

Andrea Neumayr, BSc

# **Kopplung Finiter Elemente Methoden und Randelementmethoden für das Transmissionsproblem des Stokes–Problems**

## **MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium: Technomathematik

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

Ass. Prof. Dr. Günther Of

Institut für Numerische Mathematik

Graz, September 2016

**Masterarbeit:**

Titel: Kopplung Finiter Elemente Methoden und Randelementmethoden für das Transmissionsproblem des Stokes-Problems  
Name, Vorname: Neumayr, Andrea  
Matrikelnummer: 0931551  
Institut: Institut für Numerische Mathematik  
Technische Universität Graz  
Betreuung: Ass. Prof. Dr. Günther Of

# Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei meiner Familie und bei meinem Freund Michael für die großartige Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit und natürlich auch während des gesamten Studiums bedanken. Ein großer Dank gilt auch meiner Freundin Andrea für ihre Geduld beim Korrekturlesen. Ganz besonderer Dank gebührt Herrn Ass.-Prof. Dr. Günther Of, für die hervorragende und sorgfältige Betreuung während des gesamten Erstellungsprozesses dieser Abschlussarbeit.



# Kurzfassung

Ziel dieser Arbeit sind die numerische Umsetzung sowie die Untersuchung der nicht-symmetrischen Kopplung der Finiten Elemente Methode (FEM) und der Randelementmethode (BEM) für das Stokes–Problem. Lange Zeit war die Analysis der nichtsymmetrischen Kopplung an spezielle Voraussetzungen gebunden. Heute kann auf Grund erheblicher Fortschritte in der Analysis der nichtsymmetrischen FEM–BEM Kopplung auf diese Einschränkungen für andere partielle Differentialgleichungen verzichtet werden. Somit ist die numerische Untersuchung der gemischten Formulierung der nicht-symmetrischen FEM–BEM Kopplung für das Stokes–Problem in dieser Arbeit von großem Interesse. Um die gemischte Formulierung der FEM–BEM Kopplung numerisch untersuchen zu können, wird zuerst das Dirichlet–Randwertproblem des Stokes–Problems betrachtet. Die Diskretisierung der gemischten Formulierung erfolgt mittels modifizierten Taylor–Hood–Elementen und wird anhand numerischer Beispiele getestet. Im Speziellen wird der Nachweis der Erfüllung der diskreten Inf–Sup–Bedingung im Detail ausgeführt. Zusätzlich werden die Randintegralgleichungen für Stokes eingeführt, um damit anschließend die nichtsymmetrische Kopplung aufzustellen. Im Rahmen dieser Masterarbeit wird die nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung im Zweidimensionalen implementiert und anhand einiger numerischer Beispiele untersucht.



# Abstract

The aim of this master thesis is the numerical realization and examination of the non-symmetric coupling with the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) of the Stokes problem. In the past, the analysis of the non-symmetric coupling needed to fulfill specific requirements. Due to progress made in the analysis of the non-symmetric FEM–BEM coupling, these requirements can now be neglected for other partial differential equations. Therefore, the numerical investigation of the mixed formulation of the non-symmetric FEM–BEM coupling of the Stokes problem is the focus of this thesis. In order to do so, the Dirichlet boundary value problem of the Stokes problem is considered first. The mixed formulation is discretised with modified Taylor–Hood finite elements and tested with the help of numerical examples. In particular, the proof of the discrete Inf–Sup condition is discussed in detail. In addition, the boundary integral equations for the Stokes problem are introduced in order to establish the non-symmetric coupling. Finally, the non-symmetric FEM–BEM coupling is implemented for the two-dimensional case and is tested with several numerical examples.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>1 Variationsformulierungen des Stokes–Problems</b>	<b>15</b>
1.1 Die 1. Greensche Formel für die Gleichungen von Stokes . . . . .	16
1.1.1 Herleitung der 1. Greenschen Formel für die Gleichungen von Stokes . . . . .	18
1.1.2 Alternative Herleitung der 1. Greenschen Formel für die Gleichungen von Stokes . . . . .	19
1.2 Variationsformulierungen . . . . .	20
1.2.1 Variationsformulierungen für die Gleichungen von Stokes . . . . .	20
1.2.2 Äquivalenz der Bilinearform $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . . . . .	21
1.2.3 Variationsformulierungen mit Lagrange–Multiplikator für die Gleichungen von Stokes . . . . .	23
<b>2 Die eindeutige Lösbarkeit des Stokesschen Sattelpunktproblems</b>	<b>25</b>
2.1 Die Inf–Sup–Bedingung für allgemeine Sattelpunktprobleme . . . . .	25
2.2 Die eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet–Randwertproblems . . . . .	36
<b>3 Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Dirichlet–Randwertproblems</b>	<b>41</b>
3.1 Diskretisierung von Sattelpunktproblemen . . . . .	41
3.2 Diskretisierung des Stokes–Problems . . . . .	43
3.2.1 Die Taylor–Hood–Elemente . . . . .	43
3.2.2 Die modifizierten Taylor–Hood–Elemente . . . . .	44
3.2.3 Diskretisierung des Stokes–Problems mittels Taylor–Hood–Elementen und modifizierten Taylor–Hood–Elementen . . . . .	45
3.3 Die diskrete Inf–Sup–Bedingung . . . . .	45
3.3.1 Makroelemente und ihre Eigenschaften . . . . .	46
3.3.2 Hilfslemmata . . . . .	49
3.3.3 Die lokale Inf–Sup–Bedingung . . . . .	57

3.3.4	Die globale Inf–Sup–Bedingung . . . . .	65
3.4	Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems . . . . .	69
3.4.1	Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems für Taylor–Hood–Elemente . . . . .	69
3.4.2	Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems für modifizierte Taylor–Hood–Elemente . . . . .	71
3.5	Fehlerabschätzung, Approximationseigenschaften . . . . .	72
3.6	Numerische Ergebnisse mit FEM . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Randintegraloperatoren für das Stokes–Problem</b> . . . . .	<b>79</b>
4.1	Die Greenschen Formeln . . . . .	79
4.1.1	Die 1. Greensche Formel . . . . .	79
4.1.2	Die 2. Greensche Formel . . . . .	81
4.2	Darstellungsformeln und Fundamentallösungen . . . . .	81
4.2.1	Darstellungsformel für die Geschwindigkeit . . . . .	82
4.2.2	Darstellungsformel für den Druck . . . . .	83
4.3	Innenraumproblem . . . . .	83
4.4	Außenraumproblem . . . . .	84
4.5	Randintegraloperatoren . . . . .	85
4.5.1	Randintegraloperatoren des Drucks . . . . .	86
4.5.2	Randintegraloperatoren der Geschwindigkeit . . . . .	87
4.5.2.1	Newton–Potential $\tilde{N}_{0,u}$ . . . . .	87
4.5.2.2	Einfachschichtpotential $\tilde{V}_u$ . . . . .	88
4.5.2.3	Adjungierter Doppelschichtrandintegraloperator $K'_u$ . . . . .	89
4.5.2.4	Doppelschichtpotential $W_u$ . . . . .	90
4.5.2.5	Hypersingulärer Operator $D_u$ . . . . .	91
4.5.2.6	Lemmata zu den Randintegraloperatoren . . . . .	92
4.5.2.7	Abbildungseigenschaften . . . . .	93
4.6	Randintegralgleichungen . . . . .	94
4.6.1	Randintegralgleichungen im Innenraum . . . . .	94
4.6.2	Randintegralgleichungen im Außenraum . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung</b> . . . . .	<b>97</b>
5.1	Das Transmissionsproblem . . . . .	97
5.2	Nichtsymmetrische Kopplung . . . . .	98
5.2.1	Literaturüberblick zur eindeutigen Lösbarkeit der FEM–BEM Kopplung . . . . .	99
5.2.2	Äquivalente nichtsymmetrische Kopplung . . . . .	100
5.3	Diskretisierung der nichtsymmetrischen Kopplung . . . . .	101
5.3.1	Basisfunktionen und Approximationseigenschaft . . . . .	102
5.3.2	Diskretisierung der nichtsymmetrischen Kopplung mit modifizierten Taylor–Hood–Elementen . . . . .	102

---

5.4	Numerische Umsetzung der FEM–BEM Kopplung . . . . .	105
5.5	Numerische Ergebnisse der FEM–BEM Kopplung . . . . .	106
<b>A</b>	<b>Referenzelement, Formfunktionen und lokale Parametrisierung</b>	<b>117</b>
A.1	Referenzelement und Formfunktionen . . . . .	117
A.2	Lokale Parametrisierung . . . . .	118
A.3	Basisfunktionen . . . . .	119



# Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Umsetzung der nichtsymmetrischen FEM–BEM Kopplung für das Stokes–Problem. Die nichtsymmetrische Kopplung geht auf [6, 22] für das Laplace–Problem zurück. Deren Analysis nutzte zunächst die Kompaktheit des Doppelschichtpotentials, die allerdings nur bei genügend glattem Rand gegeben ist, um die Eindeutigkeit des gekoppelten Problems zu zeigen. In [33, 34] gelang es erstmals, die eindeutige Lösbarkeit der nichtsymmetrischen FEM–BEM Kopplung für das Transmissionsproblem der Yukawa–Operatoren und der Laplace–Gleichung mittels Elliptizität, insbesondere für beliebige konforme Ansatzräume, zu beweisen. Dies lässt sich auf Randwertprobleme übertragen [16]. In [29, 30, 42] wird der Beweis für das Transmissionsproblem der linearen Potentialgleichung geführt. Für die Elastostatik lassen sich ähnliche Resultate zeigen [13, 43].

Die FEM–BEM Kopplung des Stokes–Problems wurde in [14, 15, 19, 26, 31, 32, 38] betrachtet. In den frühen Arbeiten zur nichtsymmetrischen Kopplung des Stokes–Problems wurde wieder über die Kompaktheit des Doppelschichtpotentials argumentiert [19, 26, 38], wodurch sich für die Analyse Einschränkungen in Bezug auf die diskreten Ansatzräume ergaben. In Folge der Fortschritte für die Laplace–Gleichung erfolgte die Analyse einer dualen Formulierung [14, 15] ohne Zuhilfenahme des Kompaktheitsarguments. Daher ist die numerische Untersuchung der primalen gemischten Formulierung der FEM–BEM Kopplung, welche in dieser Arbeit diskutiert wird, von großem Interesse.

Dafür wird in Kapitel 1, 2 und 3 auf das Dirichlet–Randwertproblem des Stokes–Problems, welches mit den Finiten Elementen numerisch umgesetzt wird, eingegangen. In Kapitel 1 werden die Gleichungen von Stokes und die Variationsformulierungen für die Sattelpunktprobleme eingeführt. Die eindeutige Lösbarkeit von kontinuierlichen Sattelpunktproblemen wird in Kapitel 2 unter Anwendung des Brezzi’s–Splitting–Theorems 2.7 genauer besprochen. Mit diesem Satz wird für das Stokes–System die eindeutige Lösbarkeit im Kontinuierlichen gezeigt. In Kapitel 3 wird das Stokes–Problem mit Hilfe der Taylor–Hood–Elemente bzw. der modifizierten Taylor–Hood–Elemente [44], [4, S. 163] diskretisiert. Für diese stabilen, diskreten Stokes–Probleme muss die eindeutige Lösbarkeit erneut gezeigt werden. Deshalb liegt das Hauptaugenmerk dieses Kapitels auf dem Nachweis [17] der Erfüllung der diskreten Inf–Sup–Bedingung, für die Taylor–Hood–Elemente und die modifizierten Taylor–Hood–Elemente. Zum Abschluss des 3. Kapitels wird ein Dirichlet–Randwertproblem, jeweils mit den Taylor–Hood–Elementen und den modifizierten Taylor–Hood–Elementen numerisch umgesetzt und die Ergebnisse ausgewertet. Damit die FEM–BEM Kopplung durchgeführt werden

kann, werden im 4. Kapitel die Randintegralgleichungen eingeführt. Einige Eigenschaften der Randintegraloperatoren können von der linearen Elastizität übernommen werden, weil die Gleichungen der linearen Elastizität und die Gleichungen von Stokes über die Fundamentallösungen der Geschwindigkeit des Stokes-Systems, mit den Fundamentallösungen des Systems der linearen Elastizität zusammenhängen. Im 4. Kapitel werden die Darstellungsformeln mit Hilfe der Fundamentallösungen für das Stokes-Problem im Innen- und Außenraum angegeben und die Eigenschaften der jeweiligen Randintegraloperatoren für das Stokes-Problem betrachtet. Mit Hilfe der 1. Randintegralgleichung für Stokes kann die nichtsymmetrische FEM-BEM Kopplung im 5. Kapitel aufgestellt werden. In diesem Kapitel wird ein kurzer Literaturüberblick zu Arbeiten, in denen eine FEM-BEM Kopplung für das Stokes-Problem betrachtet wird, gegeben. Im Rahmen dieser Masterarbeit wird die nichtsymmetrische Kopplung in  $\mathbb{R}^2$  implementiert. Abschließend werden einige numerische Beispiele analysiert. Hier wird die FEM mit den modifizierten Taylor-Hood-Elementen und die BEM mit der 1. Randintegralgleichung realisiert.

# 1. Variationsformulierungen für das Dirichlet–Randwertproblem des Stokes–Problems

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand  $\Gamma := \partial\Omega$ . Gegeben sind die Kräfte  $\mathbf{f} \in [L_2(\Omega)]^d$ ,  $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d$ , die Viskositätskonstante  $\nu$ , und gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  und der Druck  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Geschwindigkeit soll einer Dirichlet–Randbedingung  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$  genügen, wodurch man das Dirichlet–Randwertproblem der *Gleichungen von Stokes*

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.2)$$

$$\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.3)$$

erhält. Die Gleichungen von Stokes beschreiben die Bewegung einer inkompressiblen, stationären und zähen Flüssigkeit [5] in einem mehrdimensionalen Körper  $d = 2, 3$ . Für den dreidimensionalen Fall lauten die Gleichungen (1.1)

$$-\nu \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} p \\ \frac{\partial}{\partial x_2} p \\ \frac{\partial}{\partial x_3} p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Die Dirichlet–Daten  $\mathbf{g}$  müssen einer divergenzfreien Strömung entsprechen, sodass sich mit dem Integralsatz von Gauß die *Lösbarkeitsbedingung*

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds_x = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds_x \quad (1.4)$$

ergibt. Der Druck  $p$  in (1.1) ist bis auf die Addition von Konstanten eindeutig bestimmt. Deshalb wird er durch die Normierung

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0 \quad (1.5)$$

festgelegt [4, S. 152]. Aufgrund dieser Normierung wird der Raum  $L_{2,0}(\Omega)$  (1.6) eingeführt

$$L_{2,0}(\Omega) := \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}. \quad (1.6)$$

Um die Variationsformulierung der Gleichungen von Stokes herleiten zu können, wird die 1. Greensche Formel für das Stokes-Problem benötigt. Diese wird im folgenden Abschnitt näher betrachtet.

## 1.1. Die 1. Greensche Formel für die Gleichungen von Stokes

Damit die 1. Greensche Formel [41, S. 12ff] hergeleitet werden kann, werden einige Eigenschaften des linearisierten Verzerrungstensors [7] benötigt.

**Definition 1.1. (Der linearisierte Verzerrungstensor).** [28, Kapitel 3.4],[7, S. 285] Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  ein Gebiet und  $\mathbf{u}$  die Verschiebung, dann ist der linearisierte Verzerrungstensor  $e : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  durch

$$e(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u})^\top + \nabla \mathbf{u} \right),$$

bzw.

$$e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left( \partial_i u_j + \partial_j u_i \right) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, d, \quad (1.7)$$

definiert.

**Lemma 1.2. (Eigenschaften des linearisierten Verzerrungstensors).**

Für den linearisierten Verzerrungstensor  $e : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $d = 2, 3$  und den Funktionen  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{u} \in C^2(\bar{\Omega})$  und  $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{v} \in C^2(\bar{\Omega})$  gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [e_{ij}(\mathbf{u})v_i] = v_i \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ij}(\mathbf{u}) + e_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \quad (1.8)$$

$$\sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \Delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^d \Delta u_i v_i = 2 \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) - 2 \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} [e_{ij}(\mathbf{u})v_i] + \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (1.11)$$



*Beweis.*

**i.** Die Gleichung (1.8) ist zu zeigen.

Die Gleichung (1.8) kann durch die Anwendung der Produktregel bewiesen werden.

**ii.** Die Gleichung (1.9) ist zu zeigen.

Die Gleichung (1.9) wird für  $d = 2$  bewiesen, für  $d = 3$  kann analog vorgegangen werden. Im ersten Schritt wird  $e_{ii}(\mathbf{u})\partial_i v_i = e_{ii}(\mathbf{u})e_{ii}(\mathbf{v})$  gezeigt

$$e_{ii}(\mathbf{u})\partial_i v_i = \frac{1}{2}[\partial_i u_i + \partial_i u_i]\partial_i v_i = \partial_i u_i \partial_i v_i = \frac{1}{2}[\partial_i u_i + \partial_i u_i] \frac{1}{2}[\partial_i v_i + \partial_i v_i] = e_{ii}(\mathbf{u})e_{ii}(\mathbf{v}).$$

Im zweiten Schritt wird unter Zuhilfenahme der Eigenschaft  $e_{12}(\mathbf{u}) = e_{21}(\mathbf{u})$  gezeigt, dass  $e_{12}(\mathbf{u})\partial_2 v_1 + e_{21}(\mathbf{u})\partial_1 v_2 = e_{12}(\mathbf{u})e_{12}(\mathbf{v}) + e_{21}(\mathbf{u})e_{21}(\mathbf{v})$  gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} e_{12}(\mathbf{u})\partial_2 v_1 + e_{21}(\mathbf{u})\partial_1 v_2 &= \frac{1}{2}(e_{12}(\mathbf{u}) + e_{21}(\mathbf{u}))\partial_2 v_1 + \frac{1}{2}(e_{12}(\mathbf{u}) + e_{21}(\mathbf{u}))\partial_1 v_2 \\ &= \frac{1}{2}(e_{12}(\mathbf{u}) + e_{21}(\mathbf{u}))(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) \\ &= (e_{12}(\mathbf{u}) + e_{21}(\mathbf{u}))e_{12}(\mathbf{v}) = e_{12}(\mathbf{u})e_{12}(\mathbf{v}) + e_{21}(\mathbf{u})e_{12}(\mathbf{v}) \\ &= e_{12}(\mathbf{u})e_{12}(\mathbf{v}) + e_{21}(\mathbf{u})e_{21}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Beide Schritte vereint ergeben die Gleichung (1.9).

**iii.** Die Gleichung (1.10) ist zu zeigen.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \partial_j e_{ij}(\mathbf{u}) &= \partial_1 \left( \frac{1}{2}(\partial_i u_1 + \partial_1 u_i) \right) + \partial_2 \left( \frac{1}{2}(\partial_i u_2 + \partial_2 u_i) \right) + \partial_3 \left( \frac{1}{2}(\partial_i u_3 + \partial_3 u_i) \right) \\ &= \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\partial_i(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\partial_i \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned}$$

**iv.** Die Gleichung (1.11) ist zu zeigen.

Ausgehend von (1.8) werden jeweils (1.10) und (1.9) angewandt, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^d \partial_j [e_{ij}(\mathbf{u})v_i] &\stackrel{(1.8)}{=} \sum_{i,j=1}^d \partial_j e_{ij}(\mathbf{u})v_i + \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u})\partial_j v_i \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (\Delta u_i + \partial_i \operatorname{div} \mathbf{u})v_i + \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dies nach  $\sum_{i=1}^d \Delta u_i v_i$  umgeformt, ergibt die Aussage (1.11). □

### 1.1.1. Herleitung der 1. Greenschen Formel für die Gleichungen von Stokes

Im Folgenden wird die 1. Greensche Formel für das Stokes-Problem hergeleitet. Dafür werden die Eigenschaften des linearisierten Verzerrungstensors (Lemma 1.2) benötigt. Die  $i$ -te Komponente der ersten Gleichung des Stokes-Problems (1.1), wird mit einer Testfunktion  $v_i$  multipliziert und über  $\Omega$  integriert [41, S. 12ff]. Danach führt partielle Integration zu

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} p v_i dx = -\nu \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial}{\partial x_i} v_i dx + \int_{\Gamma} p n_i v_i ds_x.$$

Auf die Summe über  $i$  werden die Ergebnisse aus Lemma 1.2 für den linearisierten Verzerrungstensor angewandt

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} dx &\stackrel{(1.11)}{=} 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx \\ &- 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} [e_{ij}(\mathbf{u}) v_i] dx + \nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} p v_i dx. \end{aligned}$$

Anschließend wird das 2., 3. und 4. Integral partiell integriert und es ergibt sich

$$\begin{aligned} &= 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx - 2\nu \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^d n_j e_{ij}(\mathbf{u}) \gamma_0^{\text{int}} v_i ds_x \\ &- \nu \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} dx + \nu \int_{\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{n}^{\top} \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} ds_x \\ &- \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma} p \mathbf{n}^{\top} \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} ds_x. \end{aligned}$$

Dies umgestellt führt zu

$$\begin{aligned} 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \nu \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} dx &= \\ &\int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\ &- \int_{\Gamma} [p + \operatorname{div} \mathbf{u}] \mathbf{n}^{\top} \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} ds_x + 2\nu \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^d n_j e_{ij}(\mathbf{u}) \gamma_0^{\text{int}} v_i ds_x. \end{aligned}$$

Daraus erhält man die 1. Greensche Formel für das Stokes-System

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^d t_i(\mathbf{u}, p) v_i \, ds_x \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - b(\mathbf{v}, p) + \langle \mathbf{t}(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Unter Berücksichtigung von  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , definieren sich die symmetrische Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ , die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  und die Konormalenableitung  $t_i(\cdot, \cdot)$  wie folgt:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (1.13)$$

$$b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \quad (1.14)$$

$$t_i(\mathbf{u}, p) := -[p + \nu \operatorname{div} \mathbf{u}] n_i + 2\nu \sum_{j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) n_j, \quad x \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.15)$$

### 1.1.2. Alternative Herleitung der 1. Greenschen Formel für die Gleichungen von Stokes

Für das Dirichlet-Randwertproblem des Stokes-Problems kann die 1. Greensche Formel auch mit einer alternativen Vorgehensweise hergeleitet werden. Für die alternative Herleitung, wird die Gleichung (1.1) mit einer Testfunktion  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$ ,  $d = 2, 3$  multipliziert und über das Gebiet  $\Omega$  integriert. Für das erste Integral wird die 1. Greensche Formel für die Potentialgleichung verwendet; das zweite Integral wird partiell integriert. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= -\nu \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \Delta u_i v_i \, dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i p v_i \, dx \\ &= \nu \sum_{i=1}^d \left\{ - \int_{\Gamma} \gamma_0^{\text{int}} v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \, ds_x + \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx \right\} + \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{\Gamma} p n_i \gamma_0^{\text{int}} v_i \, ds_x - \int_{\Omega} p \partial_i v_i \, dx \right\} \\ &= \sum_{i=1}^d \left\{ \nu \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx - \int_{\Omega} p \partial_i v_i \, dx \right\} + \sum_{i=1}^d \left\{ \int_{\Gamma} p n_i \gamma_0^{\text{int}} v_i \, ds_x - \nu \int_{\Gamma} \gamma_0^{\text{int}} v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \, ds_x \right\}. \end{aligned}$$

Dabei verschwindet das Randintegral

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Gamma} (-p n_i \gamma_0^{\text{int}} v_i + \nu \gamma_0^{\text{int}} v_i \frac{\partial u_i}{\partial n}) \, ds_x = 0 \quad \text{für } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d.$$

Es ergibt sich eine, für das Dirichlet–Randwertproblem des Stokes-Problems, alternative Darstellung der 1. Greenschen Formel

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - b(\mathbf{v}, p) \end{aligned} \quad \text{für } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d,$$

mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \nu \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \left( \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \right) dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx. \end{aligned} \quad (1.16)$$

**Bemerkung 1.3.** [3, Remark 8.1.3, S. 461] Falls Neumann–Daten auftreten gilt diese Vorgehensweise nicht mehr, da sich in diesem Fall die Neumann–Spur verändert.

## 1.2. Variationsformulierungen

In diesem Abschnitt wird zunächst auf die Variationsformulierungen des Dirichlet–Randwertproblems der Gleichungen von Stokes eingegangen (Abschnitt 1.2.1). In Abschnitt 1.2.2 wird die Äquivalenz zwischen den Bilinearformen (1.13) und (1.16) gezeigt. Abschließend wird die Skalierungsbedingung  $p \in L_{2,0}(\Omega)$  mit Hilfe eines Lagrange–Multiplikators umformuliert. Dadurch erhält man äquivalente Variationsformulierungen (Abschnitt 1.2.3).

### 1.2.1. Variationsformulierungen für die Gleichungen von Stokes

Um die erste Variationsformulierung zu erhalten, benötigt man zunächst die 1. Greensche Formel für das Stokes-System (1.12). Durch Umformen ergibt sich

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} \, dx + \langle \mathbf{t}(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma},$$

wobei das Randintegral in (1.12)  $\langle \mathbf{t}(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = 0$  ist, da mit  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$  getestet wird. Für die rechte Seite wird (1.1) eingesetzt.

Für die zweite Variationsformulierung wird (1.2) mit einer Testfunktion  $q \in L_{2,0}(\Omega)$  multipliziert und über das Gebiet  $\Omega$  integriert. Daraus ergibt sich

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0.$$

So erhält man die Variationsformulierungen für das Dirichlet–Randwertproblem des Stokes–Problems:

Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^d \times L_{2,0}(\Omega)$ ,  $d = 2, 3$ , mit  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega). \end{aligned} \quad (1.17)$$

### 1.2.2. Äquivalenz der Bilinearform $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Für das Dirichlet–Randwertproblem des Stokes–Problems kann die Äquivalenz zwischen den Bilinearformen (1.13) und (1.16) gezeigt werden. Für den Beweis des Lemmas 1.4 wird die Aussage (1.18) aus [17, S. 82] benötigt.

**Lemma 1.4.** *Seien  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d$ ,  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$ ,  $d = 2, 3$  und  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  und der linearisierte Verzerrungstensor sei wie in (1.7) definiert, dann stimmen die beiden Bilinearformen*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d (\nabla u_i \cdot \nabla v_i) \, dx \end{aligned}$$

aus (1.13) und (1.16) überein.

*Beweis.* Die Äquivalenz zwischen (1.13) und (1.16) ist zu zeigen. Zur Vereinfachung wird  $\nu = 1$  gesetzt und es wird hier der Beweis für den zweidimensionalen Fall geführt. Für den dreidimensionalen Fall kann analog vorgegangen werden.

i. *Es ist die Aussage [17, S. 82]*

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i=1}^d \left\langle \text{div } \mathbf{u}, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle_{\Omega} = 0, \quad (1.18)$$

zu zeigen.

Es seien zunächst  $\mathbf{u} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^2$ ,  $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega)]^2$ , und ausgehend von der linken Seite von (1.18), ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx &= \int_{\Omega} (\partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + \partial_1 u_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 u_1 \partial_1 v_2 + \partial_2 u_2 \partial_2 v_2) \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma} \partial_i u_j v_i n_j \, ds_x - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \partial_j \partial_i u_j v_i \, dx. \end{aligned}$$

Die Randintegrale sind jeweils 0, weil  $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega)]^2$  ist. Die Differentiationsreihenfolge kann vertauscht werden, da auch  $\mathbf{u} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^2$  ist, sodass

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)}_{=\operatorname{div} \mathbf{u}} v_1 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \underbrace{(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)}_{=\operatorname{div} \mathbf{u}} v_2 dx \\ &= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_i}, v_i \right\rangle_{\Omega} \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \sum_{i=1}^2 \left\langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Da  $[C^\infty(\bar{\Omega})]^2$  dicht in  $[H^1(\Omega)]^2$  und  $[C_0^\infty(\Omega)]^2$  dicht in  $[H_0^1(\Omega)]^2$  liegt, gilt (1.19) auch für  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ ,  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ . Unter Verwendung von  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  folgt (1.18).

ii. Die Äquivalenz zwischen (1.13) und (1.16), wird mit Hilfe von (1.18) gezeigt.

Dazu wird zuerst (1.16) betrachtet:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\nabla u_i \cdot \nabla v_i) dx = \int_{\Omega} (\partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + \partial_2 u_1 \partial_2 v_1 + \partial_1 u_2 \partial_1 v_2 + \partial_2 u_2 \partial_2 v_2) dx.$$

Für (1.13) wird die Definition (1.7) verwendet und man erhält

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx &= \int_{\Omega} \left( 2\partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + \frac{1}{2} [\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1] [\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2] [\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1] + 2\partial_2 u_2 \partial_2 v_2 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} (2\partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + 2\partial_2 u_2 \partial_2 v_2 + \partial_1 u_2 \partial_1 v_2 \\ &\quad + \partial_1 u_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 u_1 \partial_1 v_2 + \partial_2 u_1 \partial_2 v_1) dx. \end{aligned}$$

Es wird (1.16) = (1.13) gesetzt. Alle Terme der linken Seite kürzen sich mit Termen der rechten Seite, sodass auf der linken Seite 0 übrig bleibt. Mit (1.18) kann jetzt die Äquivalenz zu (1.16) gezeigt werden

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + \partial_2 u_2 \partial_2 v_2 + \partial_1 u_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 u_1 \partial_1 v_2 dx \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \stackrel{(1.18)}{=} \sum_{i=1}^2 \left\langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle_{\Omega} = 0. \end{aligned}$$

□

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird für das Dirichlet-Randwertproblem mit der äquivalenten Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  aus (1.16) gearbeitet.

### 1.2.3. Variationsformulierungen mit Lagrange–Multiplikator für die Gleichungen von Stokes

Die Nebenbedingung des Raumes  $L_{2,0}(\Omega)$  soll über eine Stabilisierung in die Variationsformulierungen einfließen, sodass mit dem Raum  $L_2(\Omega)$  gearbeitet werden kann. Dazu wird die Skalierungsbedingung  $p \in L_{2,0}(\Omega)$  (vgl. (1.6)), zur Fixierung des Druckes, mit Hilfe eines Lagrange–Multiplikators  $\lambda \in \mathbb{R}$  umformuliert [41, S. 82]. In weiterer Folge wird mit der Variationsformulierung (1.20) gearbeitet.

Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^d \times L_2(\Omega)$ ,  $d = 2, 3$ , mit  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega \\ b(\mathbf{u}, q) - d(p, q) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

für alle  $(\mathbf{v}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_2(\Omega)$  und mit der Bilinearform

$$d(p, q) := \int_{\Omega} p \, dx \int_{\Omega} q \, dx. \quad (1.21)$$

#### Satz 1.5.

Unter der Voraussetzung, dass die Lösbarkeitsbedingung (1.4) erfüllt ist, sind die Variationsformulierungen (1.17) und (1.20) äquivalent.

*Beweis.*

**Schritt 1.** „(1.17)  $\Rightarrow$  (1.20)“.

Die Nebenbedingung  $p \in L_{2,0}(\Omega)$  in (1.17) kann mittels Lagrange–Multiplikator umformuliert werden. Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p, \lambda) \in [H^1(\Omega)]^d \times L_2(\Omega) \times \mathbb{R}$ ,  $d = 2, 3$  mit  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega \\ b(\mathbf{u}, q) - \lambda \int_{\Omega} q \, dx &= 0 \\ \int_{\Omega} p \, dx &= 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

für alle  $(\mathbf{v}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_2(\Omega)$ . Wird die Testfunktion  $q \equiv 1$  gewählt, in die zweite Gleichung von (1.22) eingesetzt, und die Lösbarkeitsbedingung (1.4) angewandt, ergibt sich

$$\lambda |\Omega| = \lambda \int_{\Omega} 1 \, dx = b(\mathbf{u}, 1) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \stackrel{(1.4)}{=} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds_x = 0.$$

Daraus folgt  $\lambda = 0$ . Deshalb kann die dritte Gleichung von (1.22) als

$$\int_{\Omega} p \, dx - \lambda = 0$$

geschrieben werden. Nun lässt sich der Lagrange-Multiplikator in (1.22) eliminieren und es ergibt sich (1.20).

**Schritt 2.** „(1.17)  $\Leftrightarrow$  (1.20)“.

Es wird die Testfunktion  $q \equiv 1$  gewählt, und in die zweite Gleichung von (1.20) eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx - |\Omega| \int_{\Omega} p \, dx = 0.$$

Mit der Lösbarkeitsbedingung (1.4) folgt

$$|\Omega| \int_{\Omega} p \, dx = -\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0.$$

Also ist  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$ . Daraus folgt  $p \in L_{2,0}(\Omega)$  und für  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$  folgt aus (1.20) das System (1.17).  $\square$

Für das Stokes-System (1.20) wird die Aufspaltung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g$  eingeführt, wobei  $\mathbf{u}_g \in [H^1(\Omega)]^d$  eine beliebige aber fixe Fortsetzung der Dirichlet-Daten  $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  ist. Diese Fortsetzung existiert nach dem inversen Spursatz. Damit ergeben sich die Variationsformulierungen: *Gesucht sind*  $(\mathbf{u}_0, p) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_2(\Omega)$ ,  $d = 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ b(\mathbf{u}_0, q) - d(p, q) &= -b(\mathbf{u}_g, q) \quad \text{für alle } q \in L_2(\Omega), \end{aligned}$$

mit der zugehörigen rechten Seite

$$\langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - a(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}).$$

Da für  $\mathbf{f} \in [L_2(\Omega)]^d$  und  $\mathbf{u}_g \in [H^1(\Omega)]^d$ , die beiden Linearformen für  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$  wohldefiniert sind, folgt insbesondere  $\mathbf{f}^* \in [H^{-1}(\Omega)]^d$ .

Die Variationsformulierungen wie jene in (1.17) werden auch als Sattelpunktprobleme bezeichnet. Sattelpunktprobleme werden in Kapitel 2 näher betrachtet.



## 2. Die eindeutige Lösbarkeit des Stokesschen Sattelpunktproblems

In diesem Kapitel werden Betrachtungen zur eindeutigen Lösbarkeit von Sattelpunktproblemen angestellt. Zentrale Aussage ist Brezzi's-Splitting-Theorem 2.7, welches besagt, dass ein Sattelpunktproblem genau dann ein Isomorphismus  $L$  ist, wenn die symmetrische Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  elliptisch ist und die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  die Inf-Sup-Bedingung erfüllt. Somit erhält man die eindeutige Lösbarkeit des Sattelpunktproblems.

Eingangs, in Abschnitt 2.1, wird die Inf-Sup-Bedingung für allgemeine kontinuierliche Sattelpunktprobleme diskutiert. Anschließend wird die eindeutige Lösbarkeit für die Variationsformulierung (1.17) des kontinuierlichen Stokes-Problems gezeigt, welche dann auch für die äquivalente Formulierung (1.20) des Stokes-Problems gefolgert werden kann.

### 2.1. Die Inf-Sup-Bedingung für allgemeine Sattelpunktprobleme

Es gelten stets folgende Bedingungen: Seien  $X, M$  Hilberträume, die Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b(\cdot, \cdot) : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig. Weiters sei  $a(\cdot, \cdot)$  symmetrisch und  $a(v, v) \geq 0$  für alle  $v \in X$ . Mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wird das Dualitätsprodukt und mit  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt in  $X$  bezeichnet. Betrachtet wird folgendes Sattelpunktproblem:

*Gesucht sind*  $(u, p) \in X \times M$  *mit*

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle && \text{für alle } v \in X, \\ b(u, q) &= \langle g, q \rangle && \text{für alle } q \in M. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die eindeutige Lösbarkeit von Sattelpunktproblemen wird mit Hilfe der Inf-Sup-Bedingung (2.2) gezeigt. Weitere Bezeichnungen für die Inf-Sup-Bedingung (2.2) sind Stabilitätsbedingung, Brezzi-Bedingung, Babuška-Brezzi-Ladyženskaya-Bedingung oder kurz BBL-Bedingung oder LBB-Bedingung.

**Definition 2.1. (Inf–Sup–Bedingung).** [4, S. 125]

Seien  $X, M$  Hilberträume und die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot) : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Falls eine Konstante  $\beta > 0$  existiert, für die

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta \quad (2.2)$$

gilt, dann erfüllt  $b(\cdot, \cdot)$  die Inf–Sup–Bedingung.

Die Sattelpunktgleichungen (2.1) können als Operatorgleichungen geschrieben werden. Dabei werden den Bilinearformen folgende Abbildungen

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow X' \\ B : X &\longrightarrow M' \\ B' : M &\longrightarrow X', \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &:= a(u, v) \\ \langle Bu, q \rangle &:= b(u, q) \\ \langle v, B'p \rangle &:= b(v, p) \end{aligned}$$

zugeordnet. Mit diesen Operatoren erhält man eine zu (2.1) äquivalente Formulierung

$$\begin{pmatrix} A & B' \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Weiters definiert das Sattelpunktproblem (2.1) eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L : X \times M &\longrightarrow X' \times M' \\ (u, p) &\longmapsto (f, g). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Um im weiteren Verlauf mit Hilfe der Inf–Sup–Bedingung (2.2) zeigen zu können, dass  $L$  eine Isometrie ist, werden folgende Räume definiert [4, S. 125]

$$\begin{aligned} V(g) &:= \{u \in X : b(u, q) = \langle g, q \rangle \text{ für alle } q \in M\}, \\ V &:= \ker B = \{u \in X : b(u, q) = 0 \text{ für alle } q \in M\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Weil  $b(\cdot, \cdot)$  stetig ist, ist  $V$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ . Der Kern von  $B$  bzw.  $\ker B$  wird mit  $V$  bezeichnet. Zu  $V$  werden das orthogonale Komplement [4, S. 118]

$$V^\perp = \{x \in X : (x, v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}$$

und die Polare von  $V$  [4, S. 118]

$$V^\circ = \{\ell \in X' : \langle \ell, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}$$

definiert. Die Bedeutung eines Isomorphismus wird in Definition 2.2 eingeführt. Der Satz 2.3 der unter gewissen Voraussetzungen einen Isomorphismus liefert und das Closed Range Theorem 2.4, werden hier ohne Beweis angeführt.

