Da

$$\zeta - z' = (\zeta - z) + (z - z')$$

ist, so erhält man:

$$\zeta - z' = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} z \left\{ (k \sin z + i \cos z + c)^2 \sin \Phi \operatorname{cosec} p - 2ic - (i^2 + c^2) \cos z \right\} + r.$$

Setzt man

$$\Phi' = p - (z' + r),$$
$$\Phi = \Phi' + d\Phi = \Phi' - d\varphi,$$

so wird

$$d\varphi = (\zeta - z') - r$$

gleich:

$$d\varphi = -\frac{1}{2} k^2 K \cos \varphi + \frac{1}{2} i^2 J \sin \varphi + \frac{1}{2} c^2 \operatorname{cotg} p - k i J \cos \varphi - k c C \cos \varphi + i c C \sin \varphi; {}^{*}) \tag{35}$$

hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$K = \sin z \operatorname{cosec} p,$$
$$J = \cos z \operatorname{cosec} p,$$
$$C = \operatorname{cosec} p.$$

In den beiden letzten Gliedern von (35) ist das Zeichen umzukehren, wenn die Visierrichtung mit der Westrichtung der Achse nicht den Winkel $90^0 + c$, sondern $90^0 - c$ bildet.

Drückt man in der Beziehung (35) die Fehler k, i und c in Bogensekunden aus und multipliziert rechter Hand mit $\sin 1''$, so erhält man die Verbesserung $d\varphi$ in Bogensekunden.

* TH. ALBRECHT gibt in der 4. Auflage der «Formeln und Hilfstafeln», Seite 71, nur die von den Quadraten der Fehler k, i und c abhängigen Glieder.

Setzt man:

$$k = 30'', 60'', 90'',$$
$$i = 5'',$$
$$c = \pm 60'' \begin{cases} + \text{Stern Süd} \\ - \text{Stern Nord} \end{cases}$$
$$p_s = 75^0, \ p_n = 15^0, \ \varphi = 45^0,$$

so erhält man die nachstehenden Werte von $d\varphi_s$ und $d\varphi_n$ sowie des Mittels $d\varphi = \frac{1}{2}(d\varphi_s + d\varphi_n)$:

k	$30''$	$60''$	$90''$
$d\varphi_s$ $d\varphi_n$	$-0\overset{''}{,}004$ $+0{,}048$	$-0\overset{''}{,}013$ $+0{,}060$	$-0\overset{''}{,}024$ $+0{,}073$
$d\varphi$	$+0\overset{''}{,}022$	$+0\overset{''}{,}023_5$	$+0\overset{''}{,}024_5$

Es ist hauptsächlich der Kollimationsfehler, der einen relativ großen Beitrag bei der Beobachtung des Nordsternes liefert.

3. *Berechnung der Polhöhe unter Berücksichtigung der Niveauablesungen und der Einstellung außerhalb des Meridians.* Wir unterscheiden die beiden Lagen, in welchen die Einstellungen des beweglichen Fadens auf den Süd- oder Nordstern vorgenommen werden, nicht durch die Indices s und n, sondern e und w. Es seien

m_e, m_w die Ablesungen an der Mikrometertrommel in den beiden Lagen des Instrumentes;

n_e, n_w die Blasenmitten, die aus den Ablesungen des fest mit dem Fernrohr verbundenen Niveaus zu ermitteln sind;

R der Revolutionswert der Schraube;

p_0 der Parswert des Niveaus.

Wird der bewegliche Faden auf die Ablesung $m = 0$ der Schraube gestellt und das Instrument so korrigiert, dass die Blasenmitte auf dem Strich $n = 0$ steht, so soll die Visierlinie sich in der scheinbaren Zenitdistanz z_0 befinden. Die scheinbaren Zenitdistanzen z_s' und z_n' werden dann gleich:

$$\text{Lage E, * S} \quad z_s' = \quad z_0 \pm m_e R \pm n_e p_0,$$
$$\text{W, * N} \quad z_n' = -(z_0 \pm m_w R \pm n_w p_0);$$

oder gleich:

$$\text{Lage W, * S} \quad z_s' = \quad z_0 \mp m_w R \mp n_w p_0,$$
$$\text{E, * N} \quad z_n' = -(z_0 \mp m_e R \mp m_w p_0).$$

Es ist im Glied mR das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem in der Lage E die Bezifferung der Trommel mit nach S wachsender Zenitdistanz zu- oder abnimmt, und im Glied np_0, je nachdem der Nullstrich der Niveauteilung außen, das heißt in der Richtung nach dem Stern, oder innen liegt.

