

Beanspruchung des Kranzes mitten zwischen den Armen:

$$\text{durch } X_A \quad \sigma'_{bX} = \pm 54,6 \text{ kg/cm}^2, \text{ durch den Achsdruck } \sigma'_{bA} = \mp 36,9 \text{ kg/cm}^2.$$

Größte Zugspannung an der Außenfläche:  $\sigma_{za} + \sigma'_{bX} = 64 + 54,6 = 118,6 \text{ kg/cm}^2$ .

Beanspruchung der Arme an der Nabe bei einem Widerstandsmoment eines Armpaares  $W_n = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot a_1^2 \cdot b_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot 5 = 785 \text{ cm}^3$  nach (730) unter Benutzung der vorstehend angeführten Werte für  $U$  und  $T_u$ :

$$\sigma_b = \left( \frac{2U}{i_0} + \frac{T_u \cdot R}{i_0 \cdot R_n} \right) \cdot \frac{y}{W_n} = \left( \frac{2 \cdot 1940}{6} + \frac{6500 \cdot 40}{6 \cdot 200} \right) \frac{170}{785} = 187 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{b0} = \frac{M_0}{W_n} = \frac{44200}{785} = 56,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Zugspannung durch die Längskraft  $X_A$  in den ungeteilten Armen:

$$\sigma_{zA} = \frac{X_A}{2f_n} = \frac{4150}{2 \cdot 157} = 13,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Größte Spannung:  $\sigma_b + \sigma_{zA} - \sigma_{b0} = 187 + 13,2 - 56,3 = 143,9 \text{ kg/cm}^2$ .

Beanspruchung der Arme am Kranz: durch  $M_0$   $\sigma_{b0} = 109,9 \text{ kg/cm}^2$ , durch  $X_A$   $\sigma_z = 20,6 \text{ kg/cm}^2$ . Größte Spannung  $109,9 + 20,6 = 130,5 \text{ kg/cm}^2$ .

Die geteilten Arme genügen der auf S. 1144 geforderten Bedingung; ihre Hälften weisen  $\frac{J}{e'} = \frac{1615}{7,5} = 215 \text{ cm}^3$  auf, das, wie verlangt, rund halb so groß wie das Widerstandsmoment eines vollen Armes ist.

Von den Verbindungsmitteln der beiden Scheibenhälften werden die Kranzschrauben durch die Kraft  $F_k \cdot \sigma_z = 450 \cdot 66,5 = 29900 \text{ kg}$  mit  $\sigma_z = 570 \text{ kg/cm}^2$  auf Zug beansprucht. Die acht Schrauben an der Nabe sind durch die Kräfte  $X_A$  und die Eigenfliehkräfte  $Z$  zweier Armpaare von zusammen  $27200 \text{ kg}$ , sowie durch die Fliehkraft der halben Nabe von  $1870 \text{ kg}$  mit  $192 \text{ kg/cm}^2$  belastet. Auf die Fliehkraft einer Radhälfte von  $77000 \text{ kg}$  berechnet, sind sie mit  $510 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht.

### Neunundzwanzigster Abschnitt.

## Schaufeln, Trommeln, Scheiben und Räder an rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen.

### I. Allgemeines und Arten der rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen.

Die rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen haben in neuerer Zeit durch ihre Vorzüge: unmittelbare Erzeugung oder Ausnutzung gleichförmiger Drehbewegung, Einfachheit und billige Ausführung, geringen Raumbedarf und die Möglichkeit, sehr große Leistungen zu beherrschen, technisch und wirtschaftlich größte Bedeutung gewonnen. Sie verdrängen die Kolbenmaschinen mit den hin- und hergehenden, durch Triebkräfte und Massenwirkung ungünstig beanspruchten Gestängen auf immer weiteren Gebieten. Sehr gefördert wurde ihre Entwicklung durch die Elektrotechnik, welche, bei ihren eigenen Maschinen auf Drehbewegung angewiesen, bestrebt sein mußte, diese Art der Bewegung auch auf allen Anwendungsgebieten elektrischer Maschinen zur Geltung zu bringen, namentlich da für beide Maschinenarten hohe Laufgeschwindigkeit vorteilhaft ist. Selbst die gegenüber den Kolbenmaschinen in manchen Fällen niedrigeren Wirkungsgrade der rotierenden, z. B. der Kreiselpumpen, sind nicht immer ausschlaggebend.



Stumpf haben mit einer einstufigen Versuchsturbine bei 314 m/sek Umfangsgeschwindigkeit 2000 PS erreicht.)

Bei mehrstufigen Turbinen unterscheidet man Geschwindigkeit- und Druckstufen. Ein Rad mit zwei Geschwindigkeitsstufen zeigt Abb. 2220. Die dem Dampf in den Düsen  $D$  erteilte Strömungsenergie wird in zwei auf dem Radumfang

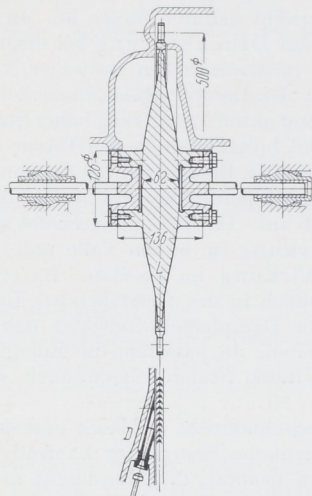


Abb. 2219. Einstufige de Laval dampfturbine  
M. 1 : 10.

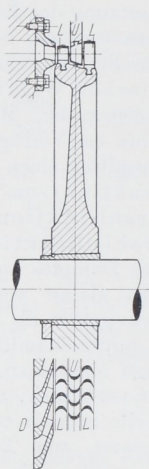


Abb. 2220. Rad mit zwei Geschwindigkeitsstufen.

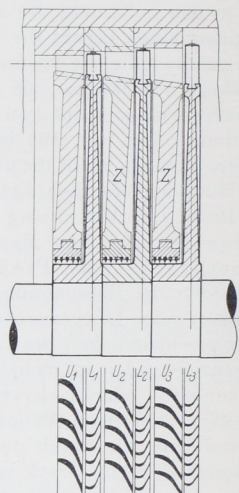


Abb. 2221. Dampfturbine mit Druckstufen.

befestigten Laufschaufelreihen  $L$  ausgenutzt, während die dazwischen angeordneten ruhenden Leitschaufeln  $U$  den Dampf lediglich in die zum Antrieb geeignete Richtung umlenken. Derartige Räder benutzt man vor allem in den ersten Stufen, weil sie gestatten, große Dampfgeschwindigkeiten unter starker Erniedrigung hohen Frischdampfdrucks auszunutzen und dadurch die Inanspruchnahme des Gehäuses und der Zwischenwände einzuschränken. Drei Druckstufen zeigt Abb. 2221. In Düsen oder in einem Leitapparat  $U_1$  wird dem Dampf unter Ausnutzung eines Teils seiner Spannkraft eine bestimmte Geschwindigkeit verliehen, durch welche er die erste Schaufelreihe  $L_1$  des Läufers unter Umlenkung der Dampfstrahlen antreibt. Hierbei nimmt seine Geschwindigkeit und damit seine lebendige Kraft ab. In der anschließenden ruhenden Leitschaufelreihe  $U_2$  wird der Dampf wieder in die zum Antrieb der zweiten Laufschaufelreihe  $L_2$  nötige Strömungsrichtung gebracht, gleichzeitig aber auch seine Geschwindigkeit unter

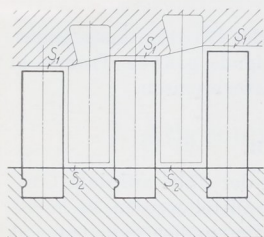


Abb. 2222. Ausschnitt aus einer Trommelturbine.

Verwertung eines weiteren Teils der Spannkraft wieder erhöht usw. Die einzelnen Stufen sind also durch abnehmenden Dampfdruck gekennzeichnet und müssen durch Zwischenwände  $Z$  voneinander getrennt werden, wenn der Läufer in Form einzelner Scheiben, Abb. 2221, ausgebildet ist. Verhältnismäßig kleine Dampfmen gen gehen ungenutzt längs der Radnaben von einer Stufe zur nächsten. Benutzt man dagegen Trommeln als Schaufelträger, Abb. 2222, so sind etwas größere Verluste infolge des Durchströmens eines Teiles des Dampfes durch die Spalten  $S_1$  zwischen den Laufschaufeln und der Gehäusewand und  $S_2$  zwischen den Leitschaufeln und der Trommel unvermeidlich. Bei Beaufschlagung

der Läufer von Überdruckturbinen in durchweg einer Richtung bildet sich zudem ein mit besonderen Mitteln aufzunehmender oder auszugleichender Axialdruck aus.

