

## 7. Kristallprojektion.

Zur Übersicht der beobachteten Kristallformen und ihrer Beziehungen zueinander, zur Kristallzeichnung und Kristallberechnung, weiter auch zur Kennzeichnung optischer Verhältnisse bedient man sich mit großem Nutzen der stereographischen sowie der gnomonischen Projektion. Bei diesen Projektionsarten stellt man die Kristallflächen durch Projektionspunkte dar.

### 1. Stereographische Projektion.

Man denke sich den Kristall von einer konzentrischen Kugel umgeben und seine Flächen, so auch  $F$  in Fig. 16, parallel nach

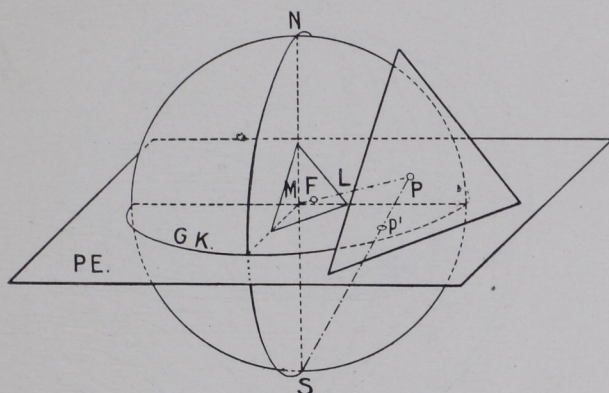


Fig. 16. Schema zur stereographischen Projektion.

außen verschoben, bis sie Tangentialebenen an der Kugel sind. Sie berühren dann letztere jeweils in einem Punkte  $P$ . Man erhält natürlich den nämlichen Punkt  $P$ , wenn man vom Kristallmittelpunkte  $M$  aus Lote ( $L$ ) auf die Kristallflächen fällt und bis zum Einstrichpunkte ( $P$ ) mit der Kugel verlängert. Die Kugelpunkte (gleich Sternen auf dem Himmelsgewölbe) heißen Flächenpole; ihre Gesamtheit nennt man die Flächenpolfigur.

Die Flächenpole kennzeichnen somit Richtungen von Kugelradien. Wie Flächenlote kann man auch Kristallkanten oder andere, z. B. optische Richtungen, die man durch  $M$  gelegt denkt, durch einen Pol auf der Kugel festlegen.

Als Projektionsebene ( $PE$ ) dient die Ebene eines größten Kreises. Stellen wir diese Ebene ( $GK$ ) wagerecht, so lassen sich die Projektionspunkte der Flächenpole kennzeichnen als Schnittpunkte ( $p'$ ), die man auf der Projektionsebene

( $GK$ ) erhält durch Einstechen der Verbindungslinien ( $PS$ ) zwischen den Flächenpolen ( $P$ ) und dem unteren Pol ( $S$ ) der Kugel. Ersichtlich liegen die Projektionspunkte der Pole der oberen Halbkugel innerhalb des Grundkreises ( $GK$ ), die Projektionspunkte der unteren Halbkugel außerhalb. Die Projektionspunkte der Flächen senkrecht zur Projektionsebene befinden sich auf der Linie des Grundkreises. Bei ihnen fallen Flächenpole und Projektionspunkte in eins zusammen.

Gewöhnlich gibt man in der Projektion nur die Flächenpole der oberen Halbkugel wieder. Die etwaigen Projektionen der Flächen

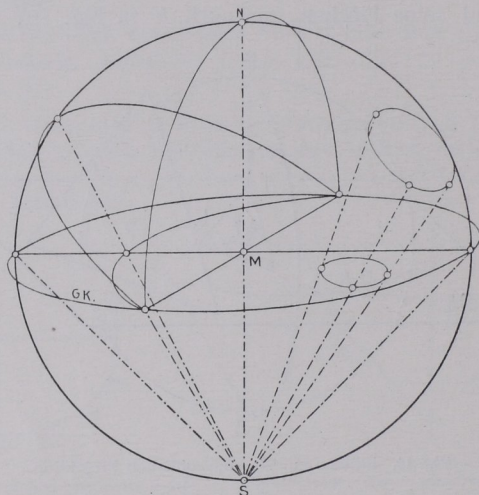


Fig. 17. Projektion von Kreisen in stereographischer Projektion.

unterhalb des Grundkreises stellt man statt außerhalb des letzteren innerhalb dar, indem man die Flächenpole der unteren Halbkugel mit dem oberen Kugelpol ( $N$ ) verbindet (Gadolinsche Projektion). Die Projektionspunkte der oberen und unteren Halbkugel erhalten eine verschiedene Markierung, etwa  $+$  und  $\circ$ .