**Definition 2.2. (Isomorphismus).** [4, Definition 3.5, S. 119]

Seien  $U$  und  $V$  normierte Räume. Eine bijektive, lineare Abbildung  $L : U \rightarrow V$  ist ein Isomorphismus, wenn  $L$  und  $L^{-1}$  stetig sind.

**Satz 2.3.** [4, Satz 3.6, S. 119]

Seien  $U$  und  $V$  Hilberträume. Eine lineare Abbildung  $L : U \rightarrow V'$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die zugehörige Bilinearform  $a(\cdot, \cdot) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  folgende Bedingungen erfüllt

1. (Stetigkeit): Für  $C > 0$  ist:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_U \|v\|_V.$$

2. (Inf–Sup–Bedingung): Für  $\alpha > 0$  gilt

$$\sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_U.$$

3. Zu jedem  $v \in V, v \neq 0$ , gibt es ein  $u \in U$  mit

$$a(u, v) \neq 0.$$

**Satz 2.4. (Closed Range Theorem).** [41, Theorem 3.6, S. 48]

Seien  $X$  und  $\Pi$  Banachräume, und sei  $B : X \rightarrow \Pi'$  ein beschränkter, linearer Operator. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent

- $\text{Im}_X B$  ist abgeschlossen in  $\Pi'$ .
- $\text{Im}_\Pi B'$  ist abgeschlossen in  $X'$ .
- $\text{Im}_X B = (\ker B')^\circ$ .
- $\text{Im}_\Pi B' = (\ker B)^\circ$ .

Dabei ist der Nullraum vom Operator  $B$  wie folgt definiert:

$$\ker B := \{v \in X : Bv = 0\}.$$

Das orthogonale Komplement zum  $\ker B \in X$  ist wie folgt definiert:

$$(\ker B)^\perp := \{w \in X : \langle w, v \rangle_X = 0 \forall v \in \ker B\} \subset X.$$

Der Polarraum ist wie folgt definiert:

$$(\ker B)^\circ := \{f \in X : \langle f, v \rangle = 0 \forall v \in \ker B\} \subset X'.$$

Das nachfolgende Lemma 2.5 wird dazu verwendet, äquivalente Aussagen zur Inf–Sup–Bedingung aufzustellen, und um damit später Brezzi's Splitting Theorem 2.7 zu beweisen.

**Lemma 2.5.** [4, Hilfssatz 4.2, S. 125]

Seien  $X, M$  Hilberträume und  $X', M'$  die zugehörigen Dualräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Inf-Sup-Bedingung (2.2), d. h. es existiert eine Konstante  $\beta > 0$ , sodass

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

- b) Der Operator  $B : V^\perp \longrightarrow M'$  ist ein Isomorphismus, und es gilt

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X \quad \text{für } v \in V^\perp. \quad (2.5)$$

- c) Der Operator  $B' : M \longrightarrow V^\circ = \{v \in X : b(v, q) = 0 \text{ für alle } q \in M\}^\circ$  ist ein Isomorphismus, und es gilt

$$\|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M \quad \text{für } q \in M. \quad (2.6)$$

*Beweis.* Nach [4, S. 125f].

Es wird

$$a) \iff c) \quad \text{und} \quad a) \iff b) \iff c)$$

gezeigt.

**Schritt 1.** „a)  $\implies$  c)“. (vgl. [4, Satz 3.6, S. 119f])

**i.** Zu zeigen: Die Eindeutigkeit, bzw. Injektivität von  $B'$ .

Es wird angenommen, dass  $B'v_1 = B'v_2$ . Für  $q \in M$  folgt aus der Definition von  $B'$   $b(v_1, q) = b(v_2, q)$ ; und mit Hilfe der Inf-Sup-Bedingung (2.2) ergibt sich

$$\beta \|v_1 - v_2\|_X \leq \sup_{v \in X} \frac{b(v_1 - v_2, q)}{\|v\|_X} = 0.$$

Da  $\beta > 0$ , muss  $\|v_1 - v_2\|_X = 0$  sein und somit ist  $v_1 \equiv v_2$ .

**ii.** Zu zeigen: Die Stetigkeit von  $B'^{-1}$  und die Abschätzung  $\|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M$ .

Zu  $f \in B'(M) = \text{Im}_M B'$  gibt es, wegen der Injektivität, eine eindeutige Inverse  $q = B'^{-1}f$ . Aus der Inf-Sup-Bedingung (2.2) und der Dualität folgt

$$\begin{aligned} \beta \|B'^{-1}f\|_M &= \beta \|q\|_M \leq \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X} \frac{\langle B'q, v \rangle}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in X} \frac{\langle B'B'^{-1}f, v \rangle}{\|v\|_X} = \|f\|_{X'} = \|B'q\|_{X'}. \end{aligned}$$

Damit wurde die Abschätzung (2.6) gezeigt. Weil  $B'^{-1}$  beschränkt ist, folgt, dass  $B'^{-1}$  stetig ist. Aus der Stetigkeit von  $B'$  und  $B'^{-1}$  folgt (siehe [45, S. 208]), dass  $B'(M)$  abgeschlossen ist.

iii. Zu zeigen: Die Surjektivität, bzw.  $\text{Im}_M B' = V^\circ$ .

Es gilt  $B'(M) = \text{Im}_M B'$ . Da  $B'(M)$  abgeschlossen ist, erhält man aus dem Closed Range Theorem 2.4 die äquivalente Aussage  $B'(M) = (\ker B')^\circ$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} B'(M) &= (\ker B')^\circ = \{v \in X : B'(v) = 0\}^\circ \\ &= \{v \in X : \langle q, B'v \rangle = 0 \text{ für alle } q \in M\}^\circ \\ &= \{v \in X : \langle Bq, v \rangle = 0 \text{ für alle } q \in M\}^\circ \\ &= \{v \in X : b(v, q) = 0 \text{ für alle } q \in M\}^\circ = V^\circ. \end{aligned}$$

**Schritt 2.** „a)  $\Leftarrow$  c)“. (vgl. [4, Satz 3.6, S. 119f])

Der Operator  $B'$  ist ein Isomorphismus. Also sind  $B'$  und  $B'^{-1}$  stetig (siehe Definition 2.2) und es gibt ein  $f \in B'(M)$  mit  $B'q = f$ . Aus der Abschätzung (2.6) und der Dualität folgt die Inf-Sup-Bedingung

$$\beta \|q\|_M \leq \|B'q\|_{X'} = \|f\|_{X'} = \sup_{v \in X} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X} \frac{\langle B'u, v \rangle}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X}.$$

**Schritt 3.** „b)  $\implies$  a)“.

Sei  $B : V^\perp \longrightarrow M'$  ein Isomorphismus. Zu einem gegebenen  $q \in M$  wird die Norm mittels Dualitätsprodukt beschrieben

$$\|q\|_M = \sup_{g \in M'} \frac{\langle g, q \rangle}{\|g\|_{M'}}.$$

Weiters wird  $g = Bv$  gesetzt und die Abschätzung (2.5) verwendet

$$\|q\|_M = \sup_{v \in V^\perp} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|Bv\|_{M'}} = \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, q)}{\|Bv\|_{M'}} \leq \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, q)}{\beta \|v\|_X} \leq \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\beta \|v\|_X}.$$

**Schritt 4.** „c)  $\implies$  b)“.

Zu einem gegebenen  $v \in V^\perp = \{x \in X : (x, v) = 0 \text{ für } v \in V\}$  wird mit  $w \mapsto (v, w)$  ein Funktional  $g \in V^\circ = \{\ell \in X' : \langle \ell, v \rangle = 0 \text{ für } v \in V\}$  durch

$$\langle g, w \rangle = g(w) = (v, w) \tag{2.7}$$

definiert. Weil  $B'$  ein Isomorphismus ist, gibt es ein  $q \in M$  mit

$$\langle B'q, w \rangle = b(w, q) = (v, w) \quad \text{für alle } w \in V. \tag{2.8}$$

Für den Beweis des 4. Schrittes werden die drei Eigenschaften von Satz 2.3 benötigt.

i. *Zu zeigen: Die Stetigkeit.*

Auf (2.8) wird die Cauchy–Schwarz–Ungleichung angewandt

$$|b(w, q)| = |(v, w)| \leq \|v\|_X \|w\|_X.$$

ii. *Zu zeigen: Die Inf–Sup–Bedingung.*

Aus der Definition (2.7) des Funktionals  $g$  folgt

$$\|g\|_{X'} = \|v\|_X.$$

Weiters folgt mit (2.8) und der Abschätzung (2.6)

$$\|v\|_X = \|g\|_{X'} \stackrel{(2.8)}{=} \|B'q\|_{X'} \stackrel{(2.6)}{\geq} \beta \|q\|_M. \quad (2.9)$$

Dieses Ergebnis (2.9) wird für die Abschätzung des Supremums verwendet, und in (2.8) wird  $w = v$  gesetzt

$$\|Bv\|_{M'} = \sup_{p \in M} \frac{\langle Bv, p \rangle}{\|p\|_M} = \sup_{p \in M} \frac{b(v, p)}{\|p\|_M} \geq \frac{b(v, q)}{\|q\|_M} = \frac{(v, v)}{\|q\|_M} \stackrel{(2.9)}{\geq} \frac{\beta \|q\|_M \|v\|_X}{\|q\|_M} = \beta \|v\|_X. \quad (2.10)$$

iii.

Aufgrund der Konstruktion und (2.10) gibt es zu jedem  $q \in M, q \neq 0$  ein  $v \in X$  mit  $b(v, q) \neq 0$ .

Es wurden alle Voraussetzungen von Satz 2.3 gezeigt. Daraus folgt, dass  $B$  ein Isomorphismus ist; die benötigte Abschätzung wurde bereits in (2.10) gezeigt.  $\square$

Damit die zentrale Aussage dieses Kapitels, das Brezzi's–Splitting–Theorem 2.7 bewiesen werden kann, wird vorher der Charakterisierungssatz 2.6, ohne Beweis, angegeben.

**Satz 2.6. (Charakterisierungssatz).** [4, Charakterisierungssatz 2.2, S. 34]

Sei  $V$  ein linearer Raum und  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische, positive Bilinearform, das heißt es sei  $a(u, u) > 0$  für alle  $u \in V, u \neq 0$ . Weiters sei  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional. Die Größe

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle l, v \rangle$$

nimmt in  $V$  ihr Minimum genau dann bei  $u$  an, wenn

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt. Außerdem gibt es genau eine Minimallösung.

Der nachfolgende Satz, Brezzi’s–Splitting–Theorem 2.7, liefert die Voraussetzungen für die eindeutige Lösbarkeit eines Sattelpunktproblems (2.1).

**Satz 2.7. (Brezzi’s–Splitting–Theorem).** [4, Theorem 4.3, S. 126]

Seien  $X, M$  Hilberträume und  $X', M'$  die zugehörigen Dualräume. Durch das Sattelpunktproblem (2.1) wird mit (2.3), also

$$\begin{aligned} L : X \times M &\longrightarrow X' \times M' \\ (u, p) &\longmapsto (f, g), \end{aligned}$$

genau dann ein Isomorphismus erklärt, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die symmetrische Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch, d. h.

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \text{für alle } v \in V,$$

wobei  $V = \ker B = \{u \in X : b(u, q) = 0 \text{ für } q \in M\}$  und  $\alpha > 0$  die Elliptizitätskonstante ist.

2. Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Inf–Sup–Bedingung (2.2). Das heißt es existiert eine Konstante  $\beta > 0$  mit

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

*Beweis.* Nach [4, Theorem 4.3, S. 126ff].

**Schritt 1.** Zu zeigen:  $L$  ist ein Isomorphismus unter den Annahmen, dass  $a(\cdot, \cdot)$   $V$ -elliptisch ist und  $b(\cdot, \cdot)$  die Inf–Sup–Bedingung erfüllt.

**Schritt 1.1.** Zu zeigen: Die Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (2.1) bzw. die Surjektivität von  $L$ .

Das heißt, zu jedem Paar von Funktionalen  $(f, g) \in X' \times M'$  gibt es ein Lösungspaar  $(u, p)$  welches das Sattelpunktproblem (2.1) erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \alpha^{-1} \|f\|_{X'} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\|_{M'} \\ \|p\|_M &\leq \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|f\|_{X'} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \frac{C}{\beta} \|g\|_{M'}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

- i. Zu zeigen: Für  $g \in M'$  ist  $V(g) = \{v \in X : b(v, \mu) = \langle g, \mu \rangle \text{ für } \mu \in M\}$  nicht leer.

Nach Lemma 2.5 b), ist der Operator  $B : V^\perp \longrightarrow M'$  ein Isomorphismus, und es gilt  $\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X$  für  $v \in V^\perp$ . Also ist  $B$  bijektiv und es gibt ein  $u_0 \in V^\perp$  mit

$$Bu_0 = g. \tag{2.12}$$

Auf (2.12) kann die Ungleichung (2.5) aus Lemma 2.5 angewandt werden, und es ergibt sich

$$\|g\|_{M'} = \|Bu_0\|_{M'} \geq \beta \|u_0\|_X,$$

also ist

$$\|u_0\|_X \leq \beta^{-1} \|g\|_{M'}. \quad (2.13)$$

ii. *Konstruktion einer Lösung*  $(u, p) \in X \times M$ .

Gesucht sind  $(u, p) \in X \times M$  des Sattelpunktproblems (2.1) mit

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle & \text{für } v \in X \\ b(u, q) &= \langle g, q \rangle & \text{für } q \in M. \end{aligned}$$

Ein äquivalentes Sattelpunktproblem ergibt sich wenn  $w := u - u_0$  gesetzt wird, wobei  $\gamma_0^{\text{int}} u = u_0$  am Rand  $\Gamma$  und  $g = 0$ . Gesucht sind  $(w, p) \in V \times M$

$$\begin{aligned} a(w, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle - a(u_0, v) & \text{für alle } v \in X \\ b(w, q) &= 0 & \text{für alle } q \in M. \end{aligned} \quad (2.14)$$

In Anlehnung an die erste Gleichung von (2.14) wird das Funktional  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(w) := \frac{1}{2} a(w, w) - \langle f, w \rangle + a(u_0, w)$$

definiert. Der Charakterisierungssatz 2.6 wird angewandt und liefert ein Minimum  $w \in V$ , falls

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \quad \text{für alle } v \in V \quad (2.15)$$

gilt. Die erste Gleichung von (2.14) wird nach

$$b(v, p) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) - a(w, v) \quad (2.16)$$

umgestellt. Die rechte Seite in (2.16) definiert ein Funktional in  $X'$  und wegen (2.15) liegt dieses in  $V^\circ = \{B'p \in X' : b(v, p) = 0 \text{ für alle } v \in X\}$ . Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt laut Annahme die Inf-Sup-Bedingung. Nach Lemma 2.5 c) ist  $B'$  ein Isomorphismus, mit  $B' : M \rightarrow V^\circ \subset X'$ . Also existiert ein  $p \in M$ , sodass

$$b(v, p) = 0 \quad \text{für alle } v \in X$$

und es gilt die Abschätzung (2.6)  $\|B'p\|_{X'} \geq \beta \|p\|_M$ . Damit wurde die Existenz einer Lösung  $(u, p) \in X \times M$  gezeigt.



iii. Zu zeigen: Die Gültigkeit der Ungleichungen (2.11).

Zu zeigen: Die erste Ungleichung von (2.11).

Aus der Beschränktheit  $\langle f, w \rangle \leq \|f\|_{X'} \|w\|_X$  und der  $V$ -Elliptizität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ergibt sich aus den Gleichungen von (2.14), für  $w \in V$

$$\alpha \|w\|_X^2 \leq a(w, w) = -b(w, p) + \langle f, w \rangle - a(u_0, w) \leq \|f\|_{X'} \|w\|_X + C \|u_0\|_X \|w\|_X.$$

Dies nach  $\|w\|_X$  umgestellt ergibt

$$\|w\|_X \leq \alpha^{-1} (\|f\|_{X'} + C \|u_0\|_X) = \alpha^{-1} \|f\|_{X'} + \frac{C}{\alpha} \|u_0\|_X. \quad (2.17)$$

Mit Hilfe von (2.17) und (2.13) wird die erste Ungleichung von (2.11) gezeigt

$$\begin{aligned} \|u\|_X &= \|u_0 + w\|_X \leq \|u_0\|_X + \|w\|_X \leq \alpha^{-1} \|f\|_{X'} + \frac{C}{\alpha} \|u_0\|_X + \|u_0\|_X \\ &\leq \alpha^{-1} \|f\|_{X'} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\|_{M'}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Zu zeigen: Die zweite Ungleichung von (2.11).

Aus der Abschätzung (2.6)  $\|B'p\|_{X'} \geq \beta \|p\|_M$  (vgl. Punkt ii)), der Dualität, der Gleichung (2.16), und in weiterer Folge aus der Beschränktheit von  $f$  und der  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \|p\|_M &\leq \beta^{-1} \|B'p\|_{X'} = \beta^{-1} \sup_{v \in X} \frac{\langle B'p, v \rangle}{\|v\|_X} \stackrel{(2.16)}{=} \beta^{-1} \sup_{v \in X} \left( \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_X} + \frac{a(u, v)}{\|v\|_X} \right) \\ &\leq \beta^{-1} \sup_{v \in X} \left( \frac{\|f\|_{X'} \|v\|_X}{\|v\|_X} + \frac{C \|u\|_X \|v\|_X}{\|v\|_X} \right) = \beta^{-1} (\|f\|_{X'} + C \|u\|_X). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die zweite Ungleichung von (2.11) wird mit (2.18) und (2.19) gezeigt

$$\begin{aligned} \|p\|_M &\leq \beta^{-1} (\|f\|_{X'} + C \|u\|_X) \leq \beta^{-1} \|f\|_{X'} + \frac{C}{\beta} \alpha^{-1} \|f\|_{X'} + \frac{C}{\beta} \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\|_{M'} \\ &= \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|f\|_{X'} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \frac{C}{\beta} \|g\|_{M'}. \end{aligned}$$

**Schritt 1.2.** Zu zeigen: Die Eindeutigkeit des Lösungspaares  $(u, p) \in X \times M$  bzw. die Injektivität von  $L$ .

Es werden jeweils zwei Lösungen  $u_1, u_2$  und  $p_1, p_2$  angenommen. Nach dieser Annahme seien  $u_1, p_1$  die Lösungen von

$$\begin{aligned} a(u_1, v) + b(v, p_1) &= \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in X, \\ b(u_1, q) &= \langle g, q \rangle \quad \text{für alle } q \in M \end{aligned}$$

und  $u_2, p_2$  seien die Lösungen von

$$\begin{aligned} a(u_2, v) + b(v, p_2) &= \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in X, \\ b(u_2, q) &= \langle g, q \rangle \quad \text{für alle } q \in M. \end{aligned}$$

Die zwei Sattelpunktprobleme werden subtrahiert und man erhält

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, v) + b(v, p_1 - p_2) &= 0 \quad \text{für alle } v \in X, \\ b(u_1 - u_2, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in M. \end{aligned} \tag{2.20}$$

**i.** Zunächst wird  $u_1 = u_2$ , für  $p_1, p_2 \in M$  beliebig, gezeigt.

Dafür wird  $v = u_1 - u_2$  und  $q = p_1 - p_2$  gesetzt. Es ergibt sich aus der ersten Gleichung von (2.20) und der  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|_X^2.$$

Wegen  $\alpha > 0$  muss  $\|u_1 - u_2\|_X = 0$  sein, und somit ist  $u_1 \equiv u_2$ .

**ii.** Nun wird  $p_1 = p_2$ , für  $u_1, u_2 \in X$  beliebig, gezeigt.

Dafür wird die Inf-Sup-Bedingung, mit der Wahl  $p_1 - p_2$  und der zweiten Gleichung aus (2.20), betrachtet

$$0 = \sup_{v \in X} \frac{b(v, p_1 - p_2)}{\|v\|_X} \geq \beta \|p_1 - p_2\|_M.$$

Da  $\beta > 0$ , muss  $\|p_1 - p_2\|_M = 0$  sein und somit ist  $p_1 \equiv p_2$ . Die Eindeutigkeit der Lösung ist damit gezeigt.

In Schritt 1.1 und Schritt 1.2 wurde die eindeutige Lösbarkeit für das Lösungspaar  $(u, p) \in X \times M$  gezeigt. Damit ist die lineare Abbildung  $L$  injektiv und surjektiv. Die Beschränktheit und somit die Stetigkeit von  $L^{-1}$  folgt aus (2.11). Deshalb ist  $L$  ein Isomorphismus.

**Schritt 2.** Zu zeigen:  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch und  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Inf-Sup-Bedingung unter der Annahme, dass  $L$  ein Isomorphismus ist.

**Schritt 2.1.** Zu zeigen: Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch.

**i.** Zu zeigen: Die Beschränktheit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ .

Da  $L$  ein Isomorphismus ist, folgt, dass  $L^{-1}$  stetig (siehe Definition 2.2) und somit auch beschränkt ist. Weiters sei  $f \in V'$  gegeben. Das heißt  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Funktional auf dem Kern von  $B$  ( $\ker B = V$ ). Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Erweiterung  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ . Weil  $L$  isomorph ist, wird zu jeder rechten

Seite eine eindeutige Lösung gefunden. Deshalb kann  $(u, p) = L^{-1}(\tilde{f}, 0)$  gesetzt werden. Das heißt  $(u, p) \in X \times M$  ist das Lösungspaar von

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle \tilde{f}, v \rangle \quad \text{für alle } v \in X, \\ b(u, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in M. \end{aligned}$$

Wird  $X$  auf dem Kern von  $B$ , also  $\ker B = V = \{u \in X : b(u, q) = 0 \text{ für } q \in M\}$ , eingeschränkt, ergibt sich

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Weil  $u$  die eindeutige Lösung ist, ist  $u$  auch das Minimum von  $\frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle$  für  $v \in V$ . Die Abbildung  $L^{-1}$  ist beschränkt. Daher ist auch die Abbildung  $f \mapsto u \in V$  beschränkt, und in weiterer Folge ist auch  $a(\cdot, \cdot)$  beschränkt.

**ii.** *Zu zeigen: Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch.*

Nachdem  $L$  ein Isomorphismus ist, gilt nach Lemma 2.5 die Inf–Sup–Bedingung (2.2). Da nach Voraussetzung die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  symmetrisch und stetig ist, kann die Cauchy–Schwarz–Ungleichung angewendet werden. Anschließend wird die Beschränktheit von  $a(\cdot, \cdot)$  verwendet (siehe Schritt 2.1.i). Damit ergibt sich, mit Hilfe der Inf–Sup–Bedingung für  $u, v \in V$

$$\alpha^2 \|u\|_X^2 \leq \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)^2}{\|v\|_X^2} \leq \sup_{v \in V} \frac{a(u, u) a(v, v)}{\|v\|_X^2} \leq \sup_{v \in V} \frac{a(u, u) c_2^A \|v\|_X}{\|v\|_X} \leq c a(u, u),$$

die  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$ .

**Schritt 2.2.** *Zu zeigen: Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Inf–Sup–Bedingung.*

Dafür werden die Voraussetzungen von Lemma 2.5 b) gezeigt und über die Äquivalenzaussage wird die Stabilitätsbedingung gefolgert. Es sei  $g \in M'$  gegeben. Weil  $L$  isomorph ist, wird zu jeder rechten Seite eine eindeutige Lösung gefunden. Daher wird  $(u, p) = L^{-1}(0, g)$  gesetzt. Das heißt  $(u, p) \in X \times M$  ist das Lösungspaar von

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= 0 \quad \text{für alle } v \in X, \\ b(u, q) &= \langle g, q \rangle \quad \text{für alle } q \in M. \end{aligned}$$

Aus dem Isomorphismus folgt die Beschränktheit von  $L^{-1}$ . Daher ist  $\|u\|_X \leq c \|g\|_{M'}$ . Zu einem  $u \in X$  wird die Projektion  $P(u) = u_{V^\perp} \in V^\perp$  bestimmt. Mit der Aufspaltung  $u = u_V + u_{V^\perp}$ , wobei  $u_V \in V$  und  $u_{V^\perp} \in V^\perp$ , und unter Berücksichtigung von  $u_V \perp u_{V^\perp}$ , liefert der Satz von Pythagoras

$$\|u\|_X^2 = \|u_V + u_{V^\perp}\|_X^2 = \|u_V\|_X^2 + \|u_{V^\perp}\|_X^2.$$

Deshalb ist die Projektion  $\|P(u)\|_X^2 = \|u_{V^\perp}\|_X^2 \leq \|u\|_X^2$  beschränkt. Da  $L$  isomorph ist folgt, dass  $L^{-1}$  beschränkt ist. Aus der Beschränktheit der Projektion und der

Beschränktheit von  $L^{-1}$  ergibt sich, dass die Abbildung  $g \xrightarrow{L^{-1}} u \xrightarrow{P} u_{V^\perp}$  beschränkt ist. Falls  $u \in V^\perp$ , ist  $P(u) = u$ . Für diesen Fall ergibt die Abbildung  $g \xrightarrow{L^{-1}} u \in V^\perp$ ,

$$\|u_{V^\perp}\|_X = \|L^{-1}g\|_X \leq \|L^{-1}\| \|g\|_{M'} \leq C \|g\|_{M'}.$$

Wird  $Bu_{V^\perp} = g$  gesetzt, folgt aus obiger Abschätzung

$$\|u_{V^\perp}\|_X \leq C \|g\|_{M'} = C \|Bu_{V^\perp}\|_{M'}.$$

Die Abbildung  $B : V^\perp \rightarrow M'$  ist ein Teil von  $L$ . Deshalb ist  $B$  auch ein Isomorphismus. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.5 b) erfüllt, und über die Äquivalenzaussage aus Lemma 2.5 folgt die Inf-Sup-Bedingung für  $b(\cdot, \cdot)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.8.** *Wenn die Voraussetzungen 1. und 2. von Brezzi's-Splitting-Theorem 2.7 erfüllt sind, also die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$   $V$ -elliptisch ist und die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  die Inf-Sup-Bedingung erfüllt, dann ist das Sattelpunktproblem der Form (2.1) eindeutig lösbar. In dieser Arbeit wird nur diese eine Aussage von Brezzi's-Splitting-Theorem 2.7 benötigt.*

## 2.2. Die eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet-Randwertproblems

In diesem Abschnitt wird die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung (1.17) des Stokes-Problems betrachtet: *Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^d \times L_{2,0}(\Omega)$ ,  $d = 2, 3$ , mit  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega), \end{aligned}$$

und den Bilinearformen (1.16) und (1.14)

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu \int_\Omega \sum_{i=1}^d (\nabla u_i \cdot \nabla v_i) dx, \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_\Omega p(x) \operatorname{div} \mathbf{v}(x) dx. \end{aligned}$$

Hier kann mit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  aus (1.16) gearbeitet werden, da in Lemma 1.4 die Äquivalenz zwischen den Bilinearformen (1.13) und (1.16) für das Dirichlet-Randwertproblem gezeigt wurde. Der Kern von  $B$  (vgl. (2.4)) ist definiert als

$$V := \ker B = \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ für } q \in L_{2,0}(\Omega)\}.$$

Der Beweis des nachfolgenden Lemmas 2.9 ist in [12] nachzulesen. Das Ergebnis aus Lemma 2.9 wird zumeist Olga Ladyženskaya zugewiesen.

**Lemma 2.9.** [4, Satz 6.3, S. 154]

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand, und das orthogonale Komplement von  $V$  [4, S. 154] definiert als

$$V^\perp := \{\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^d : a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V\},$$

dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} : V^\perp &\longrightarrow L_{2,0}(\Omega) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, und zu jeder Funktion  $q \in L_{2,0}(\Omega)$  gibt es ein  $\mathbf{v} \in V^\perp \subset [H_0^1(\Omega)]^d$  und eine Konstante  $c = c(\Omega)$  mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= q, \\ \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|q\|_{L_2(\Omega)} = \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

**Bemerkung 2.10.** [4, Bemerkung 6.5, S. 155] Wenn die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt sind (Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand), dann ist für das Stokes–Problem (1.17) die Ungleichung von Ladyženskaya (2.21) äquivalent zur Inf–Sup–Bedingung (2.2).

In Satz 2.15 wird mit Hilfe der Lemmata 2.11 und 2.12 gezeigt, dass das kontinuierliche Stokes–Problem (1.17) eindeutig lösbar ist, und in Satz 2.16 wird die eindeutige Lösbarkeit auf das äquivalente Stokes–Problem (1.20) übertragen.

**Lemma 2.11.** (*Die Beschränktheit und Elliptizität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$* ). Für  $d = 2, 3$  ist die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$   $[H_0^1(\Omega)]^d$ –elliptisch, das heißt es existiert eine Konstante  $c_1^A > 0$ , sodass

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq c_1^A \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d}^2 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$$

gilt. Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist beschränkt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c_2^A \|\mathbf{u}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d.$$

*Beweis.* Nach [4, S. 154].

Für die symmetrische Bilinearform (1.13) aus der Elastizitätstheorie

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{v}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx,$$

kann die erste Korn’sche Ungleichung [41, Lemma 4.15, S. 74]

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{v}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \geq \frac{1}{2} |\mathbf{u}|_{[H^1(\Omega)]^d}^2 \quad \text{für } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d$$

verwendet werden, und für die symmetrische Bilinearform aus (1.16) wird

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \nu \|\nabla \mathbf{v}\|_{[L_2(\Omega)]^d}^2 = \nu |\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^d}^2$$

betrachtet. Mit Hilfe der Friedrichschen Ungleichung (siehe [4, S. 29])

$$\|\mathbf{v}\|_{[L_2(\Omega)]^d} \leq c |\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^d} \quad \text{für } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \text{ und } c > 0,$$

kann gezeigt werden, dass  $|\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^d}$  und  $\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d}$  im Raum  $[H_0^1(\Omega)]^d$  äquivalente Normen sind [4, S. 40]. Daraus folgt, dass die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  beschränkt und  $[H_0^1(\Omega)]^d$ -elliptisch ist.  $\square$

**Lemma 2.12. (Die kontinuierliche Inf–Sup–Bedingung).** Für  $d = 2, 3$  erfüllt die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  die kontinuierliche Inf–Sup–Bedingung. Das heißt es existiert eine Konstante  $\beta > 0$  mit

$$\inf_{q \in L_{2,0}(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \|q\|_{L_2(\Omega)}} \geq \beta.$$

*Beweis.* Nach [4, S. 154].

Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Inf–Sup–Bedingung, indem auf den Operator  $B$  aus Lemma 2.5, das Lemma 2.9 angewandt wird.  $\square$

**Bemerkung 2.13.** Brezzi’s–Splitting–Theorem 2.7 ist erst nach Abspaltung der Fortsetzung in (1.17) anwendbar. Dasselbe gilt für den Beweis von Satz 2.16.

Deshalb wird zuerst das Lemma 2.14, das die Unabhängigkeit der Lösung von der Fortsetzung gewährleistet, gezeigt. Anschließend wird daraus die eindeutige Lösbarkeit des kontinuierlichen Stokes–Problems gefolgert.

**Lemma 2.14.** Das Lösungspaar  $(\mathbf{u}, p)$  ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung  $\mathbf{u}_g$  in das Gebiet  $\Omega$ .

*Beweis.* Ähnlich zum Beweis von Brezzi’s Splitting Theorem 2.7, Schritt 1.2.

Gegeben seien zwei Fortsetzungen  $\mathbf{u}_g, \hat{\mathbf{u}}_g$ . Dazu seien jeweils  $(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g, p)$  die Lösungen von

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ b(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g, q) &= 0 & \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega) \end{aligned}$$

und  $(\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g, \hat{p})$  die Lösungen von

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{p}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ b(\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g, q) &= 0 & \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega). \end{aligned}$$

Die zwei Sattelpunktprobleme werden subtrahiert, und man erhält

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_g, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p - \hat{p}) &= 0 \quad \text{für alle } v \in [H_0^1(\Omega)]^d, \\ b(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_g, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.22)$$

**i.** Zunächst wird  $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g = \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g$ , für  $p, \hat{p} \in L_{2,0}(\Omega)$  beliebig, gezeigt.

Dafür wird  $v = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - (\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g) \in [H_0^1(\Omega)]^d$  und  $q = p - \hat{p}$  gesetzt. Es ergibt sich aus der ersten Gleichung von (2.22) und der  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$

$$0 = a(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_g, \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_g) \geq \alpha \|\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_g\|_{[H^1(\Omega)]^d}^2.$$

Wegen  $\alpha > 0$  muss  $\|\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g - \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_g\|_{[H^1(\Omega)]^d} = 0$  sein, und somit ist  $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g \equiv \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g$ .

**ii.** Nun wird  $p = \hat{p}$ , für  $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g, \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_g \in [H^1(\Omega)]^d$  beliebig, gezeigt.

Dafür wird die Inf–Sup–Bedingung, mit der Wahl  $p - \hat{p} \in L_{2,0}(\Omega)$  und der zweiten Gleichung aus (2.22), betrachtet

$$0 = \sup_{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d} \frac{b(\mathbf{v}, p - \hat{p})}{\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^d}} \geq \beta \|p - \hat{p}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Da  $\beta > 0$ , muss  $\|p - \hat{p}\|_{L_2(\Omega)} = 0$  sein und somit ist  $p \equiv \hat{p}$ . Es wurde die Eindeutigkeit des Lösungspaars  $(\mathbf{u}, p)$  gezeigt, das unabhängig von der Wahl der Fortsetzung ist.  $\square$

**Satz 2.15. (Eindeutige Lösbarkeit des kontinuierlichen Stokes–Problems).** [4, S. 154] Das kontinuierliche Stokes–Problem (1.17) ist eindeutig lösbar. D. h. Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^d \times L_{2,0}(\Omega)$ ,  $d = 2, 3$  und  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} && \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0, && \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega), \end{aligned}$$

mit den Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  aus (1.16), (1.14). Weiters gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|p\|_{L_2(\Omega)} \leq C \{ \|\mathbf{f}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\mathbf{g}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d} \}.$$

*Beweis.* Nach [4, S. 154].

Für die Aufspaltung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g$  mit einer Fortsetzung  $\mathbf{u}_g \in [H^1(\Omega)]^d$ , kann Brezzi’s–Splitting–Theorem 2.7 angewandt werden, weil  $a(\cdot, \cdot)$  nach Lemma 2.11  $[H_0^1(\Omega)]^d$ -elliptisch ist und  $b(\cdot, \cdot)$  nach Lemma 2.12 die Inf–Sup–Bedingung erfüllt. Somit liefert Brezzi’s–Splitting–Theorem die eindeutige Lösbarkeit und auch die Stabilitätsabschätzung.  $\square$

Die eindeutige Lösbarkeit des Stokes–Problems (1.17) kann auch auf das äquivalente Stokes–System (1.20) übertragen werden.

**Satz 2.16. (Eindeutige Lösbarkeit des äquivalenten kontinuierlichen Stokes-Problems).**

Das kontinuierliche Stokes-System (1.20): Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^d \times L_2(\Omega)$ ,  $d = 2, 3$  mit  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \\ b(\mathbf{u}, q) - d(p, q) &= 0 \quad \text{für alle } q \in L_2(\Omega), \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar, wenn (1.20) äquivalent zu (1.17) ist, und die Stabilitätsabschätzung

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|p\|_{L_2(\Omega)} \leq C \{ \|\mathbf{f}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\mathbf{g}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d} \}$$

gilt.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit der Lösung und die Stabilitätsabschätzung des kontinuierlichen Stokes-Problems (1.17) (Satz 2.15), kann wegen der Äquivalenz der Variationsformulierungen (1.17) und (1.20) (Satz 1.5), auf das Stokes-System (1.20) übertragen werden.  $\square$

**Bemerkung 2.17.** [3, Kapitel 4.3.1] Durch Erweiterung der Theorie von Sattelpunktproblemen um die Bilinearform  $d(\cdot, \cdot)$ , kann auch auf die Äquivalenz zu (1.17) in Satz 2.16 verzichtet werden.



# 3. Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems für das Dirichlet–Randwertproblem

In diesem Kapitel wird zuerst die eindeutige Lösbarkeit von diskreten Sattelpunktproblemen im Allgemeinen diskutiert. Anschließend wird die stabile Diskretisierung des Stokes–Problems für den zweidimensionalen Fall, mit Hilfe der Taylor–Hood–Elemente und einer Modifikation der Taylor–Hood–Elemente untersucht. Eine weitere Möglichkeit für eine stabile Diskretisierung wäre das MINI–Element [4, S. 163], dieses Element wird in dieser Arbeit aber nicht berücksichtigt. Da die eindeutige Lösbarkeit, die mit Hilfe der Inf–Sup–Bedingung für das kontinuierliche Stokes–System erhalten wurde, nicht auf das diskrete Problem übertragen werden kann, muss die Inf–Sup–Bedingung im Diskreten erneut gezeigt werden. Zum Abschluss dieses Kapitels, wird ein Dirichlet–Randwertproblem jeweils mit den Taylor–Hood–Elementen und den modifizierten Taylor–Hood–Elementen numerisch umgesetzt und die Ergebnisse ausgewertet.