Von den wichtigsten Formen der Schaufelträger, den Trommeln und Scheiben, sind die ersteren, wie später nachgewiesen wird, nur für mäßige Umfangsgeschwindigkeiten bis zu etwa 100 m/sek geeignet. Sie werden vor allem für die oft sehr zahlreichen Druckstufen der Überdruckturbinen benutzt. So zeigt Abb. 2223 die Trommel einer Schiffsturbine, die wegen

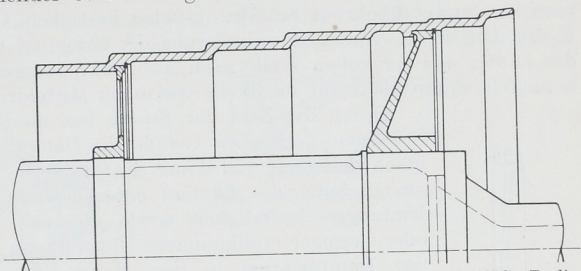


Abb. 2223. Schiffsturbinentrommel. Ausführung der AEG, Berlin. (Nach Bauer und Lasche.)

des unmittelbaren Antriebs der Schraube mäßige Drehzahl haben muß. In Abb. 2224 sind zwei durch Schrumpfung miteinander verbundene Trommeln die Träger der Mittel- und Niederdruckstufen.

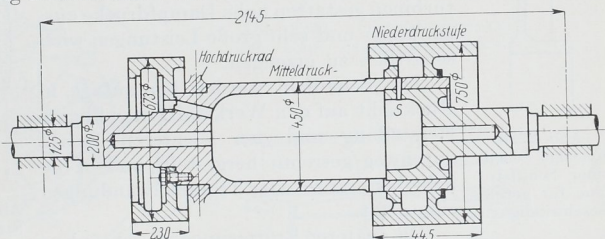


Abb. 2224. Dampfturbinentrommel. Ausführung von Brown, Boveri und Co., Baden-Mannheim. M. 1:25.

Das linke Ende der Mitteldrucktrommel ist zur Welle ausgeschmiedet, das rechte aber durch Ausbohren aus dem Vollen hergestellt. In diese Bohrung wurde der andere Wellenschenkel eingeschumpft; radiale Stifte *S* dienen zur Sicherung gegen Verschieben und Verdrehen. Am Läufer der Thyssen-Röder-Turbine, Abb. 2225, sind die zylindrischen Trommeln *A* und *B* mit dem in der Mitte sitzenden Hochdruckrade *C* und den als Scheiben ausgebildeten letzten Stufen *D* und *E* sowie den Wellenschenkeln zentriert und verschraubt. Der Dampf fließt nach Durchströmen des Hochdruckrades gleichmäßig nach beiden Seiten zu den Trommeln.

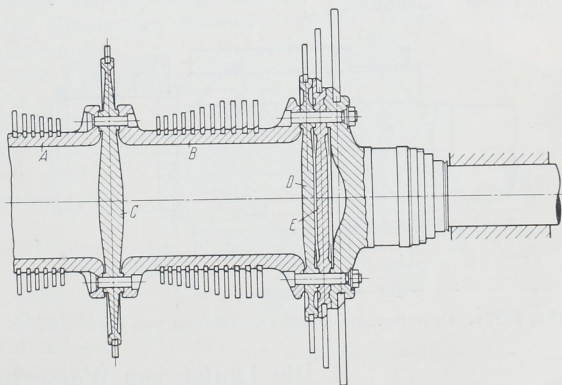


Abb. 2225. Läufer einer Thyssen-Röder-Dampfturbine.

Die kegelig ausgebildete Scheibe mit einseitig ange-setzter Nabe einer Schiffsturbine, Abb. 2226, ist nur für geringe Geschwindigkeiten geeignet, weil die Fliehkraft Biegespannungen hervorruft. Die Ausbildung war dadurch bedingt, daß der große Zwischenboden in Rücksicht auf genügende Widerstandsfähigkeit gegenüber dem Dampfdruck stark gewölbt sein mußte. Bei größeren Geschwindigkeiten wird man die Scheiben symmetrisch zu ihrer Hauptebene gestalten. Vergleiche die leichten, für mäßige Geschwindigkeiten bestimmten Scheiben, Abb. 2221, die nur in Rücksicht auf die Abdichtung der Zwischenböden einseitig ange-setzte zylindrische

Naben erhielten. An dem hoch beanspruchten Rade Abb. 2220 mußte dagegen auch die Nabe symmetrisch ausgebildet werden. Bei sehr hohen Geschwindigkeiten macht man von undurchbohrten Scheiben gleicher Festigkeit Gebrauch, Abb. 2219 und C, D, E der Abb. 2225. Zwecks Verminderung der Länge ist man schließlich zur Herstellung der Läufer aus der vollen Welle nach Abb. 2227 übergegangen. Manchmal werden die Schaufeln unmittelbar auf die Welle wie in der Mitteldruckstufe Abb. 2227a aufgesetzt.

Durch die Zahl der Stufen hat man bei einem gegebenen Gefälle die Dampfgeschwindigkeit und damit die für die Beanspruchung des Läufers entscheidende Umfangsgeschwindigkeit sowie die mehr oder weniger vollkommene Ausnutzung der Dampfwärme in der Hand. Die Druckabnahme in den einzelnen Stufen regelt man durch entsprechende Wahl der Querschnitte in den Düsen und zwischen den Schaufeln. Mehrstufige Dampfturbinen gestatten hohe Dampfdrucke auszunutzen und sehr große Leistungen wirtschaftlich zu erzeugen.

Die Schaufeln werden heutzutage in Rücksicht auf den Werkstoff, die billigere Herstellung und den leichteren Ersatz durchweg getrennt hergestellt und in die Scheibenkränze oder Trommelwandungen eingesetzt.

Die späteren Erörterungen beschränken sich auf die konstruktive Durchbildung

der Schaufeln und die Berechnung der Läufer. Wegen der durch die Strömung bedingten Schaufelwinkel und sonstigen Abmessungen muß auf das Schrifttum [XXIX, 1, 2] verwiesen werden. Das Gleiche gilt auch für die anschließend behandelten weiteren Arten rotierender Maschinen.



Abb. 2226. Kegelige Scheibe einer Schiffsturbine für geringe Geschwindigkeit.

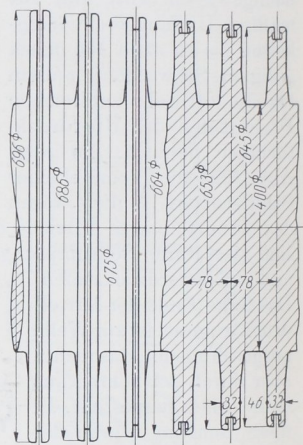


Abb. 2227. Mit der Welle aus einem Stück gedrehter Läufer, AEG, Berlin. M. 1:10.

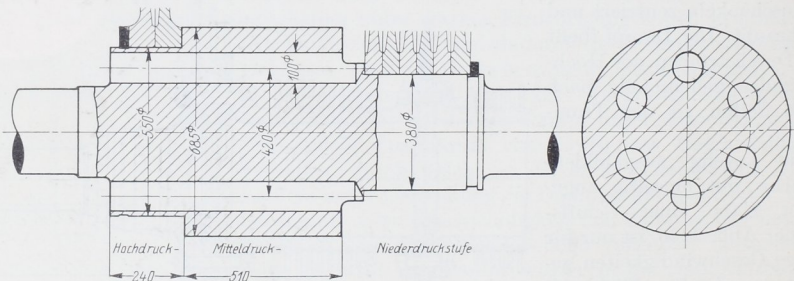


Abb. 2227a. Dampfturbinenläufer. Ausführung von Brown, Boveri und Co., Baden-Mannheim. M. 1:20.

## B. Die Läufer von Wasserturbinen.

Von den zahlreichen Formen der Wasserturbinen, die während der Entwicklungszeit dieser Maschinengattung vorgeschlagen und ausgeführt worden sind, haben heutzutage nur noch die Francis- und die Pelton- oder Becherturbinen Bedeutung. Zu ihnen trat in neuester Zeit die Kaplansturbine.

Francisturbinen arbeiten unter Überdruck, sind durch radialen Zufluß und axialen Abfluß des Wassers und durch räumlich verwundene Schaufeln gekennzeichnet, Abb. 2228

bis 2230. Die Räder bestehen aus zwei Wänden oder einer Nabe und einem Kranz, welche die Schaufeln seitlich begrenzen und festhalten. Die Formen Abb. 2228 bis 2230 sind im wesentlichen durch die Laufgeschwindigkeit bedingt. Form 2229 ist für langsamen Lauf geeignet, Form 2230 für sehr raschen Lauf, Form 2228 entspricht mittleren Verhältnissen.

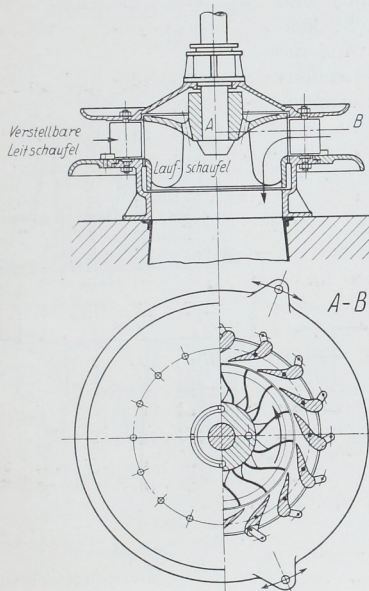


Abb. 2228. Francisturbine für mittlere Laufgeschwindigkeit.

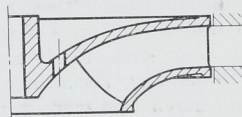


Abb. 2229. Francisturbine für geringe Laufgeschwindigkeit.

