Drückt man Δz in Zeitsekunden aus, um Δt in Zeitsekunden zu erhalten, so wird

$$\Delta t^{\sec} = -\Delta z^{\sec} \cdot m_0 \left(1 + \frac{\Delta z^{\sec}}{2} 15 \sin 1'' \cdot n_0\right) \tag{5b}$$

mit

$$\Delta z^{\sec} = f^{\sec} \left(1 + \frac{\Delta r''}{3600''}\right).$$

Die Uhrzeit U_M des Durchganges durch den Mittelfaden wird dann gleich:

$$U_M = U + \Delta t.$$

Beobachtet man die Durchgänge mit dem unpersönlichen Mikrometer, so hat man noch die Kontaktbreite und den toten Gang zu berücksichtigen; es wird

$$U_M = U + \Delta t + k\,|m_0|\,(1 + \cdots);$$

$k =$ halbe Summe von Kontaktbreite und totem Gang.

Im I. Vertikal ist mit $a = 90^0$

$$m_0 = \operatorname{cosec} \Phi$$

und

$$\sin \Phi = \operatorname{cotg} t \operatorname{tg} z,$$

also

$$n_0 = \operatorname{cotg} z - m_0 \operatorname{cotg} t = 0,$$

das heißt die Änderung des Stundenwinkels ist im I. Vertikal bis auf kleine Größen höherer Ordnung der Änderung der Zenitdistanz proportional.

c) Reduktion der Vertikaldurchgänge (Fig. 14)

1. *Reduktion auf den Achsenäquator.* Wir nehmen an, es sei der Durchgang eines Sternes mit Hilfe des unpersönlichen Mikrometers beobachtet worden; U' sei die Uhrzeit des Momentes, in welchem der Kontaktstreifen der Mikrometertrommel vor dem Umlegen, und U'' der Moment, in welchem er nach dem Umlegen die Schließung des Stromes erzeugt hat. Am arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(U' + U'')$ der auf dem Chronographen registrierten Uhrzeiten sind dann zwei Korrektionen anzubringen, um den Moment des Durchganges durch den Achsenäquator zu erhalten; die erste Korrektion berücksichtigt, daß sich der Stern vor und nach dem Umlegen nicht mit derselben azimutalen Geschwindigkeit bewegt; die zweite Korrektion trägt dem Umstande Rechnung, daß wegen der Breite des Kontaktstreifens und wegen des toten Ganges der Schraube sich der Stern in den Momenten des Stromschlusses sich nicht gleich weit vom Achsenäquator entfernt befunden hat.

Macht man die Beobachtung mit Hilfe eines Fadennetzes, indem man vor und nach dem Umlegen die Momente des Durchganges durch die gleichen Fäden entweder nach der Aug- und Ohrmethode notiert oder auf einem Chronographen registriert, so ist nur die erste Korrektion anzubringen.

Wegen der Zapfenungleichheit ist die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse vor dem Umlegen nicht identisch mit der Neigung nach dem Umlegen; jene sei i', diese i''. Es ist deshalb auch der Pol Q' des Achsenäquators

