die Achsenschnitte sonstiger Flächen zu berechnen[1]). Fig. 54 stellt ein allgemeines (triklines) Beispiel dar.

Sind, wie hier nötig, 5 voneinander unabhängige Winkel gemessen, etwa 100 : 010; 010 : 001; 001 : 100; 001 : 011; 100 : 110, so sind im Dreieck 1 bekannt A, B, C. Nach üblichen Gleichungen der Trigonometrie lassen sich α, β, γ berechnen. Im Dreieck 2 sind jetzt zur Verfügung E, A' und β; berechnet man σ, so findet man τ aus $\sigma + \gamma + \tau = 180^{0}$. Da $b = 1$ gesetzt wird, so ist a aus dem ebenen Dreieck mit σ, γ, τ zu finden. Im Dreieck 3 sind bekannt, B', F, γ. Man berechnet π, findet ϱ und da $b = 1$ schließlich c.

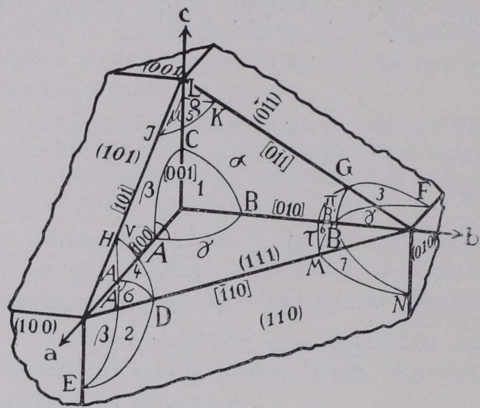


Fig. 54. Sphärische und ebene Dreiecke im Kristallbau.

Im monoklinen System genügen 3, im rhombischen 2; im trigonalen, tetragonalen und hexagonalen System reicht eine nicht durch allgemeine Symmetrieverhältnisse gegebene Messung zur Kennzeichnung aus; im isometrischen System ist kein solcher Wert anzugeben nötig.

11. Übersicht der Kristallklassen.

Mit Tschermak seien hier fünf grundlegende Arten der Flächenanlage gekennzeichnet. Ihnen entsprechen fünf kristallographische Urformen.

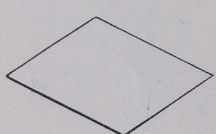


Fig. 55. Pedion.

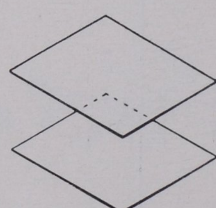


Fig. 56. Pinakoid.

1. Stufe. Fläche für sich selbständig (Prinzip der Identität). Pediale Form. Fig. 55 und 60.

2. Stufe. Zwei parallele Flächen für sich (Prinzip der Inversion)[2]). Pinakoidale Form (zentrosymmetrisch). Fig. 56 und 61.

3. Stufe. Zwei Flächen mit Digyre zwischen sich (Prinzip der Umklappung). Sphenoidische Form (achsensymmetrisch). Fig. 57 u. 62.

---

[1]) Bezüglich Kristallberechnung vergleiche Verzeichnis der Lehrbücher am Schluß des Buches.

[2]) Eine beliebig gezogene Digyroide ergibt zu einer Fläche ihre parallele Gegenfläche (vgl. Fig. 2, S. 1).

4. Stufe. Zwei Flächen mit Symmetrieebene zwischen sich (Prinzip der Spiegelung). Domatische Form (spiegelungssymmetrisch). Fig. 58 u. 63.

5. Stufe. Zwei spiegelungssymmetrische Flächen mit parallelen Gegenflächen) Vereinigung der Symmetrie nach Stufe 4 und 2, 3 und 2 oder 4 und 3). Prismatische Form. Fig. 59 und 64.

Als Buchstabenkürzungen werden im folgenden gebraucht: $p =$ Pedion, $pi =$ Pinakoid, $s =$ Sphenoid, $d =$ Doma, $m =$ Prisma.

Das trikline System umfaßt als Klassen die Stufen 1 und 2, das monokline System die Stufen 3, 4, 5. Die übrigen Kristallsysteme können als rhythmische Wiederholungen der fünf Urformen angesehen werden, und zwar das rhombische System als digyrale, das trigonale System als trigyrale, das tetragonale System als tetragyrale, das hexagonale System als hexagyrale und das isometrische System als oktantenweise trigyrale Wiederholung der Urformen.