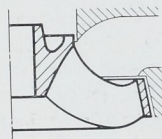


Abb. 2230. Francisturbine für hohe Laufgeschwindigkeit.

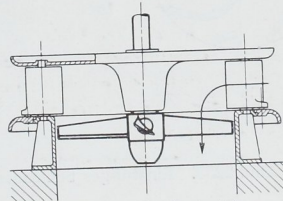


Abb. 2231. Kaplanturbine.

Kaplan gab den Läufern zwecks weiterer Steigerung der Laufgeschwindigkeit der Überdruckturbinen durch wenige flügelartige Schaufeln großer Teilung propeller-ähnliche Form, Abb. 2231. Da zudem die Laufschaufeln in Rücksicht auf die Regelung häufig drehbar gemacht werden und für sich allein den äußeren Kräften gegenüber widerstandsfähig gestaltet werden müssen, liegen sie außerhalb des im vorliegenden Abschnitt behandelten Gebietes.

Becherturbinen sind Freistrahlturbinen. Ihr Läufer besteht aus einer Scheibe, die auf ihrem Umfang Schaufeln in Form doppelschaliger Becher, Abb. 2232, trägt. Der Wasserstrahl wird durch die Schneide *S* der Schaufeln in zwei Hälften zerteilt und gibt bei der Umlenkung in den Becherhöhlungen seine Energie an das Rad ab.

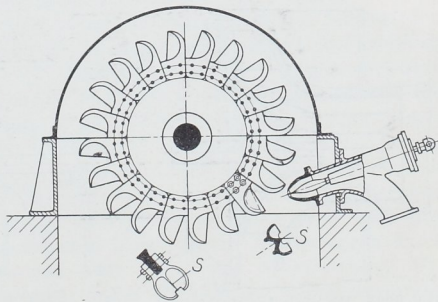


Abb. 2232. Becherturbine.

den Becherhöhlungen seine Energie an das

### C. Die Läufer von Schleudergebläsen, -kompressoren und -pumpen.

Abb. 2233 stellt den Schnitt durch ein beiderseitig beaufschlagtes, einstufiges Schleudergebläse dar. Die Luft strömt in axialer Richtung bei *A* und *B* zu und wird durch die Schaufeln des Rades in einem spiralförmig sich erweiternden Kanal *K* in die bei *C* an-

schließende Rohrleitung gefördert. Die aus Blech gebogenen Schaufeln sind mit den Armen *S* der gegossenen Nabe und mit den Deckscheiben *D* vernietet. Den Verlust, der durch Rückströmen an den Außenflächen der Deckscheiben entsteht, hält man durch genügend kleines Spiel im Gehäuse oder durch Einschalten einer Labyrinthdichtung klein. Bei genau symmetrischer Ausbildung und Einstellung des Rades im Gehäuse entsteht kein Axialdruck; aber auch in diesem Falle wird die Lage des Rades zur Verhütung des Anstreichens beim Laufen durch Stellschrauben, durch Kamm- oder Kugellängslager sichergestellt.

Einstufige Schleudergebläse eignen sich nur für geringe Pressungen. Höhere Drücke lassen

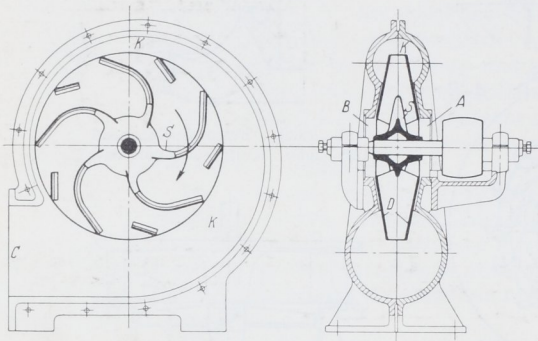


Abb. 2233. Einstufiges Schleudergebläse.

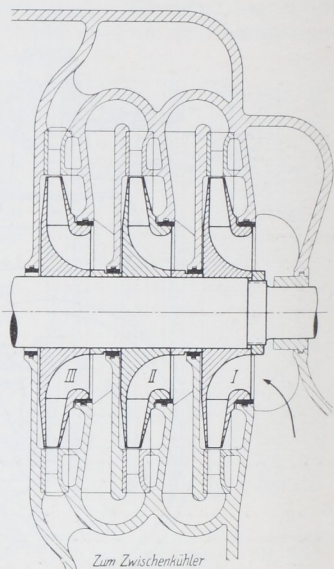


Abb. 2234. Mehrstufiges Turbogebälde.

sich durch Hintereinanderschalten mehrerer Stufen, Abb. 2234, erreichen. Die im Laufrade *I* auf das 1,2- bis 1,3fache der Ansaugspannung verdichtete Luft wird im anschließenden Leitapparat radial nach innen dem Laufrade *II* zugeführt und durch dieses in etwa dem gleichen Verhältnis weiter verdichtet, also auf das 1,4- bis

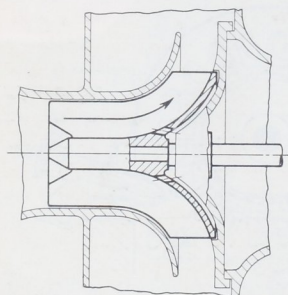


Abb. 2235. Einseitig beaufschlagte Schleuderpumpe, Ausführung von Weise, Söhne, Halle a. S.

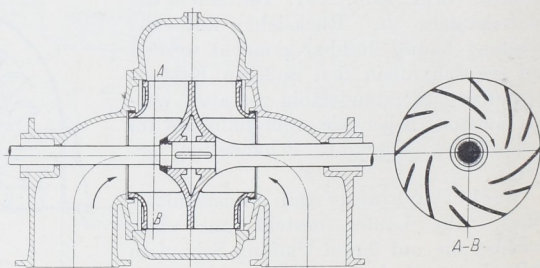


Abb. 2236. Beiderseitig beaufschlagte Schleuderpumpe. Ausführung A. Borsig, Berlin-Tegel.

1,7fache der Ansaugspannung gebracht usw. Bezüglich der Gestaltung der Räder sei nur erwähnt, daß man von der Liefermenge und der Ansauggeschwindigkeit ausgeht und danach zunächst den Zuströmquerschnitt bemißt. Die Geschwindigkeit pflegt abhängig von der Druckhöhe *H* genommen zu werden:

an Ventilatoren zu 5 m/sek bei  $H = 12$ , zu 30 m/sek bei  $H = 360$  mm Wassersäule, bei Turbogebälde und -kompressoren zu 30 bis 50 m/sek. Die Außenabmessungen der

Räder sind bei größeren Leistungen durch die in erster Linie von der Umfangsgeschwindigkeit abhängenden Festigkeitsverhältnisse gegeben. So betrachtet man an Turboverdichtern bei sorgfältiger Durchbildung 180 bis 200 m/sek Umfangsgeschwindigkeit als obere Grenze. Wegen der Einzelheiten bezüglich der Form und Stellung der Schaufeln, die durch die Strömung des zu fördernden Stoffes durch die Räder bedingt sind, muß wiederum auf das Schrifttum verwiesen werden [XXIX, 3, 4, 5]. Großer Wert ist auf die stetige und allmähliche Überleitung der Querschnitte in den Kanälen zu legen.

Die Laufräder von Schleuderpumpen, Abb. 2235 bis 2237, zeigen ähnliche Grundformen wie die der Gebläse, sind aber wegen des größeren Einheitsgewichts der zu fördernden Flüssigkeiten durch geringere Zustromgeschwindigkeiten von 2 bis 4 m/sek und Umfangsgeschwindigkeiten bis höchstens 40 m/sek gekennzeichnet. Als Werkstoffe genügen dabei Gußeisen, bei Hochdruckpumpen Bronze. Die letzteren werden mehrstufig ausgeführt, Abb. 2237; in einem Gehäuse pflegt man jedoch selten mehr als 6 bis 8 Stufen unterzubringen, um bei den beträchtlichen Lagerentfernungen nicht zu große Wellendurchmesser zu bekommen. Dabei bleiben, da Flüssigkeiten praktisch nicht zusammendrückbar sind, die Durchströmquerschnitte in den einzelnen Stufen gleich. Im Gegensatz zu den Luftverdichtern kann daher ein und dasselbe Modell für mehrere oder alle Räder eines Satzes benutzt werden. Bei einseitigem Zulauf entstehen Axialdrucke, die durch geeignete Längslager aufzunehmen oder durch Entlastungsvorrichtungen auszugleichen sind.

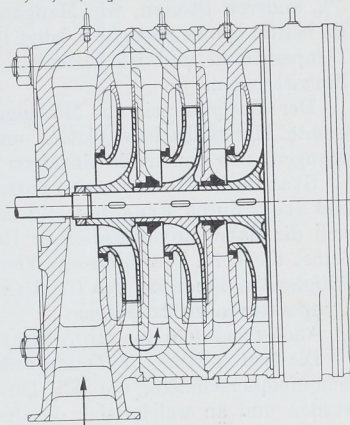


Abb. 2237. Hochdruckschleuderpumpe.  
C. H. Jaeger und Co., Leipzig.

