denen Holztheile und Eifentheile mit einander zu verbinden find, alfo nur an der gedrückten Gurtung, an den gedrückten Gitterftäben und an den betreffenden Knotenpunkten.

1) Obere oder Strebengurtung.

218. Pfetten nur in den Knotenpunkten.

Wenn die Pfetten nur in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angeordnet find, was ftets empfehlenswerth ift, fo werden die Stäbe der letzeren nur auf Druck in der Richtung ihrer Axe beanfprucht.

Die Querfchnittsform ift rechteckig, zweckmäfsig quadratifch; je nach Bedarf ordnet man einen oder zwei neben einander liegende, gehörig in Verbindung gebrachte Balken an (Fig. 584). Die Querfchnittsgröfse ift derart zu beftimmen, dafs der Stab genügende Sicherheit fowohl gegen einfachen Druck, wie gegen Zerknicken bietet. Nennt man die gröfste, ungünftigftenfalls im Stabe auftretende Kraft P (in Tonnen), die Querfchnittsfläche F, die Stablänge, welche für Zerknicken in Frage kommt, λ, und die zuläffige Druckbeanfpruchung für das Quadr.-Centim. K, fo mufs nach Theil I, Bd. 1, zweite Hälfte (Art. 341, S. 304[264]) diefes »Handbuches« der Querfchnitt fo beftimmt werden, dafs ftattfindet:

$$F \geqq \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} \geqq 83\, P \lambda_m{}^2 \qquad \text{33.}$$

Mit Rückficht auf Zerknicken ift die quadratifche Querfchnittsform am günftigften, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ift. Man beftimmt nun am beften zunächft die Querfchnittsgröfse F nach der erften Gleichung, wählt die Abmeffungen des Querfchnittes b und h nach praktifchen Rückfichten und unterfucht, ob der gewählte Querfchnitt ein genügend grofses Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_{min}$ hat, fo dafs die zweite Gleichung erfüllt ift. Wenn dies nicht der Fall ift, fo verftärkt man den Querfchnitt entfprechend.

Beifpiel. Es fei $P = 18000$ kg, $K = 80$ kg für 1 qcm und $\lambda = 2{,}2$ m; alsdann mufs

$$F \geqq \frac{18000}{80}, \qquad F \geqq 225 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_{min} \geqq 83 \cdot 18 \cdot 2{,}2^2, \; \mathfrak{J}_{min} \geqq 7231$$

fein. Würde man einen quadratifchen Querfchnitt wählen, alfo $b = h$, fo müffte nach der erften Beziehung wenigftens

$$b^2 = 225 \text{ cm}^2 \quad \text{und} \quad b = 15 \text{ cm}$$

fein; alsdann wäre $\mathfrak{J}_{min} = \frac{b^4}{12} = 4219$; dies genügt nach der zweiten Bedingung nicht; nach diefer mufs $\mathfrak{J}_{min} = \frac{b^4}{12} = 7231$ fein, woraus $b = 17{,}2$ cm folgt. Der Querfchnitt müffte alfo wenigftens ein Quadrat von $\backsim 18$ cm Seitenlänge fein; alsdann wäre $F = b^2 = 324$ qcm.

Wollte man einen rechteckigen Querfchnitt mit $b = 16$ cm wählen, fo wäre die Bedingungsgleichung, weil $\mathfrak{J}_{min} = \frac{h\,b^3}{12}$ ift,

$$\frac{h\,b^3}{12} = 7231,$$

woraus mit $b = 16$ cm

$$h = \frac{12 \cdot 7231}{16^3} = 21{,}2 \text{ cm} = \backsim 22 \text{ cm}$$

folgt; alsdann würde

$$b\,h = 16 \cdot 22 = 352 \text{ qcm}.$$

Wie aus diefem Beifpiel erfichtlich ift, ift die Rückficht auf Zerknicken für die Querfchnittsbeftimmung von grofser Wichtigkeit. Schwierig ift die Entfcheidung

264) 2. Aufl.: Art. 137, S. 116.