## 3.1. Diskretisierung von Sattelpunktproblemen

Für die numerische Berechnung von Sattelpunktproblemen (2.1) werden die endlich-dimensionalen Teilräume  $X_h \subset X$  und  $M_h \subset M$  gewählt [4, S. 128], sodass folgendes Sattelpunktproblem gelöst werden kann:

*Gesucht sind*  $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$  mit

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= \langle f, v_h \rangle_\Omega && \text{für alle } v_h \in X_h \\ b(u_h, q_h) &= \langle g, q_h \rangle_\Omega && \text{für alle } q_h \in M_h. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese Problemstellung wird als *gemischte Methode* bezeichnet.

An die Finiten Elemente Räume werden ähnliche Forderungen wie an Brezzi’s–Splitting–Theorem 2.7 gestellt. Dazu wird

$$V_h := \{v_h \in X_h : b(v_h, q_h) = 0 \text{ für } q_h \in M_h\}$$

eingeführt. In der Strömungsmechanik ist die Erfüllung der Inf–Sup–Bedingung im Diskreten kritisch. Daher wird für die Finiten Elemente Räume  $X_h, M_h$  die Babuška–Brezzi–Bedingung eingeführt.

**Definition 3.1. (Babuška–Brezzi–Bedingung).** [4, Definition 4.4, S. 128]

Die Finiten Elemente Räume  $X_h, M_h$  erfüllen die Babuška–Brezzi–Bedingung, wenn es von  $h$  unabhängige Konstanten  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ , mit den folgenden Eigenschaften, gibt:

1. Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V_h$ –elliptisch, d. h.

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_X^2 \quad \text{für alle } v_h \in V_h,$$

wobei  $\alpha > 0$  die Elliptizitätskonstante ist.

2. Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Inf–Sup–Bedingung, das heißt es existiert eine Konstante  $\beta > 0$  mit

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X \|q_h\|_M} \geq \beta. \quad (3.2)$$

Für die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Sattelpunktproblems (3.1) kann Brezzi’s–Splitting–Theorem 2.7 verwendet werden [41, S. 196]. Das heißt, die Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  müssen die diskrete Babuška–Brezzi–Bedingung 3.1 erfüllen. Im Allgemeinen ist die diskrete Inf–Sup–Bedingung (3.2) keine direkte Folgerung der kontinuierlichen Inf–Sup–Bedingung (2.2). Fortin’s–Kriterium 3.2 bietet die Möglichkeit, mittels einer geeigneten Projektion, die Inf–Sup–Bedingung vom kontinuierlichen auf das diskrete Problem zu übertragen. Erst in Lemma 3.12 wird eine geeignete Projektion für die Diskretisierung mittels Taylor–Hood–Elementen diskutiert.

**Lemma 3.2. (Fortin’s–Kriterium).** [41, Lemma 8.9, S. 199], [4, Fortin’s Kriterium 4.8, S. 130]. Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot) : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Inf–Sup–Bedingung (2.2). Falls eine lineare, beschränkte Projektion  $\Pi_h : X \rightarrow X_h$  existiert, sodass

$$b((v - \Pi_h v), q_h) = 0 \quad \text{für alle } q_h \in M_h$$

und

$$\|\Pi_h v\|_X \leq c \|v\|_x \quad \text{für alle } v \in X,$$

gelten, dann erfüllen auch die Finiten Elemente Räume  $X_h, M_h$  die Inf–Sup–Bedingung.

## 3.2. Diskretisierung des Stokes-Problems mittels Taylor-Hood-Elementen und modifizierten Taylor-Hood-Elementen

Eine stabile Diskretisierung des Stokes-Problems erhält man mit Hilfe der Taylor-Hood-Elemente oder den modifizierten Taylor-Hood-Elementen. Deshalb werden zuerst die Taylor-Hood-Elemente und die modifizierten Taylor-Hood-Elemente eingeführt, um anschließend damit, jeweils eine stabile Diskretisierung durchführen zu können. Zunächst wird vom kontinuierlichen Stokes-Problem (1.17) ausgegangen (wie schon in Kapitel 2.2 ausreichend diskutiert wurde).

Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega)$  mit  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}$  auf  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} && \text{für alle } \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 && \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega), \end{aligned}$$

mit den Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  aus (1.16) und (1.14). Das kontinuierliche Stokes-System kann nun mittels Taylor-Hood-Elementen oder den modifizierten Taylor-Hood-Elementen diskretisiert werden.

### 3.2.1. Die Taylor-Hood-Elemente

Die Taylor-Hood-Elemente (siehe [44] bzw. [4, S. 163]), Abb. 3.1, stellen eine Möglichkeit der stabilen Diskretisierung der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  und des Drucks  $p$  dar.

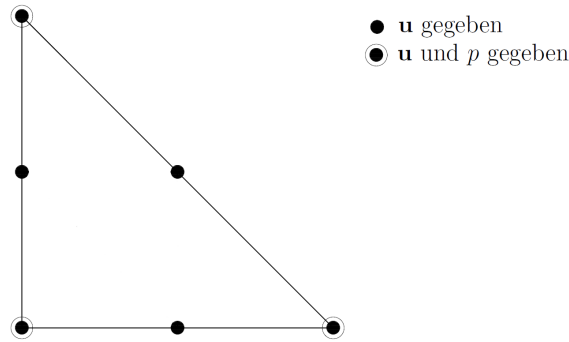


Abbildung 3.1.: Taylor-Hood-Element

Dafür wird der Druck mit linearen, global stetigen Polynomen und die Geschwindigkeit mit quadratischen, global stetigen Polynomen angesetzt. Es werden die Räume

$$\begin{aligned} X_h &:= \{\mathbf{v}_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau_i} \in P_2^2 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \\ M_h &:= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

definiert, wobei  $\mathcal{T}_N$  eine zulässige Triangulierung des Gebiets  $\Omega$  ist.  $P_1, P_2$  sind Polynome ersten Grades, bzw. Polynome zweiten Grades. Also

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ u(x, y) = \sum_{\substack{i+k \leq 1 \\ i, k \geq 0}} c_{ik} x^i y^k \right\}, \\ P_2 &= \left\{ u(x, y) = \sum_{\substack{i+k \leq 2 \\ i, k \geq 0}} c_{ik} x^i y^k \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2.2. Die modifizierten Taylor–Hood–Elemente

Die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (siehe [44] bzw. [17, S. 181f]), Abb. 3.2, stellen eine weitere Möglichkeit der stabilen Diskretisierung von Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  und Druck  $p$  dar. Dafür wird der Druck mit linearen und global stetigen Polynomen, und die Geschwindigkeit ebenfalls mit linearen und global stetigen Polynomen auf einem virtuell uniform verfeinerten Gitter, angesetzt. Dazu werden die Räume

$$\begin{aligned} X_h &:= \{ \mathbf{v}_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau'_i} \in P_1^2 \text{ für jedes Subdreieck } \tau'_i \in \tau_i, \forall \tau_i \in \mathcal{T}_N \} \\ M_h &:= \{ q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N \} \end{aligned} \quad (3.5)$$

definiert, wobei  $P_1$  Polynome (3.4) ersten Grades sind und  $\mathcal{T}_N$  eine zulässige Triangulierung des Gebiets  $\Omega$  ist.

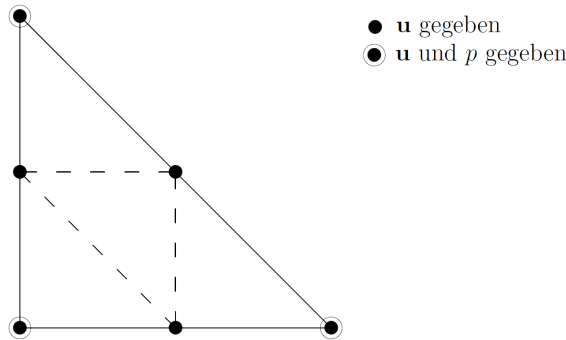


Abbildung 3.2.: modifiziertes Taylor-Hood-Element

**Bemerkung 3.3.** Die nachfolgenden Sätze und Lemmata werden jeweils für das Taylor–Hood–Element und für das modifizierte Taylor–Hood–Element diskutiert. Damit unnötige Doppelgleisigkeiten vermieden werden können, werden die zugehörigen Räume jeweils mit  $X_h, M_h$  definiert. Die Unterscheidung erfolgt nur über die Referenzierung (z. B.  $X_h$  (3.5)).

### 3.2.3. Diskretisierung des Stokes–Problems mittels Taylor–Hood–Elementen und modifizierten Taylor–Hood–Elementen

Die kontinuierliche Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_g$  wird aufgespalten, in  $\mathbf{u}_0 \in [H_0^1(\Omega)]^2$  und  $\mathbf{u}_g \in [H^1(\Omega)]^2$ , wobei  $\mathbf{u}_g$  eine beliebige aber fixe, harmonische Fortsetzung der Dirichlet–Daten  $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$  ist. Durch die Diskretisierung mit Taylor–Hood–Elementen (Abb. 3.1) oder modifizierten Taylor–Hood–Elementen (Abb. 3.2) und durch Aufspaltung der Lösung, erhält man die diskrete Variationsformulierung des Stokes–Problems.

Gesucht sind  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h) \in X_h \times M_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega && \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) &= -b(\mathbf{u}_g, q_h) && \text{für alle } q_h \in M_h, \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit der zugehörigen rechten Seite (3.7)

$$\langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega - a(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}_h), \quad (3.7)$$

und den Bilinearformen (1.16), (1.14)

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \nu \int_{\Omega} (\nabla u_{1,h} \cdot \nabla v_{1,h} + \nabla u_{2,h} \cdot \nabla v_{2,h}) \, dx, \\ b(\mathbf{v}_h, p_h) &= - \int_{\Omega} p_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) \, dx. \end{aligned}$$

Im folgenden Abschnitt wird die Inf–Sup–Bedingung für die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$ , im Diskreten untersucht.

## 3.3. Die diskrete Inf–Sup–Bedingung

Die Inf–Sup–Bedingung des kontinuierlichen Stokes–Problems kann nicht direkt auf das diskrete Stokes–System übertragen werden, weil die im Beweis des Lemmas 2.9 von Ladyženskaya verwendete Funktion im Allgemeinen nicht diskret ist. Deshalb muss für das diskrete Stokes–System (3.6), welches mit den Taylor–Hood–Elementen oder mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen realisiert wird, die Inf–Sup–Bedingung im Diskreten nochmals gezeigt werden. Zuerst wird die Inf–Sup–Bedingung lokal auf sogenannten Makroelementen bewiesen und anschließend auf das gesamte Gebiet erweitert (siehe Raviart [17, S. 176ff]).

### 3.3.1. Makroelemente und ihre Eigenschaften

Für den Beweis der lokalen Inf–Sup–Bedingung wird das Gebiet  $\Omega$  in geeignete Partitionen, auch Makroelemente genannt, aufgeteilt. Es werden die Eigenschaften dieser Zerlegung und weitere wichtige Annahmen zu den Makroelemente getroffen. Davor wird noch die Definition 3.4 zu formregulären Elementen eingeführt.

**Definition 3.4. (Formregulär).**

*Der Durchmesser eines Elements ist gleichmäßig mit dem Radius beschränkt.*

**Zerlegung in Makroelemente.** [17, S. 177]

Für ein Makroelement  $\Omega_r$  werden alle Elemente zusammengefasst, die einen gemeinsamen Knoten  $a_r$  teilen (vgl. Abb. 3.3).

**Forderung 1.**

Die zulässige, formreguläre Triangulierung  $\mathcal{T}_N$  besitze eine Menge von inneren Knoten  $\{a_r\}_{r=1}^R$ , sodass  $\{\Omega_r\}_{r=1}^R$  mit

$$\Omega_r = \overset{\circ}{\bigcup}_{\tau_i \text{ hat einen Knoten } a_r} \tau_i, \quad (3.8)$$

eine Partition von  $\bar{\Omega}$ , d. h.  $\bar{\Omega} = \overline{\bigcup_r \Omega_r}$  mit  $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$  für  $r \neq s$  ist. Das heißt  $\Omega_r$  ist das Innere des Abschlusses der Vereinigung über die Elemente  $\tau_i$ , die den Knoten  $a_r$  teilen.

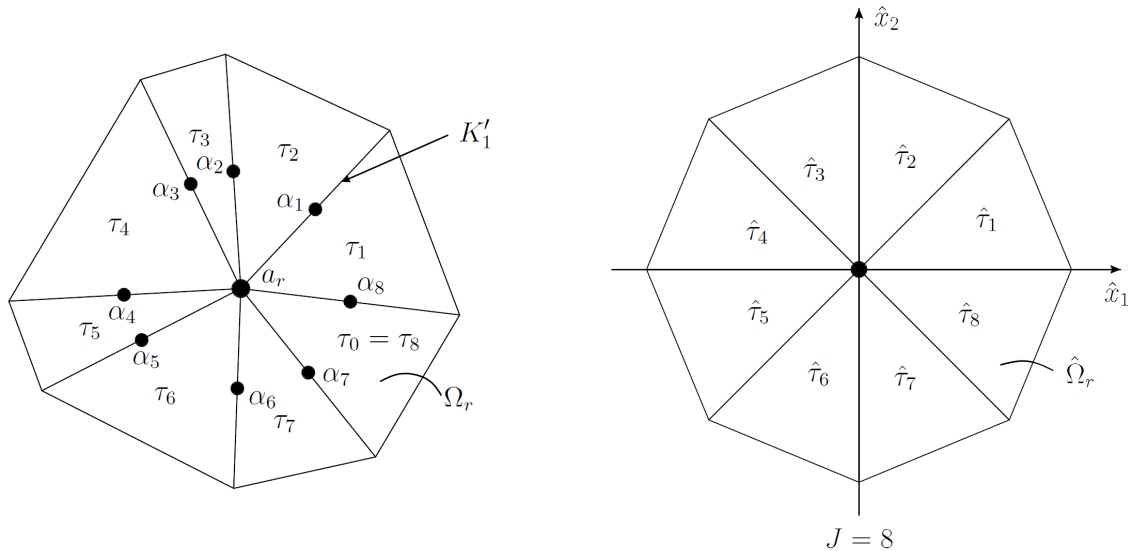


Abbildung 3.3.: Makroelement  $\Omega_r$  und Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$

**Die Eigenschaften der Makroelemente  $\Omega_r$ :**

- Die Elemente  $\tau_i \in \mathcal{T}_N$  sind offen. Das Makroelement  $\Omega_r$  ist offen. Zum Makroelement gehören jedoch die inneren Kanten zwischen den zugehörigen Elementen  $\tau_i$ .
- Jedes Element  $\tau_i \in \mathcal{T}_N$  gehört zu genau einem Makroelement  $\Omega_r$ .
- Alle Knoten  $a_r$  liegen im Inneren vom Gebiet  $\Omega$ .
- Jedes Element  $\tau_i$  teilt genau eine Kante mit dem Rand des Makroelements  $\Omega_r$ .
- Jedes Element  $\tau_i$  teilt höchstens eine Kante mit dem Rand von  $\Omega$ .

Die Forderung 1 und damit die Eigenschaften bezüglich der Partitionen, sind durch Anpassungen der Elemente erzeugbar [17, S. 177]. Die vorher definierten Räume für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) bzw. für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5) werden auf das Makroelement  $\Omega_r$  (3.8) eingeschränkt

$$\begin{aligned} X_h(\Omega_r) &= \{\mathbf{v}_h \in X_h : \text{supp}(\mathbf{v}_h) \subset \overline{\Omega_r}\}, \\ Q_h(\Omega_r) &= \left\{ q|_{\Omega_r} : q \in \{q \in C(\Omega) : q|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \right\}, \\ M_h(\Omega_r) &= Q_h(\Omega_r) \cap L_{2,0}(\Omega_r). \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Annahmen zu den Makroelementen und zu den Referenzkonfigurationen:**

- Sei  $J$  die Anzahl der Elemente  $\tau_i$  in  $\Omega_r$ . Diese werden mit dem Index  $i \in \{0, \dots, J\}$  nummeriert, sodass  $\tau_i$  benachbart zu  $\tau_{i-1}$  und  $\tau_{i+1}$  ist (vgl. Abb. 3.3, links). Weiters sei  $\tau_0 = \tau_J$  und

$$\Omega_r = \overset{\circ}{\bigcup_{i=1}^J \tau_i}.$$

- Der Knoten, der von allen Elementen  $\tau_i \in \Omega_r$  geteilt wird, wird mit  $a_r$  bezeichnet.
- Die Kante, die jeweils von den Elementen  $\tau_i$  und  $\tau_{i+1}$  geteilt wird, wird mit  $K'_i$  bezeichnet.
- Der Mittelpunkt der Kante  $K'_i$  wird mit  $\alpha_i$  bezeichnet.
- Der Tangentenvektor

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}, \quad (3.10)$$

der Kante  $K'_i$ , mit der Anordnung wie in Lemma 3.7, hat die Länge  $\|K'_i\|$ , wobei der Tangentenvektor  $\mathbf{t}_i$  aus  $\Omega_r$  hinaus zeigt.

- Im Fall der Zerlegung mittels Makroelementen, gibt es nicht wie gewohnt ein Referenzelement, sondern zu jedem Makroelement  $\Omega_r$  gibt es eine Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$  (vgl. Abb. 3.3, rechts). Die Anzahl der zugehörigen Elemente  $\hat{\tau}_i$  und deren Fläche und Winkel, hängt von der Anzahl der Elemente  $\tau_i$  eines Makroelements  $\Omega_r$  ab. Die Referenzkonfiguration zu  $\Omega_r$  wird bezeichnet mit

$$\hat{\Omega}_r = \bigcup_{i=1}^J \hat{\tau}_i. \quad (3.11)$$

- Die stückweisen, stetigen affinen Funktionen  $F_r$ , sind wie folgt definiert:

$$F_r(\hat{\tau}_i) = \tau_i, \quad F_r(\hat{x}) = B_i \hat{x} + b_i \text{ für alle } \hat{x} \in \hat{\tau}_i. \quad (3.12)$$

- Die Anzahl  $J$  der Elemente ist nach oben durch eine fixe Konstante  $I$  beschränkt, weil die Triangulierung formregulär (siehe Definition 3.4) ist. Diese Konstante  $I$  ist unabhängig von  $r$ . Das heißt, man braucht höchstens  $I$  unterschiedliche Referenzkonfigurationen  $\hat{\Omega}_r$ . Alle geometrischen Konstanten, die von  $\hat{\Omega}_r$  und  $\hat{\tau}_i$  abhängen, können unabhängig von  $h$  und  $r$  beschränkt werden.
- Der Tangentenvektor in der Referenzkonfiguration  $\hat{\tau}_i$  ist definiert als

$$B\hat{\mathbf{t}}_i := \mathbf{t}_i. \quad (3.13)$$

Diese Definition ergibt sich aus dem Tangentenvektor (3.10) und der affinen Transformation (3.12)

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1} = B\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{b} - B\hat{\mathbf{x}}_{i+1} - \mathbf{b} = B(\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i+1}) =: B\hat{\mathbf{t}}_i.$$

Weiters sei  $\hat{\mathbf{g}}_i$  durch

$$\hat{\mathbf{g}}_i := \mathbf{g}_i^\top B \quad (3.14)$$

definiert, wobei  $\mathbf{g}_i \in \mathbb{R}^2$ . Die Definition (3.14) ergibt sich aus dem Tangentenvektor in der Referenzkonfiguration (3.13)

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{g}_i^\top \mathbf{t}_i = \mathbf{g}_i^\top B\hat{\mathbf{t}}_i = (B^\top \mathbf{g}_i)^\top \hat{\mathbf{t}}_i = \hat{\mathbf{g}}_i^\top \hat{\mathbf{t}}_i. \quad (3.15)$$

- Die Euklidische Norm des Tangentenvektors in der Referenzkonfiguration sei beschränkt

$$\|\hat{\mathbf{t}}_i\|_2 \leq C. \quad (3.16)$$

### Basisfunktionen:

Die stückweisen linearen, global stetigen Basisfunktionen  $\varphi_k$  und die stückweisen quadratischen, global stetigen Basisfunktionen  $\psi_j$  hängen mit den linearen (A.1) und quadratischen (A.2) Formfunktionen durch die lokale Parametrisierung zusammen. Die Basisfunktionen werden dazu auf ein Finites Element  $\tau_i$  ihres Trägers eingeschränkt. Somit entspricht  $\varphi_{k|\tau_i} = \tilde{L}_r$  für ein  $r \in \{1, 2, 3\}$  und  $\psi_{j|\tau_i} = \tilde{N}_s$  für ein  $s \in \{1, \dots, 6\}$  (vgl. Abschnitt A.3).



### 3.3.2. Hilfslemmata

Damit der zentrale Satz 3.9, die lokale Inf-Sup-Bedingung für das Taylor-Hood-Element bzw. für das modifizierte Taylor-Hood-Element, bewiesen werden kann, werden nachfolgende Lemmata 3.5 - 3.8 benötigt.

In den nachfolgenden Hilfslemmata werden alle Knoten mit  $x_i$  bezeichnet, da die Bezeichnung der Knoten der Makroelemente  $(\alpha_i, a_r)$  zu spezifisch und für die Hilfslemmata nicht ausreichend wäre.

**Lemma 3.5. (Exakte Quadraturformeln für das Dreieck).**

*Exakte Quadraturformeln für das Dreieck mit Taylor-Hood-Elementen, bzw. modifizierten Taylor-Hood-Elementen*

$$\int_{\tau_k} v_h(x) dx = \delta |\tau_k| \{v_h(x_{i-1}) + v_h(x_i) + v_h(x_{i+1})\}, \quad (3.17)$$

mit den Kantenmittelpunkten  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  ist für eine quadratische Funktion  $v_h \in X_h$  (vgl. (3.3)), mit  $\delta = \frac{1}{3}$  exakt.

Falls in den Eckknoten  $x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}$  gilt:  $v_h(x_{i+2}) = v_h(x_{i+3}) = v_h(x_{i+4}) = 0$ , dann ist die Quadraturformel mit  $\delta = \frac{1}{4}$  für eine lineare Funktion  $v_h \in X_h$  (vgl. (3.5)), d. h. des virtuell uniform verfeinerten Gitters, exakt.

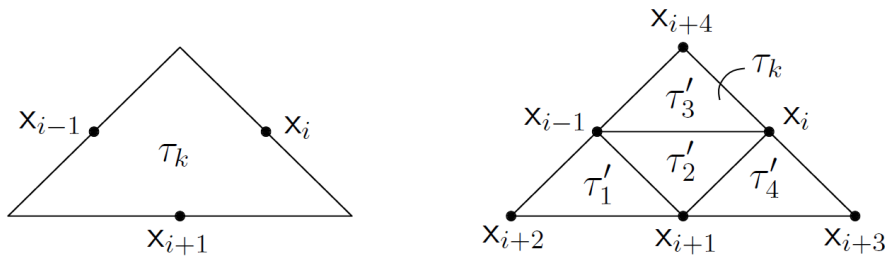


Abbildung 3.4.: Knotenanordnung für quadratische und lineare Funktionen

*Beweis.*

**Fall 1.** Die Exaktheit der Quadraturformel (3.17) für quadratische Funktionen aus dem Raum  $X_h$  (3.3) wird gezeigt.

Dafür wird eine Transformation vom Element  $\tau_k$  auf das Referenzelement  $\tau$  mit Hilfe der Abbildung (A.3) durchgeführt. Dazu wird die lokale Parametrisierung (A.5) der quadratischen Formfunktionen  $N_r$  (A.2) benötigt. Damit kann die Transformation der quadratischen Formfunktionen  $\tilde{N}_r$  von  $\tau_k$  nach  $\tau$  für  $r = 1, \dots, 6$  durchgeführt werden

$$Q_{h,quadr}^{(i)}[r] = \int_{\tau_k} \tilde{N}_r(x) dx = \int_{\tau} N_r(\xi) |\det J_k| d\xi = 2|\tau_k| \int_{\tau} N_r(\xi) d\xi.$$

Damit ergibt sich der lokale Vektor

$$Q_{h,quadr}^{(i)} = 2|\tau_k| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = |\tau_k| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Das heißt, nur die Kantenmittelpunkte haben Nichtnulleinträge. Damit ergibt sich für eine quadratische Funktion  $v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \psi_i(x)$  mit quadratischen Basisfunktionen  $\psi_i \in X_h$  (3.3) und  $v_i = v_h(\mathbf{x}_i)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k} v_h(x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{\tau_k} v_i \psi_i(x) dx = \int_{\tau_k} (v_{i-1} \psi_{i-1}(x) + v_i \psi_i(x) + v_{i+1} \psi_{i+1}(x)) dx \\ &= \frac{1}{3} |\tau_k| \{v_h(\mathbf{x}_{i-1}) + v_h(\mathbf{x}_i) + v_h(\mathbf{x}_{i+1})\}. \end{aligned}$$

**Fall 2.** Die Exaktheit der Quadraturformel (3.17) für lineare Funktionen aus dem Raum  $X_h$  (3.5) wird unter der Voraussetzung

$$v_h(\mathbf{x}_{i+2}) = v_h(\mathbf{x}_{i+3}) = v_h(\mathbf{x}_{i+4}) = 0 \quad (3.18)$$

in den Eckknoten  $\mathbf{x}_{i+2}, \mathbf{x}_{i+3}, \mathbf{x}_{i+4}$ , gezeigt.

Es wird eine Transformation vom Element  $\tau_k$  auf das Referenzelement  $\tau$  mit Hilfe der Abbildung (A.3) durchgeführt. Dafür wird die lokale Parametrisierung (A.5) der linearen Formfunktionen  $L_r$  (A.1) benötigt. Damit kann die Transformation von  $\tau_k$  nach  $\tau$  für  $r = 1, \dots, 3$  durchgeführt werden

$$Q_{h,linear}^{(i)}[r] = \int_{\tau_k} \tilde{L}_r(x) dx = \int_{\tau} L_r(\xi) |\det J_k| d\xi = 2|\tau_k| \int_{\tau} L_r(\xi) d\xi.$$

So ergibt sich

$$Q_{h,linear}^{(i)} = 2|\tau_k| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = |\tau_k| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden wird die Vorgehensweise für die Basisfunktion  $\varphi_{i-1}$  zum Knoten  $\mathbf{x}_{i-1}$  betrachtet. Das Element  $\tau_k$  wird in Subelemente  $\tau'_\ell$  aufgespalten. Auf diesen Subelementen wird die Transformation auf das Referenzelement durchgeführt. Für die Subelemente gilt  $|\tau'_\ell| = \frac{1}{4} |\tau_k|$ . Damit ergibt sich

$$\int_{\tau_k} \varphi_{i-1} dx = \sum_{\ell=1}^4 \int_{\tau'_\ell} \varphi_{i-1} dx = \frac{1}{3} (|\tau'_1| + |\tau'_2| + |\tau'_3|) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} |\tau_k| + \frac{1}{4} |\tau_k| + \frac{1}{4} |\tau_k| \right) = \frac{1}{4} |\tau_k|,$$

da der Träger von  $\varphi_{i-1}$  nur die Subelemente  $|\tau'_1|, |\tau'_2|$  und  $|\tau'_3|$  umfasst. Analoges Vorgehen für die Basisfunktionen  $\varphi_i, \varphi_{i+1}$  ergibt ebenfalls

$$\int_{\tau_k} \varphi_i dx = \frac{1}{4} |\tau_k|, \quad \int_{\tau_k} \varphi_{i+1} dx = \frac{1}{4} |\tau_k|.$$

Damit ergibt sich für eine lineare Funktion  $v_h(x) = \sum_{i=1}^L v_i \varphi_i(x)$ , mit linearen Basisfunktionen  $\varphi_i \in X_h$  (3.5) und  $v_i = v_h(\mathbf{x}_i)$  und unter der Voraussetzung (3.18)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k} v_h dx &= \sum_{i=1}^L \int_{\tau_k} v_i \varphi_i dx \\ &= \int_{\tau_k} \left( v_{i-1} \varphi_{i-1} + v_i \varphi_i + v_{i+1} \varphi_{i+1} + v_{i+2} \varphi_{i+2} + v_{i+3} \varphi_{i+3} + v_{i+4} \varphi_{i+4} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} |\tau_k| \{v_h(\mathbf{x}_{i-1}) + v_h(\mathbf{x}_i) + v_h(\mathbf{x}_{i+1})\}, \end{aligned}$$

die Quadraturformel (3.17) für lineare Funktionen des verfeinerten Gitters.  $\square$

**Lemma 3.6.** Für quadratische Funktionen  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  (vgl. (3.3), (3.9)) bzw. für lineare Funktionen  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  (vgl. (3.5), (3.9)) gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_k)}^2 \leq C |\tau_k| \{v_{1,h}(\mathbf{x}_{i-1})^2 + v_{1,h}(\mathbf{x}_i)^2 + v_{2,h}(\mathbf{x}_{i-1})^2 + v_{2,h}(\mathbf{x}_i)^2\}, \quad (3.19)$$

in den Kantenmittelpunkten  $\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i$ , wenn in den Knoten  $\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}, \mathbf{x}_{i+3}, \mathbf{x}_{i+4}$ ,

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_{i+2}) = \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_{i+3}) = \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_{i+4}) = 0, \quad (3.20)$$

gilt (vgl. Abb. 3.4).

*Beweis.*

**Fall 1.** Die Abschätzung (3.19) ist unter der Annahme (3.20) für quadratische Funktionen aus dem Raum  $X_h(\Omega_r)$  (3.3), (3.9) zu zeigen.

Es wird eine Transformation vom Element  $\tau_k$  auf das Referenzelement  $\tau$  mit Hilfe der Abbildung (A.3) durchgeführt. Es wird die lokale Parametrisierung (A.5) der quadratischen Formfunktionen  $N_r$  (A.2) benötigt, damit die Transformation von  $\tau_k$  nach  $\tau$  für  $r = 1, \dots, 6$  durchgeführt werden kann

$$Q_{h,quadr,L_2Norm}^{(i)}[r] = \int_{\tau_k} \tilde{N}_r^2(x) dx = \int_{\tau} N_r^2(\xi) |\det J_k| d\xi = 2|\tau_k| \int_{\tau} N_r^2(\xi) d\xi.$$

Es ergibt sich der lokale Vektor

$$Q_{h,quadr,L_2Norm}^{(i)} = 2|\tau_k| \begin{pmatrix} \frac{1}{60} \\ \frac{1}{60} \\ \frac{1}{60} \\ \frac{4}{45} \\ \frac{4}{45} \\ \frac{4}{45} \end{pmatrix} = |\tau_k| \begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} \\ \frac{8}{45} \\ \frac{8}{45} \\ \frac{8}{45} \end{pmatrix}.$$

Nun wird die Vorgehensweise für die Basisfunktion  $\psi_{i-1} \in X_h(\Omega_r)$  (3.3), (3.9) betrachtet. Es wird die Transformation vom Element auf das Referenzelement durchgeführt und es ergibt sich

$$\int_{\tau_k} \psi_{i-1}^2 dx = \frac{8}{45} |\tau_k|, \quad \int_{\tau_k} \psi_i^2 dx = \frac{8}{45} |\tau_k|. \quad (3.21)$$

Ausgehend von

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_k)}^2 = \int_{\tau_k} \mathbf{v}_h^2(x) dx$$

für quadratische Basisfunktionen  $\psi_i \in X_h(\Omega_r)$  (3.3), (3.9)

$$\mathbf{v}_h = \begin{pmatrix} v_{1,h} \\ v_{2,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N v_{1,i} \psi_i(x) \\ \sum_{i=1}^N v_{2,i} \psi_i(x) \end{pmatrix},$$

ergibt sich für die erste Komponente  $v_{1,h}$ , mit  $v_{j,i} = v_j(\mathbf{x}_k)$  und mit Hilfe der Binomischen Formeln die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k} v_{1,h}^2(x) dx &= \int_{\tau_k} (v_{1,i-1} \psi_{i-1} + v_{1,i} \psi_i)^2 dx \\ &= \int_{\tau_k} (v_{1,i-1}^2 \psi_{i-1}^2 + 2v_{1,i-1} \psi_{i-1} v_{1,i} \psi_i + v_{1,i}^2 \psi_i^2) dx \\ &\leq 2 \int_{\tau_k} (v_{1,i-1}^2 \psi_{i-1}^2 + v_{1,i}^2 \psi_i^2) dx. \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen liefert die Abschätzung für die zweite Komponente  $v_{2,h}$

$$\int_{\tau_k} v_{2,h}^2(x) dx \leq 2 \int_{\tau_k} (v_{2,i-1}^2 \psi_{i-1}^2 + v_{2,i}^2 \psi_i^2) dx.$$

Für eine quadratische Funktion ergeben beide Abschätzungen

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_k)}^2 \leq 2 \int_{\tau_k} (v_{1,i-1}^2 \psi_{i-1}^2 + v_{1,i}^2 \psi_i^2) dx + 2 \int_{\tau_k} (v_{2,i-1}^2 \psi_{i-1}^2 + v_{2,i}^2 \psi_i^2) dx. \quad (3.22)$$

Werden nun die Ergebnisse aus (3.21) und (3.22) zusammengeführt, ergibt sich die Abschätzung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_k)}^2 \leq \frac{16}{45} |\tau_k| \{v_{1,i-1}^2 + v_{1,i}^2 + v_{2,i-1}^2 + v_{2,i}^2\}.$$

**Fall 2.** Die Abschätzung (3.19) wird nun unter der Annahme (3.20) für lineare Funktionen aus dem Raum  $X_h(\Omega_r)$  (3.5), (3.9) gezeigt.

Zuerst wird eine Transformation vom Element  $\tau_k$  auf das Referenzelement  $\tau$  mit Hilfe der Abbildung (A.3) durchgeführt. Die lokale Parametrisierung (A.5) der linearen Formfunktionen  $L_r$  (A.1) wird benötigt, damit die Transformation von  $\tau_k$  nach  $\tau$  für  $r = 1, \dots, 3$  durchgeführt werden kann

$$Q_{h,linear,L_2Norm}^{(i)}[r] = \int_{\tau_k} \tilde{L}_r^2(x) dx = \int_{\tau} L_r^2(\xi) |\det J_k| d\xi = 2|\tau_k| \int_{\tau} L_r^2(\xi) d\xi.$$

Es ergibt sich

$$Q_{h,linear,L_2Norm}^{(i)} = 2|\tau_k| \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} = |\tau_k| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden wird die Vorgehensweise für die Basisfunktion  $\varphi_{i-1}$  betrachtet. Dazu wird das Element  $\tau_k$  in Subelemente  $\tau'_\ell$  aufgespalten. Auf diesen Subelementen wird die Transformation auf das Referenzelement durchgeführt. Für die Subelemente gilt  $|\tau'_\ell| = \frac{1}{4}|\tau_k|$ . Damit ergibt sich

$$\int_{\tau_k} \varphi_{i-1}^2 dx = \sum_{\ell=1}^4 \int_{\tau'_\ell} \varphi_{i-1}^2 dx = \frac{1}{6} (|\tau'_1| + |\tau'_2| + |\tau'_3|) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{4}|\tau_k| + \frac{1}{4}|\tau_k| + \frac{1}{4}|\tau_k| \right) = \frac{1}{8}|\tau_k|, \quad (3.23)$$

da der Träger von  $\varphi_{i-1}$  nur die Subelemente  $|\tau'_1|$ ,  $|\tau'_2|$  und  $|\tau'_3|$  umfasst. Analoges Vorgehen für die Basisfunktion  $\varphi_i$  ergibt ebenfalls

$$\int_{\tau_k} \varphi_i^2 dx = \frac{1}{8}|\tau_k|. \quad (3.24)$$

Für lineare Basisfunktionen  $\varphi_k \in X_h(\Omega_r)$  (3.5), (3.9) ist

$$\mathbf{v}_h = \begin{pmatrix} v_{1,h} \\ v_{2,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N v_{1,i} \varphi_i(x) \\ \sum_{i=1}^N v_{2,i} \varphi_i(x) \end{pmatrix}.$$

Unter der Voraussetzung (3.20) und unter analogen Berechnungen zu (3.22), ergibt sich eine Abschätzung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_k)}^2 \leq 2 \int_{\tau_k} (v_{1,i-1}^2 \varphi_{i-1}^2 + v_{1,i}^2 \varphi_i^2) dx + 2 \int_{\tau_k} (v_{2,i-1}^2 \varphi_{i-1}^2 + v_{2,i}^2 \varphi_i^2) dx, \quad (3.25)$$

für lineare Funktionen  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  (3.5), (3.9). Es ergibt sich die Abschätzung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_k)}^2 \leq \frac{1}{4} |\tau_k| \{v_{1,i-1}^2 + v_{1,i}^2 + v_{2,i-1}^2 + v_{2,i}^2\},$$

indem die Ergebnisse aus (3.23), (3.24) und (3.25) zusammengeführt werden.  $\square$

**Lemma 3.7.** Für  $p_h \in Q_h(\Omega_r)$  aus (3.9) ist die tangentielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial \tau} p_h$  stetig.