Das Zeichen  $\oplus$  bedeutet, daß die Kugelpole zweier Flächen senkrecht übereinanderliegen; die Kante zwischen letzteren verläuft horizontal, und die Äquatorebene der Kugel halbiert den Winkel der beiden Flächen. Fläche und parallele Gegenfläche stellen sich in der Gadolinschen Projektion durch  $+$  und  $\circ$  dar, die auf einer Linie durch den Projektionsmittelpunkt gleichweit von ihm liegen.

Die Zone der zum Grundkreise senkrechten Flächen hat ihren Zonenpol im oberen Kugelpol ( $N$ ). Die Projektion dieses Zonen-

pols ist der Mittelpunkt ( $M$ ) des Grundkreises. Wie nun die Flächenpole dieser Zone auf dem Grundkreise liegen, so befinden sich die Flächenpole jeder Zone auf einem größten Kreise<sup>1)</sup> der Kugel, von dem der zugehörige Zonenpol  $90^\circ$  absteht.

Man erkennt dies, wie manche sonstigen Eigenschaften der stereographischen Projektion, am einfachsten mit Hilfe einer schwarzen Kugel, auf der man mit Kreide zeichnen und die man auf einen passenden napfförmigen Untersatz in beliebige Lage bringen kann.

Die ausgezeichnetesten Eigenschaften der stereographischen Projektion sind:

1. Alle Kreise auf der Kugel geben in der Projektion Kreise,

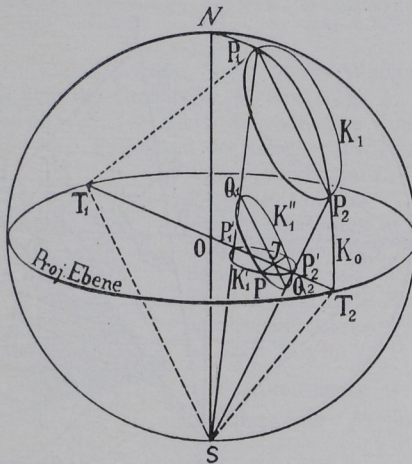


Fig. 18. Erläuterung zur Projektion von Kreisen in stereographischer Projektion.

im Grenzfall gerade Linien (vgl. Fig. 17). Ein einfacher Beweis läßt sich an der Hand der Fig. 18 und 19 geben.

Auf der Kugel Fig. 18 ist  $K_1$  ein Kleinkreis,  $K_1'$  seine Projektion. Es entsprechen sich die Durchmesser  $P_1P_2$  und  $P_1'P_2'$ . Ein beliebiger Punkt  $P$  auf  $K_1'$  liefert  $PJ$  als Lot auf  $P_1'P_2'$ . Daß im schiefen Kegel der Projektionsstrahlen, in welchem  $K_1$  den „ersten Kreisschnitt“ bedeutet,  $K_1'$  der „zweite Kreisschnitt“ ist, ergibt der Nachweis von  $PJ^2 = P_1'J \cdot P_2'J$ . Da die Dreiecke  $JP_1'Q_1$  und  $JP_2'Q_2$  ähnlich sind (gleiche Winkel, s. Fig. 19), so ist  $\frac{P_1'J}{Q_1J} = \frac{Q_2J}{P_2'J}$  oder  $P_1'J \cdot P_2'J = Q_1J \cdot Q_2J$ . Da  $Q_1J \cdot Q_2J = PJ^2$ , so ist  $P_1'J \cdot P_2'J = PJ^2$ , der Kegelschnitt  $K_1'$  also ein Kreis.

<sup>1)</sup> Die Ebene eines größten Kreises geht durch den Kugelmittelpunkt; sie halbiert also die Kugel.

Die Ebene eines Kleinkreises geht nicht durch den Kugelmittelpunkt.