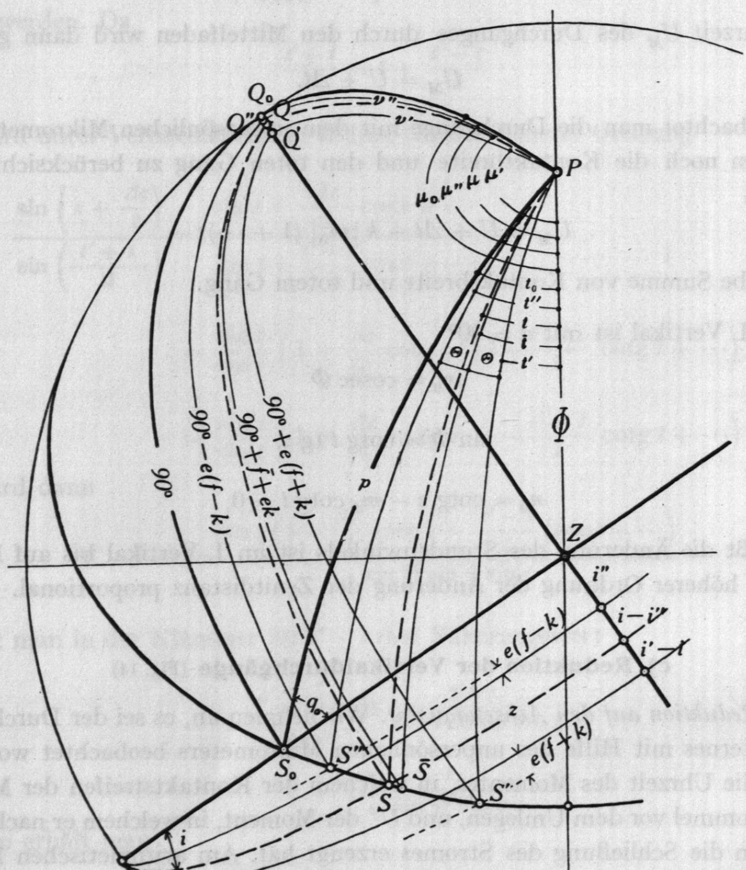

Fig. 14

vor dem Umlegen zu unterscheiden vom Pol Q'' nach dem Umlegen; wir bezeichnen die dem Stern im Azimut um 90^0 vorangehenden Pole mit Q' und Q''.

Der Winkelwert der halben Summe von Kontaktbreite und totem Gang sei k. S' sei der Ort des Sternes im Moment der Kontakt- oder Fadenbeobachtung vor dem Umlegen und S'' der Ort nach dem Umlegen. Die Abstände $S'Q'$ und $S''Q''$ setzen wir gleich

$$S'Q' = 90^0 + e(f + k),$$
$$S''Q'' = 90^0 - e(f - k);$$

hierin ist e der Wert $+1$ oder -1 beizulegen, je nachdem sich der Stern dem zugeordneten Pol des Achsenäquators nähert oder sich von ihm entfernt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\overline{U} = \frac{1}{2}(U' + U''),$$
$$\vartheta = \frac{1}{2}(U'' - U')\,*),$$
$$\bar{t} = \overline{U} + u - \alpha,$$

so werden die Stundenwinkel des Sternes in den Momenten U' und U'' gleich:

$$t' = \bar{t} - \vartheta,$$
$$t'' = \bar{t} + \vartheta.$$

Es sei t der Stundenwinkel des Sternes im Moment, wo er sich im Punkt S des mittleren Achsenäquators, dessen Pol die Neigung $\frac{1}{2}(i' + i'')$ hat, befindet; dann ist $(t - \bar{t})$ die am arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(U' + U'')$ anzubringende Korrektion. Um sie zu berechnen, führen wir die Stundenwinkel μ' und μ'' der Punkte Q' und Q'' ein und deren Poldistanzen ν' und ν''. Wir setzen

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu' + \mu'')$$

und

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu' + \nu'');$$

es wird dann

$$\mu' = \mu + d\mu, \qquad \nu' = \nu + d\nu,$$
$$\mu'' = \mu - d\mu, \qquad \nu'' = \nu - d\nu,$$

mit

$$d\mu = \frac{1}{2}(\mu' - \mu''),\ d\nu = \frac{1}{2}(\nu' - \nu'').$$

In den Dreiecken $PS'Q'$ und $PS''Q''$ werden dann die Winkel bei P gleich:

$$\mu' - t' \equiv \mu - \bar{t} + \vartheta_0,$$
$$\mu'' - t'' \equiv \mu - \bar{t} - \vartheta_0$$

mit

$$\vartheta_0 = \vartheta + d\mu.$$

Zur Zeit $\overline{U}$ habe der Ort $\overline{S}$ des Sternes vom Pol Q den Abstand $90^0 + \bar{f} + ek$. Die Dreiecke $P\overline{S}Q$ und PSQ geben dann die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} -\sin(\bar{f} + ek) &= \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}),\\ 0 &= \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - t). \end{aligned}\right\}\quad \text{(a)}$$

*) In der Figur Winkel Θ.

Aus der Differenz dieser beiden Beziehungen folgt

$$2\sin\frac{1}{2}(t-\bar{t}) = \sin(\bar{f}+ek)\frac{\operatorname{cosec} p \operatorname{cosec} \nu}{\sin\left(\mu - \dfrac{\bar{t}+t}{2}\right)}. \tag{b}$$

Um hierin die unbekannte Entfernung $\bar{f}$ zu eliminieren, gehen wir von den Beziehungen aus, welche die Dreiecke $PS'Q'$ und $PS''Q''$ liefern:

$$-\sin e(\bar{f}+k) = \cos p\cos(\nu+d\nu) + \sin p\sin(\nu+d\nu)\cos(\mu-\bar{t}+\vartheta_0),$$
$$+\sin e(\bar{f}-k) = \cos p\cos(\nu-d\nu) + \sin p\sin(\nu-d\nu)\cos(\mu-\bar{t}-\vartheta_0).$$

