

Die Konstanten der Methode 4, des Koinzidenzverfahrens von COURVOISIER, sind aus seinen Angaben in A.N. 167, 211 abgeleitet. Die zur Methode 5 angegebenen Werte sind vorläufiger Natur; sie beruhen auf Durchgangsbeobachtungen, die im Sommer 1945 an einigen Abenden von Dr. J. O. FLECKENSTEIN angestellt worden sind. Ihre Konstanten liegen zwischen den Werten der Methoden 3b und 4; diese Methode liefert die Durchgangszeit ebenso genau wie das Koinzidenzverfahren, weil viel mehr Einzelbeobachtungen während des Durchganges möglich sind; es können vor und nach dem Umlegen ebensoviele Kontakte beobachtet werden wie bei der Handnachführung.

In der folgenden Tabelle sind die auf den größten Kreis bezogenen mittleren Fehler  $m_U \sin p$  einer Einzelbeobachtung im Meridian, die in verschiedenen Pol-distanzen bei den einzelnen Verfahren zu erwarten sind, zusammengestellt, wenn bei 80facher Vergrößerung beobachtet wird. Unter «N» ist das Verhältnis von  $a_0^2 + \left(\frac{b_0}{V}\right)^2$  zu  $\left(\frac{b_0}{V}\right)^2$  angegeben; wird ein Äquatorstern an N-mal so viel Fäden oder Kontakten beobachtet als ein polnaher Stern, so wird der mittlere Fehler seiner Durchgangszeit, bezogen auf den größten Kreis senkrecht zum Meridian, gleich groß wie der mittlere Fehler der Durchgangszeit des Polsternes. Von der Möglichkeit, verschiedene Sterne gleich genau zu beobachten durch geeignete Wahl der Zahl der Einzelbeobachtungen, werden wir bei fehler-theoretischen Untersuchungen Gebrauch machen.

Methode	$p$					
	90°	45°	$m_U \sin p$			N
			30°	10°	0°	
1	± 0,116	± 0,092	± 0,077	± 0,061	± 0,059	3,9
2	,091	,077	,068	,060	,059	2,4
3a	,068	,055	,047	,039	,038	3,3
3b	,045	,039	,036	,033	,033	1,9
4	,027	,024	,022	,020	,022	1,5
5	,038	,035	,033	,031	,031	1,5

### f) Differentialausdrücke

Ändert man die drei gegebenen Stücke eines Dreiecks, so kann die Änderung, die irgendeines der übrigen Stücke erleidet, mit Hilfe des funktionalen Zusammenhanges berechnet werden. Wir leiten die Beziehung, welche die Änderung der drei gegebenen Stücke mit der Änderung eines vierten Stückes verbindet, ab, unter der Voraussetzung, es seien die Änderungen kleine Größen erster Ordnung, deren Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Diese Beziehung verwenden wir auch zur Berechnung des Fehlers, der von den Fehlern der drei gegebenen Stücke auf das berechnete Stück übergeht.

### 1. Die Differentialbeziehung des Cosinussatzes.

Die Änderung  $dz$ , welche die Zenitdistanz erleidet, wenn  $\Phi$ ,  $p$  und  $t$  der Reihe nach um  $d\Phi$ ,  $dp$  und  $dt$  geändert werden, wird gleich

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial z}{\partial p} dp + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

Der Cosinussatz

$$\cos z = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t$$

liefert durch partielle Ableitung

1) nach  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \sin z \frac{\partial z}{\partial \Phi} &= \cos p \sin \Phi - \sin p \cos \Phi \cos t \\ &= -\sin z \cos a; \end{aligned}$$

2) nach  $p$ :

$$\begin{aligned} \sin z \frac{\partial z}{\partial p} &= \cos \Phi \sin p - \sin \Phi \cos p \cos t \\ &= \sin z \cos q; \end{aligned}$$

3) nach  $t$ :

$$\begin{aligned} \sin z \frac{\partial z}{\partial t} &= \sin \Phi \sin p \sin t \\ &= \sin z \sin p \sin q \\ &= \sin z \sin \Phi \sin a. \end{aligned}$$