Größte Kreise der Kugel (Zonenkreise) projizieren sich als Kreisstücke, deren Durchschnittspunkte auf dem Grundkreise sich diametral gegenüberliegen. Alle größten Kreise, die durch  $S$  gehen, erscheinen in der Projektion als Gerade.

2. In einem sphärischen Dreieck auf der Kugel stellen die Seiten die Normalenwinkel (d. h. die Winkel der Lote) der zugehörigen Flächen dar, z. B. in Fig. 20

die Seite  $ab$  den Normalenwinkel zwischen den Flächen  $A$  und  $B$ ,  
 „ „  $bc$  „ „ „ „ „  $B$  „  $C$ ,  
 „ „  $ca$  „ „ „ „ „  $C$  „  $A$ .

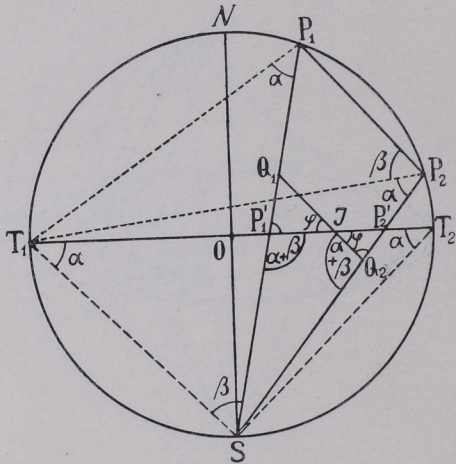


Fig. 19. Schnitt durch Fig. 18.

Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind die Supplemente der ebenen Kantenwinkel;  $a$  ergänzt  $\alpha$ ,  $b$  ergänzt  $\beta$  und  $c$  ergänzt  $\gamma$  zu  $180^\circ$ . In der Projektion (Fig. 21) werden die Winkel  $a, b, c$  zwischen den Seiten und die Winkelgrößen  $ac, cb, ba$  der Seiten des sphärischen Dreiecks auf der Kugel winkelgetreu wiedergegeben.  $\alpha, \beta, \gamma$  lassen sich durch (alsbald zu erläuterndes) Ausmessen in der Projektion ablesen.

1. Treue bezüglich der Winkel sphärischer Dreiecke in der Projektion. Beweis (Fig. 22, 23):  $K_1 K_2 K_0$  = Großkreise durch  $P$ ;  $K_0$  steht senkrecht zur Tangentialebene  $PB_1 B_2$  an  $P$ .  $K'_1, K'_2$  und  $OB$  = Projektionen von  $K_1, K_2$  und  $K_0$ ;  $P'$  = Projektion von  $P$ . Winkel der Großkreise in  $P$  = Winkel der Tangenten  $PB_1$  und  $PB_2$ ;  $B_1 B_2$  = Schnittgerade der Tangentialebene mit der Projektionsebene. Da die Strecken  $BP$  und  $BP'$  (Fig. 23)

gleich sind, so gehen  $B_1P$  und  $B_2P$  durch Umklappen der Tangentialebene  $B_1PB_2$  um das Scharnier  $B_1B_2$  in  $B_1P'$  und  $B_2P'$  als Tangenten an die

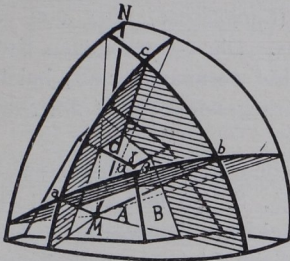


Fig. 20. Beziehung zwischen Zonenkreisen auf der Kugel und Kristallwinkeln.

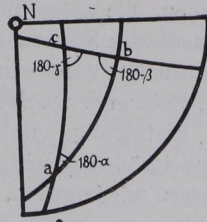


Fig. 21. Projektion des sphärischen Dreiecks  $a, b, c$  der Fig. 20.

Projektionskreise  $K'_1$  und  $K'_2$  über. Somit ist der Winkel der Projektionskreise in  $P'$  gleich dem der Großkreise  $K_1$  und  $K_2$  in  $P$ .

2. Treue bezüglich der Seiten sphärischer Dreiecke in der Projektion (Fig. 24).  $P'_1P'_2 =$  Projektion des Großkreises  $P_1P_2$ . Es ist zu beweisen, daß Bogen  $P_1P_2 =$  Bogen  $P'_1P'_2$ .