der Frage, welche Länge λ als Berechnungslänge eingeführt werden soll. Die Formel

$$\mathfrak{J}_{min} = 83\, P \lambda^2,$$

worin P in Tonnen und λ in Met. einzuführen ist, setzt für die Länge λ frei drehbare Enden in den Knotenpunkten voraus, eine Voraussetzung, welche hier nicht erfüllt ist. Eher scheint die im eben genannten Heft (Art. 336, S. 299[265]) dieses »Handbuches« ebenfalls behandelte beiderseitige Einspannung des Stabes zu stimmen; die Voraussetzung dieser Einspannung würde dazu führen, dass man dem Stabe eine 4-mal so grosse Kraft P zumuthen dürfte, als nach obiger Formel; der Querschnitt brauchte dann nur ein $\mathfrak{J}_{min}$ zu haben, das ein Viertel des früheren beträgt. Diese Annahme aber ist zu günstig, insbesondere mit Rücksicht darauf, dass die Knotenpunkte nicht als feste Punkte angesehen werden können; die Pfetten verhindern ein Ausbiegen aus der Ebene des Binders nicht unter allen Umständen. Es empfiehlt sich desshalb, die oben angeführte Formel 33 anzuwenden. Diese Berechnungsweise kann auch gewählt werden, wenn es sich um Holz-Diagonalen handelt, deren Enden in gusseisernen Schuhen sitzen.

219. Pfetten auch zwischen den Knotenpunkten.

Wenn Pfetten, also Lastpunkte, auch zwischen den Knotenpunkten der oberen Gurtung angeordnet sind, so muss der betreffende obere Gurtungsstab zugleich als Balken wirken, um die Lasten dieser Zwischenpfetten auf die Knotenpunkte zu übertragen; er erleidet durch diese Lasten Biegungsbeanspruchungen, welche zu denjenigen hinzukommen, die er als Fachwerkstab erleidet. Die grösste, ungünstigstenfalls im Querschnitt stattfindende Spannung darf die zulässige Beanspruchung nicht überschreiten. Nennt man das grösste durch die Lasten der Zwischenpfetten erzeugte Moment M und die grösste Axialkraft P, so ist

$$N_{min} = -\frac{P}{F} - \frac{6\,M}{b\,h^2} \text{ (grösster Druck im Querschnitt),}$$

$$N_{max} = -\frac{P}{F} + \frac{6\,M}{b\,h^2} \text{ (grösster Zug im Querschnitt).}$$

Da der Gurtungsstab durchweg gleichen Querschnitt erhält, so ist derjenige Querschnitt zu Grunde zu legen, für welchen M seinen Grösstwerth hat. Man kann bei dieser Rechnung von der Continuität über dem Fachwerkknoten absehen und die einzelnen Stäbe als frei aufliegende Balken ansehen. Wenn $-K$ die zulässige Druckbeanspruchung ist, so lautet nunmehr die Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \frac{P}{F} + \frac{6\,M}{h\,F}.$$

Man nehme zunächst $F\,(= b\,h)$ an, ermittele aus der eben vorgeführten Gleichung h und prüfe, ob die für b und h sich ergebenden Werthe angemessene sind; anderenfalls verbessere man durch Annahme eines neuen Werthes für F.

Beispiel. In einem Stabe der oberen Gurtung eines Dachbinders herrscht in Folge seiner Zugehörigkeit zum Fachwerk ein grösster Druck $P' = 14500^{\text{kg}}$. In der Mitte seiner Länge, die (in der Dachschräge gemessen) $4{,}5^{\text{m}}$ beträgt, befindet sich eine Pfette, auf welche ungünstigstenfalls ein Winddruck $W = 700^{\text{kg}}$, so wie eine lothrechte Last von Schnee und Eigengewicht $G_1 + S = 1000^{\text{kg}}$ wirken; die Abmessungen des oberen Gurtungsstabes sind zu bestimmen. Es ist $\cos\alpha = 0{,}895$ und $\sin\alpha = 0{,}447$.