Vernachlässigt man im arithmetischen Mittel dieser beiden Beziehungen, das ist

$$\begin{aligned}-\cos e\bar{f}\sin ek = {} & \cos p\cos\nu\cos d\nu \\ & + \sin p\sin\nu\cos d\nu\cos(\mu-\bar{t})\cos\vartheta_0 \\ & - \sin p\cos\nu\sin d\nu\sin(\mu-\bar{t})\sin\vartheta_0\end{aligned}$$

Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, so erhält man

$$-\sin ek = \cos p\cos\nu + \sin p\sin\nu\cos(\mu-\bar{t})\cos\vartheta_0 + \cdots.$$

Durch Elimination von $\cos p\cos\nu$ aus dieser Beziehung mit Hilfe der Beziehung (a) wird $(\bar{f}+ek)$ auf bekannte Größen zurückgeführt:

$$\sin(\bar{f}+ek) = \sin ek - \sin p\sin\nu\cos(\mu-\bar{t})\cdot 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}.$$

Damit geht (b) über in:

$$2\sin\frac{1}{2}(t-\bar{t}) = -\operatorname{cosec}\left(\mu-\frac{\bar{t}+t}{2}\right)\left(\cos(\mu-\bar{t})\cdot 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \frac{\sin ek}{\sin p\sin\nu}\right). \tag{6a}$$

Die Berechnung der Reduktion $(t-\bar{t})$ nach dieser Beziehung setzt die Kenntnis des Stundenwinkels t, der neben $\bar{t}$ rechter Hand auftritt, voraus. Man wird sich mit Hilfe eines Näherungswertes der Uhrkorrektion zunächst einen Näherungswert von $\bar{t}$ verschaffen und kann dann mit Hilfe der Beziehung

$$t-\bar{t} = -\operatorname{cotg}(\mu-\bar{t})\cdot 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} + \frac{ek\operatorname{cosec}(\mu-\bar{t})}{\sin p\sin\nu} \tag{6b}$$

zu einem Näherungswert von t übergehen.

Die Beziehung (6b) liefert übrigens meist schon einen ausreichend genauen Wert der Reduktion $(t-\bar{t})$; die Beziehung (6a) wird man nur anwenden müssen, wenn die Beobachtungen in der Nähe der größten Digression eines Sternes oder bei sehr kleinen Zenitdistanzen in der Nähe des I. Vertikales stattfinden.

Im Dreieck PSQ ist der Winkel bei S nur um eine kleine Größe verschieden vom Komplement des parallaktischen Winkels q des Sternes im Dreieck $P\bar{S}Q$; es ist

$$\cos q = \sin\nu\sin(\mu-\bar{t}),$$
$$\sin q = \cos\nu\sin p - \sin\nu\cos p\cos(\mu-\bar{t}).$$

Benützt man die Abkürzung

$$m'' = 2\,\frac{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}}{\sin 1''}$$

und setzt

$$\vartheta_0 = \vartheta + \cdots$$

so wird der Ausdruck für die Reduktion $(t - \bar{t})$ in Zeitsekunden gleich:

$$(t - \bar{t})^{\text{sec}} = -\frac{m''}{15}\,\operatorname{cotg}(\mu - \bar{t}) + e\,k^{\text{sec}} \operatorname{cosec} p \sec q. \tag{6c}$$

Die Koordinaten μ, ν des Poles Q sind mit den Horizontalkoordinaten, der Neigung i und dem Azimut a_0 des Instrumentenvertikals, durch die folgenden Beziehungen verbunden:

$$\begin{aligned}
\sin\nu\cos\mu &= \sin i \sin\Phi - \cos i \cos\Phi \sin a_0,\\
\sin\nu\sin\mu &= \cos i\ \cos a_0,\\
\cos\nu &= \sin i \cos\Phi + \cos i \sin\Phi \sin a_0.
\end{aligned}$$

Wird die Neigung i sehr klein gehalten, so können μ und ν aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}
\sin\nu\cos\mu &= -\cos\Phi\sin a_0,\\
\sin\nu\sin\mu &= \cos a_0,\\
\cos\nu &= \sin\Phi\sin a_0
\end{aligned} \tag{7}$$

ermittelt werden.