### III. Schaufeln.

#### A. Werkstoffe und Herstellung der Dampfturbinenschaufeln.

Richtige Wahl des Werkstoffs und sorgfältigste Durchbildung der Schaufeln sind in Rücksicht auf die Zerstörungen, die der Bruch einer einzigen Schaufel hervorrufen kann, äußerst wichtig. Die Schaufeln sind bei hohen Laufgeschwindigkeiten und größeren Längen erheblichen Beanspruchungen durch die Fliehkraft und den Dampfdruck sowie durch Schwingungen ausgesetzt; sie unterliegen oft starken Abnutzungen durch die Wirkung des Treibmittels oder durch Rost und müssen leicht in großen Mengen hergestellt werden können. Während reiner überhitzter Dampf den Schaufeln, wenn sie nur den entsprechenden Temperaturen standhalten, so gut wie unschädlich ist, greift unreiner und nasser Dampf die Schaufeln durch die mechanische Wirkung der festen Teilchen und Wassertropfen an. Rostbildung setzt die gleichzeitige Anwesenheit von Luft und Wasser oder Dampf voraus, so daß die wichtigsten Ursachen für Zerstörungen durch Rost sauerstoffhaltiges Wasser, Eindringen von Luft durch die Stopfbüchsen, Undichtheit des Absperrventils, wenn die Maschine außer Betrieb ist, sowie dauerndes Unterampfhalten der Turbinen in Rücksicht auf Betriebsbereitschaft sind. Die längs des Gehäusescheitels ziehenden Dampfschwaden rufen oft starke örtliche Schädigungen hervor. Aber auch durch die chemische Wirkung von Salzen und Säuren, die vom Dampf mitgerissen werden, können Anfrassungen entstehen [XXIX, 6, 7]. Auf reines, entlüftetes Kesselspeisewasser ist daher größter Wert zu legen.

Die wichtigsten Werkstoffe der Schaufeln sind heutzutage Siemens-Martinstahl, Nickelstahl, nicht rostender Stahl, Messing, Nickelmessing und Monelmetall. Die Stahlsorten kommen für Temperaturen über 200° C und für hochbeanspruchte lange Schaufeln



der letzten Niederdruckstufen in Frage, Messing aber, und zwar das Schaufelmessing oder der Gelbtombak *Ms 72* DIN 1709 mit 72% Kupfer, 28% Zink und höchstens Spuren von Blei sowie Nickelmessing für mäßige Wärmegrade. Nicht selten finden sich daher an ein und derselben Turbine Stahlschaufeln im Hochdruckteil und am Ende des Niederdruckteils, Messingschaufeln in den mittleren Stufen. Monelmetall ist eine unmittelbar aus reinen Erzen erschmolzene Naturlegierung von etwa 67% Nickel, 28% Kupfer und 5% anderen Stoffen, wie Mangan, Eisen, Kohlenstoff und geringen Mengen Silizium. Es besitzt große Festigkeit, zeigt hohe Spannung an der Streckgrenze selbst bei höheren Temperaturen und ist besonders widerstandsfähig gegen chemische und mechanische Einwirkungen.

Der Hauptvorteil des Messings und Nickelmessings ist neben der Rostfreiheit die leichte Herstellbarkeit glatter und harter Oberflächen durch Kaltziehen profilierter Stangen, von denen die einzelnen Schaufeln abgeschnitten werden.

Stahlschaufeln werden entweder warm vorgepreßt oder aus Blech warm gebogen und stets durch Fräsen fertig bearbeitet, dürfen dagegen nicht kalt gezogen werden, weil die dabei unvermeidlichen Reckspannungen Risse und Abblätterungen erzeugen. Selbst die beim Warmpressen oder -biegen entstandenen Spannungen sind durch sorgfältiges Ausglühen bei den für die einzelnen Stahlsorten vielfach genau vorgeschriebenen Temperaturen zu beseitigen.

Auch Schaufeln aus Monelmetall müssen ihre genaue Form durch Fräsen erhalten.

Die teuren Zieh-, Preß- und Fräswerkzeuge verlangen die Beschränkung der Zahl der Schaufelquerschnitte, die bei den einzelnen Firmen in Profiltafeln zusammengestellt werden und an welche sich der Konstrukteur bei der Aufstellung von Schaufelplänen für die Turbinen zu halten hat. Dabei pflegen zwei Hauptformen benutzt zu werden: aus Blech gebogene und nur an den Ein- und Austrittskanten zugeschärfte Blechschaufeln, wie sie Abb. 2256 zeigt, und in der Mitte verstärkte, Abb. 2263.

Für die Füllstücke, die den gegenseitigen Abstand der Schaufeln regeln, benutzt man gewöhnlich die gleichen Werkstoffe wie für die Schaufeln (Messing jedoch bis zu 250° C), kann aber die obenerwähnten Bedenken gegen das Kaltziehen zurücktreten lassen, weil die Füllstücke nicht so starken Einwirkungen ausgesetzt sind. In den meisten Fällen müssen die Füllstücke der genau radialen Stellung der Schaufeln wegen eine nach der Läuferachse zu verjüngte Form haben.

## B. Befestigung der Schaufeln.

Der Schöpfer der reinen Druckturbine, de Laval, hat die Ausführung Abb. 2238 angegeben. Die vorgepreßten und fertig gefrästen Stahlschaufeln werden in radialen, am Grunde durch zylindrische Bohrungen erweiterten Schlitzten gehalten und darin leicht verstemmt. Es entsteht ein sehr widerstandsfähiger Schaufelfuß, der selbst für die höchsten bis jetzt benutzten Geschwindigkeiten von etwa 430 m/sek geeignet ist, der aber nur an Kränzen angewendet werden kann, die von der Seite her zugänglich sind, Abb. 2219. Die Auswechselung der Schaufeln ist leicht, ihre Herstellung aber teuer.

Lehrreich ist die Entwicklung der Schaufelbefestigung bei der weiteren Ausgestaltung der Dampfturbine zur Großkraftmaschine, wie sie Lasche [XXIX, 7] an der AEG-Turbine schildert. Das Bestreben, die Schaufeln dadurch zu verbilligen, daß man ihnen durch Ziehen — bei Herstellung aus Messing oder Nickelmessing — oder durch Vorwalzen im warmen Zustand — im Fall von Nickelstahl und Monelmetall — einen durchweg gleichen Querschnitt gab, führte zunächst zur Anwendung einfacher Schwalbenschwänze, Abb. 2239. Sie wurden in den Nuten der Kränze unter Einschalten von Zwischenstücken *Z* in der richtigen Lage und dem nötigen Abstände von einander gehalten. Zum Einbringen dienten Erweiterungen der Nuten, die durch besondere Schösser abgedeckt wurden. Bei der Vergrößerung der Leistung führte die hohe Beanspruchung der Kehle des Schwalbenschwanzes auf Zug durch die Eigenfliehkraft der Schaufeln

und auf Biegung durch den Druck des Treibmittels zunächst zur Einführung des Gegenschwalbenschwanzes, Abb. 2240. Schlagbiegeversuche nach Abb. 2241, bei

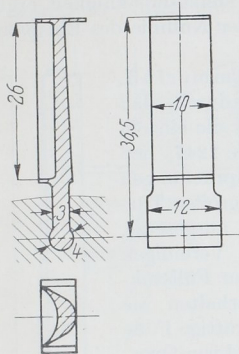


Abb. 2238. Schaufelbefestigung nach de Laval.

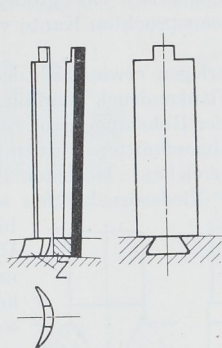


Abb. 2239. Schaufelbefestigung mittels Schwalbenschwanzes.

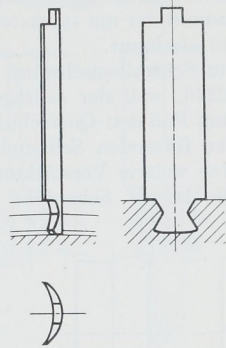


Abb. 2240. Gegenschwalbenschwanz.

denen ein Hammer so oft auf die Schaufelenden fallen gelassen wurde, bis der erste Riß eintrat, zeigten, daß die Schaufeln erheblich widerstandsfähiger waren, wenn

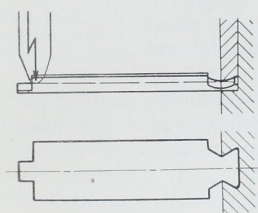


Abb. 2241. Schlagbiegeversuch an Schaufeln.

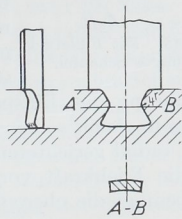


Abb. 2242. Schaufeln mit ausgerundeter Kehle.

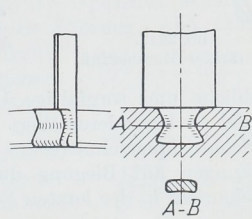


Abb. 2243. Schaufel mit ausgerundeter Kehle und abgerundeten Kanten.

die Kehlen und Kanten abgerundet wurden. Während bei scharfen Kehlen an einer bestimmten Schaufel insgesamt 5,5 . . . 8 mkg bis zum Anriß aufgewendet werden mußten, waren bei Ausrundung der Kehlen mit 4 mm Halbmesser, Abb. 2242, 42 . . . 50 und

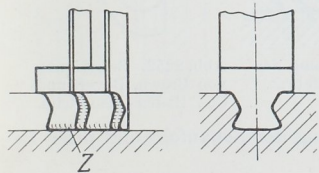


Abb. 2244. Schaufeln mit überhöhten Füllstücken.