Somit wird

$$dz = -d\Phi \cos a + \cos q dp + \sin q dt \sin p. \quad (11a)$$

Ist  $z'$  die scheinbare Zenitdistanz und  $r_z$  die Refraktion, so ist

$$z = z' + r_z$$

und

$$dz = dz' + dr_z.$$

Wird

$$dt = d(U + u - \alpha)$$

gesetzt, so erhält man

$$dz' - \sin a du \sin \Phi + d\Phi \cos a = \sin q d(U - \alpha) \sin p + \cos q dp - dr_z. \quad (11b)$$

Ist die Refraktion bei gleicher Zenitdistanz in verschiedenen Azimuten nicht gleich groß, so bleibt bei den Methoden, die auf der Elimination der Zenitdistanz beruhen, ein Fehler wirksam, dem durch die eingeführte Verbesserung  $dr_z$  Rechnung getragen werden kann.

### 2. Die Differentialbeziehung des Kotangentensatzes.

Das Azimut  $a$  des Sternes erleidet, wenn sich  $\Phi$ ,  $p$  und  $t$  ändern, die Änderung

$$da = \frac{\partial a}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial a}{\partial p} dp + \frac{\partial a}{\partial t} dt.$$

Die Koeffizienten der Änderungen folgen aus

$$\cotg a = \frac{\cos \Phi \sin p \cos t - \sin \Phi \cos p}{\sin t \sin p}$$

durch partielle Differentiation

1) nach  $\Phi$ :

$$\frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial a}{\partial \Phi} = \frac{\sin \Phi \sin p \cos t + \cos \Phi \cos p}{\sin t \sin p},$$

was unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\sin t \sin p = \sin z \sin a$$

und des Cosinussatzes übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial \Phi} = \cos z \sin a \operatorname{cosec} z;$$

2) nach  $p$ :

$$\frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial a}{\partial p} = - \frac{\sin \Phi}{\sin t \sin^2 p},$$

was wegen der Beziehungen

$$\frac{\sin \Phi}{\sin p} = \frac{\sin q}{\sin a}$$

und

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z}$$

übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial p} = - \sin q \operatorname{cosec} z;$$

3) nach  $t$ :

$$\frac{1}{\sin^2 a} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\cos \Phi \sin p - \cos p \sin \Phi \cos t}{\sin^2 t \sin p},$$

was wegen der Beziehungen

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin p}{\sin z},$$

$$\sin z \cos q = \cos \Phi \sin p - \sin \Phi \cos p \cos t$$

übergeht in

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sin p \cos q \operatorname{cosec} z.$$

Es wird also

$$\sin z da = \cos z d\Phi \sin a - \sin q dp + \cos q dt \sin p. \quad (12a)$$

Das verbesserte Azimut  $a + da$  ist aber nur dann gleich dem wahren Azimut, das ein Beobachter bei fehlerfreier Messung erhalten hätte, wenn sich der scheinbare und der wahre Ort im gleichen Vertikal befinden. Ist  $dr_a$  die Lateralrefraktion, die den Stern gegen den Pol  $Q_0$  des Vertikals verschiebt, so ist das wahre Azimut des Instruments gleich

$$a + da + dr_a \operatorname{cosec} z.$$

Die Gesamtverbesserung

$$da_0 = da + dr_a \operatorname{cosec} z$$

wird also durch die folgende Beziehung mit  $du$  und  $d\Phi$  verbunden:

$$\begin{aligned} \sin z da_0 - \cos q du \sin p - \cos z d\Phi \sin a \\ = \cos q d(U - \alpha) \sin p - \sin q dp + dr_a. \end{aligned} \quad (12b)$$

Ist die laterale Refraktion bei gleichem Azimut in verschiedenen Zenitdistanzen nicht gleich groß, so bleibt bei den Methoden, die auf der Elimination des Azimutes beruhen, ein Fehler wirksam, dem durch die eingeführte Verbesserung  $dr_a$  Rechnung getragen werden kann.