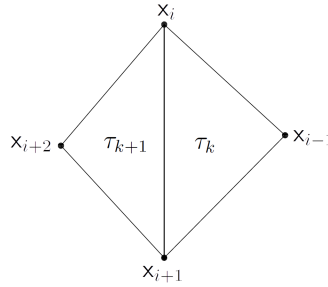


Abbildung 3.5.: Anordnung der Elemente  $\tau_k, \tau_{k+1}$

*Beweis.* Für zwei Finite Elemente  $\tau_k, \tau_{k+1}$ , mit der Anordnung wie in Abbildung 3.5, ist

$$(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}) \cdot \nabla p_h|_{\tau_k} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}) \cdot \nabla p_h|_{\tau_{k+1}},$$

für

$$p_h = \sum_{i=1}^L p_i \varphi_i \quad \text{für } \varphi_i \in Q_h(\Omega_r)$$

zu zeigen, wobei

$$\nabla p_h|_{\tau_k} = p_{i-1} \nabla \varphi_{i-1}|_{\tau_k} + p_i \nabla \varphi_i|_{\tau_k} + p_{i+1} \nabla \varphi_{i+1}|_{\tau_k}$$

$$\nabla p_h|_{\tau_{k+1}} = p_i \nabla \varphi_i|_{\tau_{k+1}} + p_{i+1} \nabla \varphi_{i+1}|_{\tau_{k+1}} + p_{i+2} \nabla \varphi_{i+2}|_{\tau_{k+1}}$$

ist. Nach der Transformation auf das Referenzelement  $\tau$  mit der Jacobi-Matrix (A.4) und der lokalen Parametrisierung (A.5), ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla p_h|_{\tau_k} &= p_{i-1} \frac{1}{D_i} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \\ \mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i,1} \end{pmatrix} + p_i \frac{1}{D_i} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i-1,2} \\ \mathbf{x}_{i-1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \end{pmatrix} \\ &\quad + p_{i+1} \frac{1}{D_i} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i-1,2} - \mathbf{x}_{i,2} \\ \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i-1,1} \end{pmatrix} \\ \nabla p_h|_{\tau_{k+1}} &= p_i \frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+2,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \\ \mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+2,1} \end{pmatrix} + p_{i+1} \frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+2,2} \\ \mathbf{x}_{i+2,1} - \mathbf{x}_{i,1} \end{pmatrix} \\ &\quad + p_{i+2} \frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i,2} \\ \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

mit den Divisoren

$$\begin{aligned} D_i &= (\mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i-1,2})(\mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i-1,1}) - (\mathbf{x}_{i-1,2} - \mathbf{x}_{i,2})(\mathbf{x}_{i-1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1}), \\ D_{i+1} &= (\mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2})(\mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+2,1}) - (\mathbf{x}_{i+2,2} - \mathbf{x}_{i+1,2})(\mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i,1}). \end{aligned}$$

Wegen den Orthogonalitäten

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_i} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \\ \mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i,1} \end{pmatrix} &= 0, \\ \frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i,2} \\ \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \end{pmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

bleibt nach Multiplikation von (3.26) mit  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix}$

$$p_i \frac{1}{D_i} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i-1,2} \\ \mathbf{x}_{i-1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \end{pmatrix} = p_i \frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i+2,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \\ \mathbf{x}_{i+1,1} - \mathbf{x}_{i+2,1} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$p_{i+1} \frac{1}{D_i} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i-1,2} - \mathbf{x}_{i,2} \\ \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i-1,1} \end{pmatrix} = p_{i+1} \frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1} \\ \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+2,2} \\ \mathbf{x}_{i+2,1} - \mathbf{x}_{i,1} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

zu zeigen. Zuerst wird die Gleichheit von (3.27) gezeigt. Dazu wird die linke Seite von (3.27) mit  $\pm \mathbf{x}_{i-1,1}$  bzw. mit  $\pm \mathbf{x}_{i-1,2}$  erweitert

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i+1,1})(\mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i-1,2})}{D_i} + \frac{(\mathbf{x}_{i,2} - \mathbf{x}_{i+1,2})(\mathbf{x}_{i-1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1})}{D_i} &= \\ \frac{[(\mathbf{x}_{i,1} - \mathbf{x}_{i-1,1}) + (\mathbf{x}_{i-1,1} - \mathbf{x}_{i+1,1})](\mathbf{x}_{i+1,2} - \mathbf{x}_{i-1,2})}{D_i} & \end{aligned}$$

$$+ \frac{[(x_{i,2} - x_{i-1,2}) + (x_{i-1,2} - x_{i+1,2})](x_{i-1,1} - x_{i+1,1})}{D_i} = 1.$$

Anschließend wird die rechte Seite von (3.27) analog berechnet als

$$\frac{1}{D_{i+1}} \begin{pmatrix} x_{i,1} - x_{i+1,1} \\ x_{i,2} - x_{i+1,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i+2,2} - x_{i+1,2} \\ x_{i+1,1} - x_{i+2,1} \end{pmatrix} = 1.$$

Hiermit wurde die Gleichung (3.27) gezeigt. Analoges Vorgehen liefert die Aussage (3.28). Somit wurde gezeigt, dass die tangentielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial r} p_h$  stetig ist.  $\square$

**Lemma 3.8.** *Es sei die Forderung 1 an die Triangulierung erfüllt, und die Tangentenvektoren in der Referenzkonfiguration  $\hat{\mathbf{t}}_i$  sind definiert durch (siehe Definition (3.13))*

$$B\hat{\mathbf{t}}_i = \mathbf{t}_i,$$

wobei  $\mathbf{t}_i$  der Tangentenvektor (3.10) mit  $\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}$  ist. Dann gilt:

- Jede Menge von Tangentenvektoren  $\{\hat{\mathbf{t}}_{i-1}, \hat{\mathbf{t}}_i\}$  ist eine Basis der Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$ .
- Die Abbildung  $\mathbf{g} \mapsto \{(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2\}^{1/2}$ , ist für ein beliebiges, aber konstantes  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$  in der Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$ , äquivalent zur Euklidischen Norm  $\|\mathbf{g}\|_2^2$ .

*Beweis.*

**Schritt 1.** *Jede Menge von Tangentenvektoren  $\{\hat{\mathbf{t}}_{i-1}, \hat{\mathbf{t}}_i\}$  bildet eine Basis in der Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$ .*

Nachdem Forderung 1 erfüllt ist, handelt es sich um eine zulässige, formreguläre Triangulierung, die in Makroelemente  $\Omega_r$  und über die affine Transformation (3.12) in die Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$  überführt werden kann. Deshalb sind die Tangentenvektoren  $\hat{\mathbf{t}}_{i-1} \nparallel \hat{\mathbf{t}}_i$  nicht parallel und bilden eine Basis von  $\hat{\Omega}_r$ .

**Schritt 2.** *Für ein beliebiges, aber konstantes  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$  ist die Äquivalenz der Abbildung  $\mathbf{g} \mapsto \{(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2\}^{1/2}$  zur Euklidischen Norm  $\|\mathbf{g}\|_2^2$  in der Referenzkonfiguration  $\hat{\Omega}_r$ , zu zeigen.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hier der Beweis für die Basisvektoren  $\{\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2\}$  durchgeführt.

**i.** *Die Abschätzung  $|(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)^2| \leq C\|\mathbf{g}\|_2^2$  ist zu zeigen.*

Zuerst wird die Dreiecksungleichung und anschließend die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung auf  $|(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)^2|$  angewandt. Abschließend wird  $\max_i \|\hat{\mathbf{t}}_i\|_2^2$  mit (3.16) nach oben abgeschätzt. Somit ergibt sich

$$|(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)^2| \leq |(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1)^2| + |(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2)^2| \leq \|\mathbf{g}\|_2^2 \|\hat{\mathbf{t}}_1\|_2^2 + \|\mathbf{g}\|_2^2 \|\hat{\mathbf{t}}_2\|_2^2 \stackrel{(3.16)}{\leq} C\|\mathbf{g}\|_2^2.$$



ii. Die Abschätzung  $\|\mathbf{g}\|_2^2 \leq C[(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2]$  ist zu zeigen.

Die Standardbasis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  des  $\mathbb{R}^2$  kann mit den Basisvektoren  $\{\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2\}$  und  $\gamma_{i,j} \in \mathbb{R}$  dargestellt werden

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^2 \gamma_{i,j} \hat{\mathbf{t}}_j \quad i = 1, 2. \quad (3.29)$$

Ausgehend von der Euklidischen Norm  $\|\mathbf{g}\|_2^2$  wird die Darstellung (3.29) eingesetzt und später mit der Abschätzung, die man aus dem Binomischen Lehrsatz kennt, weiter abgeschätzt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}\|_2^2 &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_2)^2 \stackrel{(3.29)}{=} (\mathbf{g} \cdot (\gamma_{1,1} \hat{\mathbf{t}}_1 + \gamma_{1,2} \hat{\mathbf{t}}_2))^2 + (\mathbf{g} \cdot (\gamma_{2,1} \hat{\mathbf{t}}_1 + \gamma_{2,2} \hat{\mathbf{t}}_2))^2 \\ &= \mathbf{g}^2 \cdot (\gamma_{1,1}^2 \hat{\mathbf{t}}_1^2 + 2\gamma_{1,1} \hat{\mathbf{t}}_1 \gamma_{1,2} \hat{\mathbf{t}}_2 + \gamma_{1,2}^2 \hat{\mathbf{t}}_2^2) + \mathbf{g}^2 \cdot (\gamma_{2,1}^2 \hat{\mathbf{t}}_1^2 + 2\gamma_{2,1} \hat{\mathbf{t}}_1 \gamma_{2,2} \hat{\mathbf{t}}_2 + \gamma_{2,2}^2 \hat{\mathbf{t}}_2^2) \\ &\leq 2\mathbf{g}^2 \cdot (\gamma_{1,1}^2 \hat{\mathbf{t}}_1^2 + \gamma_{1,2}^2 \hat{\mathbf{t}}_2^2) + 2\mathbf{g}^2 \cdot (\gamma_{2,1}^2 \hat{\mathbf{t}}_1^2 + \gamma_{2,2}^2 \hat{\mathbf{t}}_2^2) \\ &\leq 2 \max_{i,j} |\gamma_{i,j}^2| \sum_{i=1}^2 2(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2 \leq C \sum_{i=1}^2 (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2. \end{aligned}$$

□

### 3.3.3. Die lokale Inf–Sup–Bedingung

Der nachfolgende Satz 3.9 ist die zentrale Aussage dieses Kapitels. Hier wird die lokale Inf–Sup–Bedingung für das Taylor–Hood–Element bzw. für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente in den Räumen  $X_h(\Omega_r)$ ,  $M_h(\Omega_r)$  (3.9) gezeigt. Die Inf–Sup–Bedingung wird mit Satz 3.14 auf das gesamte Gebiet erweitert.

**Satz 3.9. (Die lokale Inf–Sup–Bedingung).** [17, Th. 4.2, S. 178, Th. 4.4, S. 182] Sei  $\mathcal{T}_N$  eine zulässige und formreguläre Triangulierung von  $\bar{\Omega}$  und zerlegbar in Makroelemente (siehe (3.8)), dann existiert eine, von der Wahl  $h$  und  $r$  unabhängige, positive Konstante  $\beta_{\text{lokal}} > 0$ , sodass die lokale Inf–Sup–Bedingung

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)} \frac{\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \beta_{\text{lokal}} \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)} \quad \text{für alle } q_h \in M_h(\Omega_r), \quad (3.30)$$

in den Räumen  $X_h(\Omega_r)$ ,  $M_h(\Omega_r)$  (3.9), für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) und die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5), gilt.

*Beweis.* Nach [17, S. 178ff].

Dieser Beweis gilt für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) und auch für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5). An den notwendigen Stellen wird zwischen den beiden Fällen unterschieden. Es gelten die Eigenschaften und Annahmen zu den Makroelementen und zur Referenzkonfiguration, wie in Abschnitt 3.3.1 vereinbart wurde.

Ziel ist die Konstruktion einer Funktion  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$ , sodass für ein gegebenes  $q_h \in M_h(\Omega_r)$  die lokale Inf–Sup–Bedingung erfüllt ist. Im Fall der Taylor–Hood–Elemente wird eine stückweise quadratische Funktion  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(a_r) &= 0 \\ \mathbf{v}_h(x) &= 0 \quad x \in \Gamma_r \end{aligned} \quad (3.31)$$

gewählt (vgl. Abbildung 3.6).

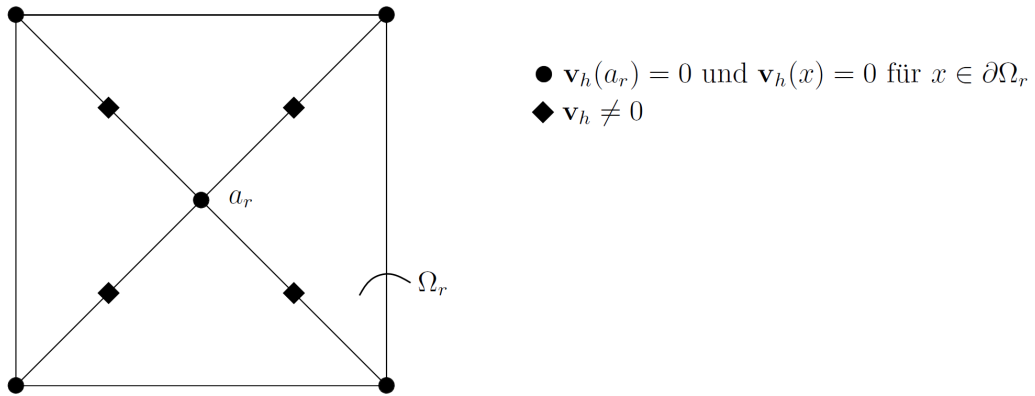


Abbildung 3.6.: Eigenschaften der Funktion  $\mathbf{v}_h$  für Taylor–Hood–Elemente

Im Fall der modifizierten Taylor–Hood–Elemente wird eine auf dem virtuell verfeinerten Netz, stückweise lineare Funktion  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  mit  $\mathbf{v}_h(a_r) = 0$  und  $\mathbf{v}_h(x) = 0$ ,  $x \in \Gamma_r$  gewählt (vgl. Abbildung 3.7).

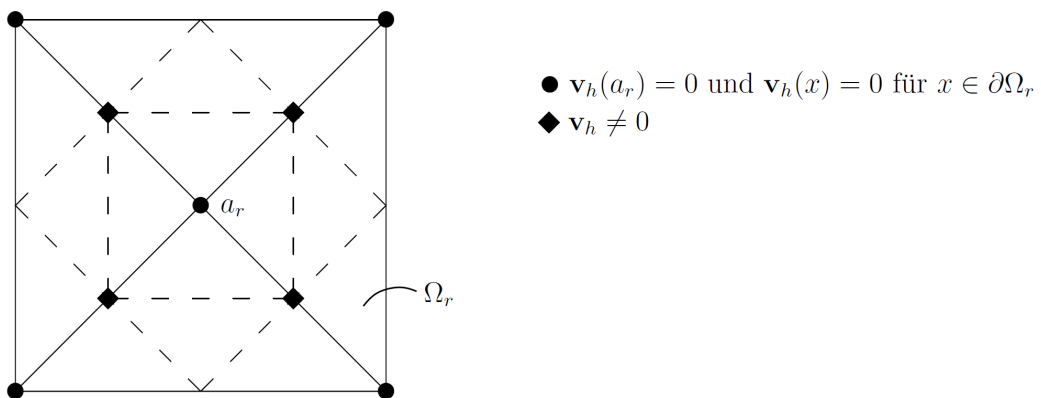


Abbildung 3.7.: Eigenschaften der Funktion  $\mathbf{v}_h$  für mod. Taylor–Hood–Elemente

**Schritt 1.** Für die lokale Inf–Sup–Bedingung wird ein geeignetes  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  mit den Eigenschaften (3.31) konstruiert.

Sei  $q_h \in Q_h(\Omega_r)$  beliebig;  $q_h$  ist eine lineare, stetige Funktion. Daher ist  $q_h \in H^1(\Omega_r)$ . Mit partieller Integration für  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  ergibt sich

$$\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx = - \int_{\Omega_r} \mathbf{v}_h(x) \cdot \nabla q_h(x) dx = - \sum_{i=1}^J \int_{\tau_i} \mathbf{v}_h(x) \cdot \nabla q_h(x) dx.$$

Weil  $q_h$  eine lineare Funktion ist, ist  $\nabla q_h$  konstant auf jedem Element  $\tau_i$ . Deshalb wird in weiterer Folge  $\nabla q_h|_{\tau_i} = \mathbf{g}_i$  gesetzt. Das ergibt

$$\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx = - \sum_{i=1}^J \int_{\tau_i} \mathbf{v}_h(x) \cdot \mathbf{g}_i dx.$$

Damit diese Gleichung berechnet werden kann, wird die *Quadraturformel* (3.17) für das Dreieck, in den Kantenmittelpunkten  $\mathbf{x}_{i,1}, \mathbf{x}_{i,2}, \mathbf{x}_{i,3}$

$$\int_{\tau_i} v_h(x) dx = \delta |\tau_i| \{v_h(\mathbf{x}_{i,1}) + v_h(\mathbf{x}_{i,2}) + v_h(\mathbf{x}_{i,3})\}$$

mit dem Koeffizienten

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{für eine quadratische Funktion } v_h \\ \frac{1}{4} & \text{für eine lineare Funktion } v_h, \end{cases}$$

verwendet. Sie ist für quadratische bzw. lineare Polynome  $\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)$  exakt (siehe Lemma 3.5). Deshalb wird die Quadraturformel für jede Komponente  $v_{h,k}$  von  $\mathbf{v}_h$ , welche ein Polynom 1. bzw. 2. Grades von  $P_1$  bzw.  $P_2$  auf  $\tau_i$  ist, verwendet. Es ist zu beachten, dass  $\mathbf{v}_h$  am Rand  $\Gamma_r$  verschwindet (siehe (3.31)). Deshalb ergibt sich für eine Komponente  $v_{h,k}$ , auf einem Element  $\tau_i$

$$\int_{\tau_i} v_{h,k}(x) dx = \delta |\tau_i| \{v_{h,k}(\alpha_i) + v_{h,k}(\alpha_{i-1})\}.$$

Diese Ergebnisse vereint ergeben

$$\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx = - \sum_{i=1}^J \int_{\tau_i} \mathbf{v}_h(x) \cdot \mathbf{g}_i dx = -\delta \sum_{i=1}^J |\tau_i| \{\mathbf{v}_h(\alpha_i) + \mathbf{v}_h(\alpha_{i-1})\} \cdot \mathbf{g}_i. \quad (3.32)$$

Die Funktion  $\mathbf{v}_h$  wird im gemeinsamen Kantenmittelpunkt  $\alpha_i$  so gewählt, dass die Inf–Sup–Bedingung erfüllt sein wird. Dazu wird

$$\mathbf{v}_h(\alpha_i) = -(\nabla q_h|_{\tau_i} \cdot \mathbf{t}_i)\mathbf{t}_i = -(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i)\mathbf{t}_i = -(\mathbf{g}_{i+1} \cdot \mathbf{t}_i)\mathbf{t}_i \quad (3.33)$$

gesetzt. Wobei  $\mathbf{t}_i$  der Tangentenvektor (3.10) ist. Die tangentielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial \tau} q_h$  des Tangentenvektors nach Lemma 3.7 ist stetig. Daher ist sie auch auf der Kante, die von den Elementen  $\tau_i$  und  $\tau_{i+1}$  geteilt wird, stetig. Wird nun (3.33) in (3.32) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx &= -\delta \sum_{i=1}^J |\tau_i| \{ \mathbf{v}_h(\alpha_i) + \mathbf{v}_h(\alpha_{i-1}) \} \cdot \mathbf{g}_i \\ &= -\delta \sum_{i=1}^J |\tau_i| \{ -(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i)\mathbf{t}_i - (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_{i-1})\mathbf{t}_{i-1} \} \cdot \mathbf{g}_i \\ &= \delta \sum_{i=1}^J |\tau_i| \{ (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i)^2 + (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_{i-1})^2 \}. \end{aligned}$$

Setzt man den Tangentenvektor in der Referenzkonfiguration  $B\hat{\mathbf{t}}_i = \mathbf{t}_i$  (3.13) und  $\hat{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i^\top B$  (3.14) ein, ergibt sich

$$\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx = \delta \sum_{i=1}^J |\tau_i| \{ (\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2 + (\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2 \}.$$

Die Abbildung  $\mathbf{g} \mapsto \{ (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2 + (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2 \}^{1/2}$  ist für ein beliebiges  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$ , nach Lemma 3.8, äquivalent zur Euklidischen Norm  $\|\mathbf{g}\|_2$ . Diese Äquivalenz wird für einige nachfolgende Abschätzungen benötigt. Weiters gilt

$$|\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 = \|\nabla \hat{q}_h\|_{L_2(\hat{\tau}_i)}^2 = \int_{\hat{\tau}_i} (\nabla \hat{q}_h(x))^2 dx = \int_{\hat{\tau}_i} \sum_j \hat{\mathbf{g}}_{i,j}^2 dx = |\hat{\tau}_i| \|\hat{\mathbf{g}}_i\|_2^2. \quad (3.34)$$

**Schritt 2.** Für die lokale Inf–Sup–Bedingung wird gezeigt, dass eine Abschätzung

$$\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx \geq C_4 \frac{1}{\sigma} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)} \left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2} \quad \text{für } q_h \in Q_h(\Omega_r), \quad (3.35)$$

und  $\sigma > 0$  gilt. Hierbei ist

$$\sigma_{\tau_i} := \frac{h_{\tau_i}}{\varrho_{\tau_i}}, \quad (3.36)$$

wobei  $\varrho_{\tau_i}$  der Inkreisradius und  $h_{\tau_i}$  die längste Kante des Dreiecks  $\tau_i$  sind. Weiters ist

$$\sigma_r := \frac{\sup_{1 \leq i \leq J} h_{\tau_i}}{\inf_{1 \leq i \leq J} \varrho_{\tau_i}}. \quad (3.37)$$

Wegen der Formregularität der Triangulierung folgt, dass  $\sigma_r$  mit einem fixen  $\sigma$  nach oben beschränkt werden kann (siehe [1])

$$\sigma_r \leq \tilde{C}\sigma, \quad (3.38)$$

wobei  $\sigma = \max_i \sigma_{\tau_i}$ .

Um die Ungleichung (3.35) zu zeigen, werden die Abschätzungen (3.39) und (3.40) benötigt.

**i.** Die Abschätzung (3.39) ist für  $\mathbf{v}_h$  gemäß (3.31) zu zeigen.

Es werden das Lemma 3.8 zur Normäquivalenz der Euklidischen Norm und (3.34) verwendet. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx &= \delta \sum_{i=1}^J |\tau_i| \{(\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2 + (\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2\} \\ &\geq c \delta \sum_{i=1}^J \frac{|\tau_i|}{|\hat{\tau}_i|} \|\hat{\mathbf{g}}_i\|_2^2 |\hat{\tau}_i| \stackrel{(3.34)}{\geq} C_1 \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

wobei  $C_1 := \delta c (\max_{i=1, \dots, J} |\hat{\tau}_i|)^{-1}$  und  $|\hat{\tau}_i|$  beschränkt ist.

**ii.** Für  $\mathbf{v}_h$  nach (3.31) ist die Abschätzung

$$|\mathbf{v}_h|_{H^1(\tau_i)}^2 \leq C_3 |\tau_i| \sigma_{\tau_i}^2 |\hat{q}|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \quad (3.40)$$

zu zeigen.

Damit die Ungleichung (3.40) gezeigt werden kann, benötigt man nachfolgende Abschätzung, die sich aus der Definition (3.31) von  $\mathbf{v}_h$  ergibt. Auf

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_i)}^2 = \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_i} v_j(x)^2 dx$$

wird Lemma 3.6 angewandt und anschließend (3.33) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_i)}^2 &\leq \tilde{c} |\tau_i| \{v_{1,h}(\alpha_i)^2 + v_{1,h}(\alpha_{i-1})^2 + v_{2,h}(\alpha_i)^2 + v_{2,h}(\alpha_{i-1})^2\} \\ &= \tilde{c} |\tau_i| \{\|\mathbf{v}_h(\alpha_i)\|_2^2 + \|\mathbf{v}_h(\alpha_{i-1})\|_2^2\} \end{aligned}$$

$$= \tilde{c} |\tau_i| \{(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i)^2 \mathbf{t}_i^2 + (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_{i-1})^2 \mathbf{t}_{i-1}^2\}.$$

Die Länge von  $\mathbf{t}_i$  ist  $\|K'_i\|_2$ . Die Länge der längsten Kante im Dreieck  $\tau_i$  wird mit  $h_{\tau_i}$  bezeichnet. Mit Hilfe von (3.15)  $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i = \hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_i$  und der Normäquivalenz zur Euklidischen Norm (Lemma 3.8) und (3.34) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_i)}^2 &= \tilde{c} |\tau_i| \{(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i)^2 \mathbf{t}_i^2 + (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_{i-1})^2 \mathbf{t}_{i-1}^2\} \\ &\leq \tilde{c} |\tau_i| \max\{\mathbf{t}_{i-1}^2, \mathbf{t}_i^2\} \{(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_i)^2 + (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{t}_{i-1})^2\} \\ &\stackrel{(3.15)}{=} \tilde{c} |\tau_i| \max\{\mathbf{t}_{i-1}^2, \mathbf{t}_i^2\} \{(\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_i)^2 + (\hat{\mathbf{g}}_i \cdot \hat{\mathbf{t}}_{i-1})^2\} \\ &\stackrel{L.3.8}{\leq} c \tilde{c} |\tau_i| h_{\tau_i}^2 \|\hat{\mathbf{g}}_i\|_2^2 \frac{|\hat{\tau}_i|}{|\hat{\tau}_i|} \stackrel{(3.34)}{=} c \tilde{c} \frac{1}{|\hat{\tau}_i|} |\tau_i| h_{\tau_i}^2 |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \\ &= C_2 |\tau_i| h_{\tau_i}^2 |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit  $C_2 := \tilde{c} \frac{c}{|\hat{\tau}_i|}$ .

Die Abschätzung (3.40) erhält man aus der *lokal inversen Ungleichung*, welche z. B. in [41, Lemma 9.8, S. 213] oder in [17, S. 96 und Lemma A.6, S. 103] nachzulesen ist. Mit Hilfe von (3.36) und (3.41) ergibt sich

$$|\mathbf{v}_h|_{H^1(\tau_i)}^2 \leq C h_{\tau_i}^{-2} \|\mathbf{v}_h\|_{L_2(\tau_i)}^2 \leq C_3 |\tau_i| \sigma_{\tau_i}^2 |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2.$$

**iii.** *Zum Abschluss von Schritt 2 wird nun die Abschätzung (3.35) gezeigt.*

Dazu wird die Abschätzung (3.40) umgestellt

$$|\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \geq \frac{1}{C_3} \frac{1}{\sigma_{\tau_i}^2} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\tau_i)}^2$$

und über alle Elemente aus  $\hat{\Omega}_r$  summiert

$$\sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \geq \frac{1}{C_3} \sum_{i=1}^J \frac{1}{\sigma_{\tau_i}^2} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\tau_i)}^2 \geq \frac{1}{C_3} \frac{1}{\sigma^2} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)}^2, \quad (3.42)$$

mit  $\sigma = \max_i \sigma_{\tau_i} \geq \sigma_{\tau_i}$ . Aus (3.39), (3.42) und der Formregularität (3.38) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx &\stackrel{(3.39)}{\geq} C_1 \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \\ &= C_1 \left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\stackrel{(3.42)}{\geq} C_4 \frac{1}{\sigma} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)} \left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

**Schritt 3.** Für eine formreguläre Triangulierung ist

$$\left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2} \geq C \|q\|_{L_2(\Omega_r)} \quad \text{für alle } q \in H^1(\Omega_r) \cap L_{2,0}(\Omega_r), \quad (3.43)$$

zu zeigen.

Die Eigenschaft (3.43) wird für kontinuierliche Funktionen gezeigt. Durch die Abbildung  $F_r : H^1(\Omega_r) \rightarrow H^1(\hat{\Omega}_r)$  aus (3.12) wird der Nullmittelwert für  $q \in L_{2,0}(\Omega_r)$  nicht erhalten. Daher wird  $q \in H^1(\Omega_r) \cap L_{2,0}(\Omega_r)$  durch  $\bar{q} = F_r^{-1}(\hat{q})$  mit

$$\hat{\bar{q}} = \hat{q} - \frac{1}{|\hat{\Omega}_r|} \int_{\hat{\Omega}_r} \hat{q} \, dx$$

ersetzt. Die Funktion  $\hat{\bar{q}}$  erhält den Nullmittelwert, da

$$\int_{\hat{\Omega}_r} \hat{\bar{q}} \, dx = \int_{\hat{\Omega}_r} \hat{q} \, dx - \frac{1}{|\hat{\Omega}_r|} \int_{\hat{\Omega}_r} \int_{\hat{\Omega}_r} \hat{q} \, dx \, dx = 0.$$

Jetzt unterscheiden sich  $q$  und  $\bar{q}$  nur durch eine Konstante  $c = -\frac{1}{|\hat{\Omega}_r|} \int_{\hat{\Omega}_r} \hat{q} \, dx$ . Für die Konstante  $c$  gilt nur dann  $c = 0$ , wenn  $\int_{\hat{\Omega}_r} \hat{q} \, dx = 0$ . Aus der Betrachtung für  $q \in L_{2,0}(\Omega_r)$  von

$$\int_{\Omega_r} q^2 \, dx = \inf_{c \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{\Omega_r} (q + c)^2 \, dx \right\} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{\Omega_r} q^2 \, dx + 2c \underbrace{\int_{\Omega_r} q \, dx}_{=0} + c^2 \int_{\Omega_r} dx \right\} \leq \int_{\Omega_r} \bar{q}^2 \, dx,$$

folgt

$$\|q\|_{L_2(\Omega_r)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{L_2(\Omega_r)} \leq \|\bar{q}\|_{L_2(\Omega_r)}. \quad (3.44)$$

Aus der Ungleichung (3.44) und der Formregularität

$$\varrho_{\tau_i}^2 \leq \varrho_{\tau_i}^2 \pi \leq |\tau_i| \leq h_{\tau_i}^2,$$

wobei  $\varrho_{\tau_i}$  der Inkreisradius und  $h_{\tau_i}$  die längste Kante des Dreiecks  $\tau_i$  sind, erhält man

$$\begin{aligned} \|q\|_{L_2(\Omega_r)}^2 &\leq \|\bar{q}\|_{L_2(\Omega_r)}^2 = 2 \sum_{i=1}^J |\tau_i| \|\hat{\bar{q}}\|_{L_2(\hat{\tau}_i)}^2 \\ &\leq 2 \max_{i=1,\dots,J} h_{\tau_i}^2 \sum_{i=1}^J \|\hat{\bar{q}}\|_{L_2(\hat{\tau}_i)}^2 = 2 \max_{i=1,\dots,J} h_{\tau_i}^2 \|\hat{\bar{q}}\|_{L_2(\hat{\Omega}_r)}^2. \end{aligned}$$

Darauf die Poincaré–Ungleichung angewandt und die Konstante in  $\bar{q}$  weggelassen, ergibt

$$\|q\|_{L_2(\Omega_r)}^2 \leq C \max_{i=1,\dots,J} h_{\tau_i}^2 |\hat{q}|_{H^1(\hat{\Omega}_r)}^2 = C \max_{i=1,\dots,J} h_{\tau_i}^2 |\hat{q}|_{H^1(\hat{\Omega}_r)}^2 = C \max_{i=1,\dots,J} h_{\tau_i}^2 \sum_{i=1}^J |\hat{q}|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2.$$

Es wird mit  $|\tau_i|$  erweitert und mit der Fläche des Inkreises  $\pi \varrho_{\tau_i}^2$  nach unten abgeschätzt

$$\|q\|_{L_2(\Omega_r)}^2 \leq C \frac{\max_{i=1,\dots,J} h_{\tau_i}^2}{\min_{i=1,\dots,J} \varrho_{\tau_i}^2} \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \leq C \sigma_r^2 \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2, \quad (3.45)$$

wobei  $\sigma_r$  in (3.37) definiert wurde. Die Ungleichung (3.45) umgestellt, ergibt

$$\left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2} \geq C \frac{1}{\sigma_r} \|q\|_{L_2(\Omega_r)}.$$

Wegen der Formregularität der Triangulierung folgt, dass  $\sigma_r$  mit einem fixen  $\sigma$  nach oben beschränkt werden kann (siehe (3.38)).

**Schritt 4.** Die lokale Inf–Sup–Bedingung

$$\sup_{\mathbf{v} \in X_h(\Omega_r)} \frac{\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}(x) dx}{|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \beta_{\text{lokal}} \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)} \quad \text{für alle } q_h \in M_h(\Omega_r)$$

wird nun gezeigt.

Dazu werden die vorher bewiesenen Abschätzungen (3.35) und (3.43) für  $q_h \in M_h(\Omega_r)$  aus Schritt 2 und Schritt 3 verwendet. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx &\stackrel{(3.35)}{\geq} C_4 \frac{1}{\sigma} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)} \left\{ \sum_{i=1}^J |\tau_i| |\hat{q}_h|_{H^1(\hat{\tau}_i)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\stackrel{(3.43)}{\geq} C_5 \frac{1}{\sigma} |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)} C \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird umgestellt, das Supremum darauf angewandt und alle Konstanten werden zu  $\beta_{\text{lokal}}$  zusammengefasst, sodass sich die lokale Inf–Sup–Bedingung

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)} \frac{\int_{\Omega_r} q_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \beta_{\text{lokal}} \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)} \quad \text{für alle } q_h \in M_h(\Omega_r)$$

ergibt. □



### 3.3.4. Die globale Inf–Sup–Bedingung

Die lokale Inf–Sup–Bedingung (3.30) für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) bzw. für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5) kann mit Satz 3.14 auf das gesamte Gebiet erweitert werden. Dazu werden Satz 3.10 und Lemma 3.12 benötigt. Diese werden in dieser Arbeit jedoch nicht bewiesen.

**Satz 3.10.** [17, Theorem 1.12, S. 130]

Die Räume  $X_h(\Omega_r)$ ,  $M_h(\Omega_r)$  (3.9) erfüllen die lokale Inf–Sup–Bedingung (3.30). Weiters sei

$$\overline{M}_h := \{q \in L_{2,0}(\Omega) : q|_{\Omega_r} \text{ ist konstant für alle } r\}$$

und  $\overline{X}_h \subset X_h$ , sodass  $\overline{X}_h, \overline{M}_h$  ebenfalls die Inf–Sup–Bedingung mit einer von  $h$  unabhängigen Konstante  $\overline{\beta}$  erfüllen. Dann erfüllt das zugehörige Paar  $\overline{X}_h, \overline{M}_h$  ebenfalls die Inf–Sup–Bedingung (3.48) mit einer von  $h$  unabhängigen Konstante  $\beta$ .

Der Interpolationsoperator  $R_h$  wurde von Clément [9] eingeführt.

**Definition 3.11. (Interpolationsoperator  $R_h$ ).** [17, S. 110]

Für  $k \geq 1$  sei der Finite Elemente Raum [17, S. 98]

$$\Theta_h := \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_{\tau_\ell} \in P_k \text{ für } \tau_\ell \in \mathcal{T}_N\}$$

gegeben. Weiters sei  $\Omega_r$  ein Makroelement (3.8) und  $\hat{\Omega}_r$  die zugehörige Referenzkonfiguration (3.11).  $F_{\Omega_r}$  sei die stetige und invertierbare Abbildung (3.12) von  $\hat{\Omega}_r$  nach  $\Omega_r$ . Für  $\hat{v} \in L_1(\hat{\Omega}_r)$  sei  $\hat{R}_i \hat{v}$  das eindeutige Polynom aus  $P_k(\hat{\Omega}_r)$ , das mittels

$$\int_{\hat{\Omega}_r} (\hat{R}_i \hat{v} - \hat{v}) p \, dx = 0 \quad \text{für alle } p \in P_k(\hat{\Omega}_r)$$

berechnet wird. Anschließend wird für  $v \in L_1(\Omega)$  und  $\theta_i \in \Theta_h$  der Interpolationsoperator  $R_h v \in \Theta_h$  durch

$$R_h v := \sum_{i=1}^J \hat{R}_i(v \circ F_{\Omega_r})(\hat{a}_i) \theta_i$$

definiert, wobei  $\hat{a}_i := F_{\Omega_r}^{-1}(a_i)$  und  $J$  der Anzahl der Knoten eines Makroelements (3.8) entspricht.

**Lemma 3.12.** [17, Lemma 2.2, S. 136]

Seien  $\overline{X}_h = \{\mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \cap [H_0^1(\Omega)]^2$  und  $R_h$  der Interpolationsoperator aus Definition 3.11. Die Projektion  $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^2, \overline{X}_h)$  sei durch

$$\Pi_h \mathbf{v}(a) = R_h \mathbf{v}(a) \quad \text{für alle Knoten } a \text{ von } \mathcal{T}_N,$$

$$\int_e (\Pi_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds_x = 0 \quad \text{für alle Kanten } e \text{ von } \mathcal{T}_N$$

definiert. Für eine reguläre Triangulierung  $\mathcal{T}_N$  gilt

$$|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{k-m} |\mathbf{v}|_{H^k(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H^k(\Omega)]^2, \quad (3.46)$$

für  $m = 0, 1$  und  $k = 1, 2$  und einer von  $h$  und  $r$  unabhängigen positiven Konstante  $C$ . Unabhängig von der Triangulierung gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) q_h \, dx = 0 \quad \text{für alle } q_h \in Q_h, \quad (3.47)$$

mit  $Q_h = \{q \in L_2(\Omega) : q|_{\tau_i} \in P_0 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\}$ .