$Z$  sei der Pol von  $P_1P_2$ , mithin  $q$  das Maß für den Bogen  $P_1P_2$ . Entsprechend ist  $q'$  das Maß für  $P'_1P'_2$ . Nach obigem Beweis ist  $q$  als Winkel der Zonenkreise  $E_1$  und  $E_2$  in  $Z =$  dem Winkel  $q'$  der Projektionskreise  $E'_1, E'_2$  in  $Z'$ , somit ist auch Bogen  $P'_1P'_2 =$  Bogen  $P_1P_2$ .

Andererseits werden die Herstellung der Projektion und die

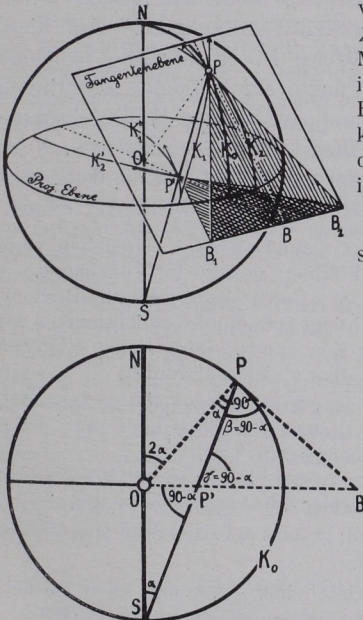
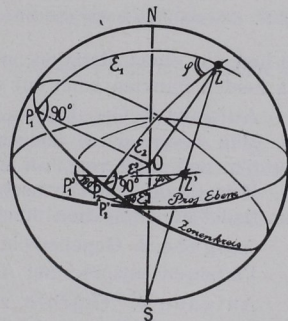


Fig. 22-24. Winkeltreue der stereographischen Projektion.



Schlußfolgerungen aus ihr außerordentlich leicht gemacht durch Anwendung eines »Wulffschen Netzes« (Fig. 25).

Es stellt gewissermaßen die stereographische Projektion von Meridianen und Breitenkreisen auf eine horizontal gedachte Meridianebene dar. Die Nordsüdpollinie (Längsachse) läuft von vorn nach hinten, die Querachse links rechts. Die ausgezogenen Kreise stehen in diesem Schema (Fig. 25) um  $15^\circ$  voneinander ab; bei dem zur Konstruktion vorgesehenen, dem vorliegenden Buche am Schluß als Tafel beigegebenen Netze um  $2^\circ$ .

Die Eintragung von stereographischen Projektionspunkten aus den Winkelgrößen  $\varphi$  und  $\rho$  (vgl. Fig. 27, S. 16) läßt sich mit Hilfe eines Netzes wiedergeben. In ihm bezeichnen konzentrische Kreise die Werte  $\rho = \text{konst.}$ , während radiale Linien die Bedeutung  $\varphi = \text{konst.}$  haben.

Man zeichnet auf über das Wulffsche Netz gelegtem Pauspapier und kann nach dem Ausziehen des Grundkreises und Festlegung des Mittelpunktes nun leicht konzentrische Drehungen des Pauspapiers über dem Netz (oder umgekehrt) vornehmen. Auf diese Weise ist es möglich, beliebige Punkte auf Meridiane zu bringen und auf diesen Winkelabstände abzustechen oder abzulesen. Auch der Grundkreis und die Querachse können als Winkelmesser dienen.

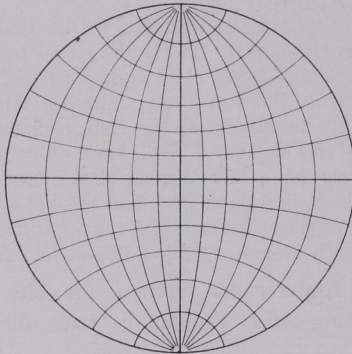


Fig. 25. Schema des stereographischen Netzes.

Flächen auf einen Meridian; er ist der Zonenkreis. Der Winkel zwischen den beiden Punkten kann auf dem Meridian abgelesen werden.

**Aufgabe 2.** Gegeben ein Zonenkreis; gesucht der zugehörige Zonenpol. Man bringt durch konzentrisches Drehen den Zonenkreis über einen Meridian und zählt von ihm auf der Querachse  $90^\circ$  ab.

**Bemerkung.** Die Durchschnittskante zweier Flächen ist ihre Zonenachse. Man findet die Projektion durch Vereinigung der Aufgaben 1 und 2.