Sowohl wenn die Sterne in der Reihenfolge

Lage E * S — Lage W * N als in der Reihenfolge
Lage W * S — Lage E * N beobachtet werden,

erhält man für die Summe der beiden Zenitdistanzen

$$z_s' + z_n' = \pm (m_e - m_w) R \pm (n_e - n_w) p_0.$$

Im ersten Glied rechter Hand gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Ablesungen an der Mikrometertrommel bei Ok E zu- oder abnehmen, wenn man die Zenitdistanz im Süden wachsen läßt. Im zweiten Glied ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem bei Ok E * S oder bei Ok W * S der Nullstrich der Niveauteilung außen liegt.

Wird der Mikrometerfaden nicht im Achsenäquator, sondern im Abstand $c = F$ von demselben auf den Stern eingestellt, so ist an den Mikrometerlesungen eine Korrektion anzubringen. Aus der Beziehung (35) folgt als Betrag $\varkappa$ dieser Korrektion, wenn die Instrumentalfehler k und i gleich Null gesetzt werden:

$$\varkappa = \frac{15^2}{2} F^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} p,$$

worin F in Zeitsekunden auszudrücken ist, damit $\varkappa$ in Bogensekunden erhalten wird.

Der Unterschied zwischen der wahren Zenitdistanz ζ und der scheinbaren Zenitdistanz z' wird dann gleich

$$\zeta - z' = \varkappa + r.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\text{bei Ok E: } M_e = \left(m_e \pm \frac{\varkappa_e}{R} \right) R,$$

$$\text{bei Ok W: } M_w = \left(m_w \mp \frac{\varkappa_w}{R} \right) R.$$

Hierin ist das obere Zeichen zu nehmen, wenn mit wachsender Zenitdistanz bei $\left\{\begin{array}{l}\text{Ok E *S}\\ \text{Ok W *N}\end{array}\right\}$ die Mikrometerlesungen $\left\{\begin{array}{l}\text{zu-}\\ \text{ab-}\end{array}\right\}$ nehmen, und das untere Zeichen, wenn sie bei $\left\{\begin{array}{l}\text{Ok W *S ab-}\\ \text{Ok E *N zu-}\end{array}\right\}$ nehmen.

Während des Durchganges des Sternes durch das Gesichtsfeld kann der Beobachter wiederholt den beweglichen Faden auf den Stern einstellen. Wir bezeichnen mit $\overline{M}$ das arithmetische Mittel der Einzelwerte M; ferner sei

$$\overline{(n_e - n_w)\, p_0}$$

das arithmetische Mittel der beiden Einzelwerte $(n_e - n_w)\, p_0$, wenn das Instrument mit zwei Höhenniveaus ausgerüstet ist. Die Beobachtungen sind dann nach der folgenden Formel zu reduzieren:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) \pm \frac{1}{2}(\overline{M}_e - \overline{M}_w) \pm \frac{1}{2}\overline{(n_e - n_w)}\, p_0 \pm \frac{1}{2}(r_s + r_n). \tag{36}$$

Das von der Refraktion abhängige Glied ist immer sehr klein und kann mit der mittleren Refraktion berechnet werden. Setzt man die Konstante der mittleren Refraktion gleich 57″,7 so wird

$$\frac{1}{2}(r_s + r_n) = \frac{57''\!,7}{2}(\operatorname{tg} z'_s + \operatorname{tg} z'_n)$$
$$= 28''\!,85 \frac{\Delta z'}{\cos^2 z} \sin 1' + \cdots,$$

oder

$$\frac{1}{2}(r_s + r_n) = 0''\!,00839\, \Delta z' \sec^2 z, \tag{37}$$

wenn

$$\Delta z' = z'_s + z'_n$$

die Differenz der absolut genommenen Zenitdistanzen in Bogenminuten im Sinn «Süd–Nord» und z ihr arithmetisches Mittel bezeichnet.