Die Kraft $G_1 + S$ zerlegt sich zunächst in eine Seitenkraft senkrecht zur Dachschräge gleich $(G_1 + S)\cos\alpha = 895^{\text{kg}}$ und eine in die Axe fallende gleich $(G_1 + S)\sin\alpha = 447^{\text{kg}}$. Auf den Balken

265) 2. Aufl.: Art. 121, S. 101.

wirkt alſo ſenkrecht zu ſeiner Axe und in ſeiner Mitte ungünſtigſtenfalls die Kraft $700 + 895 = 1595$ kg, wofür abgerundet 1600 kg geſetzt wird. Das gröſste hierdurch erzeugte Moment iſt $M = 800 . 225 = 180000$ Kilogr.-Centim.

Die gröſste Axialkraft beträgt $14500 + 447 = 14947$ kg, wofür abgerundet $P = 15000$ kg geſetzt wird. Nun ſei die zuläſſige Beanſpruchung $K = 100$ kg für 1 qcm; alsdann lautet die Bedingungsgleichung für den Querſchnitt:

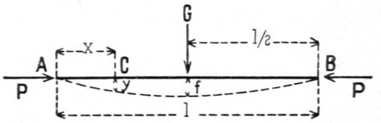
$$100 = \frac{15000}{F} + \frac{180000 . 6}{F h} .$$

Nimmt man verſuchsweiſe $F = 300$ qcm an, ſo ergiebt ſich $h = 72$ cm, ein unbrauchbarer Werth. Wählt man $F = 400$ qcm, ſo wird $h = 43$ cm, ebenfalls nicht brauchbar. Wählt man $F = 500$ qcm, ſo wird $h = 31$ cm, und da $b h = 500$ ſein ſoll, $b = \frac{500}{31} = \infty 17$ cm. Sonach würde ein Querſchnitt von 17×31 cm genügen.

220. Genauere Berechnung.

Die vorſtehende Berechnung iſt eine Annäherungsrechnung, welche allerdings in den meiſten Fällen genügen dürfte. Immerhin iſt zu beachten, daſs durch die normale Laſt G eine elaſtiſche Durchbiegung auftritt, welche das Moment M vergröſsert und wegen der Axialkraft P auch auf die Sicherheit gegen Zerknicken nicht ohne Einfluſs iſt. Die genauere Unterſuchung ſoll für den Fall geführt werden, daſs der Balken in der Mitte mit einer Laſt G belaſtet iſt und auſserdem die Axialkraft P zu ertragen hat; dabei ſollen die Abmeſſungen des Balkens ermittelt werden. Der bequemeren Behandlung wegen iſt in Fig. 579 die Balkenaxe wagrecht gezeichnet.

Fig. 579.



Der Anfangspunkt der Coordinaten liege in A und die Durchbiegung im Punkte C mit der Abſciſſe x ſei y; alsdann iſt in C

$$M_x = - \frac{G}{2} x - P y = - P \left(y + \frac{G}{2P} x \right) .$$

Die Gleichung der elaſtiſchen Linie [266]) lautet:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{P}{E \mathfrak{J}} \left(y + \frac{G}{2P} x \right) ,$$

und, wenn abkürzungsweiſe $\frac{P}{E \mathfrak{J}} = a^2$ geſetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 \left(y + \frac{G}{2P} x \right) .$$

Setzt man $\frac{G}{2P} = \beta$, ſo iſt

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - a^2 (y + \beta x) .$$

Es ſei $\frac{d^2 y}{d x^2} = z$; alsdann lautet die letzte Gleichung:

$$z = - a^2 (y + \beta x) , \quad \text{alſo} \quad \frac{d z}{d x} = - a^2 \left(\frac{d y}{d x} + \beta \right)$$

und

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = - a^2 \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right) = - a^2 z ,$$

---

266) Dieſe Gleichung gilt zunächſt nur bis zur Balkenmitte. Da aber die Curve ſymmetriſch zur Mitte verläuft, ſo genügt die Unterſuchung bis zur Mitte.