Damit die Gültigkeit der globalen Inf–Sup–Bedingung für die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  in Satz 3.14 bewiesen werden kann, wird zuerst die Aussage aus Lemma 3.13 benötigt.

**Lemma 3.13.** *Wenn die Voraussetzungen von Satz 3.9 erfüllt sind, existiert eine, von der Wahl  $h$  und  $r$  unabhängige, positive Konstante  $\beta_{\text{lokal}} > 0$ , sodass die lokale Inf–Sup–Bedingung*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)} \frac{b(q_h, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \beta_{\text{lokal}} \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)} \quad \text{für alle } q_h \in M_h(\Omega_r),$$

in den Räumen  $X_h(\Omega_r), M_h(\Omega_r)$  (3.9), für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) und die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5), gilt.

*Beweis.* Die lokale Inf–Sup–Bedingung wurde für  $-b(q_h, \mathbf{v}_h)$  in Satz 3.9 gezeigt. Ausgehend von (3.30) ergibt sich

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in X_h(\Omega_r)} \frac{-b(q_h, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \frac{-b(q_h, \mathbf{v}_{1,h})}{|\mathbf{v}_{1,h}|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \beta_{\text{lokal}} \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)} \quad \text{für alle } q_h \in M_h(\Omega_r),$$

mit

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in X_h(\Omega_r)} \frac{b(q_h, \mathbf{w}_h)}{|\mathbf{w}_h|_{H^1(\Omega_r)}} \stackrel{\mathbf{w}_h = -\mathbf{v}_{1,h}}{\geq} \frac{b(q_h, -\mathbf{v}_{1,h})}{|-\mathbf{v}_{1,h}|_{H^1(\Omega_r)}} = \frac{b(q_h, -\mathbf{v}_{1,h})}{|\mathbf{v}_{1,h}|_{H^1(\Omega_r)}} \geq \beta_{\text{lokal}} \|q_h\|_{L_2(\Omega_r)},$$

für alle  $q_h \in M_h(\Omega_r)$ . Damit ist die lokale Inf–Sup–Bedingung für  $b(q_h, \mathbf{v}_h)$  gezeigt.  $\square$

**Satz 3.14. (Die globale Inf–Sup–Bedingung).** [17, Corollary 4.1, S. 180]

Sei  $\mathcal{T}_N$  eine zulässige und formreguläre Triangulierung von  $\bar{\Omega}$  und zerlegbar in Makroelemente  $\Omega_r$  (3.8), dann erfüllen die Räume für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) und die Räume für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5), jeweils die globale Inf–Sup–Bedingung

$$\sup_{v_h \in X_h(\Omega)} \frac{b(q_h, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|q_h\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } q_h \in M_h(\Omega), \quad (3.48)$$

mit einer von  $h$  unabhängigen positiven Konstante  $\beta$ .

*Beweis.* Nach [17, S. 180].

Für diesen Beweis werden die Voraussetzungen von Satz 3.10, jeweils für die Taylor–Hood–Elemente und für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente überprüft.

**Fall 1.** Für die Taylor–Hood–Elemente (3.3) werden die Voraussetzungen von Satz 3.10 geprüft.

Dafür werden die Räume

$$\begin{aligned} W_h &= \{\mathbf{v} \in [C(\bar{\Omega})]^2 : \mathbf{v}|_K \in P_1^2 \text{ für } K \in \mathcal{T}_N\}, \\ \bar{X}_h &= W_h \cap H_0^1(\Omega)^2 \end{aligned}$$

und

$$\bar{M}_h = \{q \in L_{2,0}(\Omega) : q|_{\Omega_r} \text{ ist konstant für alle } r\}$$

eingeführt.

**Schritt 1, Fall 1.** Zu zeigen: Die Räume  $X_h(\Omega_r)$ ,  $M_h(\Omega_r)$  erfüllen die lokale Inf–Sup–Bedingung.

Nach Satz 3.9 ist diese Bedingung für die Taylor–Hood–Elemente erfüllt.

**Schritt 2, Fall 1.** Zu zeigen:  $\bar{X}_h \subset X_h$ .

Die Funktionen von  $\bar{X}_h$  sind stückweise lineare, und global stetige Polynome und sind somit elementweise in  $P_2^2$ . Deshalb liegen die Funktionen des Raums  $\bar{X}_h$  in  $X_h$  (vgl. (3.3)).

**Schritt 3, Fall 1.** Zu zeigen: Die Räume  $\bar{X}_h$ ,  $\bar{M}_h$  erfüllen die uniforme Inf–Sup–Bedingung.

Dazu wird die Projektion  $\Pi_h$  aus Lemma 3.12 verwendet.

i. Nach Lemma 3.12 gilt (3.47), d. h.

$$b(\mathbf{v}, q_h) = b(\Pi_h \mathbf{v}, q_h) \quad \text{für alle } q_h \in Q_h. \quad (3.49)$$

ii. Zu zeigen:

$$|\Pi_h \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} \leq c |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für } \mathbf{v} \in X. \quad (3.50)$$

Dafür wird die Abschätzung (3.46)

$$|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} \leq c |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$$

für  $m = 1$  und  $k = 1$  des Lemmas 3.12 verwendet. Diese Abschätzung (3.50) und die Dreiecksungleichung ergeben.

$$|\Pi_h \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} \leq |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} + |\Pi_h \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} \leq c |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}.$$

iii. Die Inf–Sup–Bedingung

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \overline{X}_h} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, dx}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}} \geq \overline{\beta} \|q_h\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{für alle } q_h \in \overline{M}_h$$

wird für die Räume  $\overline{X}_h, \overline{M}_h$  bewiesen.

Da  $\overline{M}_h \subset M$  kann auf die kontinuierliche Inf–Sup–Bedingung aus Satz 2.15 zurück gegriffen werden. Weiters ist  $\overline{M}_h \subset Q_h$ . Deshalb kann (3.49) verwendet werden. Mit der Abschätzung (3.50) und der Projektion  $\Pi_h \mathbf{v} \in \overline{X}_h$  ergibt sich

$$\beta \|q_h\|_{L_2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q_h)}{|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}} = \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\Pi_h \mathbf{v}, q_h)}{|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in X} c \frac{b(\Pi_h \mathbf{v}, q_h)}{|\Pi_h \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \overline{X}_h} c \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}},$$

die Inf–Sup–Bedingung für die Räume  $\overline{X}_h, \overline{M}_h$ .

Für die Taylor–Hood–Elemente (Fall 1) wurden in den Schritten 1, 2 und 3 die Voraussetzungen von Satz 3.10 gezeigt. Deshalb erfüllen die Räume  $X_h, M_h$  (3.3) die globale Inf–Sup–Bedingung (3.48).

**Fall 2.** Für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5) werden die Voraussetzungen von Satz 3.10 geprüft.

Dafür werden die Räume

$$\overline{X}_h = X_h$$

und

$$\overline{M}_h = \{q \in L_{2,0}(\Omega) : q|_{\Omega_r} \text{ ist konstant für alle } r\}$$

gesetzt.

**Schritt 1, Fall 2.** Zu zeigen: Die Räume  $X_h(\Omega_r), M_h(\Omega_r)$  erfüllen die lokale Inf–Sup–Bedingung.

Nach Satz 3.9 ist diese Bedingung für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente erfüllt.

**Schritt 2, Fall 2.** Zu zeigen:  $\overline{X}_h \subset X_h$ .

Für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente ist  $\overline{X}_h = X_h$ .

**Schritt 3, Fall 2.** Zu zeigen: Die Räume  $\overline{X}_h, \overline{M}_h$  erfüllen die uniforme Inf–Sup–Bedingung.

Die Beweisführung erfolgt analog wie in Schritt 3, Fall 1 der Taylor–Hood–Elemente (3.3).

Für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente (Fall 2) wurden in den Schritten 1, 2 und 3 die Voraussetzungen von Satz 3.10 gezeigt. Deshalb erfüllen die Räume  $X_h, M_h$  aus (3.5) die globale Inf–Sup–Bedingung (3.48).  $\square$

### 3.4. Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems

Mit der globalen Inf–Sup–Bedingung (Satz 3.14) erhält man ein stabiles Taylor–Hood–Element (3.3) und auch ein stabiles modifiziertes Taylor–Hood–Element (3.9) und es lässt sich dadurch die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems folgern.

#### 3.4.1. Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems für Taylor–Hood–Elemente

Es werden Betrachtungen zur eindeutigen Lösbarkeit des Stokes–Problems (3.6), das mittels der Taylor–Hood–Elemente aus (3.3) diskretisiert wird, angestellt. Weiters wird die Äquivalenz zum diskreten Stokes–System (3.52) gezeigt.

**Satz 3.15.** *Das diskrete Stokes–Problem (3.6), das in den Räumen  $X_h, M_h$  aus (3.3), mittels Taylor–Hood–Elementen diskretisiert wird, ist eindeutig lösbar.*

*Beweis.* Damit Brezzi’s–Splitting–Theorem 2.7 angewandt werden kann, und daraus die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Problems folgt, muss  $a(\cdot, \cdot)$   $X_h$ –elliptisch sein und  $b(\cdot, \cdot)$  die globale Inf–Sup–Bedingung erfüllen.

**i.** *Zu zeigen: Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $X_h$ –elliptisch.*

In Lemma 2.11 wurde gezeigt, dass die symmetrische Bilinearform  $a(\cdot, \cdot) [H_0^1(\Omega)]^2$ –elliptisch ist. Weil  $X_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2$ , kann diese Eigenschaft für die diskrete Bilinearform übernommen werden (vgl. [41, S. 249]).

**ii.** *Zu zeigen: Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die globale Inf–Sup–Bedingung.*

Die globale Inf–Sup–Bedingung für Taylor–Hood–Elemente wurde in Satz 3.14 bewiesen. □

Der Raum  $M_h$  enthält die Lösbarkeitsbedingung (1.4). Dazu soll eine äquivalente, diskrete Variationsformulierung der Gleichungen von Stokes erstellt werden. Es wird ein weiterer Raum

$$\widetilde{M}_h := \{q_h \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega) : q_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \quad (3.51)$$

ohne die Nebenbedingung  $L_{2,0}(\Omega)$  (vgl.  $M_h$  (3.3)) eingeführt. Im nachfolgenden Satz wird die Äquivalenz der Variationsformulierungen (3.6) und (3.52) gezeigt.

**Satz 3.16.** Die diskreten Variationsformulierungen (3.6) und (3.52) sind äquivalent, für  $X_h$  aus (3.3), und der rechten Seite (3.7)

$$\langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega - a(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}_h),$$

wobei im äquivalenten System (3.52),  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h) \in X_h \times \widetilde{M}_h$  gesucht sind für

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) - d(p_h, q_h) &= -b(\mathbf{u}_g, q_h) \quad \text{für alle } q_h \in \widetilde{M}_h. \end{aligned} \quad (3.52)$$

*Beweis.* Die Beweisführung erfolgt analog zu Satz 1.5. Es werden die Räume nochmals angegeben:

$$\begin{aligned} X_h &= \{\mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau_i} \in P_2 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\}, \\ M_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\}, \\ \widetilde{M}_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega) : q_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\}. \end{aligned}$$

**Schritt 1.** „(3.6)  $\Rightarrow$  (3.52)“.

Die Nebenbedingung  $p_h \in L_{2,0}(\Omega)$  in (3.6) kann mittels Lagrange–Multiplikator umgesetzt werden. Gesucht sind  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h, \lambda) \in X_h \times \widetilde{M}_h \times \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0,h} + \mathbf{u}_g$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p) &= \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega \\ b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) - \lambda \int_{\Omega} q_h \, dx &= -b(\mathbf{u}_g, q_h) \\ \int_{\Omega} p_h \, dx &= 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

für alle  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times \widetilde{M}_h$ . Für die Testfunktion  $q_h \equiv 1$  erhält man aus der zweiten Gleichung von (3.53) und der Lösbarkeitsbedingung (1.4)

$$\lambda |\Omega| = \lambda \int_{\Omega} 1 \, dx = b(\mathbf{u}_{0,h}, 1) + b(\mathbf{u}_g, 1) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_{0,h} + \mathbf{u}_g) \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds_x = 0.$$

Daraus folgt  $\lambda = 0$ . Deshalb kann die dritte Gleichung von (3.53) als

$$\int_{\Omega} p_h \, dx - \lambda = 0$$

geschrieben werden. Nun lässt sich der Lagrange–Multiplikator in (3.53) eliminieren und es ergibt sich (3.52).

**Schritt 2.** „(3.6)  $\Leftarrow$  (3.52)“.

Es wird die Testfunktion  $q_h \equiv 1$  gewählt und in die zweite Gleichung von (3.52) eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{0,h} \, dx - |\Omega| \int_{\Omega} p_h \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_g \, dx.$$

Mit der Lösbarkeitsbedingung (1.4) folgt

$$|\Omega| \int_{\Omega} p_h \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_{0,h} + \mathbf{u}_g) \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds_x = 0.$$

Also ist  $\int_{\Omega} p_h \, dx = 0$ . Daraus folgt, dass  $p_h \in L_{2,0}(\Omega)$  und somit  $p_h \in M_h$  sein muss. Für  $\mathbf{v}_h \in X_h$  folgt aus (3.52) das System (3.6).  $\square$

**Satz 3.17.** *Das äquivalente Stokes–System (3.52), das in den Räumen  $X_h$  (3.3) und  $\widetilde{M}_h$  (3.51) mit den Taylor–Hood–Elementen diskretisiert wird, ist eindeutig lösbar und es gilt die Stabilitätsabschätzung*

$$\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C\{\|\mathbf{f}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\mathbf{g}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d}\}.$$

*Beweis.* In Satz 3.16 wurde die Äquivalenz zum diskreten Stokes–Problem (3.6) gezeigt. Dieses Stokes–Problem ist nach Satz 3.15 eindeutig lösbar und Brezzi’s Splitting Theorem 2.7 liefert die Stabilitätsabschätzung.  $\square$

### 3.4.2. Die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Stokes–Systems für modifizierte Taylor–Hood–Elemente

Es werden Betrachtungen zur eindeutigen Lösbarkeit des Stokes–Problems (3.6), das mittels modifizierten Taylor–Hood–Elementen (3.5) diskretisiert wird, angestellt. Weiters wird die Äquivalenz zum diskreten Stokes–System (3.52) gezeigt.

**Satz 3.18.** *Das diskrete Stokes–Problem (3.6), das in den Räumen  $X_h, M_h$  (3.5) mittels modifizierten Taylor–Hood–Elementen diskretisiert wird, ist eindeutig lösbar.*

*Beweis.* Analoge Beweisführung wie in Satz 3.15.  $\square$

Im nachfolgenden Satz wird die Äquivalenz der Variationsformulierungen angegeben.

**Satz 3.19.** *Die diskreten Variationsformulierungen (3.6) und (3.54) sind äquivalent, für  $X_h$  aus (3.5), und der rechten Seite (3.7)*

$$\langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega - a(\mathbf{u}_g, \mathbf{v}_h),$$

wobei im äquivalenten System (3.54)  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h) \in X_h \times \widetilde{M}_h$  gesucht sind für

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) - d(p_h, q_h) &= -b(\mathbf{u}_g, q_h) \quad \text{für alle } q_h \in \widetilde{M}_h. \end{aligned} \quad (3.54)$$

*Beweis.* Analoge Beweisführung wie in Satz 3.16.  $\square$

**Satz 3.20.** *Das äquivalente Stokes–System (3.54), das in den Räumen  $X_h$  aus (3.5) und  $\widetilde{M}_h$  aus (3.51) mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen diskretisiert wird, ist eindeutig lösbar und es gilt die Stabilitätsabschätzung*

$$\|\mathbf{u}_{0,h}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C\{\|\mathbf{f}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|\mathbf{g}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d}\}.$$

*Beweis.* In Satz 3.19 wurde die Äquivalenz zum diskreten Stokes–Problem (3.6) gezeigt. Dieses Stokes–Problem ist nach Satz 3.18 eindeutig lösbar und Brezzi’s Splitting Theorem 2.7 liefert die Stabilitätsabschätzung.  $\square$

### 3.5. Fehlerabschätzung, Approximationseigenschaften

In diesem Abschnitt werden zum Einen Sätze zur Fehlerabschätzung der Geschwindigkeit und des Drucks und zum Anderen zu den Approximationseigenschaften von  $S_h^1(\mathcal{T}_N)$  und  $S_h^2(\mathcal{T}_N)$  angegeben. Der allgemeine Satz 3.21 liefert eine Fehlerabschätzung für die gewählte diskrete Approximation der Lösung eines gemischten Problems. Der Satz 3.21 wird ohne Beweis angeführt.

**Satz 3.21.** *[4, Satz 4.5, S. 129], [3, Theorem 5.2.5, S. 278]*

*Seien  $X, M$  Hilberträume, und dazu werden die endlich-dimensionalen Teilräume  $X_h \subset X$  und  $M_h \subset M$  gewählt. Seien  $(u, p) \in X \times M$  und  $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$  die zugehörigen Lösungen der Variationsformulierungen*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in X \\ b(\mathbf{u}, q) &= \langle g, q \rangle_\Omega \quad \text{für alle } q \in M \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= \langle g, q_h \rangle_\Omega \quad \text{für alle } q_h \in M_h. \end{aligned}$$



Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sei  $V$ -elliptisch, mit einer Konstante  $\alpha_1 > 0$ ,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha_1 \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in V,$$

wobei  $V := \ker B = \{\mathbf{v} \in X : b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ für } q \in M\}$ . Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfülle die Inf-Sup-Bedingung

$$\inf_{q \in M} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V \|q\|_M} \geq \beta_1 > 0.$$

Für das diskrete Problem sei ebenfalls die diskrete Inf-Sup-Bedingung für die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V \|q_h\|_M} \geq \beta_2 > 0$$

erfüllt, und die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sei  $V_h$ -elliptisch, mit einer Konstante  $\alpha_2 > 0$ ,

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha_2 \|\mathbf{v}_h\|_V^2 \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in V_h,$$

wobei  $V_h := \ker B_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h : b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \text{ für } q_h \in M_h\}$ .

Dann gilt, mit einer von  $h$  unabhängigen Konstante  $C > 0$ , folgende Abschätzung

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_M \leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in V} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \inf_{q_h \in M} \|p - q_h\|_M \right). \quad (3.55)$$

Im Allgemeinen ist  $V_h \not\subseteq V$ . Im Sonderfall der konformen Approximation, falls der Kern  $V_h \subseteq V$ , wobei  $V = \ker B$  ist, gilt folgende bessere Abschätzung [3, Theorem 5.2.5]

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in V} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V.$$

Im nachfolgenden Satz 3.22 werden der allgemeine Satz 3.21 und insbesondere die Fehlerabschätzung (3.55) auf das Stokes-Problem angewandt.

**Satz 3.22.** *Das kontinuierliche Stokes-System (1.17) ist eindeutig lösbar. Ebenfalls ist das diskrete Stokes-System (3.6), das entweder mit Taylor-Hood-Elementen aus (3.3) oder mittels der modifizierten Taylor-Hood-Elemente aus (3.5) diskretisiert wird, eindeutig lösbar. Deshalb gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0,h}\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_h\|_{[H^1(\Omega)]^d} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{L_2(\Omega)} \right) \quad (3.56)$$

*Beweis.* Es werden die Voraussetzungen von Satz 3.21 überprüft.

Die Eindeutigkeit des kontinuierlichen Stokes-Systems (1.17) wird in Satz 2.15 gezeigt. Die Eindeutigkeit der diskreten Systeme wird in Satz 3.15 sowie in Satz 3.18 gezeigt. Somit wurde gezeigt, dass alle Voraussetzungen von Satz 3.21 erfüllt sind, und deshalb die Fehlerabschätzung (3.56) für das Stokes-Problem gilt.  $\square$

Für weitere Abschätzungen von (3.56) sowie für die Interpretation der numerischen Ergebnisse werden die Approximationseigenschaften von  $S_h^1(\mathcal{T}_N)$  und  $S_h^2(\mathcal{T}_N)$  benötigt, wobei  $S_h^1(\mathcal{T}_N)$  der Raum der stückweise, linearen und global stetigen Funktionen und  $S_h^2(\mathcal{T}_N)$  der Raum der stückweisen, quadratischen und global stetigen Funktionen ist. Diese Sätze werden im Folgenden ohne Beweis angeführt.

**Satz 3.23. (Approximationseigenschaft von  $S_h^1(\mathcal{T}_N)$ ).** [41, Theorem 9.10, S. 220] Wenn  $u \in H^s(\mathcal{T}_N)$  und  $s \in [\sigma, 2]$  mit  $\sigma = [0, 1]$ , wobei  $S_h^1(\mathcal{T}_N)$  der Raum der stetigen, stückweisen linearen Ansatzfunktionen ist, dann gilt die Approximationseigenschaft

$$\inf_{v_h \in S_h^1(\mathcal{T}_N)} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\mathcal{T}_N)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\mathcal{T}_N)}.$$

**Satz 3.24. (Approximationseigenschaft von  $S_h^2(\mathcal{T}_N)$ ).** [41, Theorem 9.16, S. 224] Wenn  $u \in H^s(\mathcal{T}_N)$  und  $s \in [\sigma, 3]$  mit  $\sigma = [0, 1]$ , wobei  $S_h^2(\mathcal{T}_N)$  der Raum der stetigen, stückweisen quadratischen Ansatzfunktionen ist, dann gilt die Approximationseigenschaft

$$\inf_{v_h \in S_h^2(\mathcal{T}_N)} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\mathcal{T}_N)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\mathcal{T}_N)}.$$

Für Taylor–Hood–Elemente ergibt sich aus den Sätzen 3.22 – 3.24, für genügend glatte Lösungen, die optimale Konvergenzordnung 2,

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0,h}\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C(h^2 |\mathbf{u}|_{[H^3(\mathcal{T}_N)]^2} + h^2 |p|_{H^2(\mathcal{T}_N)}).$$

Die Fehlerabschätzung für die modifizierten Taylor–Hood–Elemente ergibt eine reduzierte Konvergenzordnung

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0,h}\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C\left(\frac{h}{2} |\mathbf{u}|_{[H^2(\mathcal{T}_N)]^2} + h^2 |p|_{H^2(\mathcal{T}_N)}\right). \quad (3.57)$$

Wird das Stokes–Problem entweder mit Taylor–Hood–Elementen (3.3) oder mit modifizierten Taylor–Hood–Elementen (3.5) diskretisiert, die Lösung in  $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0,h} + \tilde{\mathbf{g}}_h$  aufgespalten, dann erhält man die diskrete Variationsformulierung des Stokes–Problems mit gestörter rechter Seite. In dieser Arbeit wird die diskrete Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{g}}_h$  der Dirichlet–Daten in das Gebiet  $\Omega$  mit Hilfe der Interpolation  $\mathbf{g}_h = I_h \mathbf{g}$  am Rand berechnet (siehe [41, Abschnitt 11.1]). Die diskrete Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{g}}_h$  der Dirichlet–Daten ist im Fall der Taylor–Hood–Elemente (3.3) eine stückweise quadratische und global stetige Funktion und im Fall der modifizierten Taylor–Hood–Elemente (3.5) eine stückweise lineare und global stetige Funktion. Es wird das gestörte Problem betrachtet:

Gesucht sind  $(\mathbf{u}_{0,h}, p_h) \in X_h \times M_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_{0,h}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega && \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_{0,h}, q_h) &= -b(\tilde{\mathbf{g}}_h, q_h) && \text{für alle } q_h \in M_h, \end{aligned}$$

mit der zugehörigen rechten Seite (3.7)

$$\langle \mathbf{f}^*, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_\Omega - a(\tilde{\mathbf{g}}_h, \mathbf{v}_h),$$

und den Bilinearformen (1.16), (1.14)

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \nu \int_{\Omega} (\nabla u_{1,h} \cdot \nabla v_{1,h} + \nabla u_{2,h} \cdot \nabla v_{2,h}) dx,$$

$$b(\mathbf{v}_h, p_h) = - \int_{\Omega} p_h(x) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(x) dx.$$

**Bemerkung 3.25.** *Der durch Approximation der Dirichlet-Daten entstehende zusätzliche Fehler kann ähnlich wie in [41, Abschnitt 11.1] analysiert werden und stört bei hinreichender Regularität die optimale Konvergenzordnung nicht. Der zusätzliche Fehler kann über das Strang-Lemma abgeschätzt werden. Eine andere Möglichkeit wäre eine Quasi-Interpolation im Sinne von [37] mit geeignet gewählten Momenten zur Garantie der Divergenzfreiheit. Dieses Vorgehen wird hier aber nicht weiter betrachtet.*

### 3.6. Numerische Ergebnisse der FEM mit Taylor–Hood–Elementen und modifizierten Taylor–Hood–Elementen

Die numerischen Berechnungen von Dirichlet–Randwertproblemen werden jeweils mit Taylor–Hood–Elementen und mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen realisiert. Die numerische Umsetzung der Matrizen der Taylor–Hood–Elemente wird im Masterprojekt [27] genauer diskutiert. Die numerische Umsetzung der Matrizen der modifizierten Taylor–Hood–Elemente wird in Abschnitt 5.3.2 nur kurz betrachtet.

Für die numerischen Tests werden Lösungen vorgegeben, die sich nicht in den Ansatzräumen befinden. Der theoretische Fehler (siehe Sätze 3.23 – 3.24), den man aus den Approximationseigenschaften erhält, wird mit der *Estimated Order of Convergence* [41, S. 253] verglichen

$$eoc := \frac{\log \|u - u_{h_\ell}\| - \log \|u - u_{h_{\ell+1}}\|}{\log h_\ell - \log h_{\ell+1}}. \quad (3.58)$$

Für den Druck wird eine Funktion  $p \in L_{2,0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  und für die Geschwindigkeit eine genügend glatte Funktion  $\mathbf{u} \in [H^3(\Omega)]^2$  gewählt. Es wird mit folgenden Funktionen in Polarkoordinaten

$$p(r, \varphi) = 320r^3 - 96r^2 + 1$$

$$u_1(r, \varphi) = \sin(\varphi)(-4096r^4 + 1280r^3)$$

$$u_1(r, \varphi) = \cos(\varphi)(4096r^4 - 1280r^3),$$

bzw. in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 320(x^2 + y^2)^{3/2} - 96(x^2 + y^2) + 1 \\ u_1(x, y) &= y(1280(x^2 + y^2) - 4096(x^2 + y^2)^{3/2}) \\ u_2(x, y) &= x(-1280(x^2 + y^2) + 4096(x^2 + y^2)^{3/2}), \end{aligned}$$

und der zugehörigen rechten Seite

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{64}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( 15x^3 + 960x^2y - 160y(-6y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \\ -3x(-5y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \frac{64}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( -960x^3 + 15x^2y + 160x(-6y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \\ -3y(-5y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \end{pmatrix}$$

und mit dem Gebiet  $\Omega = B_0(R = \frac{1}{4})$ , also einem Kreis um den Ursprung mit Radius  $\frac{1}{4}$ , gerechnet. Es wird mit der Ausgangsvernetzung, wie in Abbildung 3.8, gearbeitet.

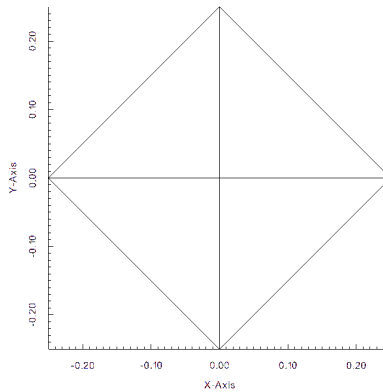
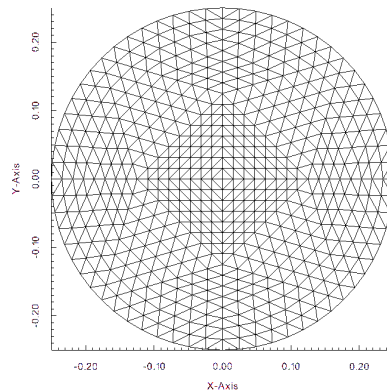


Abbildung 3.8.: Ausgangsvernetzung,  $L=0$

Diese Ausgangsvernetzung wird in den weiteren Verfeinerungsschritten dem Kreis  $B_0(\frac{1}{4})$  weiter angenähert. In Abbildung 3.9 ist beispielhaft das Netz des 4. Verfeinerungsschrittes  $L = 4$  angeführt. Der Fehler durch die Randapproximation wird in dieser Arbeit nicht weiter abgeschätzt, weil dieser Fehler die Konvergenzordnung der linearen Finiten Elemente nicht stört (vgl. [8]).

Abbildung 3.9.: Verfeinerungsschritt,  $L=4$ 

**Beispiel 3.1.** Die numerische Umsetzung der Finiten Elemente Methode mit den Taylor–Hood–Elementen.

L	N	$\ u_1 - u_{1,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ u_2 - u_{2,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\Omega_h)}$	eoc
0	4	2,19E+00		2,19E+00		5,13E-02	
1	16	2,01E+00	0,22	2,01E+00	0,22	5,05E-02	0,04
2	64	6,89E-01	1,58	6,89E-01	1,58	2,75E-02	0,90
3	256	1,90E-01	1,95	1,90E-01	1,95	6,62E-03	2,15
4	1024	4,91E-02	1,97	4,91E-02	1,97	1,31E-03	2,36
5	4096	1,24E-02	1,99	1,24E-02	1,99	2,81E-04	2,22
6	16384	3,10E-03	2,00	3,10E-03	2,00	6,60E-05	2,09
7	65536	7,77E-04	2,00	7,77E-04	2,00	1,60E-05	2,03
8	262144	1,94E-04	2,00	1,94E-04	2,00	4,00E-06	2,01
Theorie:			2		2		2

Tabelle 3.1.: Taylor–Hood–Elemente,  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$ ,  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler für  $p$ 

Es wird mit den Ansatzräumen (vgl. (3.3))

$$\begin{aligned}\tilde{X}_h &= \{\mathbf{v}_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau_\ell} \in P_2 \text{ für } \tau_\ell \in \mathcal{T}_N\} \\ M_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_{\tau_\ell} \in P_1 \text{ für } \tau_\ell \in \mathcal{T}_N\}\end{aligned}$$

gearbeitet. In Tabelle 3.1 sind die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks und die  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler der Geschwindigkeit für 8 Verfeinerungsschritte aufgelistet. Hier stimmt die Estimated Order of Convergence jeweils mit der erwarteten Konvergenzordnungen überein. In diesem Beispiel beeinträchtigt die linear affine Randapproximation die Konvergenzordnung der Taylor–Hood–Elemente nicht. Dabei ist zu beachten, dass die Normen auf der jeweiligen Approximation  $\Omega_h$  des Gebiets  $\Omega$  berechnet werden.

**Beispiel 3.2.** Die numerische Umsetzung der Finiten Elemente Methode mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen.

Bei der Berechnung der modifizierten Taylor–Hood–Elemente wird mit den Ansatzräumen (vgl. (3.5))

$$\begin{aligned}\tilde{X}_h &= \{\mathbf{v}_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau'_\ell} \in P_1 \text{ für jedes Subdreieck } \tau'_\ell \in \tau_\ell, \forall \tau_\ell \in \mathcal{T}_N\} \\ M_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega) : q_h|_{\tau_\ell} \in P_1 \text{ für } \tau_\ell \in \mathcal{T}_N\}\end{aligned}$$

gearbeitet. In Tabelle 3.2 sind die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks und die  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler der Geschwindigkeit für 9 Verfeinerungsschritte aufgelistet. Werden die Ergebnisse aus der Tabelle 3.2 mit den theoretischen Fehlern aus Abschnitt 3.5 verglichen, lässt sich erkennen, dass die Konvergenzordnung des  $H^1(\Omega_h)$ –Fehlers der Geschwindigkeit mit der Estimated Order of Convergence (3.58) übereinstimmen. Für den  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks konvergiert die Estimated Order of Convergence gegen 1.5, obwohl die Theorie zunächst einen Wert von 1 erwarten lässt. Die lineare Konvergenz aus dem Geschwindigkeitsanteil in (3.57) beeinflusst die Ordnung des Drucks  $p$ . Dieses Phänomen wird genauer in [39] betrachtet. So kann in solchen Fällen im präasymptotischen Bereich eine höhere Konvergenzordnung beobachtet werden.

L	$N$	$\ u_1 - u_{1,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ u_2 - u_{2,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\Omega_h)}$	eoc
0	4	2,42E+00		2,42E+00		5,29E-02	
1	16	2,32E+00	0,10	2,32E+00	0,10	5,04E-02	0,12
2	64	1,55E+00	0,60	1,55E+00	0,60	2,44E-01	-2,3
3	256	8,55E-01	0,89	8,55E-01	0,89	1,08E-01	1,23
4	1024	4,41E-01	0,96	4,41E-01	0,96	3,96E-02	1,46
5	4096	2,22E-01	0,99	2,22E-01	0,99	1,36E-02	1,54
6	16384	1,11E-01	1,00	1,11E-01	1,00	4,63E-03	1,56
7	65536	5,57E-02	1,00	5,57E-02	1,00	1,59E-03	1,54
8	262144	2,79E-02	1,00	2,79E-02	1,00	5,55E-04	1,52
9	1048576	1,39E-02	1,00	1,39E-02	1,00	1,95E-04	1,51
Theorie:			1			1	1

Tabelle 3.2.: mod. TH–Elemente,  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$ ,  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler für  $p$

Werden die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler und  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler der jeweiligen Diskretisierungen miteinander verglichen, fällt auf, dass die Fehler bei der Diskretisierung mit den Taylor–Hood–Elementen schneller gegen Null gehen, als bei der Diskretisierung mittels modifizierten Taylor–Hood–Elementen.

# 4. Randintegraloperatoren für das Stokes–Problem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ . Gegeben sind die Kräfte  $\mathbf{f} \in [L_2(\Omega)]^d$ , die Viskositätskonstante  $\nu$ , und gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  und der Druck  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Gleichungen von Stokes

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

sollen gelöst werden. Die Gleichungen der linearen Elastizität und die Gleichungen von Stokes hängen über die Fundamentallösungen der Geschwindigkeit (4.4) des Stokes–Systems, mit den Fundamentallösungen des Systems der linearen Elastizität zusammen. Es kann das System der linearen Elastizität mit Hilfe der Lamé–Konstanten in das Stokes–System überführt werden [21, S. 61f], [41, S. 103]. In diesem Abschnitt zu den Randintegraloperatoren wird in erster Linie auf die Arbeiten von [21, 41] verwiesen. Weitere Ergebnisse zu den Randintegraloperatoren können [11, 23, 25, 35, 40, 47] entnommen werden. Bevor jedoch die Randintegraloperatoren betrachtet werden können, werden zuerst die Greenschen Formeln und die Darstellungsformeln angeführt. Danach wird kurz auf das Innen- und Außenraumproblem eingegangen und abschließend werden die Randintegraloperatoren und die Randintegralgleichungen aufgestellt.

## 4.1. Die Greenschen Formeln

### 4.1.1. Die 1. Greensche Formel

Die 1. Greensche Formel für die Gleichungen von Stokes (1.12)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} \, dx - b(\mathbf{v}, p) + \langle \mathbf{t}(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma},$$

mit den Bilinearformen (1.13), (1.14)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx,$$

$$b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx,$$

und der Randspannung (1.15),  $d = 2, 3$

$$t_i(\mathbf{u}, p) := -[p + \nu \operatorname{div} \mathbf{u}]n_i + 2\nu \sum_{j=1}^d e_{ij}(\mathbf{u})n_j, \quad x \in \Gamma, \quad i = 1, \dots, d,$$

wurde in Abschnitt 1.1.1, mit Hilfe des linearisierten Verzerrungstensors (1.7) hergeleitet. Ab jetzt muss mit der Darstellung (1.13) aus der linearen Elastizitätstheorie, für die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  gearbeitet werden (vgl. [35, S. 74]). Unter Berücksichtigung von  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , kann [21, S. 63, (2.3.6)]

$$T(\mathbf{u}, p) := -p\mathbf{n} + \nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\top})\mathbf{n}, \quad (4.1)$$

für die Randspannung verwendet werden. In Lemma 4.1 wird die Äquivalenz zwischen den Darstellungen (1.15) und (4.1) gezeigt.

**Lemma 4.1.** *Die Randspannungen (1.15) und (4.1) sind äquivalent, für  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d$ ,  $d = 2, 3$  und  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .*

*Beweis.* Hier wird der Beweis für  $d = 3$  geführt, für  $d = 2$  kann analog vorgegangen werden. Für jede Komponente von (1.15) wird die Definition vom linearisierten Verzerrungstensor (1.7) und in (4.1) wird

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

eingesetzt. Ein Koeffizientenvergleich liefert die Aussage von Lemma 4.1.  $\square$

In weiterer Folge wird mit der Darstellung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} \, dx - b(\mathbf{v}, p) + \langle T(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma},$$

für die 1. Greensche Formel gearbeitet.