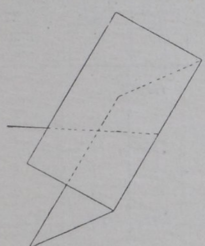


Fig. 57. Sphenoid.

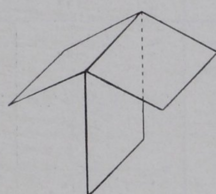


Fig. 58. Doma.

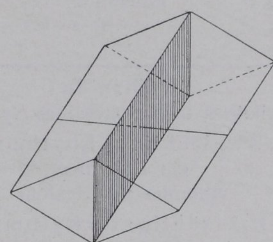


Fig. 59. Prisma.

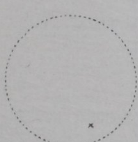


Fig. 60. Pedion.

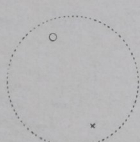


Fig. 61. Pinakoid.

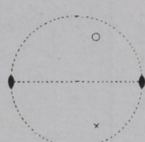


Fig. 62. Sphenoid.

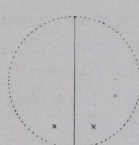


Fig. 63. Doma.

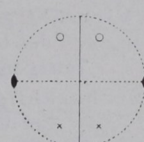


Fig. 64. Prisma.

Rhombisches System. 3., 4. und 5. Stufe sich digyrisch wiederholend. (Die Anwendung des digyrischen Rhythmus auf Stufen 1 und 2 liefert die schon im monoklinen System untergebrachten Urformen 3 und 5.)

Trigonales System. a) 1., 2., 3., 4. und 5. Stufe sich am Kristall trigyrisch wiederholend. Die fünf Klassen besitzen keine S. E. senkrecht zur Trigyre. b) Zwei weitere Stufen ergeben sich durch doppelten Umlauf einer Trigyroide; sie weisen eine S. E. senkrecht zur Drehachse auf.

Tetragonales System. a) 1., 2., 3., 4. und 5. Stufe sich am Kristall tetragyrisch wiederholend. b) Dazu kommen zwei weitere Stufen bei tetragyroidem Bau.

Hexagonales System. 1., 2., 3., 4. und 5. Stufe sich am Kristall hexagyrisch wiederholend.

Isometrisches (reguläres, tesserales, kubisches) System. 1., 2., 3., 4. und 5. Stufe sich um vier Trigyren oktantenweise wiederholend.

Summe der Klassen: $2+3+3+7+7+5+5=32$, somit ergibt sich das folgende sehr einfache Schema für die 32 Kristallklassen:

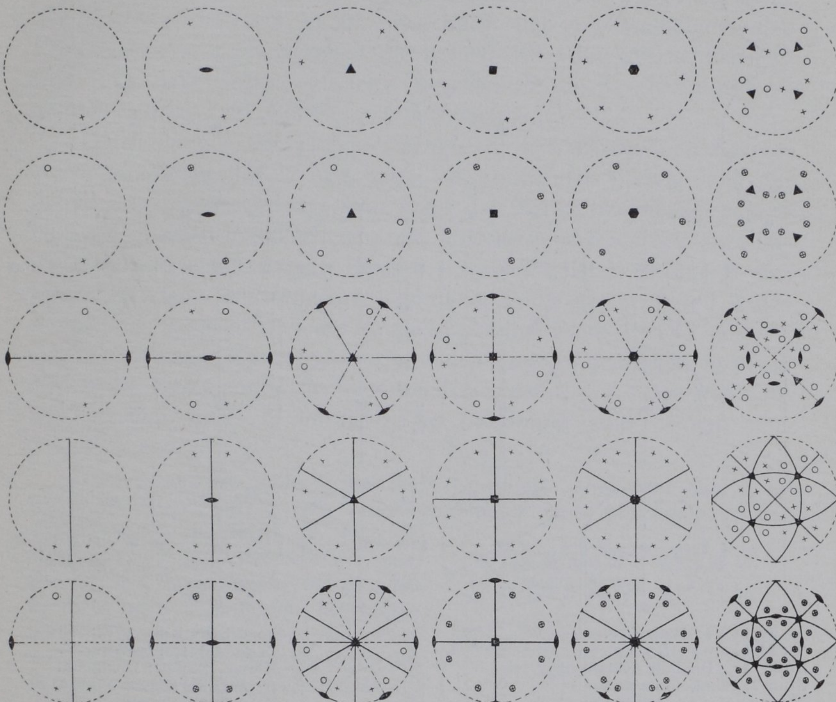
Plan der 32 Kristallklassen.