woraus folgt:

$$z = A \sin a x + B \cos a x\,,$$
$$-a^2 (y + \beta x) = A \sin a x + B \cos a x\,,$$

und

$$-a^2 \left(\frac{d y}{d x} + \beta\right) = A a \cos a x - B a \sin a x\,.$$

Für $x = 0$ ift $y = 0$, alfo $B = 0$; für $x = \frac{l}{2}$ ift $\frac{d y}{d x} = 0$; mithin

$$-a^2 \beta = A a \cos\left(\frac{a l}{2}\right), \quad \text{woraus} \quad A = -\frac{a \beta}{\cos\left(\frac{a l}{2}\right)} \text{ folgt.}$$

Die Gleichung der elaftifchen Linie heifst hiernach

$$+a^2 (y + \beta x) = +\frac{a \beta}{\cos\left(\frac{a l}{2}\right)} \sin a x.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ ift $y = f$, d. h.

$$+a^2 \left(f + \beta \frac{l}{2}\right) = + a \beta \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right) \quad \text{oder} \quad a \left(f + \beta \frac{l}{2}\right) = \beta \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right);$$

fomit

$$f = \beta \left(\frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{a l}{2} - \frac{l}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 34$$

Das gröfste Moment findet in der Balkenmitte ftatt und hat (ohne Rückficht auf das Vorzeichen) den Werth

$$M_{mitte} = P f + \frac{G}{2} \frac{l}{2} = P \left(f + \frac{G}{2 P} \frac{l}{2}\right) = P \left(f + \beta \frac{l}{2}\right).$$

Mit dem foeben gefundenen Werthe für f erhält man

$$M_{mitte} = P \beta \left(\frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{a l}{2} - \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) = \frac{P \beta}{a} \operatorname{tg} \frac{a l}{2} = \frac{P}{2 a} \frac{G}{P} \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right),$$

$$M_{mitte} = \frac{G}{2 a} \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35.$$

Die gröfste im meift gefährdeten Querfchnitt ftattfindende Beanfpruchung ift demnach

$$N_{max} = \frac{P}{F} + \frac{6 M}{b h^2} = \frac{P}{F} + \frac{6 G}{2 a b h^2} \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right).$$

Die Bedingungsgleichung für den Querfchnitt ift fomit

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{P}{b h} + \frac{6}{b h^2} \frac{G}{2 a} \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right) \\ K &= \frac{P}{F} + \frac{6}{F h} \frac{G}{2 a} \operatorname{tg}\left(\frac{a l}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 36.$$

Man wird zweckmäfsig zuerft M_{mitte} beftimmen und dann $F = b h$ annehmen, aus der Gleichung 36 die Querfchnittsabmeffung h (wie oben) ermitteln und fehen, ob die Werthe für b und h angemeffen find; anderenfalls verbeffere man durch Annahme eines neuen Werthes für F.

Beifpiel. Es fei $P = 15000$ kg, $G = 1600$ kg und $l = 450$ cm, demnach mit den vorftehend gebrauchten Bezeichnungen $a^2 = \frac{P}{E J} = \frac{15000}{120000\, J} = \frac{1}{8 J}$.

Um a bestimmen zu können, muss $\mathcal{J}$, also auch der Querschnitt, vorläufig angenommen werden. Mit $b = 24$ cm und $h = 30$ cm ist

$$\mathcal{J} = \frac{b\,h^3}{12} = 54000,\quad a^2 = \frac{1}{432\,000},\quad a = \frac{1}{658},\quad a\,l = \frac{450}{658} = 0{,}6839 \quad \text{und} \quad \frac{a\,l}{2} = 0{,}34195.$$

Der zugehörige Winkel α beträgt $19^0 37'$, also $\operatorname{tg} \frac{a\,l}{2} = 0{,}356$ und

$$M_{mitte} = \frac{G}{2\,a} \operatorname{tg}\left(\frac{a\,l}{2}\right) = \frac{1600}{2}\, 658 \,.\, 0{,}356 = 187\,200 \text{ kgcm}.$$

