1. *Die Differentialbeziehung des Cosinussatzes.*

Die Änderung dz, welche die Zenitdistanz erleidet, wenn Φ, p und t der Reihe nach um $d\Phi$, dp und dt geändert werden, wird gleich

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \Phi}\, d\Phi + \frac{\partial z}{\partial p}\, dp + \frac{\partial z}{\partial t}\, dt.$$

Der Cosinussatz

$$\cos z = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t$$

liefert durch partielle Ableitung

1) nach Φ:

$$\sin z \frac{\partial z}{\partial \Phi} = \cos p \sin \Phi - \sin p \cos \Phi \cos t$$
$$= -\sin z \cos a;$$

2) nach p:

$$\sin z \frac{\partial z}{\partial p} = \cos \Phi \sin p - \sin \Phi \cos p \cos t$$
$$= \sin z \cos q;$$

3) nach t:

$$\sin z \frac{\partial z}{\partial t} = \sin \Phi \sin p \sin t$$
$$= \sin z \sin p \sin q$$
$$= \sin z \sin \Phi \sin a.$$

Somit wird

$$dz = -d\Phi \cos a + \cos q\, dp + \sin q\, dt \sin p. \tag{11a}$$

Ist z' die scheinbare Zenitdistanz und r_z die Refraktion, so ist

$$z = z' + r_z$$

und

$$dz = dz' + dr_z.$$

Wird

$$dt = d(U + u - \alpha)$$

gesetzt, so erhält man

$$dz' - \sin a\, du \sin \Phi + d\Phi \cos a = \sin q\, d(U - \alpha) \sin p + \cos q\, dp - dr_z. \tag{11b}$$

Ist die Refraktion bei gleicher Zenitdistanz in verschiedenen Azimuten nicht gleich groß, so bleibt bei den Methoden, die auf der Elimination der Zenitdistanz beruhen, ein Fehler wirksam, dem durch die eingeführte Verbesserung dr_z Rechnung getragen werden kann.

2. *Die Differentialbeziehung des Kotangentensatzes.*

Das Azimut a des Sternes erleidet, wenn sich Φ, p und t ändern, die Änderung

$$da = \frac{\partial a}{\partial \Phi}\, d\Phi + \frac{\partial a}{\partial p}\, dp + \frac{\partial a}{\partial t}\, dt.$$

Die Koeffizienten der Änderungen folgen aus

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos\Phi \sin p \cos t - \sin\Phi \cos p}{\sin t \sin p}$$

durch partielle Differentiation

1) nach Φ:

$$\frac{1}{\sin^2 a}\frac{\partial a}{\partial \Phi} = \frac{\sin\Phi \sin p \cos t + \cos\Phi \cos p}{\sin t \sin p},$$

was unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\sin t \sin p = \sin z \sin a$$

und des Cosinussatzes übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial \Phi} = \cos z \sin a \operatorname{cosec} z;$$

2) nach p:

$$\frac{1}{\sin^2 a}\frac{\partial a}{\partial p} = -\frac{\sin\Phi}{\sin t \sin^2 p},$$

was wegen der Beziehungen

$$\frac{\sin\Phi}{\sin p} = \frac{\sin q}{\sin a}$$

und

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z}$$

übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial p} = -\sin q \operatorname{cosec} z;$$

3) nach t:

$$\frac{1}{\sin^2 a}\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\cos\Phi \sin p - \cos p \sin\Phi \cos t}{\sin^2 t \sin p},$$

was wegen der Beziehungen

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z},$$

$$\sin z \cos q = \cos\Phi \sin p - \sin\Phi \cos p \cos t$$

übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sin p \cos q \operatorname{cosec} z.$$

Es wird also

$$\sin z\, da = \cos z\, d\Phi \sin a - \sin q\, dp + \cos q\, dt \sin p. \qquad (12\text{a})$$

Das verbesserte Azimut $a + da$ ist aber nur dann gleich dem wahren Azimut, das ein Beobachter bei fehlerfreier Messung erhalten hätte, wenn sich der scheinbare und der wahre Ort im gleichen Vertikal befinden. Ist dr_a die Lateralrefraktion, die den Stern gegen den Pol Q_0 des Vertikals verschiebt, so ist das wahre Azimut des Instruments gleich

$$a + da + dr_a \operatorname{cosec} z.$$

Die Gesamtverbesserung

$$da_0 = da + dr_a \operatorname{cosec} z$$

wird also durch die folgende Beziehung mit du und $d\Phi$ verbunden:

$$\begin{aligned} \sin z\, da_0 - \cos q\, du \sin p - \cos z\, d\Phi \sin a \\ = \cos q\, d(U - \alpha) \sin p - \sin q\, dp + dr_a. \end{aligned} \tag{12b}$$

Ist die laterale Refraktion bei gleichem Azimut in verschiedenen Zenitdistanzen nicht gleich groß, so bleibt bei den Methoden, die auf der Elimination des Azimutes beruhen, ein Fehler wirksam, dem durch die eingeführte Verbesserung dr_a Rechnung getragen werden kann.