### 4.1.2. Die 2. Greensche Formel

Aus der Symmetrie von  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  und der 1. Greenschen Formel für den formal adjungierten Operator

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{v} - \nabla q] \cdot \mathbf{v} \, dx + b(\mathbf{u}, q) + \langle T'(\mathbf{v}, q), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} \rangle_{\Gamma},$$

mit [21, S. 63, (2.3.6)]

$$T'(\mathbf{u}, p) := p \mathbf{n} + \nu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\top}) \mathbf{n} \quad (4.2)$$

und  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  [21, S. 63, (2.3.7)] ergibt sich die 2. Greensche Formel für die Gleichungen von Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{v} - \nabla q] \cdot \mathbf{u} \, dx + b(\mathbf{v}, p) &= \langle T(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \langle T'(\mathbf{v}, q), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \\ &+ \int_{\Omega} [-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p] \cdot \mathbf{v} \, dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Darstellungsformeln mit Hilfe der Greenschen Formeln und den Fundamentallösungen, jeweils für die Geschwindigkeit und den Druck aufgestellt.

## 4.2. Darstellungsformeln und Fundamentallösungen

Die *Fundamentallösungen* des Stokes-Problems [21, S. 64, (2.3.10)] sind gegeben durch

$$\begin{aligned} U_{k,\ell}^*(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\nu} \left[ -\log|x-y| \delta_{k\ell} + \frac{(y_k - x_k)(y_\ell - x_\ell)}{|x-y|^2} \right] & d = 2, k, \ell = 1, 2 \\ \frac{1}{8\pi\nu} \left[ \frac{\delta_{k\ell}}{|x-y|} + \frac{(y_k - x_k)(y_\ell - x_\ell)}{|x-y|^3} \right] & d = 3, k, \ell = 1, \dots, 3 \end{cases} \\ Q_k^*(x, y) &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{y_k - x_k}{|x-y|^2} & d = 2, k = 1, 2 \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{y_k - x_k}{|x-y|^3} & d = 3, k = 1, \dots, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aus (4.4) lassen sich der fundamentale Geschwindigkeitstensor  $U^*(x, y)$

$$U^*(x, y) := [\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_d^*], \quad (4.5)$$

und der fundamentale Druckvektor  $Q^*(x, y)$

$$Q^*(x, y) := [Q_1^*, \dots, Q_d^*]^\top \quad (4.6)$$

definieren. Die Herleitung der Fundamentallösungen des Stokes–Problems ist in [41, S. 101ff] ausgeführt.

### 4.2.1. Darstellungsformel für die Geschwindigkeit

Damit die Darstellungsformel für die Geschwindigkeitskomponenten  $u_k(x)$ ,  $x \in \Omega$  des Geschwindigkeitsfelds  $\mathbf{u}$  aufgestellt werden kann, sind jeweils Lösungen  $\mathbf{v}^k(x, y) \in \mathbb{R}^d$  und  $q^k(x, y) \in \mathbb{R}$  gesucht, sodass

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d [-\nu \Delta v_i^k + \frac{\partial}{\partial y_i} q^k] u_i dy = u_k \quad (4.7)$$

$$\operatorname{div}_y \mathbf{v}^k = 0 \quad x \in \Omega, k = 1, \dots, d$$

für  $d = 2, 3$ , gilt (Herleitung siehe [41, S. 101]). Werden die Gleichungen (4.7) und die Fundamentallösungen (4.4) für  $\mathbf{v}(y) = \mathbf{U}_k^*(x, y)$  und  $q(y) = Q_k^*(x, y)$  in die 2. Greensche Formel (4.3) für die Gleichungen von Stokes eingesetzt, ergibt sich die Darstellungsformel für die Geschwindigkeitskomponente  $u_k$  [21, S. 64, (2.3.8)]

$$u_k(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}_k^*(x, y) T_y(\mathbf{u}(y), p(y)) ds_y - \int_{\Gamma} T'_y(\mathbf{U}_k^*(x, y), Q_k^*(x, y)) \mathbf{u}(y) ds_y$$

$$+ \int_{\Omega} \mathbf{U}_k^*(x, y) \mathbf{f}(y) dx,$$

für  $x \in \Omega$ ,  $k = 1, \dots, d$ . In kompakter Schreibweise ergibt sich die Darstellungsformel für die Geschwindigkeit [21, S. 64, (2.3.11)], wie folgt

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) T_y(\mathbf{u}(y), p(y)) ds_y - \int_{\Gamma} T'_y(U^*(x, y), Q^*(x, y)) \mathbf{u}(y) ds_y \quad (4.8)$$

$$+ \int_{\Omega} U^*(x, y) \mathbf{f}(y) dy,$$

für  $x \in \Omega$ , mit dem fundamentalen Geschwindigkeitstensor  $U^*(x, y)$  aus (4.5) und den Randspannungen  $T$  und  $T'$  aus (4.1) bzw. (4.2).

### 4.2.2. Darstellungsformel für den Druck

Die Darstellungsformel für den Druck [21, 41],  $d = 2, 3$

$$p(x) = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^d t_i(\mathbf{u}(y), p(y)) Q_i^*(x, y) ds_y - 2\nu \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} Q_i^*(x, y) n_j(x) u_i(y) ds_y \\ + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d f_i Q_i^*(x, y) dy \quad \text{für } x \in \Omega,$$

kann auch in kompakter Schreibweise [21, S. 64, (2.3.12)]

$$p(x) = \int_{\Gamma} Q^*(x, y) T_y(\mathbf{u}(y), p(y)) ds_y - 2\nu \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} Q^*(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \\ + \int_{\Omega} Q^*(x, y) \mathbf{f}(y) dy, \quad (4.9)$$

für  $x \in \Omega$ , mit dem fundamentalen Druckvektor  $Q^*(x, y)$  aus (4.6) und den Randspannungen  $T$  und  $T'$  aus (4.1) bzw (4.2), geschrieben werden. Im Folgenden werden die Stokesschen Gleichungen jeweils im Innenraum und im Außenraum betrachtet.

## 4.3. Innenraumproblem

Für die Gleichungen von Stokes im Innenraum

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.10)$$

wird entweder das Dirichlet–Randwertproblem oder das Neumann–Randwertproblem betrachtet. Beim *Dirichlet–Randwertproblem* [21, S. 66] ist die Spur der Geschwindigkeit am Rand gegeben

$$\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} = \mathbf{g}_D \quad \text{auf } \Gamma,$$

und es muss die Lösbarkeitsbedingung (1.4), (bzw. [21, S. 66])

$$0 = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds_x = \int_{\Gamma} \mathbf{g}_D \cdot \mathbf{n} ds_x \quad (4.11)$$

erfüllt sein. Das heißt, die Dirichlet–Daten  $\mathbf{g}_D$  müssen einer divergenzfreien Strömung entsprechen. Beim homogenen *Neumann–Randwertproblem*, d. h.  $\mathbf{f} = 0$ , ist die hydrodynamische Randspannung (4.1)

$$T_x(\mathbf{u}, p) = \mathbf{g}_N \quad \text{auf } \Gamma$$

gegeben. Für einfach zusammenhängende Gebiete muss die Lösbarkeitsbedingung [21, S. 66]

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g}_N \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}) ds_x = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \text{ und } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1+2(d-2)}, d = 2, 3 \quad (4.12)$$

erfüllt sein. Falls  $d = 2$  wird

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x} := \mathbf{a} + b \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

gesetzt.

**Herleitung 4.2.** Die Lösbarkeitsbedingung (4.12) für das Neumann–Randwertproblem.

*Beweis.* Nach [46, S. 345].

Für die Herleitung der Lösbarkeitsbedingung (4.12) werden die Randdaten in das homogene Neumann–Randwertproblem eingesetzt. Für  $d = 2$  werden die Funktionen

$$q = 0, \quad \mathbf{v} = b \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$$

und für  $d = 3$  werden

$$q = 0, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3,$$

in die 2. Greensche Formel (4.3) eingesetzt. Es ergibt sich jeweils die Lösbarkeitsbedingung (4.12).  $\square$

Der Vektor  $(\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x})$  aus (4.12) entspricht einer Starrkörperverschiebung [20, S. 113], wobei der Anteil  $\mathbf{a}$  einer Translation und der Anteil  $\mathbf{b}$  einer Rotation entspricht. Wird die Starrkörperverschiebung auf den Rand  $\Gamma$  eingeschränkt, ergibt sich die Menge

$$\{\mathbf{m}_{|\Gamma} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}_{|\Gamma} \text{ für } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1+2(d-2)}, d = 2, 3\}. \quad (4.14)$$

Für den zweidimensionalen Fall wird (4.13) auf den Rand  $\Gamma$  eingeschränkt.

## 4.4. Außenraumproblem

Die homogenen Gleichungen von Stokes im Außenraum  $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= 0 & \text{in } \Omega^{\text{ext}} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

werden mit den Darstellungsformeln [21, S. 66]

$$\mathbf{u}(x) = - \int_{\Gamma} U^*(x, y) T_y^{\text{ext}}(\mathbf{u}(y), p(y)) ds_y + \int_{\Gamma} T_y^{\text{ext}'}(U^*(x, y), Q^*(x, y)) \mathbf{u}(y) ds_y + \mathbf{w} \quad (4.16)$$

$$p(x) = - \int_{\Gamma} Q^*(x, y) T_y^{\text{ext}}(\mathbf{u}(y), p(y)) ds_y + 2\nu \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{ext}} Q^*(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y$$

für  $x \in \Omega^{\text{ext}}$  gelöst, wobei  $\mathbf{w}$  in (4.16) ein unbekannter konstanter Vektor ist, der für  $d = 3$  verschwindet. Die Randspannung im Außenraum  $\Omega^{\text{ext}}$  [35, Proposition 3.2, S. 73] ist definiert als

$$T^{\text{ext}}(\mathbf{u}, p) := -(\gamma_0^{\text{ext}} p) \mathbf{n} + 2\nu(\gamma_0^{\text{ext}} e(\mathbf{u})) \mathbf{n}. \quad (4.17)$$

Für das Dirichlet–Randwertproblem  $\gamma_0^{\text{ext}} \mathbf{u} = \mathbf{g}_D$  bzw. das Neumann–Randwertproblem  $T_x(\mathbf{u}, p) = \mathbf{g}_N$  sind geeignete Abklingbedingungen, auch Abstrahlbedingungen genannt, [21, S. 66], [35, S. 81]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \begin{cases} \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \log|x| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) & d = 2 \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) & d = 3 \end{cases} \\ p(x) &= \begin{cases} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) & d = 2 \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) & d = 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

für  $|x| \rightarrow \infty$  zu wählen. Es sind  $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^2$  und ein konstanter Vektor

$$\mathbf{c}_2 = \int_{\Gamma} T(\mathbf{u}, p) ds_x$$

gegeben. Für das Außenraumproblem werden keine Lösbarkeitsbedingungen benötigt [21, S. 72].

## 4.5. Randintegraloperatoren

In diesem Abschnitt werden die Randintegraloperatoren des Drucks und der Geschwindigkeit besprochen. Abschließend werden noch weitere Lemmata und Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren angegeben. Bevor über die Randintegraloperatoren des Drucks und der Geschwindigkeit gesprochen werden kann, werden einige Räume nach [21] eingeführt. Zuerst wird der Raum [21, Korrekturen zu S. 196]

$$\tilde{H}_0^{-1}(\Omega) \subset \tilde{H}^{-1}(\Omega) := \{f \in H^{-1}(\mathbb{R}^n) \text{ mit kompaktem Träger } \text{supp } f \subseteq \overline{\Omega}\}$$

eingeführt. Der Raum  $\tilde{H}_0^{-1}(\Omega)$  besteht aus allen  $f = f_1 + f_2$  mit der Norm

$$\inf\{\|f_1\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|f_2\|_{\tilde{H}^t(\Omega)}\},$$

wobei  $f_1 \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  mit dem kompakten Träger  $\text{supp } f_1 \subset \Omega$  und  $f_2 \in \tilde{H}^t(\Omega)$  für  $t \geq -\frac{1}{2}$ . Damit werden

$$\begin{aligned} H^1(\Omega, \Delta) &:= \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in \tilde{H}_0^{-1}(\Omega)\} \\ \|v\|_{H^1(\Omega, \Delta)} &:= \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \end{aligned}$$

nach [21, S. 196] definiert. Weiters werden die Räume [21, S. 169]

$$\begin{aligned} H_{\text{loc}}^1(\Omega) &:= \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \varphi v \in H^1(\mathbb{R}^n)\} \\ H_{\text{comp}}^{-1}(\Omega) &:= \{v \in \mathcal{E}'(\Omega) : \text{für } v \text{ existiert eine kompakte Menge } K \subset \Omega \\ &\text{und } v \in \tilde{H}^{-1}(K)\} \end{aligned}$$

benötigt. Wobei der Vektorraum der Distributionen hierbei mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  und der Raum der Distributionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$  mit  $\mathcal{E}'(\Omega)$  bezeichnet wird [21, S. 98]. Damit kann der Raum

$$H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta) := \{v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}) : \Delta v \in H_{\text{comp}}^{-1}(\Omega^{\text{ext}})\}$$

nach [21, S. 198] definiert werden. Die nachfolgenden Räume werden im Lemma über die Stetigkeit, bzw. für die Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren benötigt (vgl. [21, S. 272])

$$\begin{aligned} H_{\text{div}}^1(\Omega, \Delta) &:= \{v \in H^1(\Omega, \Delta) : \text{div } v = 0 \text{ in } \Omega\} \\ H_{\text{div, loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta) &:= \{v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta) : \text{div } v = 0 \text{ in } \Omega^{\text{ext}}\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

#### 4.5.1. Randintegraloperatoren des Drucks

Das *Newton–Potential des Drucks*  $\tilde{N}_{0,p}$ , wird für  $\mathbf{f} \in [\tilde{H}_0^{-1}(\Omega)]^d$  durch

$$(\tilde{N}_{0,p}\mathbf{f})(x) := \int_{\Omega} Q^*(x, y)\mathbf{f}(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega$$

definiert. Für  $\mathbf{w} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d$  ist das *Einfachschichtpotential des Drucks*  $\tilde{V}_p$  [21, S. 65, (2.3.15)] wie folgt definiert

$$(\tilde{V}_p\mathbf{w})(x) := \int_{\Gamma} Q^*(x, y)\mathbf{w}(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^{\text{ext}}.$$

Für  $\mathbf{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  ist das *Doppelschichtpotential des Drucks*  $W_p$  [21, S. 65, (2.3.16)] wie folgt definiert

$$(W_p \mathbf{v})(x) := 2\nu \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}} Q^*(x, y) \mathbf{v}(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^{\text{ext}}.$$

Das Einfachschichtpotential  $\tilde{V}_p$ , das Doppelschichtpotential  $W_p$  und das Newton-Potential  $\tilde{N}_{0,p}$  sind nach Lemma 4.3 lineare und beschränkte Abbildungen in den Raum  $L_2(\Omega)$ . Das Lemma 4.3 wird ohne Beweis angeführt.

**Lemma 4.3.** [21, Lemma 5.6.6, S. 274] *Die Druck-Operatoren*

$$\begin{aligned} \tilde{V}_p &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L_2(\Omega) \\ W_p &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L_2(\Omega) \\ \tilde{N}_{0,p} &: \tilde{H}_0^{-1}(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \end{aligned}$$

*definieren lineare und beschränkte Abbildungen.*

Aus der Darstellungsformel (4.9) für den Druck  $p$  und dem Lemma 4.3 kann für eine gegebene Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  der Druck  $p$  berechnet werden.

## 4.5.2. Randintegraloperatoren der Geschwindigkeit

### 4.5.2.1. Newton-Potential $\tilde{N}_{0,u}$

Das Newton-Potential der Geschwindigkeit  $\tilde{N}_{0,u}$  wird für  $\mathbf{f} \in [\tilde{H}_0^{-1}(\Omega)]^d$  durch

$$(\tilde{N}_{0,u} \mathbf{f})(x) := \int_{\Omega} U^*(x, y) \mathbf{f}(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega,$$

definiert.  $\tilde{N}_{0,u} \mathbf{f}$  ist linear und beschränkt [25, S. 52]. Das nachfolgende Lemma 4.4, welches besagt, dass die Newtonpotentiale  $\tilde{N}_{0,u}$ ,  $\tilde{N}_{0,p}$  das nicht homogene Stokes-Problem erfüllen, wird ohne Beweis angegeben.

**Lemma 4.4.** [25, S. 52, (7)] *Für  $\mathbf{f} \in [\tilde{H}_0^{-1}(\Omega)]^d$ ,  $d = 2, 3$  erfüllen die Newton-Potentiale der Geschwindigkeit  $\tilde{N}_{0,u}$  und des Drucks  $\tilde{N}_{0,p}$  das nicht homogene Stokes-Problem*

$$\begin{aligned} -\nu \Delta(\tilde{N}_{0,u} \mathbf{f}) + \nabla(\tilde{N}_{0,p} \mathbf{f}) &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \text{div}(\tilde{N}_{0,u} \mathbf{f}) &= 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

#### 4.5.2.2. Einfachschichtpotential $\tilde{V}_u$

Für  $\mathbf{w} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d$ ,  $d = 2, 3$  ist das Einfachschichtpotential der Geschwindigkeit [21, S. 65]

$$(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) := \int_{\Gamma} U^*(x, y) \mathbf{w}(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^{\text{ext}},$$

ein linearer Operator  $\tilde{V}_u : [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H_{\text{div}}^1(\Omega, \Delta)]^d \times [H_{\text{div,loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta)]^d$  (Lemma 4.9). Der Einfachschichtrandintegraloperator  $V_u$  bezeichnet die innere und äußere Spur von  $\tilde{V}_u$  und kann für genügend glattes  $w$  als schwachsinguläres Oberflächenintegral [41, S. 157] dargestellt werden

$$(V_u w)_i(x) = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^d U_{ij}^*(x, y) w_j(y) ds_x \quad \text{für } x \in \Gamma, i = 1, \dots, d. \quad (4.20)$$

Dieser Operator  $V_u := \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}_u = \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V}_u : [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  ist linear und beschränkt (Lemma 4.9)

$$\|V_u \mathbf{w}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^d} \leq c_2^{\tilde{V}_u} \|\mathbf{w}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d} \quad \text{für } \mathbf{w} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d.$$

Die Sprungbedingung für den Einfachschichtrandintegraloperator (Lemma 4.10) lautet

$$[\gamma_0(\tilde{V}_u \mathbf{w})]_{\Gamma}(x) = \gamma_0^{\text{ext}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) - \gamma_0^{\text{int}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Das heißt  $\gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}_u = \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V}_u$ . Im Gegensatz zum Einfachschichtrandintegraloperator der Laplace–Gleichung, hat der Einfachschichtrandintegraloperator  $V_u$  einen Kern.

**Lemma 4.5.** [21, S. 72] *Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  hat der Einfachschichtrandintegraloperators  $V_u$  (4.20) einen Kern*

$$\ker V_u = \text{span}\{\mathbf{n}\}. \quad (4.21)$$

*Beweis.* [41, S. 166] Für das homogene Stokes–Problem werden die Lösungen  $\mathbf{u} \equiv 0$  und  $p \equiv -1$  gewählt. Werden diese weiter in die erste Randintegralgleichung eingesetzt, erhält man

$$(V_u \mathbf{t})(x) = \left(\frac{1}{2}I + K_u\right)u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Aus der Randspannung (4.1)

$$T(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{n} + (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\top})\mathbf{n} = \mathbf{n},$$

ergibt sich der Kern des Einfachschichtpotentials  $V_u$ . □



Wegen Lemma 4.5 ist der Einfachschichtrandintegraloperator  $V_u$  nicht  $[H^{-1/2}(\Gamma)]^d$ -elliptisch. Der nachfolgende Satz 4.6 liefert jedoch die Elliptizität auf einem Unterraum  $[H_{V^L}^{-1/2}(\Gamma)]^d$ . Dieser wird ohne Beweis angeführt.

**Satz 4.6.** [41, Theorem 6.3, S. 166] Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  ist der Stokesche Einfachschichtrandintegraloperator  $V_u$   $[H_{V^L}^{-1/2}(\Gamma)]^d$ -elliptisch mit einer Konstanten  $c_1^V > 0$

$$\langle V_u \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_\Gamma \geq c_1^V \|\mathbf{w}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d}^2 \quad \text{für alle } \mathbf{w} \in [H_{V^L}^{-1/2}(\Gamma)]^d,$$

wobei der Unterraum

$$[H_{V^L}^{-1/2}(\Gamma)]^d := \{\mathbf{w} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d : \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle_{V^L} = 0\},$$

mit dem inneren Produkt

$$\langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{V^L} := \sum_{i=1}^d \langle V^L w_i, \tau_i \rangle_\Gamma,$$

über den  $H^{-1/2}(\Gamma)$ -elliptischen Einfachschichtrandintegraloperator [41, Theorem 6.22, S. 141] der Laplace-Gleichung  $V^L : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  [41, S. 119], definiert ist.

Für ein Gebiet mit mehreren Teilrändern  $\Gamma_i$ , kann [21, Theorem 5.6.13, S. 292] verwendet werden.

**Bemerkung 4.7.** [21, S. 65] Das Paar  $\tilde{V}_u, \tilde{V}_p$  sind die Einfachschichtpotentiale für das Stokes-Problem. Man spricht auch von hydrodynamischen Einfachschichtpotentialen.

#### 4.5.2.3. Adjungierter Doppelschichtrandintegraloperator $K'_u$

Für  $\mathbf{w} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d$  besitzt der adjungierte Doppelschichtrandintegraloperator der Geschwindigkeit [21, S. 67, (2.3.27)] die Darstellung

$$T_x(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) = \frac{1}{2} \mathbf{w}(x) + (K'_u \mathbf{w})(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma,$$

wobei der adjungierte Doppelschichtrandintegraloperator [21, S. 47, (2.2.20)] wie folgt definiert ist

$$(K'_u \mathbf{w})(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma: |y-x| \geq \varepsilon} T_x(U^*(x, y)) \mathbf{v}(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Dieser Randintegraloperator  $K'_u : [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma)]^d$  ist beschränkt und linear (vgl. Abschnitt 4.5.2.7). Wird die äußere Konormalenableitung [21, S. 67, (2.3.28)] angewandt, erhält man

$$T_x^{\text{ext}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) = -\frac{1}{2} \mathbf{w}(x) + (K'_u \mathbf{w})(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma,$$

mit der äußeren Randspannung  $T^{\text{ext}}$  aus (4.17). Damit ergibt sich die Sprungbedingung (Lemma 4.10)

$$[T(\tilde{V}_u \mathbf{w})]_{|\Gamma}(x) = T_x^{\text{ext}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) - T_x(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) = -\mathbf{w}(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  ist der Kern des adjungierten Doppelschichtpotentials [21, S. 72] für die Geschwindigkeit durch

$$\ker \left\{ \frac{1}{2}I - K'_u \right\} = \text{span}\{\mathbf{n}\}$$

gegeben. Für ein Gebiet mit mehreren Teilrändern  $\Gamma_i$ , also mit Einschlüssen, kann [21, Theorem 2.3.2, S. 68] angewendet werden.

#### 4.5.2.4. Doppelschichtpotential $W_u$

Für  $\mathbf{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d$ ,  $d = 2, 3$  ist das Doppelschichtpotential für die Geschwindigkeit [21, S. 65, (2.3.16)]

$$(W_u \mathbf{v})(x) := \int_{\Gamma} T'_y(U^*(x, y), Q^*(x, y)) \mathbf{v}(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \cup \Omega^{\text{ext}},$$

mit [21, S. 65]

$$T'_y(U^*(x, y), Q^*(x, y)) := Q^*(x, y) I \mathbf{n}(y) + (\nabla U^*(x, y) + \nabla U^*(x, y)^\top) \mathbf{n},$$

ein linearer Operator  $W_u : [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H_{\text{div}}^1(\Omega, \Delta)]^d \times [H_{\text{div,loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta)]^d$  (Lemma 4.9). Die innere Spur des Doppelschichtpotentials der Geschwindigkeit ist ein beschränkter und linearer Operator  $\gamma_0^{\text{int}} W_u : [H^{1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  (Lemma 4.9), mit der Darstellung

$$\gamma_0^{\text{int}}(W_u \mathbf{v})(x) = -\frac{1}{2} \mathbf{v}(x) + (K_u \mathbf{v})(x) \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

wobei der Doppelschichtrandintegraloperator durch [21, S. 67, (2.3.29)]

$$(K_u \mathbf{v})(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Gamma: |y-x| \geq \varepsilon} T'_y(U^*(x, y), Q^*(x, y)) \mathbf{v}(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma,$$

mit  $T'$  aus (4.2), definiert ist. Der Doppelschichtrandintegraloperator  $K_u$  kann formal partiell integriert werden [21, S. 49, (2.2.30)]. Hier wird der Fall für  $d = 2$

$$(K_u \mathbf{v})(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma} \left( -\frac{\partial}{\partial n_y} \log|x-y| \right) \mathbf{v}(y) ds_y \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} \log|x-y| \left( \begin{array}{cc} 0 & n_2(y) \frac{\partial}{\partial y_1} - n_1(y) \frac{\partial}{\partial y_2} \\ n_1(y) \frac{\partial}{\partial y_2} - n_2(y) \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \end{array} \right) \mathbf{v}(y) ds_y \Big\} \\
& + 2\nu \int_{\Gamma} U^*(x,y) \left( \begin{array}{cc} 0 & n_2(y) \frac{\partial}{\partial y_1} - n_1(y) \frac{\partial}{\partial y_2} \\ n_1(y) \frac{\partial}{\partial y_2} - n_2(y) \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \end{array} \right) \mathbf{v}(y) ds_y
\end{aligned}$$

angeführt, für  $d = 3$  siehe [21, S. 49]. Die äußere Spur des Doppelschichtpotentials der Geschwindigkeit ist ein beschränkter und linearer Operator mit der Darstellung

$$\gamma_0^{\text{ext}}(W_u \mathbf{v})(x) = \frac{1}{2} \mathbf{v}(x) + (K_u \mathbf{v})(x) \quad \text{für } x \in \Gamma$$

und der Abbildung  $\gamma_0^{\text{ext}} W_u : [H^{1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  (Lemma 4.9). Damit ergibt sich für die Sprungbedingung (Lemma 4.10) des Doppelschichtpotentials

$$[\gamma_0(W_u \mathbf{v})]_{\Gamma}(x) = \gamma_0^{\text{ext}}(W_u \mathbf{v})(x) - \gamma_0^{\text{int}}(W_u \mathbf{v})(x) = \mathbf{v}(x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  hat das Doppelschichtpotential einen Kern [21, Theorem 2.3.2, S. 68]. Dieser ist durch

$$\ker \left\{ \frac{1}{2} I + K_u \right\} = \text{span}\{\mathbf{m}\}$$

gegeben, wobei  $\{\mathbf{m}_{\Gamma} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}_{\Gamma}\}$  aus (4.14) ist. Für ein Gebiet mit mehreren Teilrändern  $\Gamma_i$ , kann [21, Theorem 2.3.2, S. 68] verwendet werden.

**Bemerkung 4.8.** [21, S. 65] Das Paar  $W_u, W_p$  sind die Doppelschichtpotentiale für das Stokes–Problem. Man spricht auch von hydrodynamischen Doppelschichtpotentialen.

#### 4.5.2.5. Hypersingulärer Operator $D_u$

Für  $\mathbf{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d$ ,  $d = 2, 3$  ist der hypersinguläre Operator [21, S. 68, (2.3.30)] durch

$$(D_u \mathbf{v})(x) = -T_x(W_u \mathbf{v})(x) := - \lim_{\Omega \ni z \rightarrow x \in \Gamma} T_z(\partial_z, x)(W_u \mathbf{v}(z)),$$

mit  $T$  aus (4.1), definiert. Dieser Operator  $D_u : [H^{1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma)]^d$  ist beschränkt und linear (Lemma 4.9)

$$\|D_u \mathbf{v}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d} \leq c_2^{D_u} \|\mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^d} \quad \text{für } \mathbf{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d.$$

Der hypersinguläre Randintegraloperator  $D_u$  ist als Cauchy–Hauptwertintegral [21, S. 68, (2.3.31)], mit  $T$  und  $T'$  aus (4.1) bzw. (4.2)

$$(D_u \mathbf{v})(x) = - \text{p. v.} \int_{\Gamma} T_x(T'_y(U^*(x,y), Q^*(x,y))) (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma$$

darstellbar (p.v. ist aus dem Englischen und heißt "principal value"). Der hypersinguläre Randintegraloperator kann formal partiell integriert ([21, S. 68], [23, Lemma 3.5, S. 1350], [41, S. 164, (4.64)]) werden:

$$\begin{aligned}
(D_u \mathbf{v})(x) &= -\frac{\nu}{2(d-1)\pi} \text{p. v.} \int_{\Gamma} \left\{ 2 \frac{1}{|x-y|^d} \mathbf{n}(y) \cdot (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{|x-y|^{d+2}} \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{n}(x) \left[ (x-y) \cdot (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} ds_y \\
&\quad + \frac{\nu}{2(d-1)\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2d(d+2)}{|x-y|^{d+4}} \left[ (x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \right] \right. \\
&\quad \quad \times \left[ (x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \right] \left[ (x-y) \cdot (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&\quad \quad - \frac{d}{|x-y|^{d+2}} \left( \left[ (x-y) \cdot \mathbf{n}(x) \right] \left[ (x-y) \cdot (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) \right] \mathbf{n}(y) \right. \\
&\quad \quad \left. + \mathbf{n}(x) \cdot (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) \left[ (y-x) \cdot \mathbf{n}(y) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left[ (x-y) \cdot \mathbf{n}(x) \right] \left[ (x-y) \cdot \mathbf{n}(y) \right] (\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)) \right) \right\} ds_y.
\end{aligned}$$

Die Sprungbedingung (Lemma 4.10) des hypersingulären Operators für die Geschwindigkeit ist

$$[T(W_u \mathbf{v})]_{|\Gamma}(x) = T_x^{\text{ext}}(W_u \mathbf{v})(x) - T_x(W_u \mathbf{v})(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Das heißt, für die äußere Konormalenspur  $T^{\text{ext}}$  aus (4.17) ist  $T_x^{\text{ext}} W_u = T_x W_u$ . Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  ist der Kern [21, Theorem 2.3.2, S. 68] durch

$$\ker\{D_u\} = \text{span}\{\mathbf{m}\}$$

gegeben, wobei  $\{\mathbf{m}_{|\Gamma} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}_{|\Gamma}\}$  aus (4.14) ist. Für ein Gebiet  $\Omega$  mit mehreren Teilrändern  $\Gamma_i$ , kann [21, Theorem 2.3.2, S. 68] verwendet werden. Obwohl der hypersinguläre Operator  $D_u$  einen Kern besitzt, kann für eine stabilisierte Formulierung die Elliptizität gezeigt werden (siehe Satz 4.11).

#### 4.5.2.6. Lemmata zu den Randintegraloperatoren

Alle nachfolgenden Lemmata werden ohne Beweis angeführt. Es gilt jeweils  $d = 2, 3$ . Die Ergebnisse dieser Sätze und Lemmata 4.9 – 4.11 sind schon in die vorangegangenen Abschnitte eingegangen.

**Lemma 4.9.** [21, Lemma 5.6.4., S. 272], [23, Theorem 3.7., S. 1352]

Die Abbildungen der hydrodynamischen Potentiale sind lineare Operatoren

$$\tilde{V}_u : [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H_{\text{div}}^1(\Omega, \Delta)]^d \times [H_{\text{div,loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta)]^d$$

$$W_u : [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H_{\text{div}}^1(\Omega, \Delta)]^d \times [H_{\text{div,loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta)]^d,$$

wobei die Räume  $[H_{\text{div}}^1(\Omega, \Delta)]^d, [H_{\text{div,loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}, \Delta)]^d$  wie in (4.19) definiert sind. Weiters sind die folgenden Abbildungen lineare und beschränkte Operatoren

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}_u &: [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d \\ \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V}_u &: [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d \\ \gamma_0^{\text{int}} W_u &: [H^{1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d \\ \gamma_0^{\text{ext}} W_u &: [H^{1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d \\ D_u &: [H^{1/2}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma)]^d. \end{aligned}$$

**Lemma 4.10.** [21, Lemma 5.6.5, S. 273]

Für gegebene  $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \times [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  und  $x \in \Gamma$ , erfüllen die hydrodynamischen Potentiale die Sprungbedingung

$$\begin{aligned} [\gamma_0(\tilde{V}_u \mathbf{w})]_{\Gamma}(x) &= \gamma_0^{\text{ext}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) - \gamma_0^{\text{int}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) = 0 \\ [T(\tilde{V}_u \mathbf{w})]_{\Gamma}(x) &= T_x^{\text{ext}}(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) - T_x(\tilde{V}_u \mathbf{w})(x) = -\mathbf{w}(x) \\ [\gamma_0(W_u \mathbf{v})]_{\Gamma}(x) &= \gamma_0^{\text{ext}}(W_u \mathbf{v})(x) - \gamma_0^{\text{int}}(W_u \mathbf{v})(x) = \mathbf{v}(x) \\ [T(W_u \mathbf{v})]_{\Gamma}(x) &= T_x^{\text{ext}}(W_u \mathbf{v})(x) - T_x(W_u \mathbf{v})(x) = 0. \end{aligned}$$

**Satz 4.11.** [21, Theorem 5.6.13, S. 292]

Die stabilisierten hydrodynamischen Randintegraloperatoren sind für ein zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  und für gegebene  $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \times [H^{1/2}(\Gamma)]^d$  elliptisch

$$\begin{aligned} \langle V_u \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle_{\Gamma}^2 &\geq c_1 \|\mathbf{w}\|_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^d}^2 && \text{für alle } \mathbf{w} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^d \\ \langle D_u \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \sum_{k=1}^{3(d-1)} \langle \mathbf{v}, \mathbf{m}_k \rangle_{\Gamma}^2 &\geq c_2 \|\mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^d}^2 && \text{für alle } \mathbf{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^d, \end{aligned}$$

für Konstanten  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , wobei  $\mathbf{m}_k$  Basisvektoren aus (4.14) und  $\mathbf{n}$  aus (4.21) sind. Für ein Gebiet mit mehreren Einschlüssen kann [21, Theorem 5.6.13, S. 292] verwendet werden.

#### 4.5.2.7. Abbildungseigenschaften

Sei  $\Gamma$  der Rand eines Lipschitz-Gebietes, dann sind die Randintegraloperatoren der Geschwindigkeit, für alle  $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $d = 2, 3$

$$\begin{aligned} V_u &: [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2+s}(\Gamma)]^d \\ K_u &: [H^{1/2+s}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{1/2+s}(\Gamma)]^d \\ K'_u &: [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^d \\ D_u &: [H^{1/2+s}(\Gamma)]^d \rightarrow [H^{-1/2+s}(\Gamma)]^d, \end{aligned}$$

linear und beschränkt [23, Theorem 3.7, S. 1351].

## 4.6. Randintegralgleichungen

In diesem Abschnitt werden, jeweils für das Innen- und Außenraumproblem, die Randintegralgleichungen für die Geschwindigkeit angegeben.

### 4.6.1. Randintegralgleichungen im Innenraum

Die Randintegralgleichungen im Innenraum (4.10)

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

ergeben sich, indem jeweils der Spuroperator  $\gamma_0^{\text{int}}$  und die Randspannung  $T_x$  aus (4.1) auf die Darstellungsformel (4.8) für die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  angewandt werden. Die Randintegralgleichungen für das Stokes–Problem im Innenraum [21, S. 67], für  $x \in \Gamma$  lauten:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u} \\ T_x(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K_u & V_u \\ D_u & \frac{1}{2}I + K'_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\mathbf{u} \\ T_x(\mathbf{u}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{0,u}\mathbf{f} \\ N_{1,u}\mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

Der *Calderón-Projektor* ( $C_u^2 = C_u$ ) im Innenraum ist wie folgt definiert [21, S. 67]

$$C_u := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - K_u & V_u \\ D_u & \frac{1}{2}I + K'_u \end{pmatrix}.$$

$V_u, K_u, K'_u$  und  $D_u$  sind die in den vorhergehenden Abschnitten besprochenen Randintegraloperatoren für die Geschwindigkeit. Zur Lösung des Innenraumproblems (4.10) können jeweils die 1. oder die 2. Randintegralgleichung verwendet werden und es müssen die jeweils zugehörigen Lösbarkeitsbedingungen (4.11), (4.12) erfüllt sein.

### 4.6.2. Randintegralgleichungen im Außenraum

Für das Außenraumproblem (4.15),

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= 0 & \text{in } \Omega^{\text{ext}} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \end{aligned}$$

müssen die Abstrahlbedingungen (4.18) erfüllt sein. Hierfür wird in (4.18)  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$  gesetzt. Die Randintegralgleichungen im Außenraum ergeben sich, indem jeweils der Spuroperator  $\gamma_0^{\text{ext}}$  und die Randspannung  $T^{\text{ext}}$  aus (4.17) auf die Darstellungsformel (4.16) für die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  im Außenraum (4.15) angewandt werden, wobei hier  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  gesetzt wird. Die Randintegralgleichungen für das Stokes–Problem im Außenraum [21, S. 67], für  $x \in \Gamma$  lauten:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}}\mathbf{u} \\ T^{\text{ext}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + K_u & -V_u \\ -D_u & \frac{1}{2}I - K'_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}}\mathbf{u} \\ T^{\text{ext}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Der *Calderón-Projektor* ( $C_u^{\text{ext}^2} = C_u^{\text{ext}}$ ) im Außenraum ist wie folgt definiert [21, S. 67]

$$C_u^{\text{ext}} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + K_u & -V_u \\ -D_u & \frac{1}{2}I - K'_u \end{pmatrix}.$$

Aus (4.22) ergeben sich die 1. Randintegralgleichung

$$\left(\frac{1}{2}I - K_u\right)\gamma_0^{\text{ext}}\mathbf{u} + V_u T^{\text{ext}}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.23)$$

und die 2. Randintegralgleichung

$$D_u \gamma_0^{\text{ext}}\mathbf{u} + \left(\frac{1}{2}I + K'_u\right)T^{\text{ext}}(\mathbf{u}) = 0,$$

im Außenraum. Mit Hilfe der 1. Randintegralgleichung (4.23) wird im kommenden Kapitel die nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung aufgestellt.