Ferner ist $\beta = \frac{G}{2\,P} = \frac{800}{15\,000} = 0{,}053$ und

$$f = \beta\left(\frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{a\,l}{2} - \frac{l}{2}\right) = 0{,}053\,(658 \,.\, 0{,}356 - 225) = 0{,}477 \text{ cm} = \backsim 0{,}5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}.$$

Nunmehr lautet die Bedingungsgleichung für die Querschnittsbildung

$$K = \frac{15\,000}{F} + \frac{6}{F\,h}\left[\frac{G}{2\,a} \operatorname{tg}\left(\frac{a\,l}{2}\right)\right] = \frac{15\,000}{F} + \frac{6}{F\,h}\, 187\,200.$$

Mit $h = 30$ cm und $K = 100$ kg wird

$$F = \frac{15\,000}{100} + \frac{6}{100 \,.\, 30}\, 187200 = 150 + 374 = 524 \text{ qcm}$$

und

$$b = \frac{F}{h} = \frac{524}{30} = 17{,}5 = \backsim 18 \text{ cm}.$$

Der Querschnitt 18×30 cm kann nicht sofort gewählt werden, weil er unter der Annahme eines Querschnittes von 24×30 cm zur Ermittelung von a gefunden ist; man sieht aber, dass der zuerst angenommene Querschnitt verringert werden kann. Nimmt man ein zweites Mal $b = 20$ cm und $h = 30$ cm an, so wird

$$\mathcal{J} = 45\,000,\quad a^2 = \frac{1}{360\,000},\quad a = \frac{1}{600},\quad a\,l = 0{,}75 \quad \text{und} \quad \frac{a\,l}{2} = 0{,}375,$$

$$\alpha = 21^0 30' \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{a\,l}{2} = 0{,}394; \quad \text{sonach}$$

$$M_{mitte} = \frac{1600 \,.\, 600}{2}\, 0{,}394 = 189\,120 \text{ kgcm},\ \beta = 0{,}053 \text{ und } f = 0{,}053\,(600 \,.\, 0{,}394 - 225) = 0{,}6 \text{ cm} = 6 \text{ mm};$$

$$F = \frac{15\,000}{100} + \frac{6}{100 \,.\, 30}\, 189\,120 = 150 + 378 = 528 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad b = \frac{528}{30} = \backsim 18 \text{ cm}.$$

Der Querschnitt 20×30 cm genügt also jedenfalls.

2) Auf Druck beanspruchte Gitterstäbe; Knotenpunkte.

221. Druckstäbe.

Die auf Druck beanspruchten Gitterstäbe werden aus Holz, Gusseisen oder Schweisseisen hergestellt. Holz erhält rechteckigen (bezw. quadratischen) Querschnitt und Gusseisen kreis- oder kreuzförmigen Querschnitt (Fig. 580); auch setzt man wohl an den Kreisquerschnitt Kreuzarme. Bei den aus Gusseisen hergestellten Stäben kann man den Querschnitt auch leicht nach der Stabmitte hin vergrössern, wodurch man grössere Sicherheit gegen Zerknicken erhält. Von den schweisseisernen Gitterstäben gilt das in Art. 173 bis 175 (S. 237) Gesagte. Bei der Berechnung des Querschnittes ist Rücksicht auf Zerknicken zu nehmen; die Stabenden können dabei als drehbar angenommen werden. Wenn der Querschnitt zwei rechtwinkelig zu einander stehende Symmetrieaxen mit gleich grossen Trägheitsmomenten hat, so sind alle Trägheitsmomente gleich gross und die Querschnittsform am günstigsten.

222. Knotenpunkte.

Die allgemeine, in Art. 179 (S. 242) angegebene Regel für die Bildung der Knotenpunkte ist auch hier zu beachten, d. h. die Axen der an einem Knotenpunkte zusammentreffenden Stäbe sollen einander möglichst in einem Punkte schneiden.