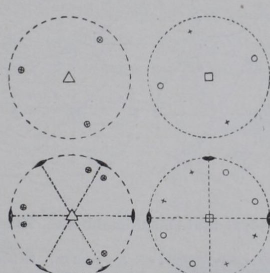
Baustufen →	I. Gyrische Herleitung					II. Gyroidische Herleitung	
	1. Pediale Stufe	2. Pinakoidale Stufe	3. Sphenoidische Stufe	4. Domatische Stufe	5. Prismatische Stufe	1 a Pediale Stufe	4 a Sphenoidische Stufe
Urformen Triklines und monoklines System	p	pi	s	d	m		
Zweizähliger Rhythmus der Urformen Rhombisches System	$\boxed{2p}$	$\boxed{2pi}$	$2s$	$2d$	$2m$		
Dreizähliger Rhythmus der Urformen Trigonales System	$3p$	$3pi$	$3s$	$3d$	$3m$	$\underline{3}p$	$\underline{3}s$
Vierzähliger Rhythmus der Urformen Tetragonales System	$4p$	$4pi$	$4s$	$4d$	$4m$	$\underline{4}p$	$\underline{4}s$
Sechszähliger Rhythmus der Urformen Hexagonales System	$6p$	$6pi$	$6s$	$6d$	$6m$		
Oktantenweise dreizähliger Rhythmus der Urformen Isometrisches System	ip	ipi	is	id	im		

Die Horizontalen sind Reihen gleichen Rhythmus, die Vertikalen solche gleicher Urformen. $2p$ und $2pi$ sind wegen ihrer Identität mit s und m eingerahmt und nur der Ableitungsvollständigkeit wegen in der Tabelle vermerkt; i bedeutet den oktantenweise dreizähligen Rhythmus des isometrischen Systems.

Die abkürzenden Bezeichnungen der Klassen wären z. B. zu lesen als drei p, drei pi usw., 3 Strich p, 3 Strich s bzw. in beschreibender Form, z. B. ebenfalls in der dreizähligen Reihe trigyrisch pedial, trigyrisch pinakoidal, trigyrisch sphenoidisch, trigyrisch domatisch, trigyrisch prismatisch. Es schließen sich an trigyroidisch pedial, trigyroidisch sphenoidisch. Beim isometrischen Rhythmus läßt sich die Herleitung als isometrisch pedial usw. kennzeichnen.

Fig. 65. Erzeugende Symmetrien der Kristallklassen.