# 5. Nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung

In diesem Abschnitt wird die nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung für den zwei-dimensionalen Fall mit folgenden Bedingungen betrachtet: Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz–Rand  $\Gamma := \partial\Omega$ , dem Außenraum  $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  und  $\nu$  sei eine gegebene Viskositätskonstante.

Es wird zuerst das Transmissionsproblem aufgestellt. Anschließend wird ein kurzer Literaturüberblick zur eindeutigen Lösbarkeit gegeben. Abschließend wird die nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung diskretisiert und numerisch umgesetzt.

## 5.1. Das Transmissionsproblem

Das Transmissionsproblem setzt sich aus (5.1), (5.2), (5.3) und den Abklingbedingungen (4.18) zusammen. Das heißt, im Innenraum  $\Omega$  soll für  $\mathbf{f} \in [L_2(\Omega)]^2$  das inhomogene Stokes–Problem

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

und im Außenraum  $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  soll das homogene Stokes–Problem

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u}_e + \nabla p_e &= 0 & \text{in } \Omega^{\text{ext}} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_e &= 0 & \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

mit den Transmissionsbedingungen am Rand  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u} &= \gamma_0^{\text{ext}} \mathbf{u}_e & \text{auf } \Gamma \\ T(\mathbf{u}, p) &= T^{\text{ext}}(\mathbf{u}_e, p_e) =: \mathbf{t} & \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{5.3}$$

gelöst werden. Zusätzlich müssen die Abklingbedingungen aus (4.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e(x) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ p_e(x) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \end{aligned}$$

für  $|x| \rightarrow \infty$ , mit der Vereinfachung  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = 0$  erfüllt sein und es wird hier

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0$$

wie in (1.5) gefordert.

## 5.2. Nichtsymmetrische Kopplung

Das inhomogene Stokes–Problem im Innenraum (5.1) wird mit der 1. Greensche Formel (1.12)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - \langle T_x(\mathbf{u}, p), \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \quad (5.4)$$

und durch die Inkompressibilität (vgl. (1.14))

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega) \quad (5.5)$$

gelöst. Dabei sind die symmetrische Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ , die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  und die Randspannung  $T$  wie in (1.13), (1.14) und (4.1)

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\ T(\mathbf{u}, p) &= -p\mathbf{n} + \nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\top})\mathbf{n} \end{aligned}$$

gegeben. Das homogene Stokes–Problem im Außenraum  $\Omega^{\text{ext}}$  wird mit der 1. Randintegralgleichung (4.23) im variationellen Sinn

$$\left\langle \left( \frac{1}{2}I - K_u \right) \gamma_0^{\text{ext}} \mathbf{u}_e, \boldsymbol{\tau} \right\rangle_{\Gamma} + \langle V_u T^{\text{ext}}(\mathbf{u}_e), \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\tau} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2 \quad (5.6)$$

gelöst. Dabei wird die Randspannung im Außenraum (4.17)

$$T^{\text{ext}}(\mathbf{u}, p) = -(\gamma_0^{\text{ext}} p)\mathbf{n} + 2\nu(\gamma_0^{\text{ext}} e(\mathbf{u}))\mathbf{n}$$

verwendet. Die Eigenschaften des Einfachschichtpotentials  $V_u$  und des Doppelschichtpotentials  $K_u$  können in den Abschnitten 4.5.2.2 und 4.5.2.4 nachgelesen werden. Werden nun die Transmissionsbedingungen (5.3) jeweils in die Gleichungen für das Innen-

und Außenraumproblem (5.4), (5.5), (5.6) eingesetzt, ergibt sich die *nichtsymmetrische Johnson–Nédélec Kopplung für das Transmissionsproblem des Stokes–Problems*: Gesucht sind  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{t}) \in [H^1(\Omega)]^2 \times L_{2,0}(\Omega) \times [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &+ b(\mathbf{v}, p) - \langle \mathbf{t}, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} && \text{für alle } \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 && \text{für alle } q \in L_{2,0}(\Omega) \\ \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K_u\right) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle_{\Gamma} &+ \langle V_u \mathbf{t}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma} = 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\tau} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die Bezeichnung Johnson–Nédélec Kopplung geht auf die ursprünglichen Arbeiten [6, 22] zurück.

### 5.2.1. Literaturüberblick zur eindeutigen Lösbarkeit der FEM–BEM Kopplung

Eine komplette Analysis zur eindeutigen Lösbarkeit der nichtsymmetrischen FEM–BEM Kopplung für das Stokes–Problem aus (5.7) würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher wird hier ein kurzer Überblick vorhandener Arbeiten zur FEM–BEM Kopplung gegeben.

Die nichtsymmetrische Kopplung geht auf [6, 22] für das Laplace–Problem zurück. Deren Analysis nutzte zunächst die Kompaktheit des Doppelschichtpotentials, die allerdings nur bei genügend glattem Rand gegeben ist, um die eindeutige Lösbarkeit zu zeigen. In [33, 34] gelang es erstmals, die eindeutige Lösbarkeit der nichtsymmetrischen FEM–BEM Kopplung für das Transmissionsproblem der Yukawa–Operatoren und der Laplace–Gleichung mittels Elliptizität, insbesondere für beliebige konforme Ansatzräume, zu beweisen. Dies lässt sich auf Randwertprobleme übertragen [16].

In [42] wird der Beweis für das Transmissionsproblem der linearen Potentialgleichung geführt. Hier wird für eine explizite Stabilisierung die Elliptizität der Bilinearform der nichtsymmetrischen Kopplung gezeigt. In [29] wird für das Ergebnis aus [42] eine schärfere Bedingung angegeben, unter der die Bilinearform des stabilisierten Problems elliptisch ist. In [30] wurden die Ergebnisse aus [29, 42] auf Randwertprobleme erweitert. Für die Elastostatik lassen sich ähnliche Resultate zeigen [13, 43].

Aktuelle Arbeiten zur FEM–BEM Kopplung des Stokes–Problems sind [14, 15, 19, 26, 31, 32, 38]. Diese betrachten zumeist das Dirichlet–Randwertproblem im Außenraum eines beschränkten Gebietes. Dabei wird häufig ein künstlicher Koppelrand eingeführt [19, 26, 38]. Solange der Koppelrand glatt ist, kann wieder die Kompaktheit des Doppelschichtpotentials zur Analyse der eindeutigen Lösbarkeit genutzt werden [19, 26, 38], wobei sich die Arbeit von [19] in erster Linie mit der Existenz, Eindeutigkeit und Regularität des kontinuierlichen gekoppelten Stokes–Problems in  $\mathbb{R}^3$  beschäftigt. Zusätzlich wird die Eindeutigkeit des diskreten Problems diskutiert, und es wird eine Möglichkeit für passende Finite Elemente Räume [19, S. 321] angeführt. In [26] wird unter anderem die Eindeutigkeit des kontinuierlichen gekoppelten Problems in

$\mathbb{R}^2$  besprochen, wobei das Hauptaugenmerk jedoch auf die eindeutige Lösbarkeit und Konvergenz der diskreten FEM–BEM Kopplung gelegt wird. Die Diskretisierung der FEM–BEM Kopplung wird mittels der gemischten Finiten Elemente von Bernardi–Raugel [2] durchgeführt. Stabilitätsabschätzungen und Ergebnisse zur Eindeutigkeit des kontinuierlichen gekoppelten Problems in  $\mathbb{R}^2$  werden in [38] angegeben. Weiters wird die eindeutige Lösbarkeit und Fehlerabschätzungen der diskreten FEM–BEM Kopplung betrachtet und zwei Möglichkeiten für passende Finite Elemente Räume [38, S. 373f] genannt.

Erste Ergebnisse für die eindeutige Lösbarkeit einer nichtsymmetrischen FEM–BEM Kopplung für das inhomogene Stokes–Problem im Außenraum eines allgemeinen Lipschitz–Gebietes gibt es in [14, 15] für die duale gemischte Formulierung und die hyper-singuläre Randintegralgleichung. In den Arbeiten von [14, 15] wird die nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung des Stokes–Problems für das Dirichlet– bzw. Neumann–Randwertproblem für einen künstlichen Koppelrand in  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. In [14] wird die Existenz und Eindeutigkeit des Transmissionsproblems ohne die Kompaktheit des zugehörigen Doppelschichtpotentials  $K_u$  gezeigt. Es wird mit der Elliptizität und der Inf–Sup–Bedingung argumentiert. In [15] werden Beweise zur eindeutigen Lösbarkeit, Stabilitätsabschätzung und Konvergenz der Johnson–Nédélec Kopplung mit homogenen Neumannranddaten durchgeführt. Weiters werden auch die symmetrischen Costabel–Han Kopplungen mit homogenen Neumanndaten bzw. mit inhomogenen Dirichlet– oder Neumanndaten diskutiert. In [15] werden die jeweiligen besprochenen Probleme auch diskretisiert. Dafür müssen die Orthogonalitätsbedingungen im Diskreten erfüllt sein. Es wird die eindeutige Lösbarkeit der diskretisierten Probleme zwar bewiesen, jedoch empfohlen, in der numerischen Umsetzung auf Lagrange–Multiplikatoren zurückzugreifen.

In [31] wird das Dirichlet– bzw. Neumannrandwertproblem in einem beschränkten Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  mit Lipschitz–stetigem Rand für das Stokes–Problem betrachtet. Dazu werden die symmetrische und nichtsymmetrische FEM–BEM Kopplung mit Lagrange–Formfunktionen diskretisiert und numerische Ergebnisse [31, S. 964ff] präsentiert. In [32] wird schließlich eine nicht konforme FEM–BEM Kopplung behandelt. Hierzu wird die Geschwindigkeit mit den nicht konformen Crouzeix–Raviart–Elementen [10] und der Druck mit stückweisen, stetigen Formfunktionen im Innenraum in  $\mathbb{R}^2$  angesetzt, und numerisch umgesetzt [32, S. 532].

### 5.2.2. Äquivalente nichtsymmetrische Kopplung

Ein zu (5.7) äquivalentes System (5.8) kann aufgestellt werden, indem die Nebenbedingung  $L_{2,0}(\Omega)$  als Lagrange–Term (1.21)

$$d(p, q) = \int_{\Omega} p \, dx \int_{\Omega} q \, dx$$

in das System (5.8) einfließt (vgl. Abschnitt 1.2.3).

*Gesucht sind*  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{t}) \in [H^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Omega) \times [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &+ b(\mathbf{v}, p) - \langle \mathbf{t}, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} && \text{für alle } \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 \\ b(\mathbf{u}, q) &- d(p, q) = 0 && \text{für alle } q \in L_2(\Omega) \\ \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K_u\right) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle_{\Gamma} &+ \langle V_u \mathbf{t}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma} = 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\tau} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Damit ergibt sich die äquivalente nichtsymmetrische Johnson–Nédélec Kopplung für das Transmissionsproblem des Stokes–Problems (5.8).

### 5.3. Diskretisierung der nichtsymmetrischen Kopplung

Das System (5.8) wird in den Räumen (3.5), (3.51) mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen

$$\begin{aligned} X_h &= \{\mathbf{v}_h \in [C(\bar{\Omega})]^2 \cap [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_h|_{\tau'_i} \in P_1^2 \text{ für jedes Subdreieck } \tau'_i \in \tau_i, \forall \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \\ \widetilde{M}_h &= \{q_h \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega) : q_h|_{\tau_i} \in P_1 \text{ für } \tau_i \in \mathcal{T}_N\} \end{aligned}$$

diskretisiert. Damit auch die Randspannung diskretisiert werden kann, wird der Raum

$$S_h^0(\Gamma) := [\text{span}\{\chi_i^0\}_{i=1}^R]^2, \quad (5.9)$$

der stückweisen konstanten Funktionen mit

$$\chi_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \tau_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eingeführt. Damit erhält man die nichtsymmetrische diskrete FEM–BEM Kopplung (5.10). *Gesucht sind*  $(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{t}_h) \in X_h \times \widetilde{M}_h \times S_h^0(\Gamma)$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &+ b(\mathbf{v}_h, p_h) - \langle \mathbf{t}_h, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Omega} && \text{für alle } \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &- d(p_h, q_h) = 0 && \text{für alle } q_h \in \widetilde{M}_h \\ \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K_u\right) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}_h \right\rangle_{\Gamma} &+ \langle V_u \mathbf{t}_h, \boldsymbol{\tau}_h \rangle_{\Gamma} = 0 && \text{für alle } \boldsymbol{\tau}_h \in S_h^0(\Gamma). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Bevor mit dem System (5.10) weitergearbeitet werden kann, müssen zuerst noch die Basisfunktionen besprochen werden.

### 5.3.1. Basisfunktionen und Approximationseigenschaft

Zur Diskretisierung der modifizierten Taylor–Hood–Elemente bietet es sich an, das Netz einmal zusätzlich uniform zu verfeinern. Dann können die regulären, stückweise linearen Basisfunktionen dieses Netzes als Basisfunktionen für  $X_h$  aus (3.5) der modifizierten Taylor–Hood–Elemente verwendet werden. Für  $\widetilde{M}_h$  aus (3.51) werden die stückweise linearen Finiten Elemente des ursprünglichen Netzes herangezogen. Diese Unterscheidung wird durch

$$\begin{aligned} \varphi_k^h &\in \widetilde{M}_h \\ \begin{pmatrix} \varphi_k^{h/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k^{h/2} \end{pmatrix} &\in X_h \end{aligned}$$

verdeutlicht. Bevor die Diskretisierung der nichtsymmetrischen Kopplung mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen betrachtet werden kann, wird noch die Approximationseigenschaft von  $S_h^0(\Gamma)$  angegeben. Diese Approximationseigenschaft wird später in Abschnitt 5.5 zur Bewertung der numerischen Ergebnisse benötigt.

**Satz 5.1. (Approximationseigenschaft von  $S_h^0(\Gamma)$ ).** [41, Theorem 10.4, S. 237] Wenn  $u \in H^s(\Gamma)$  und  $s \in [\sigma, 1]$  mit  $\sigma = [-1, 0]$ , wobei  $S_h^0(\Gamma)$  aus (5.9) der Raum der stückweisen konstanten Ansatzfunktionen ist, dann gilt die Approximationseigenschaft

$$\inf_{v_h \in S_h^0(\Gamma)} \|u - v_h\|_{H^\sigma(\Gamma)} \leq ch^{s-\sigma} |u|_{H^s(\Gamma)}.$$

### 5.3.2. Diskretisierung der nichtsymmetrischen Kopplung mit modifizierten Taylor–Hood–Elementen

Für die Diskretisierung des gekoppelten Systems (5.10) wird die Lösung  $\mathbf{u}_h \in X_h$  und die Testfunktion  $\mathbf{v}_h$  jeweils in  $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_C$  und  $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_I + \mathbf{v}_C$  aufgespalten, wobei  $\mathbf{u}_I$  alle Anteile innerer Knoten und  $\mathbf{u}_C$  alle Anteile der Knoten am Koppelrand beinhalten. Die erste Gleichung aus (5.8) wird jeweils mit  $\mathbf{v}_I$  und mit  $\mathbf{v}_C$  getestet. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}_I) + a(\mathbf{u}_C, \mathbf{v}_I) &+ b(\mathbf{v}_I, p_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_I \rangle_\Omega &\quad \forall \mathbf{v}_I \\ a(\mathbf{u}_I, \mathbf{v}_C) + a(\mathbf{u}_C, \mathbf{v}_C) &+ b(\mathbf{v}_C, p_h) - \langle \mathbf{t}_h, \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}_C \rangle_\Gamma &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_C \rangle_\Omega &\quad \forall \mathbf{v}_C \\ b(\mathbf{u}_I, q_h) + b(\mathbf{u}_C, q_h) &- d(p_h, q_h) &= 0 &\quad \forall q_h \in \widetilde{M}_h \\ \left\langle \left( \frac{1}{2} I - K_u \right) \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}_C, \boldsymbol{\tau}_h \right\rangle_\Gamma &+ \langle V_u \mathbf{t}_h, \boldsymbol{\tau}_h \rangle_\Gamma &= 0 &\quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in S_h^0(\Gamma), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}_h = \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}_I + \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}_C = \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{u}_C$  und  $\gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}_h = \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}_I + \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}_C = \gamma_0^{\text{int}} \mathbf{v}_C$  entspricht. In Matrixschreibweise resultiert daraus das lineare  $4 \times 4$ –Blockgleichungs-

system

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IC} & B_{AI}^\top & 0 \\ A_{CI} & A_{CC} & B_{AC}^\top & -\widetilde{\mathcal{M}}_h^\top \\ B_{AI} & B_{AC} & -D_{AA} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\widetilde{\mathcal{M}}_h - K_h & 0 & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \\ \underline{p} \\ \underline{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

mit den Lösungsvektoren im Innenraum  $\underline{u}_I$  und am Rand  $\underline{u}_C$ , dem Koeffizientenvektor der Randspannung  $\underline{t}$  und den zugehörigen rechten Seiten  $\underline{f}_I, \underline{f}_C$

$$\underline{u}_I = \begin{pmatrix} \underline{u}_{1,I} \\ \underline{u}_{2,I} \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_C = \begin{pmatrix} \underline{u}_{1,C} \\ \underline{u}_{2,C} \end{pmatrix}, \quad \underline{t} = \begin{pmatrix} \underline{t}_1 \\ \underline{t}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_I = \begin{pmatrix} \underline{f}_{1,I} \\ \underline{f}_{2,I} \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_C = \begin{pmatrix} \underline{f}_{1,C} \\ \underline{f}_{2,C} \end{pmatrix}.$$

Der Index  $C$  entspricht den Knoten am Koppelrand  $\Gamma$  und der Index  $I$  den inneren Freiheitsgraden. Die Gesamtanzahl der Knoten der Triangulierung der Geschwindigkeit wird mit  $N$  bezeichnet. Die Indizes 1 und 2 kennzeichnen jeweils die Zugehörigkeit zur 1. oder 2. Komponente. Für die Triangulierung des Drucks wird die Gesamtanzahl der Knoten mit  $\mathcal{N}$  bezeichnet und die Gesamtmenge der Knoten erhält den Index  $A$ . Für die Triangulierung des Randes wird die Gesamtanzahl der Knoten mit  $R$  bezeichnet. Mit diesen Vereinbarungen können die Matrizen der Finiten Elemente Methode und der Randelementmethode bestimmt werden. Die Finiten Elemente werden mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen und den Basisfunktionen

$$\varphi_k^h \in \widetilde{M}_h \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \varphi_k^{h/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k^{h/2} \end{pmatrix} \in X_h$$

diskretisiert, wobei hier  $\Psi_{1,k}^{h/2} := \begin{pmatrix} \varphi_k^{h/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_{2,k}^{h/2} := \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k^{h/2} \end{pmatrix}$  definiert wird. Es werden die Matrizen

$$B_{AI} = (B_{1,AI} \quad B_{2,AI}), \quad B_{AC} = (B_{1,AC} \quad B_{2,AC}) \quad (5.12)$$

durch

$$B_{1,h}[j, i] = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i^{h/2}}{\partial x_1} \varphi_j^h dx$$

$$B_{2,h}[j, i] = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i^{h/2}}{\partial x_2} \varphi_j^h dx, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad i = 1, \dots, N$$

und der Lagrange–Term

$$D_{AA}[j, i] = \int_{\Omega} \varphi_i^h dx \int_{\Omega} \varphi_j^h dx \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N} \quad (5.13)$$

berechnet. Die Komponenten der Steifigkeitsmatrizen setzen sich

$$\begin{aligned} A_{II} &= \begin{pmatrix} A_{11,II} & A_{12,II} \\ A_{21,II} & A_{22,II} \end{pmatrix} & A_{IC} &= \begin{pmatrix} A_{11,IC} & A_{12,IC} \\ A_{21,IC} & A_{22,IC} \end{pmatrix} \\ A_{CI} &= \begin{pmatrix} A_{11,CI} & A_{12,CI} \\ A_{21,CI} & A_{22,CI} \end{pmatrix} & A_{CC} &= \begin{pmatrix} A_{11,CC} & A_{12,CC} \\ A_{21,CC} & A_{22,CC} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

aus der Gesamtmatrix  $A_h$  mit den Einträgen

$$A_{mn,h}[j, i] = 2\nu \int_{\Omega} \sum_{k,\ell=1}^2 e_{k\ell}(\Psi_{m,i}^{h/2}) e_{k\ell}(\Psi_{n,j}^{h/2}) dx \quad i, j = 1, \dots, N, \quad m, n = 1, 2$$

zusammen. Ähnlich wie im Projekt [27] lassen sich diese Matrizen (5.12), (5.13), (5.14) implementieren. Die Implementierung der Matrix  $A_h$  beruht auf der Darstellung aus [18]. Die Matrizen der Randelementmethode werden mit der Fundamentallösung der Geschwindigkeit  $U_{k\ell}^*(x, y)$  aus (4.4), den Basisfunktionen  $\chi_i^0 \in S_h^0(\Gamma)$  und der Spur der linearen Basisfunktionen  $\gamma_0^{\text{int}} \varphi_j^{h/2}$  berechnet. Für  $k, \ell = 1, 2$  können die Matrizen des Einfachschichtpotentials der Geschwindigkeit für Stokes

$$V_h = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

mit

$$V_{k\ell}[j, i] = \int_{\Gamma} \chi_i^0 \int_{\Gamma} U_{k\ell}^*(x, y) \chi_j^0 ds_y ds_x = \int_{\tau_i} \int_{\tau_j} U_{k\ell}^*(x, y) ds_y ds_x \quad i, j = 1, \dots, R,$$

die Matrizen des Doppelschichtpotentials der Geschwindigkeit

$$K_h = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

mit

$$K_{k\ell}[j, i] = \int_{\Gamma} \chi_i^0 \int_{\Gamma} [T_y' U^*(x, y)]_{k\ell} \gamma_0^{\text{int}} \varphi_j^{h/2} ds_y ds_x \quad i, j = 1, \dots, R$$

und die Massematrix

$$\widetilde{\mathcal{M}}_h = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_h & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_h \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

mit

$$\mathcal{M}_h[i, j] = \int_{\Gamma} \chi_i^0 \gamma_0^{\text{int}} \varphi_j^{h/2} ds_x, \quad i, j = 1, \dots, R,$$



aufgestellt werden. Nachdem  $A_{II}$  invertierbar ist, wird die erste Gleichung von (5.11)

$$\underline{u}_I = A_{II}^{-1}(\underline{f}_I - A_{IC}\underline{u}_C - B_{AI}^\top \underline{p}), \quad (5.18)$$

umgeformt und mit Hilfe des Schur–Komplements das lineare  $4 \times 4$ –Blockgleichungssystem (5.11) zu einem  $3 \times 3$ –Blockgleichungssystem (5.19) vereinfacht. Deshalb kann das reduzierte  $3 \times 3$ –Blockgleichungssystem (5.19)

$$\begin{pmatrix} S_{CC} & \tilde{B}^\top & -\tilde{\mathcal{M}}_h^\top \\ \tilde{B} & -\tilde{D} & 0 \\ \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{M}}_h - K_h & 0 & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_C \\ \underline{p} \\ \underline{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{f}}_C \\ \underline{f}_{-p} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} S_{CC} &= A_{CC} - A_{CI}A_{II}^{-1}A_{IC} \\ \tilde{B} &= B_{AC} - B_{AI}A_{II}^{-1}A_{IC} \\ \tilde{D} &= -D_{AA} - B_{AI}A_{II}^{-1}B_{AI}^\top \\ \tilde{\underline{f}}_C &= \underline{f}_C - A_{CI}A_{II}^{-1}\underline{f}_I \\ \underline{f}_{-p} &= -B_{AI}A_{II}^{-1}\underline{f}_I, \end{aligned} \quad (5.20)$$

im nächsten Abschnitt gelöst werden.

## 5.4. Numerische Umsetzung der FEM–BEM Kopplung

Für die numerische Berechnung der FEM–BEM Kopplung wurde der C++ Programmcode des Institutes für Numerische Mathematik der TU Graz adaptiert. Zuerst wurde die Finite Elemente Methode mit den Taylor–Hood–Elementen realisiert. Die Taylor–Hood–Elemente wurden im Projekt [27] auch numerisch umgesetzt und anhand von Dirichlet–Randwertproblemen getestet. Es stellte sich jedoch heraus, dass es geschickter ist, mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen zu arbeiten, weil im C++ Programmcode des Institutes für Numerische Mathematik der TU Graz die Randintegraloperatoren für das Stokes–Problem für lineare Ansatzfunktionen schon vorhanden waren. Für die FEM–BEM Kopplung mit Taylor–Hood–Elemente hätten jedoch die Randintegraloperatoren für Stokes für quadratische Ansatzfunktionen implementiert werden müssen. Deshalb erschien es günstiger mit den modifizierten Taylor–Hood–Elementen, die mit linearen Ansatzfunktionen berechnet werden, und den schon vorhandenen Randintegraloperatoren zu arbeiten, und für die Masterarbeit zusätzlich die Matrizen der modifizierten Taylor–Hood–Elemente (5.12), (5.13), (5.14) zu implementieren. Die numerischen Ergebnisse der Berechnung eines Dirichlet–Randwertproblems

mittels FEM, jeweils mit Taylor–Hood–Elementen und modifizierten Taylor–Hood–Elementen, sind in Abschnitt 3.6 dargestellt. Weitere numerische Ergebnisse zu den Taylor–Hood–Elementen sind in [27] ausgeführt. Für die Berechnung der Matrizen muss zwischen den Freiheitsgraden  $I$  und den Randknoten  $C$  unterschieden werden. Mit Hilfe der Randknoten werden die Randintegrale  $V_h, K_h, \widetilde{\mathcal{M}}_h$  aus (5.15), (5.16), (5.17) für die Berechnung der Geschwindigkeit  $\underline{u}_C$  und des Koppelterms  $\underline{t}$  aufgestellt. Somit können für das Gleichungssystem (5.19)

$$\begin{pmatrix} S_{CC} & \widetilde{B}^\top & -\widetilde{\mathcal{M}}_h^\top \\ \widetilde{B} & -\widetilde{D} & 0 \\ \frac{1}{2}\widetilde{\mathcal{M}}_h - K_h & 0 & V_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_C \\ \underline{p} \\ \underline{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_C \\ \underline{f}_p \\ 0 \end{pmatrix},$$

alle Komponenten (5.20) vollständig berechnet werden. Dazu wird die Steifigkeitsmatrix  $A_{II}$  mittels Pardiso [24] invertiert. Das Gleichungssystem (5.19) wird mit der GMRES–Methode gelöst und liefert die Lösungsvektoren  $\underline{u}_C, \underline{p}, \underline{t}$ . Aus diesen Lösungsvektoren kann  $\underline{u}_I$  mit (5.18)

$$\underline{u}_I = A_{II}^{-1}(\underline{f}_I - A_{IC}\underline{u}_C - B_{AI}^\top \underline{p})$$

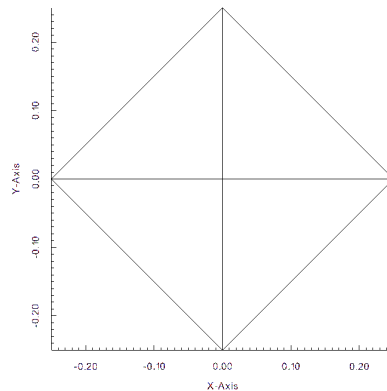
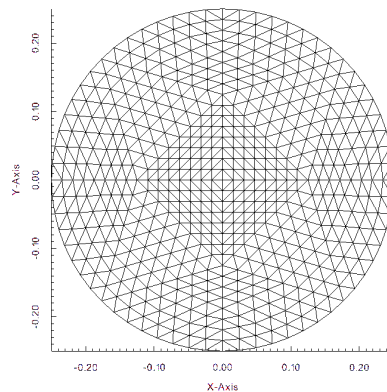
berechnet werden.

## 5.5. Numerische Ergebnisse der FEM–BEM Kopplung

Für die numerischen Tests werden Lösungen für das Transmissionsproblem (5.1), (5.2), (5.3), also Funktionen, welche das Innen- und Außenraumproblem sowie die Transmissionsbedingung und die Abklingbedingungen erfüllen, vorgegeben. Der theoretische Fehler (siehe Sätze 3.23 – 3.24), den man aus den Approximationseigenschaften erhält, wird mit der Estimated Order of Convergence (3.58), [41, S. 253]

$$eoc = \frac{\log\|u - u_{h_\ell}\| - \log\|u - u_{h_{\ell+1}}\|}{\log h_\ell - \log h_{\ell+1}}$$

verglichen. Für die FEM–BEM Kopplung wird ein 2D–Problem gerechnet. Damit eine analytische Lösung für das Transmissionsproblem konstruiert werden kann, wird das kreisförmige Gebiet  $B_0(\frac{1}{4})$  mit dem Radius  $\frac{1}{4}$  betrachtet. Ausgehend von einem quadratischen Netz werden bei dessen Verfeinerung die Randknoten auf den Kreis  $B_0(\frac{1}{4})$  projiziert. Dadurch kann die quadratische Ausgangsnetz (Abb. 5.1) mit weiteren Verfeinerungsschritten dem Kreis  $B_0(\frac{1}{4})$  gut angenähert werden. In Abbildung 5.2 ist beispielhaft das Netz des 4. Verfeinerungsschrittes  $L = 4$  angeführt.

Abbildung 5.1.: Ausgangsvernetzung,  $L=0$ Abbildung 5.2.: Verfeinerungsschritt,  $L=4$ 

Für den Druck und die Geschwindigkeit im Innenraum werden dieselben Funktionen wie in Abschnitt 3.6 vorgegeben. Das heißt, für den Druck ist  $p \in L_{2,0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  und für die Geschwindigkeit wird eine genügend glatte Funktion  $\mathbf{u} \in [H^3(\Omega)]^2$  gewählt. Es wird mit folgenden Funktionen in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} p(r, \varphi) &= 320r^3 - 96r^2 + 1 \\ u_1(r, \varphi) &= \sin(\varphi)(-4096r^4 + 1280r^3) \\ u_2(r, \varphi) &= \cos(\varphi)(4096r^4 - 1280r^3), \end{aligned}$$

bzw. in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 320(x^2 + y^2)^{3/2} - 96(x^2 + y^2) + 1 \\ u_1(x, y) &= y(1280(x^2 + y^2) - 4096(x^2 + y^2)^{3/2}) \\ u_2(x, y) &= x(-1280(x^2 + y^2) + 4096(x^2 + y^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

und der zugehörigen rechten Seite  $\mathbf{f}$  im Innenraum  $\Omega$  gerechnet

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{64}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( 15x^3 + 960x^2y - 160y(-6y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \right. \\ \left. - 3x(-5y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \\ \frac{64}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( -960x^3 + 15x^2y + 160x(-6y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \right. \\ \left. - 3y(-5y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \end{pmatrix}.$$

Im Außenraum  $\Omega^{\text{ext}}$  werden die Funktionen

$$\begin{aligned} p_e(x, y) &= 0 \\ u_{1,e}(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ u_{2,e}(x, y) &= -\frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

vorgegeben. Insbesondere erfüllt  $\mathbf{u}_e$  komponentenweise die Laplace–Gleichung und die Abstrahlbedingung im Außenraum  $\Omega^{\text{ext}}$ .

**Beispiel 5.1.** *Mit den vorgegebenen Funktionen aus (5.21), (5.22) und der Ausgangsvernetzung (Abb. 5.1) wird die FEM–BEM Kopplung berechnet.*

In den Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3 sind die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks, die  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler und die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler der Geschwindigkeit, und die  $L_2(\Gamma)$ –Fehler der Randspannung für 8 Verfeinerungsschritte aufgelistet.

L	N	$\ u_1 - u_{1,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ u_2 - u_{2,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\Omega_h)}$	eoc
0	4	7,13E+00		7,13E+00		7,65E-02	
1	16	3,81E+00	1,60	3,81E+00	1,60	6,64E-02	0,36
2	64	1,77E+00	1,13	1,77E+00	1,13	5,91E-02	0,17
3	256	8,82E-01	1,05	8,82E-01	1,05	4,37E-02	0,46
4	1024	4,44E-01	1,00	4,44E-01	1,00	2,43E-02	0,86
5	4096	2,23E-01	1,00	2,23E-01	1,00	1,04E-02	1,22
6	16384	1,11E-01	1,00	1,11E-01	1,00	4,00E-03	1,38
7	65536	5,57E-02	1,00	5,57E-02	1,00	1,47E-03	1,44
8	262144	2,79E-02	1,00	2,79E-02	1,00	5,42E-04	1,44
Theorie:			1		1		1

Tabelle 5.1.:  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler für  $p$ ,  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$

L	R	$\ u_1 - u_1^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc	$\ u_2 - u_2^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc
0	8	4,35E+00		4,35E+00	
1	16	1,60E+00	1,63	1,60E+00	1,63
2	32	4,42E-01	1,91	4,42E-01	1,91
3	64	1,13E-01	1,98	1,13E-01	1,98
4	128	2,85E-02	1,99	2,85E-02	1,99
5	256	7,13E-03	2,00	7,13E-03	2,00
6	512	1,78E-03	2,00	1,78E-03	2,00
7	1024	4,46E-04	2,00	4,46E-04	2,00
8	2048	1,11E-04	2,00	1,11E-04	2,00
Approx.eigenschaft:			2	2	

Tabelle 5.2.:  $L_2(\Gamma)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$ 

L	R	$\ t_1 - t_1^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc	$\ t_2 - t_2^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc
0	8	9,82E+00		9,82E+00	
1	16	6,24E+00	0,74	6,24E+00	0,74
2	32	3,33E+00	0,93	3,33E+00	0,93
3	64	1,67E+00	1,01	1,67E+00	1,01
4	128	8,23E-01	1,02	8,23E-01	1,02
5	256	4,07E-01	1,01	4,07E-01	1,01
6	512	2,02E-01	1,01	2,02E-01	1,01
7	1024	1,01E-01	1,00	1,01E-01	1,00
8	2048	5,04E-02	1,00	5,04E-02	1,00
Theorie:			1	1	

Tabelle 5.3.:  $L_2(\Gamma)$ –Fehler für  $\mathbf{t}$ 

Vergleicht man die Ergebnisse aus Tabelle 5.1 mit den theoretischen Vorhersagen, die man aus Satz 3.23 erwarten möchte, lässt sich erkennen, dass die Konvergenzordnung (eoc) des  $H^1(\Omega_h)$ –Fehlers der Geschwindigkeit mit der Theorie übereinstimmt. Für den  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks nähert sich die Estimated Order of Convergence dem Wert 1.5 an, obwohl die Theorie zunächst einen Wert von 1 erwarten lässt. Die lineare Konvergenz aus dem Geschwindigkeitsanteil in (3.57) beeinflusst die Ordnung des Drucks  $p$ , dessen Approximation eigentlich quadratische Ordnung zulassen würde. Solche Phänomene werden in [39] genauer betrachtet. So kann in solchen Fällen im präasymptotischen Bereich eine höhere Konvergenzordnung beobachtet werden. In Tabelle 5.2 wird der  $L_2(\Gamma)$ –Fehler der Geschwindigkeit am Rand und in Tabelle 5.3 wird der  $L_2(\Gamma)$ –Fehler der Randspannung ausgewertet. Die Estimated Order of Convergence für  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{t}$  stimmen mit den erwarteten Konvergenzordnungen überein. In den Abbildungen 5.3 – 5.5 sind die grafischen Auswertung des Drucks  $p_h$ , der Randspannung  $t_{1,h}$  und der 1. Geschwindigkeitskomponente im Inneren  $u_{1,h}$  und am Rand

$u_{1,h}^{\text{ext}}$ , des 7. Verfeinerungslevels angeführt. Es lässt sich erkennen, dass beim Druck  $p_h$  (Abb. 5.3) Oszillationen auftreten, die in Bahnen zum Rand verlaufen. Die Randspannung  $t_{1,h}$  (Abb. 5.5) und die Geschwindigkeit im Inneren  $u_{1,h}$  und am Rand  $u_{1,h}^{\text{ext}}$  sind unauffällig (Abb. 5.4).