4. *Die Bestimmung des Revolutionswertes R der Schraube.* Der einfachste, immer gangbare Weg, zur Kenntnis von R zu gelangen, besteht darin, die Durchgänge eines polnahen Sternes in der größten Digression zu beobachten, indem der bewegliche Faden ständig der Sternbewegung in regelmäßigen Intervallen vorausgestellt wird. Es können auch geeignete Sternpaare im Meridian benützt werden, wenn die Deklinationen gut bekannt sind. Weniger zu empfehlen ist es, den Revolutionswert als Unbekannte neben der Polhöhe aus der Gesamtheit der Polhöhenbeobachtungen abzuleiten; bei diesem Verfahren wird der Winkelwert, der einer Verstellung des beweglichen Fadens entspricht, in Beziehung gesetzt zur Zenitdistanzdifferenz zweier Sterne, von denen der eine südlich, der andere nördlich vom Zenit durch das Gesichtsfeld geht, und dazu muß die Lotrichtung mit Hilfe des Niveaus festgelegt werden. Geht man dagegen von der Zenitdistanzänderung eines Polsternes in der größten Digression oder von der Zenitdistanzdifferenz zweier Sterne, die entweder im Süden oder im Norden des Zenites durch das Gesichtsfeld gehen, aus, so dient das Niveau nur zur Ermittlung der Änderung der Visierrichtung gegenüber der Lotrichtung.

Es sei z die Instrumentalzenitdistanz des Sternes im Moment U des Durchganges durch den beweglichen Faden, m die Ablesung an der Mikrometertrommel und n die Blasenmitte des Niveaus, r die Refraktion. Dem Wert $m = 0$ und $n = n_0$ entspreche die Instrumentalzenitdistanz z_0. Nehmen die Ablesungen m mit wachsender Zenitdistanz zu und liegt der Nullstrich des Niveaus innen, so wird die z entsprechende wahre Instrumentalzenitdistanz ζ gleich:

$$\zeta = z_0 + mR + (n_0 - n)\, p_0 + r.$$

Um Zenitdistanzdifferenzen zu bilden, die wir in Beziehung setzen können zu Differenzen der Uhrzeit, führen wir die wahre Zenitdistanz ζ_d im Moment der größten Digression ein. Wir geben den Größen, die sich auf diesen Moment beziehen, den Index d; es ist dann

$$\zeta_d = z_0 + m_d R + (n_0 - n_d)\, p_0 + r_d.$$

Die Differenz $(\zeta_d - \zeta)$ läßt sich dann in der Form schreiben:

$$\zeta_d - \zeta = (m_d - n_d\, p_0') \cdot R - (m - n\, p_0') \cdot R + \Delta r'',$$

worin die Abkürzungen gebraucht sind:

$$p_0' = \frac{p_0}{R},$$

$$\Delta r'' = r_d - r.$$

Die wegen der Refraktion anzubringende Korrektion $\Delta r''$ kann in folgender einfachen Weise berücksichtigt werden. Es ändere die Refraktion pro eine Bogenminute Zenitdistanzänderung um den Betrag dr''; dann ist

$$\Delta r'' = (m_d - m)\, \frac{R}{60} \cdot dr'',$$

wenn R der Revolutionswert in Bogensekunden ist. Die Differenz $(\zeta_d - \zeta)$ wird dann gleich:

$$\zeta_d - \zeta = \left(m_d - n_d\, p_0' + m_d\, \frac{dr''}{60}\right) R - \left(m - n\, p_0' + m\, \frac{dr''}{60}\right) R.$$

Führt man nun folgende Bezeichnung ein:

$$y = R\left(1 + \frac{dr''}{60}\right),$$

$$x = y\left(m_d - n_d\, \frac{p_0'}{1 + \frac{dr''}{60}}\right),$$

$$b = m - n\, \frac{p_0'}{1 + \frac{dr''}{60}},$$

$$l = \zeta_d - \zeta,$$

so erhält man unter Beifügung einer scheinbaren Verbesserung λ die Fehlergleichungen

$$x - b y = l + \lambda,$$

aus deren Gesamtheit die Unbekannten x und y zu berechnen sind. Zur Berechnung der numerischen Werte der Koeffizienten b genügt es, in $p_0' = p_0/R$ für R einen Näherungswert einzuführen.