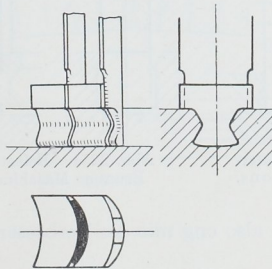


Abb. 2245. Schaufeln mit überhöhten Füllstücken und abgerundeten Kanten.

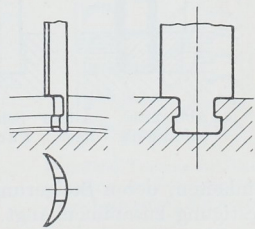


Abb. 2246. Hammerfuß.

nach dem Brechen der Kanten, Abb. 2243, 58 . . . 60 mkg Schlagarbeit notwendig. In weiterer Vervollkommnung wurde durch Überhöhen der Füllstücke nach Abb. 2244 der ganze Schaufelquerschnitt zur Aufnahme des durch den Dampfdruck erzeugten Biegemoments herangezogen. Der tief in der Nut liegende kleinste Querschnitt ist

hierbei nur der Wirkung der Fliehkraft ausgesetzt. Dem Übelstand, daß die scharfen Kanten oft anrissen, half man durch Wegfräsen und Abrunden derselben nach Abb. 2245 ab, wobei sich übrigens auch rechnerisch eine größere Widerstandsfähigkeit ergibt, da der Abstand der am stärksten beanspruchten Kante von der Nulllinie des Einspannquerschnitts abnimmt.

Dem Schwalbenschwanz überlegen erwies sich der Hammerfuß, Abb. 2246, weil der schräge Flankendruck wegfällt. Dadurch, daß man dem Fuß den Querschnitt der Rohstange gab, von der die einzeln fertig zu fräsenden Schaufeln abgeschnitten wurden, Abb. 2247, ließ sich eine weitere Verstärkung erreichen. Höchsten Beanspruchungen sind die langen Schaufeln der Niederdruckstufen sehr großer Turbinen ausgesetzt.

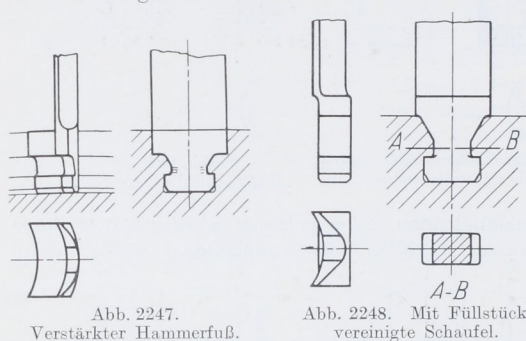


Abb. 2247. Verstärkter Hammerfuß.

Abb. 2248. Mit Füllstück vereinigte Schaufel.

Unter Vereinigen mit den Füllstücken erhalten sie sehr kräftige Füße rechteckigen Querschnitts nach Abb. 2248, so daß die Beschauelung durch unmittelbares Aneinanderreihen der einzelnen Schaufeln entsteht. Auf eine

allmähliche und sorgfältige Überführung des Einspannquerschnitts in die eigentliche Schaufel ist besonderer Wert zu legen. Auch sollen die Schwerpunkte sämtlicher Fuß- und Schaufelquerschnitte auf einer radial gerichteten Geraden liegen, um Nebenbeanspruchungen auf Biegung durch die Fliehkraft vorzubeugen. Die Inanspruchnahme der Schaufeln in der letzten Stufe bedingt die obere Grenze der Leistung der Turbinen-

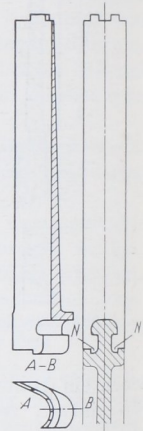


Abb. 2249. Schaufelbefestigung der Bergmann-Werke Berlin.

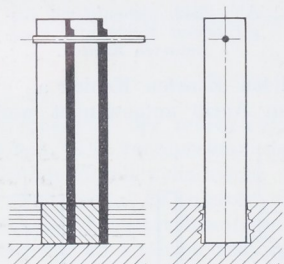


Abb. 2250. Ältere Schaufelbefestigung nach Parsons.

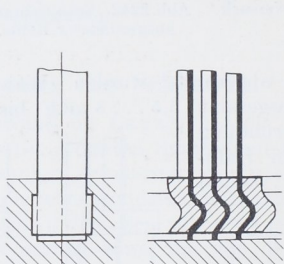


Abb. 2251. Befestigung der Brüner Maschinenfabrik.

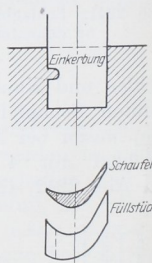


Abb. 2252. Befestigung von Brown, Boveri und Co., Baden-Mannheim.

einheiten, deren Steigerung also eng mit der Verbesserung der Schaufeln und ihrer Befestigung zusammenhängt.

Schwalbenschwänze und Hammerfüße verlangen an einzelnen Scheiben die Ausbildung kräftiger Kränze, Abb. 2263 und 2270. Das wird durch die Befestigung der Bergmannwerke, Abb. 2249, vermieden, bei welcher die gegabelten Schaufelfüße den Scheibenrand umklammern, Biegespannungen am Fuß aber durch die Nasen *N* beschränkt werden, die sich gegen die niedrigen Seitenränder der Scheibe stützen.

Parsons begnügte sich bei der Ausbildung der vielstufigen, mit geringeren Umfangsgeschwindigkeiten arbeitenden Überdruckturbine in der ersten Zeit damit, die aus

gezogenen Stäben abgeschnittenen Schaufeln durch kräftiges Verstemmen der Zwischenstücke in schwach schwalbenschwanzförmigen Nuten der Trommeln zu halten, Abb. 2250. Dabei waren die Nuten mit Rillen versehen, in welche die Beilagen beim Verstemmen

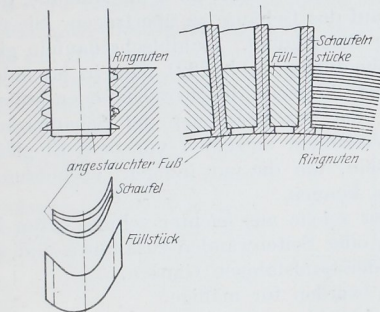


Abb. 2253. Befestigung von Brown, Boveri und Co., Baden-Mannheim.

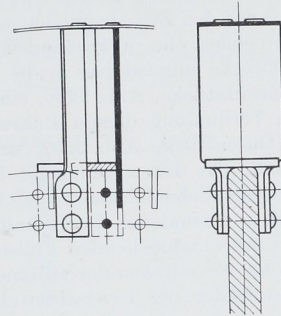


Abb. 2254. Befestigung der Bergmannwerke Berlin.

eindringen konnten und die Schaufelköpfe untereinander durch einen eingelöteten Draht verbunden.

Weiterbildungen zeigen die Abb. 2251 bis 2254. Die Erste Brüner Maschinenfabriksgesellschaft preßt die Schaufeln am Fuß stark S-förmig, Abb. 2251, und hält die entsprechend geformten Füllstücke in einer rechteckig unterschrittenen Nut fest. Mäßig beanspruchte Schaufeln sichert Brown, Boveri & Co. durch einen Vorsprung in der Trommelnut, Abb. 2252, höher beanspruchte durch Anstauchen eines Fußes, Abb. 2253, über welchen verzahnte Füllstücke greifen. Thyssen & Co. verzahnt auch die Schaufelfüße, die kräftigerer Abmessungen wegen den Querschnitt des Rohstabes behalten, aus dem die Schaufeln gefräst werden.

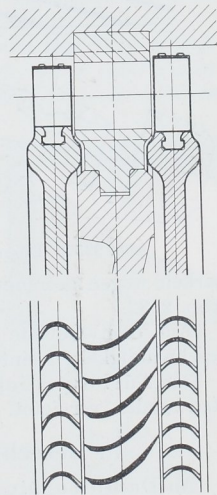


Abb. 2256. Turbine mit Blechschaufeln und Zwischenböden mit besonderen Kränzen.

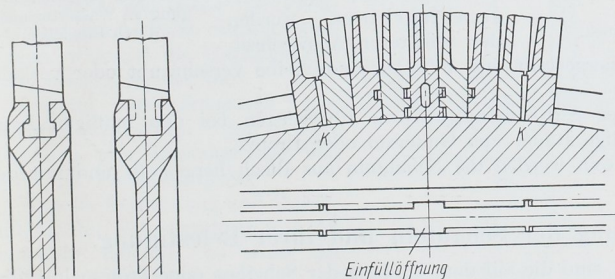


Abb. 2255. Schloß von Escher, Wyss und Co.

Bergmann vernietet die aus Nickelstahlblech gepreßten Schaufeln, Abb. 2254, mit dem schmalen Kranz unter Einschalten einer Beilage, die den Schaufelraum radial nach innen zu begrenzt.