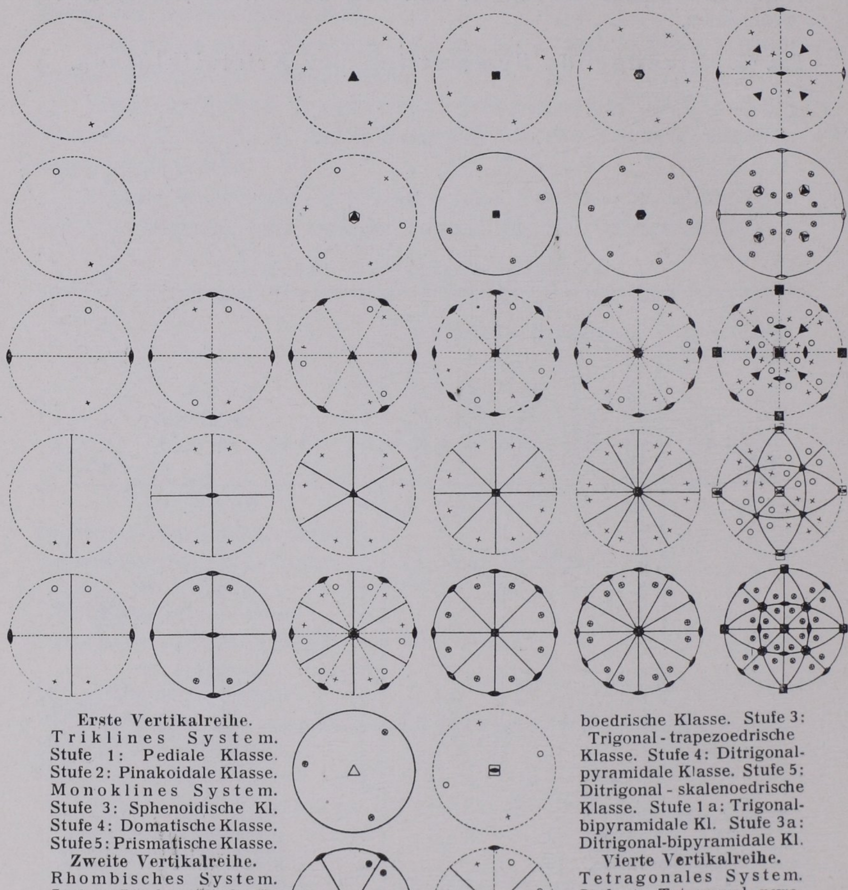
Erste Vertikalreihe. Triklines System. Stufe 1: Pediale Klasse. Stufe 2: Pinakoidale Klasse. Monoklines System. Stufe 3: Sphenoidische Kl. Stufe 4: Domatische Klasse. Stufe 5: Prismatische Klasse. **Zweite Vertikalreihe.** Rhombisches System. Stufe 3: Bisphenoidische Kl. Stufe 4: Pyramidale Klasse. Stufe 5: Bipyramidale Klasse. **Dritte Vertikalreihe.** Trigonales System. Stufe 1: Trigonal-pyramidale Klasse. Stufe 2: Rhomboedrische Klasse. Stufe 3: Trigonal-trapezoedrische Klasse. Stufe : Ditrigonal-pyramidale Klasse. Stufe 5 Ditrigonal-skalenoedrische Klasse. Stufe 1a: Trigonal-bipyramidale Kl. Stufe 3a: Ditrigonal-bipyramidale Kl. **Vierte Vertikalreihe.** Tetragonales System. Stufe 1: Tetragonal-pyramidale Klasse. Stufe 2: Tetragonal-bipyramidale Klasse. Stufe 3: Tetragonal-trapezoedrische Kl. Stufe 4: Ditetragonal-pyramidale Kl. Stufe 5: Ditetragonal-bipyramidale Klasse. Stufe 1a: Tetragonal-bisphenoidische Klasse. Stufe 3a: Tetragonal-skalenoedrische Kl.

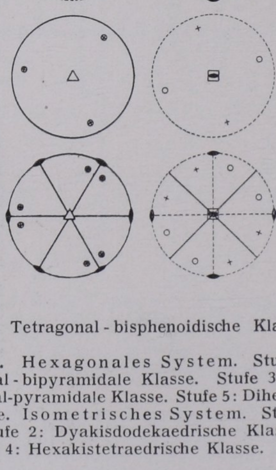
Fünfte Vertikalreihe. Hexagonales System. Stufe 1: Hexagonal-pyramidale Klasse. Stufe 2: Hexagonal-bipyramidale Klasse. Stufe 3: Hexagonal-trapezoedrische Klasse. Stufe 4: Dihexagonal-pyramidale Klasse. Stufe 5: Dihexagonal-bipyramidale Klasse.

Sechste Vertikalreihe. Isometrisches System. Stufe 1: Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse. Stufe 2: Dyakisdodekaedrische Klasse. Stufe 3: Pentagon-ikositetraedrische Klasse. Stufe 4: Hexakistetraedrische Klasse. Stufe 5: Hexakisoktaedrische Klasse.

Bemerkung. Stufe 1 und 2 der digyralen Reihe wiederholen die Urformen 3 und 5.

Fig. 66. Volle Symmetrien der 32 Kristallklassen.