Die fingierten Beobachtungsgrößen $l = \zeta_d - \zeta$ sind in folgender Weise aus den beobachteten Uhrzeiten U zu berechnen. Ist u die Uhrkorrektion und α die Rektaszension des Sternes, so daß der Stundenwinkel t gleich

$$t = U + u - \alpha$$

wird, so wird die wahre Zenitdistanz ζ' im Moment U gegeben durch die Beziehung

$$\cos\zeta' = \cos\Phi\cos p + \sin\Phi\sin p\cos t.$$

Die wahre Instrumentalzenitdistanz ζ folgt dann, wenn der Stern im Abstand F vom kollimationsfreien Mittelfaden beobachtet wird und die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse gleich Null ist, aus

$$\zeta = \zeta' - \frac{F^2}{2}\operatorname{cotg}\zeta'.$$

Der Stundenwinkel des Sternes im Moment der größten Digression folgt aus der Beziehung

$$\cos t_d = \operatorname{cotg}\Phi\operatorname{tg} p,$$

und die Zenitdistanz ζ_d aus

$$\operatorname{tg}\zeta_d = \operatorname{tg} t_d\sin p.$$

Es wird dann

$$U_d = \alpha + t_d - u.$$

Die zur Berechnung von $(\zeta - \zeta')$ erforderliche Fadendistanz F kann streng in folgender Weise ermittelt werden. Der Unterschied $\varDelta a$ der Azimute des Sternes zu den Zeiten U_d und U wird durch die Beziehung

$$\sin\varDelta a = \sin 2p\operatorname{cosec}\zeta'\sin^2\frac{U_d - U}{2}$$

gegeben; es wird dann

$$\sin F = \sin\varDelta a\sin\zeta'.$$

Statt dieser strengen Beziehungen genügt immer die folgende Näherungsbeziehung. Aus den Gleichungen

a) $$\sin p\cos t = \cos\zeta'\sin\Phi - \sin\zeta'\cos\Phi\cos a,$$
$$\sin p\sin t = \sin\zeta'\sin a,$$

b) $$\sin t_d = \sin\zeta_d\operatorname{cosec}\Phi \equiv \cos\zeta_d\cos a_d\sec\Phi,$$
$$\cos t_d = \cos\zeta_d\sin a_d$$

folgt durch entsprechende Kombination

$$\begin{aligned}\sin p\sin(t_d - t) &= \cos\zeta'\sin\zeta_d - \sin\zeta'\cos\zeta_d\cos\varDelta a\\ &= \sin(\zeta_d - \zeta') + \sin\zeta'\cos\zeta_d\cdot 2\sin^2\frac{\varDelta a}{2}\end{aligned}$$

und somit

$$(\zeta_d - \zeta') = \sin p\sin(U_d - U) - \sin\zeta'\cos\zeta_d\cdot 2\sin^2\frac{\varDelta a}{2} + \cdots.$$

Ferner folgt aus der Beziehung

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\zeta'\cos\varDelta a$$

$$\sin(\zeta - \zeta') = (\zeta - \zeta') - \cdots = -\sin\zeta'\cos\zeta\cdot 2\sin^2\frac{\varDelta a}{2}.$$

Somit wird
$$\zeta_d - \zeta = (\zeta_d - \zeta') - (\zeta - \zeta')$$
gleich:
$$\zeta_d - \zeta = \sin p \sin (U_d - U) + \sin \zeta' (\cos \zeta' - \cos \zeta_d) \cdot 2 \sin^2 \frac{\Delta a}{2} + \cdots .$$

Das zweite Glied rechter Hand darf immer vernachlässigt werden; es bleibt in mittleren Breiten bei der Beobachtung des Polarsternes, wo Δa 3 Bogenminuten erreichen kann und wenn die Differenz $(\cos \zeta' - \cos \zeta_d)$ mit $\zeta_d - \zeta' = 1200''$ berechnet wird, kleiner als $0{,}''001$.