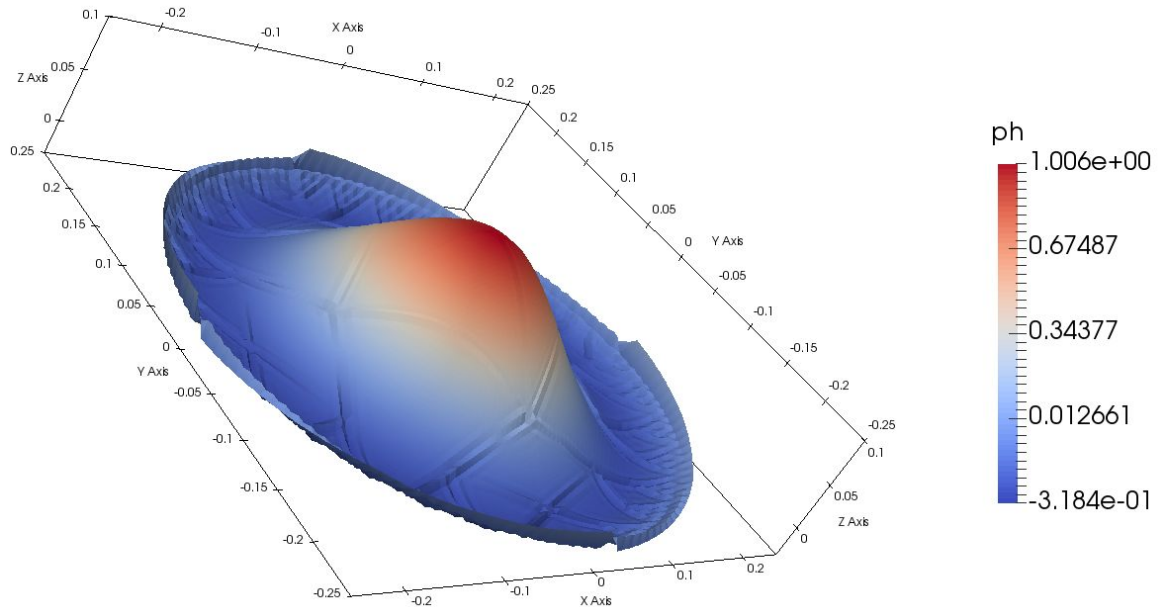


Abbildung 5.3.:  $L=7$ ,  $p_h$

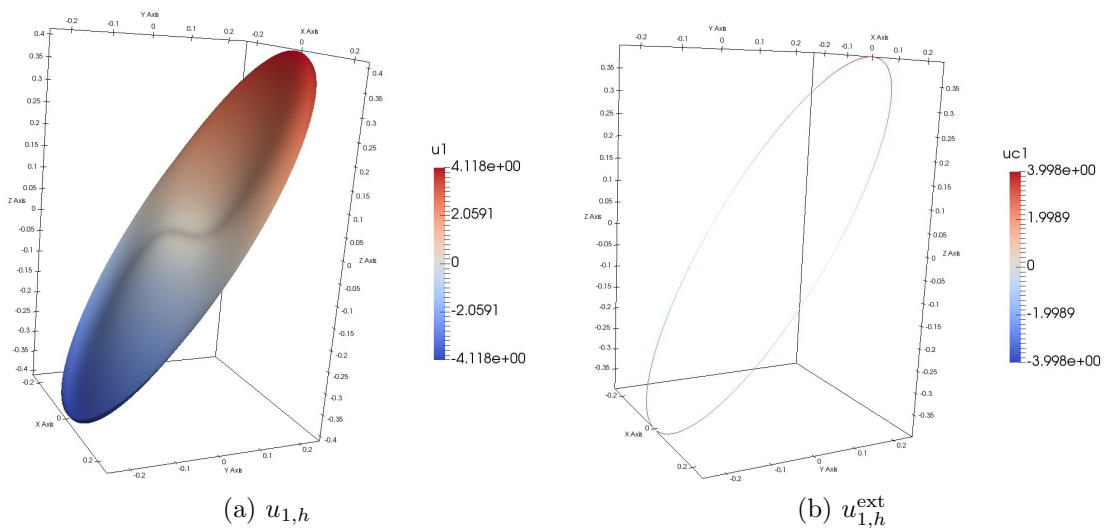
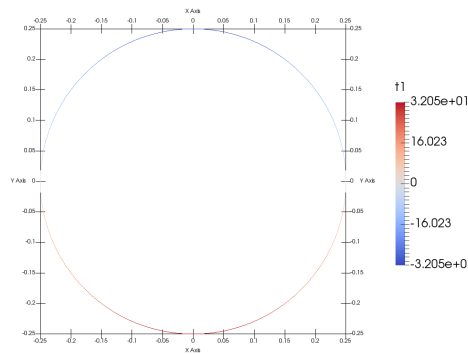


Abbildung 5.4.:  $L=7$ ,  $u_{1,h}$  und  $u_{1,h}^{\text{ext}}$

Abbildung 5.5.:  $L=7$ ,  $t_{1,h}$ 

Nachdem beim Druck  $p_h$  in Abbildung 5.3 Oszillationen auftreten, die die Strukturen größerer Verfeinerungsstufen zeigen, werden zur genaueren Untersuchung weitere Beispiele berechnet, in denen die Netze mit Netgen [36] erzeugt werden.

**Beispiel 5.2.** Die FEM–BEM Kopplung wird mit den vorgegebenen Funktionen aus (5.21), (5.22) und einer Ausgangsvernetzung, dessen Netz aus 5394 Elementen besteht und mit Netgen generiert wurde, berechnet.

L	N	$\ u_1 - u_{1,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ u_2 - u_{2,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\Omega_h)}$	eoc
0	5394	2,12E-01		2,12E-01		3,57E-03	
1	21576	1,06E-01	1,00	1,06E-01	1,00	2,35E-03	0,60
2	86304	5,30E-02	1,00	5,32E-02	1,00	9,56E-04	1,30
3	345216	2,65E-02	1,00	2,66E-02	1,00	3,75E-04	1,35
Theorie:			1		1		1

Tabelle 5.4.:  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler für  $p$ ,  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$ 

L	R	$\ u_1 - u_1^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc	$\ u_2 - u_2^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc
0	320	4,57E-03		4,57E-03	
1	640	1,14E-03	2,00	1,14E-03	2,00
2	1280	2,88E-04	1,99	2,88E-04	1,99
3	2560	7,26E-05	1,99	7,26E-05	1,99
Approx.eigenschaft:			2		2

Tabelle 5.5.:  $L_2(\Gamma)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$ 

Das Ausgangsnetz mit 5394 Elementen wurde mit Netgen [36] erzeugt und in weiteren 3 Verfeinerungsschritten mit der oben beschriebenen Routine verfeinert. In den Tabellen 5.4, 5.5 und 5.6 sind die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks, die  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler und die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler der Geschwindigkeit, und die  $L_2(\Gamma)$ –Fehler der Randspannung für

4 Verfeinerungsschritte aufgelistet. Die Estimated Order of Convergence für  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{t}$  stimmen mit den jeweiligen Konvergenzordnungen aus der Theorie überein. In diesem Fall bewegt sich die Estimated Order of Convergence für den Druck  $p$  um den Wert 1.3.

L	R	$\ t_1 - t_1^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc	$\ t_2 - t_2^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc
0	320	3,21E-01		3,21E-01	
1	640	1,61E-01	1,00	1,61E-01	1,00
2	1280	8,04E-02	1,00	8,04E-02	1,00
3	2560	4,03E-02	1,00	4,03E-02	1,00
Theorie:			1		1

Tabelle 5.6.:  $L_2(\Gamma)$ –Fehler für  $\mathbf{t}$

**Beispiel 5.3.** Die FEM–BEM Kopplung wird mit den vorgegebenen Funktionen aus (5.21), (5.22) und mit 4 in Netzen generierten Netzen, berechnet.

In diesem Beispiel wird das Netz eines jeden Verfeinerungsschrittes mit Netgen [36] erzeugt. In den Tabellen 5.7, 5.8 und 5.9 sind die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler des Drucks, die  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler und die  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler der Geschwindigkeit, und die  $L_2(\Gamma)$ –Fehler des Koppelterms  $\mathbf{t}$  für 4 Verfeinerungsschritte aufgelistet. Die Estimated Order of Convergence für  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{t}$  stimmen mit den jeweiligen Konvergenzordnungen aus der Theorie überein. In diesem Fall strebt die Estimated Order of Convergence für den Druck  $p$  gegen den Wert 0.8.

Werden die Beispiele miteinander verglichen, fällt auf, dass für eine vergleichbare Anzahl an Elementen die jeweiligen Fehlerordnungen gleich sind. Zusätzlich bemerkt man, dass die Estimated Order of Convergence des Drucks  $p$  aus Tabelle (5.1) gegen 1.5, aus Tabelle (5.4) gegen 1.3 und aus Tabelle (5.7) gegen 0.8 strebt. Die beobachteten Fehler entsprechen im wesentlichen den Fehlern der FEM Lösung des Dirichlet-Randwertproblems mit den entsprechenden Daten. Führt man für diese reinen FEM–Rechnungen weitere uniforme Verfeinerungsschritte für die Netze mit 78704 bzw. 312284 Elementen durch, so stellt sich im nächsten oder übernächsten Verfeinerungsschritt auch im Druck die erwartete lineare Konvergenz ein. Insbesondere zeigt das einmal uniform verfeinerte Netz mit 78704 Elementen im Druck einen kleineren Fehler als das Netz 312284 mit Elementen.

L	N	$\ u_1 - u_{1,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ u_2 - u_{2,h}\ _{H^1(\Omega_h)}$	eoc	$\ p - p_h\ _{L_2(\Omega_h)}$	eoc
0	5394	2,12E-01		2,12E-01		3,57E-03	
1	19880	1,06E-01	1,14	1,06E-01	1,14	1,90E-03	1,03
2	78704	5,09E-02	1,06	5,09E-02	1,06	1,03E-03	0,89
3	312384	2,47E-02	1,03	2,47E-02	1,03	6,05E-04	0,76
Theorie:			1		1		1

Tabelle 5.7.:  $L_2(\Omega_h)$ –Fehler für  $p$ ,  $H^1(\Omega_h)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$



L	R	$\ u_1 - u_1^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc	$\ u_2 - u_2^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc
0	320	4,57E-03		4,57E-03	
1	632	1,17E-03	2,00	1,17E-03	2,00
2	1312	2,68E-04	2,02	2,68E-04	2,02
3	2712	6,52E-05	1,95	6,52E-05	1,95
Approx.eigenschaft:			2	2	

Tabelle 5.8.:  $L_2(\Gamma)$ –Fehler für  $\mathbf{u}$

L	R	$\ t_1 - t_1^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc	$\ t_2 - t_2^{\text{ext}}\ _{L_2(\Gamma)}$	eoc
0	320	3,21E-01		3,21E-01	
1	632	1,63E-01	1,00	1,63E-01	1,00
2	1312	7,84E-02	1,00	7,84E-02	1,00
3	2712	3,82E-02	0,99	3,82E-02	0,99
Theorie:			1	1	

Tabelle 5.9.:  $L_2(\Gamma)$ –Fehler für  $\mathbf{t}$

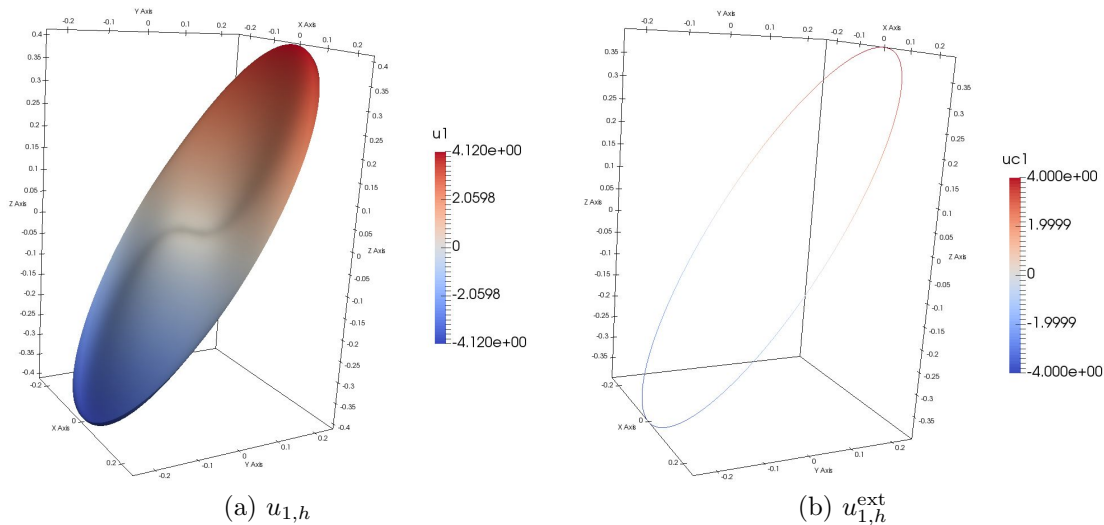


Abbildung 5.6.:  $L=2$ ,  $u_{1,h}$  und  $u_{1,h}^{\text{ext}}$

In den Abbildungen 5.6 – 5.8 sind die grafischen Darstellungen von  $\mathbf{u}_h$ ,  $p_h$ ,  $\mathbf{t}_h$ ,  $\mathbf{u}_h^{\text{ext}}$  des 2. Verfeinerungslevels, also dem Netz mit 19880 Elementen angeführt. Die Randspannung  $t_{1,h}$  (Abb. 5.7) und die Geschwindigkeit im Inneren  $u_{1,h}$  und am Rand  $u_{1,h}^{\text{ext}}$  sind unauffällig (Abb. 5.6). Es lässt sich erkennen, dass beim Druck  $p_h$  (Abb. 5.8) wieder lokale Oszillationen auftreten. Vergleicht man die Abbildungen der Drücke aus Abb. 5.3 und Abb. 5.8 miteinander, fällt auf, dass die Oszillationen des Drucks in Abb. 5.8

nicht so markant ausfallen. Deshalb erweisen sich die beobachteten Oszillationen unter anderem als netzabhängig.

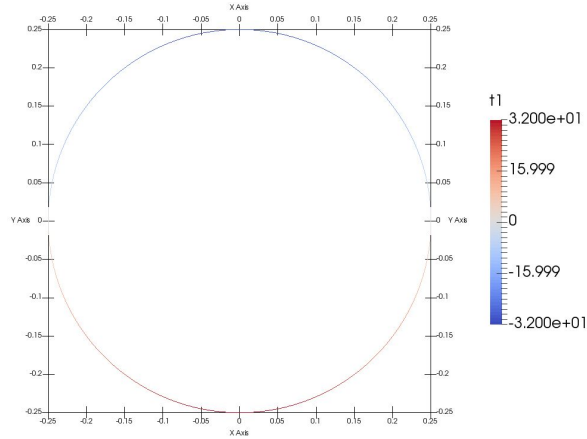


Abbildung 5.7.:  $L=2$ ,  $t_{1,h}$

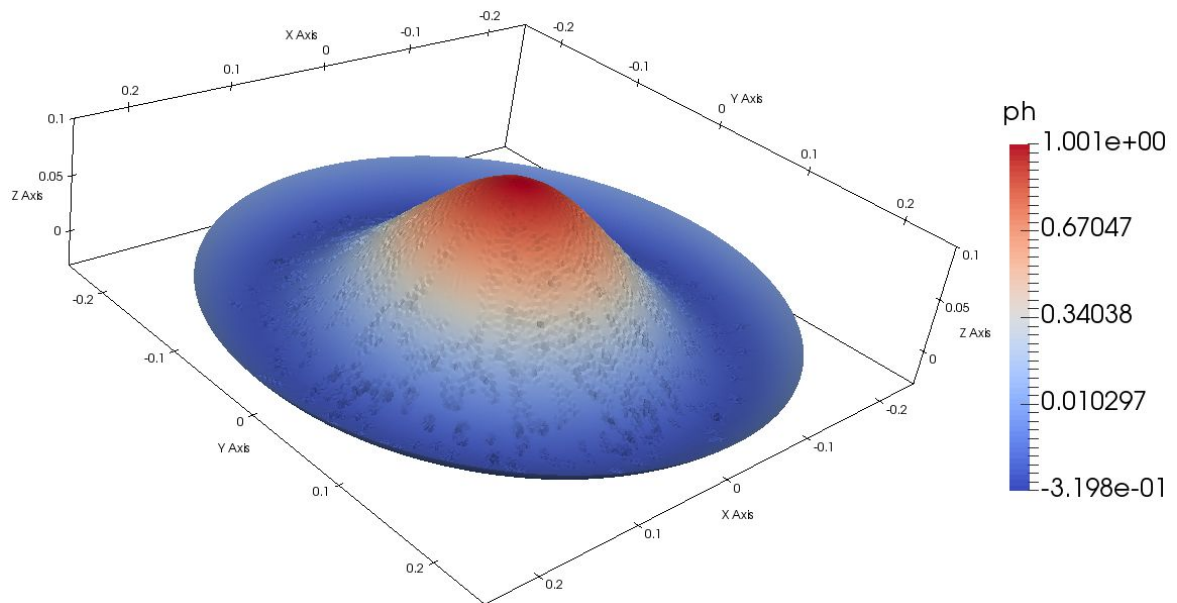


Abbildung 5.8.:  $L=2$ ,  $p_h$

In den nachfolgenden 2 Beispielen wird jeweils nur die rechte Seite

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -22y \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

vorgegeben und die Geometrie geändert. In den Beispielen 5.4 und 5.5 kann optische Konvergenz für  $\mathbf{u}_h$ ,  $p_h$ ,  $\mathbf{t}_h$  beobachtet werden.

**Beispiel 5.4.** Die FEM–BEM Kopplung wird anhand der vorgegebenen rechten Seite  $\mathbf{f}$  aus (5.23) und mit dem Gebiet (Abb. 5.1, Abb. 5.2), welches dem Kreis  $B_0(\frac{1}{4})$  angenähert wird, berechnet.

Die Erstellung des kreisförmigen Gebiets  $\Omega = B_0(\frac{1}{4})$  wurde anfangs in Abschnitt 5.5 (Abb. 5.1, 5.2) beschrieben. Die grafischen Darstellungen von  $\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{t}_h, \mathbf{u}_h^{\text{ext}}$  sind für den 7. Verfeinerungsschritt in den Abbildungen 5.9, 5.10 dargestellt. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_h$  (Abb. 5.9) zeigt keine Besonderheiten. Dasselbe gilt für den Druck  $p_h$  und die Randspannung  $\mathbf{t}_h$  (Abb. 5.10).

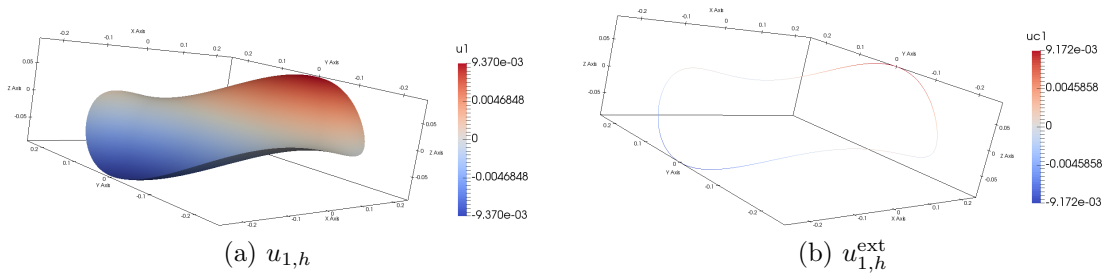


Abbildung 5.9.:  $L=7$ ,  $u_{1,h}$  und  $u_{1,h}^{\text{ext}}$

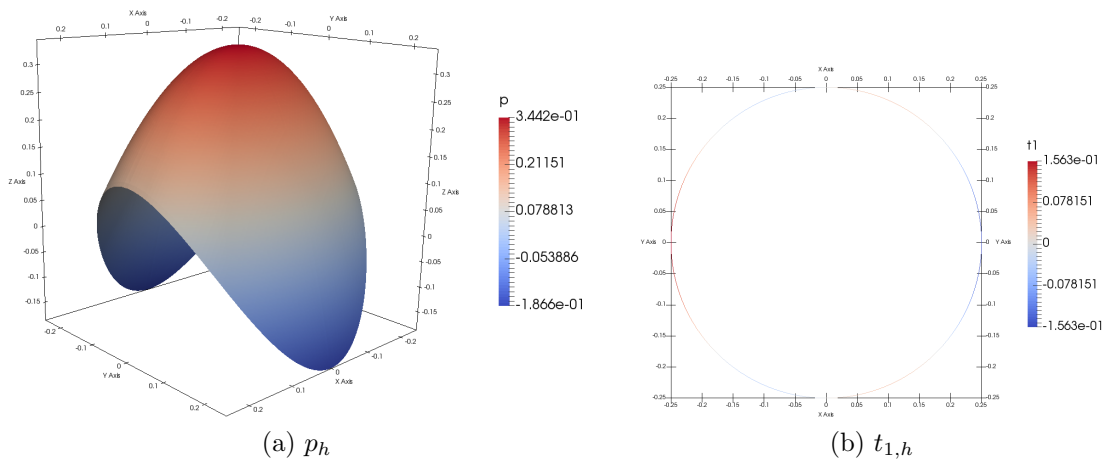
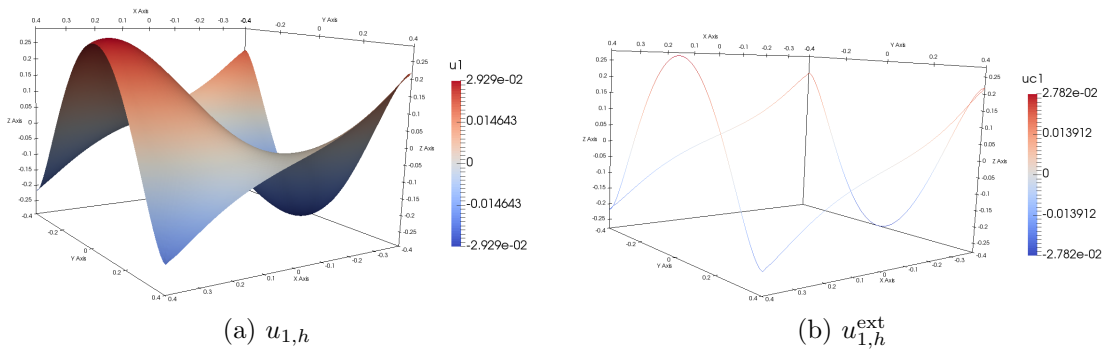
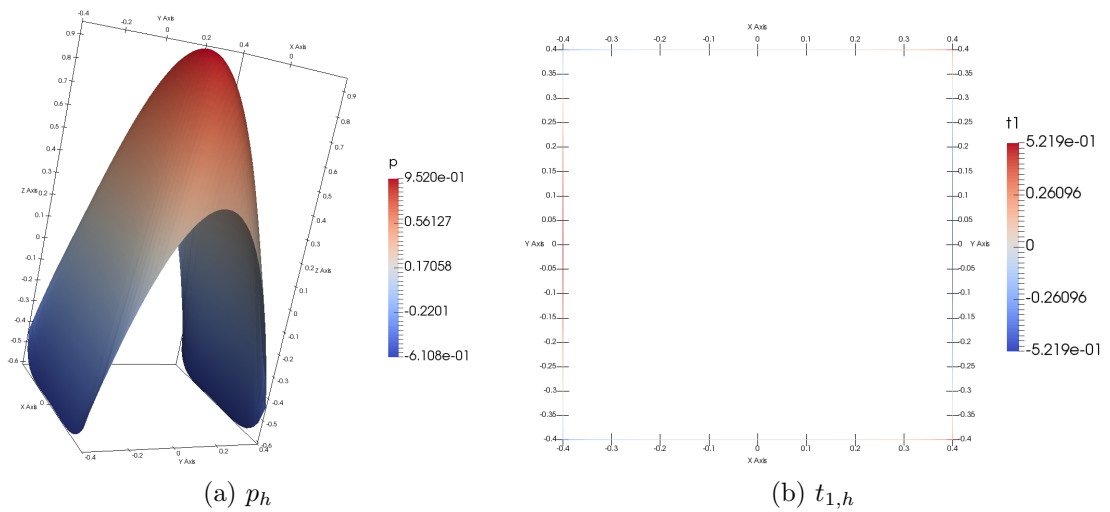


Abbildung 5.10.:  $L=7$ ,  $p_h$  und  $t_{1,h}$

**Beispiel 5.5.** Die FEM–BEM Kopplung wird anhand der vorgegebenen rechten Seite  $\mathbf{f}$  aus (5.23) und dem quadratischen Gebiet  $\Omega = [-0.4, 0.4]^2$  berechnet.

Das Gebiet  $\Omega = [-0.4, 0.4]^2$  wird uniform verfeinert. In diesem Fall sind wieder die grafischen Darstellungen von  $\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{t}_h, \mathbf{u}_h^{\text{ext}}$  für den 7. Verfeinerungsschritt in den Abbildungen 5.11, 5.12 abgebildet. Der Druck  $p_h$  (Abb. 5.12a) oszilliert nicht. Die Randspannung  $\mathbf{t}_h$  (Abb. 5.12b) ist langwellig, und die Geschwindigkeit im Inneren  $\mathbf{u}_h$  und am Rand  $\mathbf{u}_h^{\text{ext}}$  zeigen auch keine Oszillationen auf (Abb. 5.12).

Abbildung 5.11.:  $L=7$ ,  $u_{1,h}$  und  $u_{1,h}^{ext}$ Abbildung 5.12.:  $L=7$ ,  $p_h$  und  $t_{1,h}$ 

Die beobachteten lokalen Oszillationen erweisen sich als netzabhängig. Außerdem hängen sie von den Lösungen bzw. rechten Seiten ab und sind selten so ausgeprägt wie in Beispiel 5.1.

# A. Referenzelement, Formfunktionen und lokale Parametrisierung

In diesem Abschnitt werden, ausgehend von einer zulässigen und formregulären Triangulierung, das Referenzelement, die Formfunktionen, die lokale Parametrisierung und die Basisfunktionen besprochen. Dieser Abschnitt wird zur Gänze aus dem Masterprojekt [27] entnommen.

## A.1. Referenzelement und Formfunktionen

Für Dreieckselemente ist das Referenzelement im betrachteten zweidimensionalen Fall gegeben als

$$\tau := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1\}.$$

Die zugehörigen linearen Formfunktionen lauten

$$\begin{aligned} L_1(\xi_1, \xi_2) &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ L_2(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1 \\ L_3(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 \end{aligned} \tag{A.1}$$

und die zugehörigen quadratischen Formfunktionen lauten

$$\begin{aligned} N_1(\xi_1, \xi_2) &= 2\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - 3\xi_1 + 2\xi_2^2 - 3\xi_2 + 1 \\ N_2(\xi_1, \xi_2) &= 2\xi_1^2 - \xi_1 \\ N_3(\xi_1, \xi_2) &= 2\xi_2^2 - \xi_2 \\ N_4(\xi_1, \xi_2) &= -4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 4\xi_1 \\ N_5(\xi_1, \xi_2) &= 4\xi_1\xi_2 \\ N_6(\xi_1, \xi_2) &= -4\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 + 4\xi_2. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Der Raum  $\widetilde{M}_h$  aus (3.51) ist der Raum der stückweisen, linearen und global stetigen Ansatzfunktionen. Der Raum  $X_h$  der Taylor–Hood–Elemente aus (3.3) ist jener der stückweisen, quadratischen und global stetigen Ansatzfunktionen. Der Raum  $X_h$  der modifizierten Taylor–Hood–Elemente aus (3.5) ist jener der stückweisen linearen und global stetigen Ansatzfunktionen.

## A.2. Lokale Parametrisierung

Für die Assemblierung wird die lokale Parametrisierung über dem Referenzelement [41, S. 206f] verwendet. Die Eckpunkte des Finiten Elements  $\tau_\ell$  werden mit  $\mathbf{x}_{\ell_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  und dessen Komponenten mit  $\mathbf{x}_{\ell_i,1}$ ,  $\mathbf{x}_{\ell_i,2}$  gekennzeichnet.

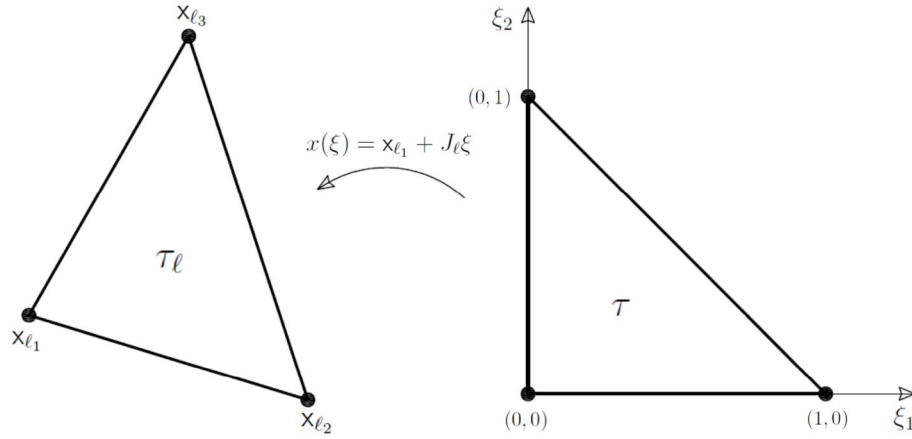


Abbildung A.1.: Finites Element  $\tau_\ell$  und Referenzelement  $\tau$

Dazu gehört die lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned}
 x &= \mathbf{x}_{\ell_1} + \sum_{i=1}^2 \xi_i (\mathbf{x}_{\ell_{i+1}} - \mathbf{x}_{\ell_1}) \\
 &= \mathbf{x}_{\ell_1} + \xi_1 (\mathbf{x}_{\ell_2} - \mathbf{x}_{\ell_1}) + \xi_2 (\mathbf{x}_{\ell_3} - \mathbf{x}_{\ell_1}) \\
 &= \mathbf{x}_{\ell_1} + J_\ell \xi,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

für  $\xi \in \tau$ . Aus der Parametrisierung ergibt sich die Jacobi-Matrix

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\ell_2,1} - \mathbf{x}_{\ell_1,1} & \mathbf{x}_{\ell_3,1} - \mathbf{x}_{\ell_1,1} \\ \mathbf{x}_{\ell_2,2} - \mathbf{x}_{\ell_1,2} & \mathbf{x}_{\ell_3,2} - \mathbf{x}_{\ell_1,2} \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Die Fläche des Elements  $\tau_\ell$  errechnet sich aus

$$\Delta_\ell = \int_{\tau_\ell} dx = \int_{\tau} |\det J_\ell| d\xi = |\det J_\ell| \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} |\det J_\ell|.$$

Für eine Funktion  $\tilde{v}(x)$  für  $x \in \tau_\ell$ , erhält man mittels der Parametrisierung

$$\tilde{v}(x) = \tilde{v}(\mathbf{x}_{\ell_1} + J_\ell \xi) =: v(\xi), \quad \text{für } \xi \in \tau. \tag{A.5}$$

Darauf die Kettenregel angewandt ergibt

$$\nabla_{\xi} v(\xi) = J_{\ell}^{\top} \nabla_x \tilde{v}(x),$$

beziehungsweise

$$\nabla_x \tilde{v}(x) = J_{\ell}^{-\top} \nabla_{\xi} v(\xi).$$

### A.3. Basisfunktionen

Die stückweisen linearen, global stetigen Basisfunktionen  $\varphi_i$  und die stückweisen quadratischen, global stetigen Basisfunktionen  $\psi_j$  hängen mit den linearen (A.1) und quadratischen (A.2) Formfunktionen durch die lokale Parametrisierung zusammen. Die Basisfunktionen werden dazu auf ein Element  $\tau_{\ell}$  ihres Trägers eingeschränkt. Somit entspricht  $\varphi_{i|\tau_{\ell}} = \tilde{L}_r$  für ein  $r \in \{1, 2, 3\}$  und  $\psi_{j|\tau_{\ell}} = \tilde{N}_s$  für ein  $s \in \{1, \dots, 6\}$ .





# Literaturverzeichnis

- [1] C. Bernardi. Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(5):1212–1240, 1989.
- [2] C. Bernardi and G. Raugel. Analysis of some finite elements for the Stokes problem. *Math. Comp.*, 44(169):71–79, 1985.
- [3] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [4] D. Braess. *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2013.
- [5] G. Brenn. *Strömungslehre und Wärmeübertragung I*. Technische Universität Graz, 2014. Vorlesungsskript.
- [6] F. Brezzi, C. Johnson, and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. In *Proceedings of the Fourth Symposium on Basic Problems of Numerical Mathematics (Plzeň, 1978)*, pages 103–114. Charles Univ., Prague, 1978.
- [7] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity.*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [8] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [9] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, 9(R-2):77–84, 1975.
- [10] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, 7(R-3):33–75, 1973.
- [11] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Integral equations and numerical methods. Vol. 4*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [12] G. Duvaut and J.L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 219.

- [13] M. Feischl, T. Führer, M. Karkulik, and D. Praetorius. Stability of symmetric and nonsymmetric FEM-BEM couplings for nonlinear elasticity problems. *Numer. Math.*, 130(2):199–223, 2015.
- [14] G.N. Gatica, G.C. Hsiao, S. Meddahi, and F.-J. Sayas. On the dual–mixed formulation for an exterior Stokes problem. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 93(6–7):437–445, 2013.
- [15] G.N. Gatica, G.C. Hsiao, S. Meddahi, and F.-J. Sayas. New developments on the coupling of mixed–FEM and BEM for the three–dimensional exterior Stokes problem. *International journal of numerical analysis and modeling*, 13(3):457–492, 2016.
- [16] G.N. Gatica, G.C. Hsiao, and F.-J. Sayas. Relaxing the hypotheses of Bielak-MacCamy’s BEM-FEM coupling. *Numer. Math.*, 120(3):465–487, 2012.
- [17] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [18] C. Graf. *Lösung gemischter Randwertprobleme der linearen Elastizität mittels Finiten Elemente Methode*. Bachelorarbeit, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2016.
- [19] G.H. Guirguis. On the coupling boundary integral and finite element methods for the exterior Stokes problem in 3-D. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(2):310–322, 1987.
- [20] P. Gummert and K.A. Reckling. *Mechanik*. Vieweg, Wiesbaden, 3. Auflage, 1994.
- [21] G.C. Hsiao and W.L. Wendland. *Boundary integral equations*, volume 164 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [22] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152):1063–1079, 1980.
- [23] M. Kohr and W.L. Wendland. Variational boundary integral equations for the Stokes system. *Appl. Anal.*, 85(11):1343–1372, 2006.
- [24] A. Kuzmin, M. Luisier, and O. Schenk. Fast methods for computing selected elements of the greens function in massively parallel nanoelectronic device simulations. In F. Wolf, B. Mohr, and D. Mey, editors, *Euro-Par 2013 Parallel Processing*, volume 8097 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 533–544. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [25] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2. Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.
- [26] S. Meddahi and F.-J. Sayas. A fully discrete BEM-FEM for the exterior Stokes problem in the plane. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(6):2082–2102, 2000.

- 
- [27] A. Neumayr. *Numerische Lösung des Dirichlet–Randwertproblems des Stokes–Problems mittels der Finiten Elemente Methode und Taylor–Hood–Elemente*. Masterprojekt, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2016.
- [28] G. Of. *Vorlesung: Mathematische Modellierung I*. Technische Universität Graz, 2012. Vorlesungsmitschrift.
- [29] G. Of and O. Steinbach. Is the one-equation coupling of finite and boundary element methods always stable? *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 93(6–7):476–484, 2013.
- [30] G. Of and O. Steinbach. On the ellipticity of coupled finite element and one-equation boundary element methods for boundary value problems. *Numer. Math.*, 127(3):567–593, 2014.
- [31] A.J. Radcliffe. A comparison between a symmetric and a non-symmetric Galerkin finite element–boundary integral equation coupling for the two-dimensional exterior Stokes problem. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 35(8):959–969, 2011.
- [32] A.J. Radcliffe. FEM-BEM coupling for the exterior Stokes problem with non-conforming finite elements and an application to small droplet deformation dynamics. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 68(4):522–536, 2012.
- [33] F.-J. Sayas. The validity of Johnson–Nédélec’s BEM-FEM coupling on polygonal interfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(5):3451–3463, 2009.
- [34] F.-J. Sayas. The Validity of Johnson–Nédélec’s BEM–FEM Coupling on Polygonal Interfaces. *SIAM Review*, 55(1):131–146, 2013.
- [35] F.-J. Sayas and V. Selgas. Variational views of Stokeslets and stresslets. *S $\overline{E}$ MA J.*, 63:65–90, 2014.
- [36] J. Schöberl. An advancing front 2d/3d-mesh generator based on abstract rules. *Computing and Visualization in Science*, 1(1):41–52, 1997.
- [37] L.R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.
- [38] A. Sequeira. The coupling of boundary integral and finite element methods for the bidimensional exterior steady Stokes problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 5(3):356–375, 1983.
- [39] O. Steinbach. A note on initial higher-order convergence results for boundary element methods with approximated boundary conditions. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 16(6):581–588, 2000.
- [40] O. Steinbach. A robust boundary element method for nearly incompressible linear elasticity. *Numer. Math.*, 95(3):553–562, 2003.
- [41] O. Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements*. Springer, New York, 2008.

- [42] O. Steinbach. A note on the stable one-equation coupling of finite and boundary elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(4):1521–1531, 2011.
- [43] O. Steinbach. On the stability of the non-symmetric BEM/FEM coupling in linear elasticity. *Comput. Mech.*, 51(4):421–430, 2013.
- [44] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Internat. J. Comput. & Fluids*, 1(1):73–100, 1973.
- [45] K. Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.
- [46] De-hao Yu. *Natural boundary integral method and its applications*, volume 539 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Science Press Beijing, Beijing, 2002. Translated from the 1993 Chinese original.
- [47] J. Zhu and W.L. Wendland. The boundary element method for three-dimensional Stokes flows exterior to an open surface. *Math. Comput. Modelling*, 15(6):19–41, 1991.

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

---

Datum

---

Unterschrift