Ein Beispiel für ein Schloß zeigt Abb. 2255. Die in der Einfüllöffnung liegenden Schaufeln stützen sich nicht an den Schultern der Nut, sondern greifen mit Vorsprüngen ineinander ein. Durch zwischengetriebene Keile *K* werden die Schaufeln gegenseitig kräftig verspannt, so daß das Herausschleudern unmöglich ist.

Zur Befestigung der ruhenden, nur durch den Druck des Treibmittels belasteten Leitschaufeln zur Umlenkung des Dampfes nach Abb. 2220 und Abb. 2222 genügen Schwalbenschwänze oder die einfacheren an Laufschaufeln benutzten Mittel. Dagegen haben die Leitschaufeln in den Zwischenböden, Abb. 2221, noch die Aufgabe, den Überdruck, der auf den Zwischenboden wirkt, auf das Gehäuse zu übertragen. Sie verlangen dementsprechend eine widerstandsfähigere Befestigung. Stahlblechschaufeln gießt man zu dem Zwecke unmittelbar in die Zwischenböden, Abb. 2221 oder in besondere ringförmige Kranzstücke, Abb. 2256, ein, welche ihrerseits die Zwischenböden stützen. Zur innigeren Verbindung dienen Bohrungen oder das Verzahnen der Schaufelränder wie an dem Düsenstück, Abb. 2257, unter Verzinnen derselben vor dem Eingießen. Bei diesem muß das Eisen genügend heiß sein, um die zur innigen Verbindung nötige Wärme an die Schaufelränder abgeben zu können.

Schaufeln besonderen Querschnitts oder solche aus leichter schmelzbaren Metallen setzt man mit entsprechenden Füllstücken oder Seitenwänden zusammen und vernietet oder verlötet sie miteinander zu einem widerstandsfähigen Ganzen.

Die Laufräder der Francisturbinen werden für mäßige Gefälle bis zu 40 m aus Gußeisen, für mittlere bis zu 70 m aus Stahlguß, darüber hinaus aus Sonderbronze hergestellt. Dabei pflegen nur solche aus Stahlguß und Bronze sowie kleinere

Räder aus Gußeisen in einem Stück mit den Schaufeln ausgeführt, sonst aber die aus Stahlblech warm gepreßten Schaufeln in die Kränze, Naben oder Radscheiben eingegossen zu werden, Abb. 2258. Für die schwalbenschwanzartigen Zacken gibt Camerer [XXIX, 3] die eingeschriebenen Verhältnisse an.

Die Becher der Freistrahlturbinen werden der leichteren Auswechsel-

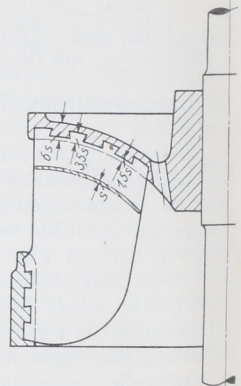


Abb. 2258. Schaufelbefestigung an Wasserturbinen durch Eingießen.

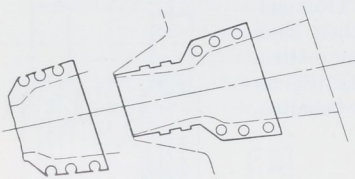
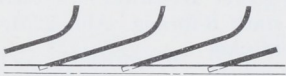


Abb. 2257. Düsenstück.

barkeit wegen getrennt hergestellt und mit der Radscheibe verschraubt oder verkeilt, Abb. 2232.

Auf dem Gebiete der Schleuderpumpen überwiegen bei den mäßigen Laufgeschwindigkeiten einteilige Räder aus Gußeisen oder Bronze.

An Turboverdichtern werden die Schaufeln aus Blech hergestellt und mit den Radwänden vernietet.

### C. Berechnung der Schaufeln und ihrer Befestigung.

An Dampfturbinen sind die auf dem Umfang der Scheiben oder Trommeln radial angeordneten Schaufeln durch die Eigenfliehkraft und durch den Ablenkungsdruck, bei Überdruckschaufeln außerdem noch durch den Rückdruck des Treibmittels belastet. Die Fliehkraft bedingt nur Zugspannungen, wenn die Schwerpunkte aller Querschnitte, also einschließlich der Einspannstelle oder des Kehlquerschnitts des Fußes auf einer radialen Geraden liegen; sonst treten Biegespannungen hinzu. Der Druck des Treibmittels erzeugt Biege- und Drehmomente, die an Schaufeln mit Schwalbenschwänzen oder Hammerfüßen durch Verlängern der Füllstücke nach Abb. 2244 vom Kehlquerschnitt ferngehalten werden können. Die Schaufeln der seltener ausgeführten radial beaufschlagten Turbinen werden auch durch die Eigenfliehkraft auf Biegung beansprucht. Die genaue Ermittlung der entstehenden Spannungen ist sehr verwickelt. Im Falle der

Abb. 2259, wo der Ansatzquerschnitt  $I-I$  des Schwalbenschwanzes schräg zur Schaufel-längsachse liegt, erzeugt der Druck  $P$  ein Biegemoment  $P \cdot a$  und ein Drehmoment  $P \cdot b$ , wenn  $a$  den Abstand zwischen  $P$  und der Ebene  $II$ ,  $b$  das Lot vom Schwerpunkt  $S$  auf dem Grundriß von  $P$  bedeutet. Abgesehen davon, daß es nicht möglich ist, mit einfachen Mitteln die entstehenden Drehspannungen zu bestimmen, genügt es für Vergleichszwecke, die Schaufeln nur auf Biegung so zu berechnen, als ob  $P$  nach Abb. 2260 am Hebelarm  $a = l/2$  den vollen Schaufelquerschnitt auf Biegung beanspruchte. Die Listen, aus welchen die Schaufeln bei der Aufstellung der Schaufelpläne von Turbinen entnommen werden, brauchen dann nur die Widerstandsmomente der vollen Schaufelquerschnitte (und der Kehlquerschnitte, für den Fall, daß einfache Schwalbenschwänze verwendet werden), zu enthalten.

Als zulässige Beanspruchung gibt Karraß für Schaufeln aus Stahl 1000, aus Messing 800, aus Monelmetall 1200 kg/cm<sup>2</sup> an.

Eine einigermaßen zutreffende Berechnung der Schaufeln von Francisturbinen bietet große Schwierigkeiten wegen der Unsicherheit über die Wirkung des Wasserdrucks auf die Schaufeln, die meist sehr verwickelte Formen und keine ebenen Ansatzquerschnitte an der Nabe haben.

Hoch beansprucht sind die Becher von Freistrahlturbinen und ihre Befestigungsmittel. Jeder Becher muß beim normalen Lauf in dem Augenblick, wo er vom Wasserstrahl getroffen wird, der vollen Umfangskraft und der Eigenfliehkraft, beim Anlassen aber der doppelten Umfangskraft, allerdings unter Wegfall der Fliehkraft standhalten. Im Falle des Durchgehens kann die Drehzahl auf das 1,8fache und damit die Fliehkraft auf das 3,2fache der normalen steigen, während die Umfangskraft vernachlässigt werden darf.

Betreffs der Schaufeln von Schleuderpumpen und -verdichtern gilt ähnliches wie von denen der Francisturbinen.

Was die Berechnung und Durchbildung der Befestigungsmittel der Schaufeln anlangt, so seien der auch auf zahlreichen anderen Gebieten, z. B. an den Anker elektrischer Maschinen, Abb. 2290, sehr häufig verwandte Schwalbenschwanz und der Hammerfuß zur näheren Betrachtung herausgegriffen. Der größeren Anschaulichkeit wegen sind die entstehenden Kräfte an dem Pol einer Dynamomaschine, Abb. 2261, erläutert. Der Kehlquerschnitt  $I$  wird durch die Fliehkraft  $Z_1$  des außerhalb liegenden Teils des Pols auf Zug beansprucht, wenn  $Z_1$  durch den Schwerpunkt des Kehlquerschnitts geht, eine Bedingung, die bei symmetrischer Ausbildung des Ganzen zur radialen Mittelinie erfüllt ist. Die mittlere Zugspannung

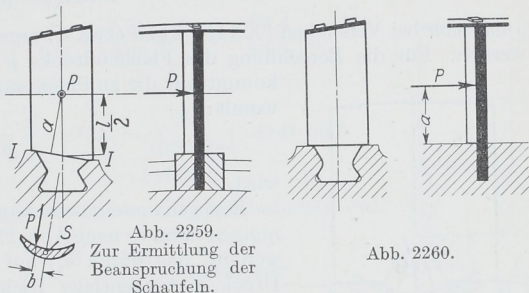


Abb. 2259.  
Zur Ermittlung der Beanspruchung der Schaufeln.

Abb. 2260.