Ist die horizontale Komponente der täglichen Bewegung des Sternes sehr klein – welcher Fall eintritt, wenn sich der Stern in der Nähe des Poles des Äquators oder in der Nähe der größten Digression befindet oder wenn er in der Nähe des I. Vertikales bei sehr kleinen Zenitdistanzen beobachtet wird –, so ersetzt man die Durchgangsbeobachtungen durch Einstellungen des beweglichen Fadens auf den Stern in beiden Lagen des Instrumentes und leitet daraus den Abstand des Sternes vom Achsenäquator ab.

Es seien

$$S'Q = 90^0 + f'$$

und

$$S''Q = 90^0 + f''$$

die Abstände des Sternes zur Zeit U' vor dem Umlegen und zur Zeit U'' nach dem Umlegen vom Pol Q des mittleren Achsenäquators. Sind M' und M'' die den Einstellungen entsprechenden Ablesungen an der Mikrometertrommel, so ist

$$\frac{1}{2}\,(f' + f'') = \pm\,\frac{1}{2}\,(M' - M'') \times \text{Schraubenwert};$$

es gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Ablesungen zu- oder abnehmen, wenn der Faden vor dem Umlegen in größere Distanz vom Pol Q gebracht wird.

Es sei

$$\bar{S}Q = 90^0 + \bar{f} = 90^0 + \frac{1}{2}(f' + f'') + \left\{ \bar{f} - \frac{1}{2}(f' + f'') \right\}$$

der Abstand des Sternes vom Pol Q zur Zeit $\bar{U} = \frac{1}{2}(U' + U'')$. Die an $\frac{1}{2}(f' + f'')$ anzubringende Korrektion erhält man auf folgendem Wege. Das arithmetische Mittel der Beziehungen

$$-\sin f' = \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t} + \vartheta),$$
$$-\sin f'' = \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t} - \vartheta),$$

das ist

$$-\frac{1}{2}(\sin f' + \sin f'') = \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cos \vartheta,$$

liefert mit der Beziehung

$$-\sin \bar{f} = \cos p \cos \nu + \sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \tag{c}$$

die Differenz:

$$\sin \bar{f} - \frac{1}{2}(\sin f' + \sin f'') = -\sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

oder, immer ausreichend,

$$\bar{f} - \frac{1}{2}(f' + f'') = -\sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) \cdot 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \tag{8a}$$

Der Faktor von $2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ läßt sich in folgender Weise umformen: Bis auf kleine Größen höherer Ordnung ist nach der Beziehung (c)

$$-\sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) = \cos p \cos \nu,$$

oder, wenn

$$\cos \nu = \sin \Phi \sin a_0$$

eingeführt wird:

$$-\sin p \sin \nu \cos(\mu - \bar{t}) = \cos p \sin \Phi \sin a_0.$$

Ist a^* das Azimut des Sternes im Moment $\bar{U}$ und $\bar{z}$ seine Zenitdistanz, so ist genähert

$$\sin(a_0 - a^*) = \sin \bar{f} \operatorname{cosec} \bar{z}$$

oder, immer ausreichend, wenn $\bar{z}$ nicht sehr klein ist:

$$a_0 = a^* + \bar{f} \operatorname{cosec} \bar{z} + \cdots.$$

Meist wird man

$$a_0 = a^* + \cdots$$

setzen dürfen. Somit wird

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(f' + f'') + \cos p \sin a^* \sin \Phi \cdot \frac{m''}{15}, \tag{8b}$$

worin f' und f'' in Zeitsekunden auszudrücken sind.

2. *Reduktion vom Achsenäquator auf den Instrumentenvertikal* wegen der Neigung der Horizontalachse.

Es sei i_v die Neigung, die aus zwei Ablesungen des Niveaus, die vor dem Umlegen in zwei verschiedenen Lagen gemacht worden sind, hervorgegangen ist. Die Neigung i' der Umdrehungsachse unterscheidet sich von i_v um die Zapfenungleichheit $\varkappa_v$. Ist von den beiden Zapfenenden das in die Richtung des Poles Q' fallende Ende das dickere, so ist

$$i' = i_v - \varkappa_v$$

die Erhebung des Poles Q' über dem Horizont. Nach dem Umlegen fällt dann das dünnere Ende in die Richtung des Poles Q'; es ist also, wenn i_n und $\varkappa_n$ die i_v und $\varkappa_v$ nach dem Umlegen entsprechenden Größen sind:

$$i'' = i_n + \varkappa_n.$$

Die Neigung i des mittleren Achsenäquators wird also gleich

$$i = \frac{i' + i''}{2} = \frac{(i - \varkappa)_v + (i + \varkappa)_n}{2}.$$

Haben die Zapfen kreisrunde Form, so ist $\varkappa_v = \varkappa_n \equiv \varkappa$, also

$$i = \frac{i_v + i_n}{2}.$$

Wird das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes beobachtet, so liegt die Zeit des Durchganges durch den Achsenäquator um ebenso viel vor (oder nach) der Zeit des Durchganges durch den Instrumentenvertikal, als die Zeit des direkt beobachteten Sternbildes nach (oder vor) dem Durchgang durch den Instrumentenvertikal liegt. Beobachtet man also vor dem Umlegen das direkte Bild und nach dem Umlegen das reflektierte, so ist als Neigung der Achse vor dem Umlegen der Wert $+i'$ und nach dem Umlegen der Wert $-i''$ einzuführen, so daß die Neigung i des mittleren Achsenäquators gleich

$$i = \frac{i' - i''}{2} = \frac{(i - \varkappa)_v - (i + \varkappa)_n}{2}$$

wird. Da aber bei kreisrunder Form der Zapfen

$$i_v - i_n = 4\,\varkappa$$

ist, so wird

$$i = \varkappa.$$

Beobachtet man also vor oder nach dem Umlegen das von einem Quecksilberhorizont reflektierte Bild des Sternes, so liegt der Pol des mittleren Achsenäquators nur um den Winkelbetrag der Zapfenungleichheit über oder unter dem Horizont.

Es sei die Entfernung des Sternes S im mittleren Achsenäquator vom Pol Q_0 des Instrumentenvertikales gleich

$$SQ_0 = 90^0 + \Delta i$$

und z die Instrumentalzenitdistanz des Sternes, das heißt sein Abstand vom höchsten Punkt des mittleren Achsenäquators; dann ist

$$\sin \Delta i = \sin i \cos z. \tag{9a}$$

Der Unterschied zwischen dem Stundenwinkel t_0 des Sternes, wenn er sich im Instrumentenvertikal befindet, und dem Stundenwinkel t des Sternes im Achsenäquator folgt dann aus den beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} -\sin \Delta i &= \cos p \cos \nu_0 + \sin p \sin \nu_0 \cos(\mu_0 - t), \\ 0 &= \cos p \cos \nu_0 + \sin p \sin \nu_0 \cos(\mu_0 - t_0), \end{aligned}$$

in welchen μ_0 und ν_0 Stundenwinkel und Poldistanz des Poles Q_0 bezeichnen. Aus der Differenz dieser beiden Beziehungen folgt unter Beachtung der Beziehung (9a):

$$2 \sin \frac{t_0 - t}{2} = \frac{\sin i \cos z}{\sin p \sin \nu_0} \operatorname{cosec}\left(\mu_0 - \frac{t_0 + t}{2}\right).$$

Da die Neigung i klein gehalten werden kann, so daß sie höchstens den Betrag von einigen Bogensekunden annimmt, liefert die Beziehung

$$t_0 - t = i \frac{\cos z}{\sin p \sin \nu} \operatorname{cosec}(\mu - \bar{t}) = i \cos z \operatorname{cosec} p \sec q \tag{9b}$$

immer einen ausreichenden Näherungswert der Reduktion $(t_0 - t)$; sie kann dann mit der Reduktion $(t - \bar{t})$ zusammengefaßt werden, so daß in Zeitsekunden

$$(t_0 - \bar{t})^{\text{sec}} = -\frac{m''}{15} \operatorname{cotg}(\mu - \bar{t}) + (e k + i \cos z) \operatorname{cosec} p \sec q \tag{9c}$$

wird. Hierin sind k und i in Zeitsekunden auszudrücken.

d) Die Beobachtung der Durchgangszeiten

Die Uhrzeiten des Sterndurchganges durch einen Vertikal oder einen Almukantarat werden, wenn ein Fadennetz benützt wird, entweder nach der Aug- und Ohrmethode oder nach der Registriermethode beobachtet. Eine größere Genauigkeit bietet die Verwendung eines beweglichen Fadens in Verbindung mit einer Registriertrommel, wobei der Faden dem Stern unter Bisektion des Sternbildes entweder von Hand oder unter Benützung eines Triebwerkes nachgeführt wird.