**Aufgabe 3.** Gegeben ein Zonenpol; gesucht der zugehörige Zonenkreis. Verfahren entsprechend Aufgabe 2.

**Aufgabe 4.** Gegeben zwei Flächen einer Zone und zwei Flächen einer zweiten Zone; gesucht die Fläche, welche beiden Zonen angehört.

Man zieht die beiden Zonenkreise. Der Schnittpunkt ist der Projektionspunkt der gesuchten Fläche.

**Aufgabe 5.** Gegeben eine Fläche, gesucht alle Flächen mit dem Winkelabstand  $\alpha$  von ihr.

**Aufgabe 1.** Gegeben zwei Flächen; gesucht ihr Zonenkreis.

Durch konzentrische Drehung bringt man die Projektionspunkte der

Der Ort der Pole dieser Flächen auf der Kugel ist ein Kreis, also auch ihre Projektion ein solcher. Zur Auffindung der Kreislinie bringt man den Projektionspunkt auf einen Meridian und steckt den Winkel  $\alpha$  beiderseits ab. Durch Weiterdrehen kommt der Punkt auf einen anderen Meridian, auf dem man diesen Winkel abmißt usw. Durch Anpassung der gewonnenen Punkte an einen Breitenkreis und durch exzentrisches Drehen kann man den vollständigen Kreis ziehen.

Liegt der Ausgangspunkt auf dem Grundkreis, so dreht man den Punkt bis zur Deckung mit einem Ende der Längsachse des Netzes und benützt zur Konstruktion des gesuchten Kreises ohne weiteres einen Breitenkreis.

Aufgabe 6. Gegeben zwei Flächen. Gesucht eine dritte Fläche, die mit den gegebenen in einer Zone liegen und mit der einen von ihnen in einer bestimmten Richtung den Winkel  $\alpha$  bilden soll.

Man ziehe den Zonenkreis und trage in gewünschter Richtung  $\alpha$  auf ihm ab.

Aufgabe 7. Gegeben zwei Flächen. Gesucht eine dritte Fläche mit dem Winkelabstand  $\alpha$  von der einen und  $\beta$  von der anderen Fläche.

Man ziehe entsprechende Kreise um die Projektionspunkte nach 5. Ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist die gesuchte Projektion.

Aufgabe 8. Gegeben zwei Zonenkreise; gesucht ihr Winkelabstand. Man denke den Durchschnittspunkt der beiden Zonenkreise als Kugelpol;  $90^\circ$  von ihm ab auf jedem Zonenkreise gemessen hat man ihre Durchschnittspunkte mit dem zugehörigen Äquator. Auf ihm kann man den Winkelabstand ausmessen. Auch kann man die Pole der Zonenkreise aufsuchen und deren Winkelabstand bestimmen.

Aufgabe 9. Gegeben zwei Zonenkreise, gesucht der den Winkel dieser Zonenkreise halbierende Kreis.

Man suche nach dem Verfahren 8 den Äquator und halbiere den auf ihm gegebenen Winkel. Der gesuchte Kreis geht durch den gefundenen Halbierungspunkt und durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Zonenkreise.

Natürlich kann man so auch Kreise mit beliebigem Abstand von einem der gegebenen Zonenkreise einzeichnen.

Aufgabe 10. Gegeben drei ein Eck bildende Flächen. Gesucht die Winkel der Kanten zwischen den Flächen.

Man bedenke, daß die Seiten des betreffenden sphärischen Dreiecks die zu den Kanten des Ecks senkrechten Zonenkreise darstellen (Fig. 20). Man messe ihre Winkel zueinander. Es sind die Supplemente der Kantewinkel. Oder man konstruiere die Pole der die Dreieckseiten bildenden Zonenkreise und messe die Winkel zwischen diesen Polen. Es sind die Winkel der Kanten.

## 2. Zyklographische Projektion.

Man schiebe die Kristallfläche parallel sich selbst bis zum Mittelpunkt der Kugel in Fig. 16, S. 9; sie schneidet auf ihr in einem größten Kreise ein, dessen Pol mit dem Kugelpol der Fläche bei stereographischer Projektion zusammenfällt. Die nach stereographischer Art gedachte Projektion des größten Kreises ist die zyklographische Projektion der Fläche. Es stellen