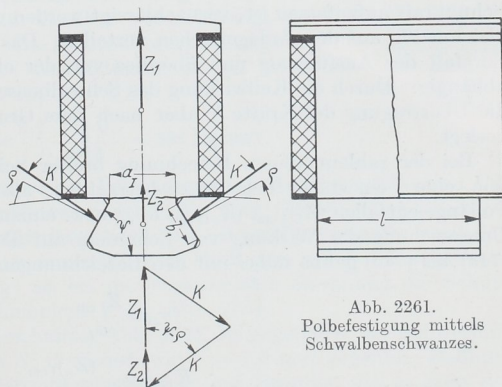


Abb. 2261.  
Polbefestigung mittels Schwalbenschwanzes.

$$\sigma_{z1} = \frac{Z_1}{f_1} \quad (743)$$

ist ein unterer Grenzwert für die Beanspruchung, die durch die Kerbwirkung nach den Ausführungen auf S. 147 um so mehr erhöht wird, je schärfer die Kehle ist. Der am Polfuß wirkenden Fliehkraft des gesamten Pols  $Z_p = Z_1 + Z_2$  halten zwei Kräfte  $K$  in den Zacken des Läufers das Gleichgewicht. Ist  $\psi$  der Neigungswinkel der Flanken gegenüber der Grundfläche und berücksichtigt man die an jenen entstehende Reibung durch den Reibungswinkel  $\varrho$ , so wird:

$$K = \frac{Z_p}{2 \cdot \cos(\psi - \varrho)} \quad (744)$$

$\varrho$  hat sich bei Versuchen [XXIX, 8] zu etwa  $8^\circ$  ergeben.  $\psi$  pflegt  $\approx 60^\circ$  genommen zu werden. Für die Berechnung des Flächendrucks  $p$  an den Flanken von der Größe  $F_s$  kommt nur die zu ihnen senkrechte Seitenkraft von  $K$  in Frage, womit:

$$p = \frac{K \cdot \cos \varrho}{F_s} \quad (745)$$

wird.

Zur genaueren Berechnung der im Fuß entstehenden Spannungen kann er nach Abb. 2262 als ein Kreisingstück betrachtet werden, das durch  $\sigma_{zI}$  auf Zug in radialer und durch  $p$  auf Druck in tangentialer Richtung gleichmäßig belastet ist, also unter einem zweiachsigen Spannungszustand steht [vgl. XXIX, 9]. In den Punkten  $A$  und  $B$  setzen sich die beiden Spannungen nach S. 45 unten zu einer größten Anstrengung auf Zug:

$$\sigma_i = \sigma_{zI} + \frac{p}{m} \quad (746)$$

zusammen.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Reibung, die als eine an der Anlagefläche wirkende Schubkraft aufzufassen ist, vernachlässigt werden darf und daß sich die Drucke  $K \cdot \cos \varrho$  gleichmäßig auf den Anlageflächen verteilen. Das ist freilich in starkem Maße von der Sorgfalt der Ausführung und überdies von der elastischen Nachgiebigkeit der Zacken abhängig. Durch die Keilwirkung des Schwalbenschwanzes werden diese zurückgebogen, die Übertragung der Kräfte  $K$  aber nach dem Grunde des Schlitzes nach  $C$  und  $D$  hin verlegt.

Bei der zahlenmäßigen Berechnung breiter Schwalbenschwänze kann es vorteilhaft sein, eine 1 cm starke Scheibe zu betrachten, also die Kräfte, die auf die Einheit der Pollänge entfallen  $(Z_p)_{1\text{cm}}$ ,  $(Z_1)_{1\text{cm}}$ ,  $K_{1\text{cm}}$  usw. einzuführen. Das Gleiche gilt auch bei der Untersuchung der Wirkung von Schaufeln auf Turbinenscheibenkränze. Die Formeln (743) bis (745) gehen dabei mit den Bezeichnungen der Abb. 2261 über in:

$$\sigma_{zI} = \frac{Z_{1\text{cm}}}{a_I} \quad (747)$$

$$K_{1\text{cm}} = \frac{(Z_p)_{1\text{cm}}}{2 \cos(\psi - \varrho)} \quad (748)$$

$$p = \frac{K_{1\text{cm}} \cdot \cos \varrho}{b_1} \quad (749)$$

**Beispiel 1.** Die Beanspruchung der Schaufeln der ersten Reihe des Laufkränzes, Abb. 2263, ist für  $n = 3000$  Uml./min zu berechnen. Schaufelwerkstoff: Nickelstahl mit einem Einheitsgewicht von  $7,9 \text{ kg/dm}^3$ . Der Dampf übt auf eine Schaufel der ersten Reihe  $9,2 \text{ kg}$  Druck in der aus der Abbildung ersichtlichen Richtung aus, wobei angenommen ist, daß der Dampfdruck zu einer Einzelkraft in der Mitte der Schaufel zusammengefaßt werden darf. Die Schaufeln sind mit Gegenschwalbenschwänzen ver-

sehen, sowohl in Rücksicht auf die hohe Umfangsgeschwindigkeit als auch wegen der konstruktiven Durchbildung des Kranzes, der sonst bei  $b$  zu schwach ausgefallen wäre.

Schaufelquerschnitt  $f_s = 0,74 \text{ cm}^2$ , Kehlquerschnitt  $f_k = 0,59 \text{ cm}^2$ . Die der Berechnung der Fliehkraft zugrundegelegte Schaufellänge  $l_s = 40 \text{ mm}$  setzt sich zusammen aus derjenigen der eigentlichen Schaufel von  $30 \text{ mm}$ , einem Zuschlag für das Deckblech von  $3 \text{ mm}$  und der vollen Länge des Gegenschwalbenschwanzes von  $7 \text{ mm}$  unter Vernachlässigung der geringen Abfälle, die beim Einschneiden des letzteren entstehen.

Schaufelgewicht bis zum Kehlquerschnitt:

$$G = \gamma \cdot l_s \cdot f_s = \frac{7,9}{1000} \cdot 4 \cdot 0,74 = \frac{23,4}{1000} \text{ kg},$$

Fliehkraft:

$$Z = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_s = \frac{23,4}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 59,8 = 141 \text{ kg},$$

Beanspruchung des Kehlquerschnitts auf Zug:

$$\sigma_z = \frac{Z}{f_k} = \frac{141}{0,59} = 239 \text{ kg/cm}^2.$$

Zur Ermittlung der Biegebeanspruchung der Schaufel wurden zunächst der Schwerpunkt  $S_s$ , die Hauptträgheitsachsen  $S_s A$  und  $S_s B$ , Abb. 2264, und die zugehörigen Trägheitsmomente  $J_1 = 0,144$  und  $J_2 = 0,0292 \text{ cm}^4$  bestimmt. Bei der Zerlegung des Drucks  $P$  parallel zu  $S_s A$  und  $S_s B$  fiel die Seitenkraft in Richtung von  $S_s B$  so klein aus, daß dieselbe vernachlässigt werden konnte. Die größte Biegespannung entsteht an der Austrittskante  $D$  im Abstände  $e_1 = 0,7 \text{ cm}$  von  $S_s B$ :

$$\sigma_b = \frac{P \cdot l \cdot 2 \cdot e_1}{J_2} = \frac{9,2 \cdot 1,5 \cdot 0,7}{0,0292} = 331 \text{ kg/cm}^2.$$

Abb. 2264 zeigt, daß  $S_s B$  fast parallel zur Verbindungslinie der Schaufelkanten  $CD$  läuft. Solange also die Schaufel annähernd gleichmäßig über  $CD$  gestaltet ist, kann man sich darauf beschränken, das Trägheitsmoment des Schaufelquerschnitts bezüglich einer zu  $CD$  parallelen Schwerachse zu ermitteln, z. B. nach dem auf S. 32 erläuterten Mohrschen Verfahren. Vernachlässigt ist bei der vorstehenden Rechnung die Schubwirkung von  $P$  und das kleine Drehmoment  $P \cdot g$ , Abb. 2264.

Der Schwerpunkt  $S_k$  des Kehlquerschnitts, Abb. 2265, ist gegenüber der Schwerlinie der eigentlichen Schaufel, die sich in  $S_s$  projiziert, um  $c = 1,0 \text{ mm}$  versetzt. Dadurch entsteht im Kehlquerschnitt eine Nebenbeanspruchung auf Biegung, die in etwa der gleichen Höhe wie die oben berechnete Zugspannung liegt. Bei einem Trägheitsmoment  $J_k = 0,0211 \text{ cm}^4$  und  $e_2 = 0,44 \text{ cm}$  Abstand der am stärksten auf Zug beanspruchten Kante von der Nulllinie ist:

$$\sigma'_b = \frac{Z \cdot c \cdot e_2}{J_k} = \frac{141 \cdot 0,1 \cdot 0,44}{0,0211} = 294 \text{ kg/cm}^2.$$

Ob sich diese Spannung in voller Höhe ausbilden kann, hängt davon ab, ob die Schaufeln von den Füllstücken derart gefaßt sind, daß sie längs des ganzen Fußes als eingespannt angesehen werden können. Das wird in den wenigsten Fällen zu erwarten sein, so daß man mit einer größten Beanspruchung im Kehlquerschnitt von  $\sigma_z + \sigma'_b = 239 + 294 = 533 \text{ kg/cm}^2$  rechnen muß.

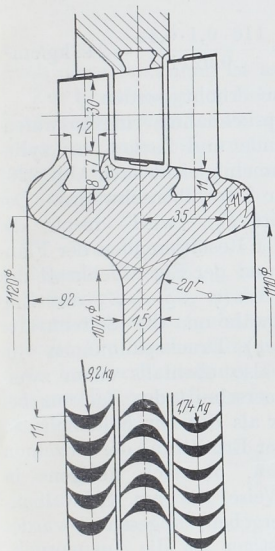


Abb. 2263. Kranz mit zwei Geschwindigkeitstufen und Schaufelbefestigung durch Gegenschwalbenschwänze. M. 1:2,5.