Drückt man $(U_d - U)$ in Zeitsekunden aus, so erhält man $l = (\zeta_d - \zeta)''$ in Bogensekunden aus der Beziehung
$$(\zeta_d - \zeta)'' = 15 \sin p \left\{ (U_d - U) - \frac{15^2}{6} \sin^2 1'' (U_d - U)^3 + \cdots \right\}. \qquad (38)$$

ZAHLENBEISPIEL

Ort: Basel, Astronomische Anstalt der Universität Basel im Bernoullianum.
Instrument: Bambergsches Passageninstrument, 86fache Vergrößerung.
Beobachter: Cand. phil. E. Baumann.
Datum: 1923, 1. August.

Der Revolutionswert der Schraube ist aus der Beobachtung von λ Urs mi in östlicher Digression abgeleitet worden; er hat sich zu
$$1^R = 79{,}''0743$$
ergeben. Den kleinen konstatierten Schraubenfehlern wurde nicht Rechnung getragen, da sich ihr Einfluß im Mittel der sämtlichen beobachteten Sternpaare hebt.

Die Parswerte der beiden Niveaus sind
$$\text{Niveau I} \quad 1^{p_0} = 1{,}''36.$$
$$\text{II} \quad 1^{p_0} = 1{,}27.$$

Wir greifen aus den Beobachtungen die nachfolgenden Daten heraus. Der Nordstern ist in denselben Abständen vom Mittelfaden beobachtet worden wie der Südstern. Die Sternnummern beziehen sich auf den Preliminary General Catalogue von Boß.

Stern Nr.	Ok	Niveauablesungen			Mikrometerablesungen					
			i	a	F	24^s	8^s	8^s	24^s	Mittel
4582 S	E	I II	$3{,}^p2$ 52,0	$36{,}^p3$ 85,5	11^R	,795	,791	,793	,802	$11{,}^R7952$
4623 N	W	I II	3,2 52,2	36,5 85,7	20^R	,362	,370	,373	,367	20,3680

Die Mikrometerablesungen nehmen bei Ok E*S mit wachsender Zenitdistanz ab; die Lage des Nullstriches der Niveauteilung ist aus den Beobachtungsdaten ersichtlich; unter «i» und «a» sind die innen oder außen liegenden Blasenenden angegeben. Es ist hiernach die folgende Reduktionsformel anzuwenden:

$$\varphi = \frac{1}{2}\,(\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2}\,(\overline{M}_w - \overline{M}_e)\,R - \frac{1}{2}\,\overline{(n_w - n_e)}\;p_0 + \frac{1}{2}\,(r_s + r_n).$$

Die scheinbaren Deklinationen der beiden Sterne, unter Berücksichtigung der kurzperiodischen Mondglieder, sind:

$$\text{Nr. } 4582 \quad \delta_s = 30^0 33' 18{,}''83,$$
$$\text{Nr. } 4623 \quad \delta_n = 64\ 22\ 37{,}13.$$

Die Korrektionen $\varkappa$ betragen:

Stern Nr.	$F = 24^s$	$F = 8^s$	Mittel	$\overline{M}$
4582	$-\ 0{,}^R002$	$-\ 0{,}^R000$	$-\ 0{,}^R0010$	$11{,}^R7942$
4623	$+\ 0{,}008$	$+\ 0{,}001$	$+\ 0{,}0045$	$20{,}3725$

$$\overline{M}_w - \overline{M}_e \quad = +\ 8{,}^R5783,$$
$$\frac{1}{2}\,(\overline{M}_w - \overline{M}_e)\,R = +\ 339{,}''16$$

Die Neigungskorrektion ergibt sich aus

$$\text{Niveau I zu } (19{,}85 - 19{,}75)\ p_0 = 0{,}''14,$$
$$\text{Niveau II zu } (68{,}95 - 68{,}75)\ p_0 = 0{,}25.$$

Es wird somit

$$\frac{1}{2}\,(\delta_s + \delta_n) = 47^0 27' 57{,}''98,$$
$$\frac{1}{2}\,(\overline{M}_w + \overline{M}_e) = +\quad 5\ 39{,}16,$$
$$-\frac{1}{2}\,(n_w - n_e)\,p_0 = -\qquad 0{,}10,$$
$$+\frac{1}{2}\,(r_s + r_n) \quad = +\qquad 0{,}10,$$
$$\varphi = 47^0 33' 37{,}''14.$$