Erste Vertikalreihe. Triklines System. Stufe 1: Pediale Klasse. Stufe 2: Pinakoidale Klasse. Monoklines System. Stufe 3: Sphenoidische Kl. Stufe 4: Domatische Klasse. Stufe 5: Prismatische Klasse. **Zweite Vertikalreihe.** Rhombisches System. Stufe 3: Bisphenoidische Kl. Stufe 4: Pyramidale Klasse. Stufe 5: Bipyramidale Klasse. **Dritte Vertikalreihe.** Trigonales System. Stufe 1: Trigonal-pyramidale Klasse. Stufe 2: Rhomboedrische Klasse. Stufe 3: Trigonal-trapezoedrische Klasse. Stufe 4: Ditrigonal-pyramidale Klasse. Stufe 5: Ditrigonal-skalenoedrische Klasse. Stufe 1a: Trigonal-bipyramidale Kl. Stufe 3a: Ditrigonal-bipyramidale Kl. **Vierte Vertikalreihe.** Tetragonales System. Stufe 1: Tetragonal-pyramidale Klasse. Stufe 2: Tetragonal-bipyramidale Klasse. Stufe 3: Tetragonal-trapezoedrische Kl. Stufe 4: Ditetragonal-pyramidale Kl. Stufe 5: Ditetragonal-bipyramidale Klasse. Stufe 1a: Tetragonal-bisphenoidische Klasse. Stufe 3a: Tetragonal-skalenoedrische Klasse.

Fünfte Vertikalreihe. Hexagonales System. Stufe 1: Hexagonal-pyramidale Klasse. Stufe 2: Hexagonal-bipyramidale Klasse. Stufe 3: Hexagonal-trapezoedrische Klasse. Stufe 4: Dihexagonal-pyramidale Klasse. Stufe 5: Dihexagonal-bipyramidale Klasse.

Sechste Vertikalreihe. Isometrisches System. Stufe 1: Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse. Stufe 2: Dyakisdodekaedrische Klasse. Stufe 3: Pentagon-ikositetraedrische Klasse. Stufe 4: Hexakistetraedrische Klasse. Stufe 5: Hexakisoktaedrische Klasse.

Bemerkung. Bezüglich des Ausfalls der Stufen 1 und 2 der zweiten Vertikalreihe vgl. Bemerkung zur Tabelle S. 30 sowie S. 29.

Holoedrien und Meroedrien.

Die höchstsymmetrische Gruppe eines jeden Kristallsystems nennt man ihre **holoedrische** (vollflächige) Klasse. Sie stellt sich in Stufe 2 des triklinen Systems und den Stufen 5 der übrigen Systeme dar (vgl. S. 29 sowie S. 30/32). Ersichtlich hat von den allgemeinen Kristallgestalten eines Systems die holoedrische die höchste Flächenzahl. Es zeigt letztere zugleich anschaulich die im Kristallsystem höchstmögliche Zahl von Symmetrieelementen.

Durch Fortfall der halben Flächenzahl des allgemeinen Körpers nach bestimmten Regeln und damit entsprechender Verringerung der Symmetrieelemente gelangt man unter den Meroedrien (Teilgestalten) zu hemiedrischen (halbflächigen) und fortschreitend eventuell zu tetartoedrischen (viertelflächigen) Klassen. Ersichtlich ist z. B. Stufe 1 des triklinen Systems die Hemiedrie von Stufe 2; die Stufen 4 und 3 des monoklinen Systems sind die Hemiedrien seiner Stufe 5. Die Stufen 1 des trigonalen, tetragonalen, hexagonalen und isometrischen Systems stellen die Tetartoedrien der betreffenden Stufen 5 vor. Das trigonale System kann man in meroedrische Beziehung zum hexagonalen System setzen.

Zahlenschemata verdeutlichen diese Umstände. Numeriert man z. B. in Fig. 67 die 12 oberen und 12 unteren Flächen einer dihexagonalen Bipyramide jeweils durch die Bezeichnungen 1—12 und durchstreicht (zum Zeichen des Fortfalls der betreffenden Flächen) nach bestimmten Schematen die Hälfte der Zahlen und den Rest wiederum nach einer anderen Regel des hemiedrischen Ausfalls, so verbleibt ein tetartoedrischer Restbestand. Erläuterung: Holoedrie $\frac{1-12}{1-12}$; Hemiedrie zufolge Durchstreichens (\\) der ungeraden Zahlen oben, der geraden unten; Tetartoedrie zufolge weiteren Streichens (/) von abwechselnden Paaren 3,

$$\cancel{1}\ 2\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ 6\ \cancel{7}\ \cancel{8}\ \cancel{9}\ 10\ \cancel{11}\ \cancel{12}$$
$$\cancel{1}\ \cancel{2}\ 3\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ 7\ \cancel{8}\ \cancel{9}\ \cancel{10}\ 11\ \cancel{12}$$

Fig. 67. Ableitungsschema der trigonal-trapezoedrischen Klasse als Tetartoedrie der hexagonalen Holoedrie.

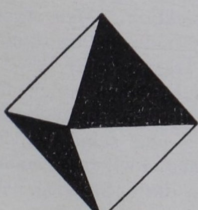


Fig. 68. Oktaeder als holoedrische Gestalt, zerfällt hemiedrisch in zwei Tetraeder.

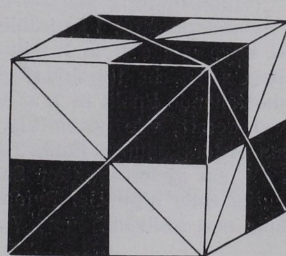


Fig. 69. Würfel als holoedrische Gestalt bleibt bei oktantenweiser Hemiedrie gestaltlich erhalten.

4 usw. oben, von 1, 2 usw. unten. Rest 2, 6 10 oben, 3, 7, 11 unten. Die Symmetrie des entstandenen trigonalen Trapezoeders tritt deutlich heraus: trigyrische Vertikalachse, 3 Digyren (zwischen 2/3; 6/7; 10/12).

Nicht immer macht sich die durch Meroedrie gegenüber der Holoedrie verringerte Symmetrie an den Kristallgestalten durch Flächenreduktion merklich. Während z. B. eine oktantenweise Ausgliederung am Oktaeder (Fig. 68) Tetraeder liefert, macht sich die entsprechende Maßnahme am Würfel nicht merklich; bei ihm überdeckt das Bleibende das Wegfallende (Fig. 69).

12. Ableitung der Kristallformen aus Symmetrieforderungen.

Aus den mit den Zeichen der vollen Symmetrie [1]) versehenen Projektionen der 32 Kristallklassen (S. 32) lassen sich die Gestalten jeder Gruppe sehr leicht ableiten durch Wandernlassen eines darstellenden Punktes in der Projektion eines sphärischen Dreiecks, das einen Urbauteil des Projektionsfeldes vorstellt (Fig. 70). Es sind stets sieben Lagen möglich (in den drei Ecken, auf den drei Seiten und im Innern des Dreiecks). Entsprechend der jeweiligen Klassensymmetrie ist die Punktlage zu wiederholen. Fig. 71 gibt ein Beispiel hierfür.

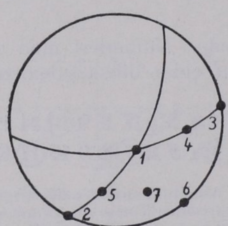


Fig. 70. 7 Lagen eines figurativen Punktes in einem Urbauteil.

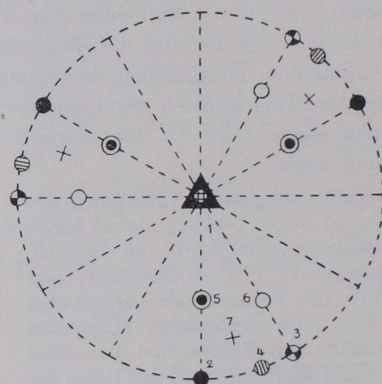


Fig. 71. Entwickeln der Kristallformen eines trigonalen Kristalls der 1. Stufe.

Symmetrieregel: 1 dreizählige Symmetrieachse (Trigyre). Der figurative Punkt liege zunächst in 1 (Mittelpunkt der Projektion). Man erkennt, daß bereits eine Fläche für sich (Pedion) die Symmetrieforderung erfüllt. Liegt der darstellende Punkt in 2, so wird durch die Trigyre seine Wiederholung bedingt derart, wie es die Fig. 71 zeigt. Das Ergebnis ist ein trigonales Prisma erster Stellung. Punkt 3 liefert ein trigonales Prisma zweiter Stellung, Punkt 4 ein gleiches dritter Stellung. Punkt 5 und seine Wiederholung führen zu einer trigonalen Pyramide erster Stellung, Punkt 6 zu einer zweiter Stellung und schließlich Punkt 7 zu einer solchen dritter Stellung. Wie viele

[1]) In den Projektionsfiguren der Kristallklassen sind S. E. durch ausgezogene Kreise bzw. Gerade vermerkt, S. A. wie S. 1 angegeben.