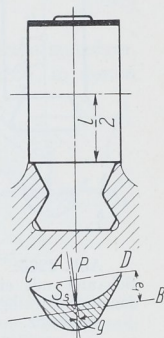


Abb. 2264.

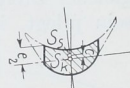


Abb. 2265. Zur Berechnung der Beanspruchung der Schaufeln der ersten Reihe Abb. 2263.



Viel ungünstiger wäre, die Schaufel mit einem einfachen Schwalbenschwanz nach Abb. 2266 zu befestigen. Die Biegebeanspruchung durch den Dampfdruck würde auf

$$\sigma_b = \frac{P \cdot l/2 \cdot e_2}{J_k} = \frac{9,2 \cdot 1,5 \cdot 0,44}{0,0211} = 288 \text{ kg/cm}^2$$

sinken, aber um die Fliehspannung, die in Anbetracht der nur 33 mm betragenden Schauffellänge 194 kg/cm<sup>2</sup> ist und die Biegebeanspruchung

$$\sigma'_b = \frac{Z' \cdot c \cdot e_2}{J_k} = \frac{116 \cdot 0,1 \cdot 0,44}{0,0211} = 242 \text{ kg/cm}^2$$

auf 724 kg/cm<sup>2</sup> erhöht werden.

Die Inanspruchnahme ringsumlaufender Nutenwände und Zacken an zylindrischen Trommeln gleicht nach Abb. 2267 derjenigen der Schwalbenschwänze. Der Kehlquerschnitt  $F_{III}$  wird durch die Summe aus der Resultierenden der Flankendrucke  $K$  und der Eigenfliehkraft des Zackens  $2K \cdot \cos(\psi - \varrho) + Z_3$  auf Zug beansprucht, während die Seitenkräfte  $K \cdot \sin(\psi - \varrho)$  Druckspannungen im Zacken, dort also ebenfalls einen zwei-

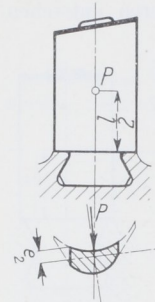


Abb. 2266. Schaufel mit einfachem Schwalbenschwanz.

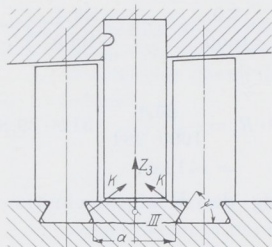


Abb. 2267. Zur Berechnung der Beanspruchung der Schwalbenschwanznuten an Trommeln.

achsigen Spannungszustand erzeugen. Da aber der Kehlquerschnitt des Zackens bei gleicher Breite der Lauf- und Leitschaufeln wesentlich größer als der der Schaufeln zu sein pflegt, ist die Beanspruchung günstiger, so daß von der Ermittlung der einzelnen Spannungen, die sich übrigens in gleicher Weise wie am Schwalbenschwanz ergeben, abgesehen wurde.

Ungünstiger ist die Inanspruchnahme der Zacken an den Ankern von Dynamomaschinen, Abb. 2268, und zwar umso mehr, je weniger Pole auf dem Umfang vorhanden sind, je größer also der Winkel  $\varphi$  ist. Im Fall von sechs Polen ist aus der Nebenabildung (a) ersichtlich, daß die Flankendrucke  $K$  die Zacken nach den gestrichelten Linien durchzubiegen suchen, so daß nur die außerhalb des Kerns  $ACB$  liegenden Teile für die Inanspruchnahme auf Biegung in Betracht kommen. Bedeutet  $l$  die axiale Länge,  $h = AC = BC$  die Höhe der fraglichen Querschnitte, so erzeugen die Flankendrucke  $K$  nach der Theorie

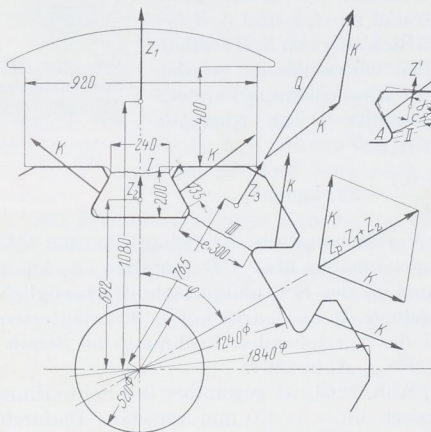


Abb. 2268. Ermittlung der Kräfte an den Schwalbenschwänzen von Dynamoankern.

der geraden Balken in den Punkten  $A$  und  $B$  Spannungen:

$$\sigma_b + \sigma_z = \frac{6K \cdot a}{l \cdot h^2} + \frac{K \cdot \sin \beta}{l \cdot h} \quad (750)$$

Dazu tritt die Wirkung der in den Schwerpunkten  $S'$  vereinigten Fliehkräfte  $Z'$  der Zackennasen:

$$\sigma'_b + \sigma'_z = \frac{6Z' \cdot c}{l \cdot h^2} + \frac{Z' \cdot \sin \gamma}{l \cdot h} \quad (751)$$

während die Schubkräfte  $K \cdot \cos \beta$  und  $Z' \cdot \cos \gamma$  vernachlässigt werden können. (Zu beachten ist, daß eine recht erhebliche Steigerung der Beanspruchung in einer der Kehlen eintritt, wenn der Flankendruck an einer Seite am äußeren Ende des Zackens wirkt, z. B. infolge ungenauer Bearbeitung.)

Zur Berechnung der mittleren Zugspannung  $\sigma_{zIII}$  im Kehlquerschnitt setzt man die Kräfte  $K$  zur Resultierenden  $Q = 2K \cdot \cos \left( \psi - \rho - \frac{\varphi}{2} \right)$  zusammen und findet:

$$\sigma_{zIII} = \frac{Q + Z_3}{F_{III}}. \quad (752)$$

Auch diese Spannung ist aus den gleichen Gründen wie  $\sigma_{zI}$  als Mindestwert anzusehen.

Zur Ermittlung der Beanspruchung schnelllaufender Turbinenradkranze, in denen die Schaufeln mit Schwalbenschwänzen befestigt sind, Abb. 2269, betrachtet man zweckmäßigerweise einen Ausschnitt von 1 cm Länge, berechnet die auf ihn entfallende Fliehkraft der Schaufeln und Füllstücke  $Z_{1cm}$  und daraus den Flankendruck

$K_{1cm} = \frac{Z_{1cm}}{2 \cos(\psi - \rho)}$ . Durch ihn werden die parallel, unter  $45^\circ$

und senkrecht zu  $K_{1cm}$  angeordneten Kranzquerschnitte 1, 2 und 3 auf Biegung, Zug und Schub belastet. Zur Erleichterung der folgenden Rechnung ist angenommen, daß sich die Flächen im Schnitt der Flankenlinie mit dem Grund der Nut treffen. Geht man bei der Gestaltung des Kranzes von einer bestimmten zulässigen Beanspruchung  $k_b = k_z$  aus und vernachlässigt die Schubkräfte, so ergeben sich als Wandstärken:

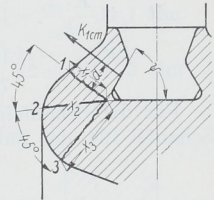


Abb. 2269. Zur Berechnung von Turbinenradkranzen.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{6 K_{1cm} \cdot a}{k_b}}, \\ x_2 &= 1,41 \frac{K_{1cm}}{k_z} + \sqrt{1,41 \frac{K_{1cm}}{k_z} \left( 1,41 \frac{K_{1cm}}{k_z} + 4,25a \right)}, \\ x_3 &= 2 \frac{K_{1cm}}{k_z} + \sqrt{2 \frac{K_{1cm}}{k_z} \left( 2 \frac{K_{1cm}}{k_z} + 3a \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (753)$$

Das folgt z. B. für den Querschnitt 3 aus der Spannung in der Kehle:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{K_{1cm}}{1 \cdot x_3} + \frac{6 K_{1cm} (a + x_3/2)}{1 \cdot x_3^2} = k_z,$$

wenn man die Beziehung nach  $x_3$  auflöst. Die drei Maße genügen meist zum Festlegen des Kranzumrisses.

**Beispiel 2.** Zur Beschauelung Abb. 2263 soll der Kranz bei  $k_b = k_z = 750 \text{ kg/cm}^2$  zulässiger Beanspruchung berechnet werden.

1. Schaufelreihe. Zur Berechnung der Fliehkraft  $Z_s$  der gesamten Schaufel sei ihre Länge unter Einschluß des Schwalbenschwanzes mit  $l = 4,8 \text{ cm}$  (vgl. Beispiel 1) eingesetzt.

$$Z_s = \frac{\gamma \cdot l \cdot f_s}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_s = \frac{7,9 \cdot 4,8 \cdot 0,74}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 59,4 = 168 \text{ kg}.$$

Ein Füllstück wiegt  $13,2 \text{ g}$  und entwickelt eine Fliehkraft:

$$Z_f = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_f = \frac{13,2}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 57,7 = 77 \text{ kg}.$$

Die Summe der Fliehkkräfte von  $245 \text{ kg}$  wirkt auf einer Teilung von  $1,1 \text{ cm}$  und ergibt eine Belastung der Längeneinheit des Kranzes:

$$Z_{1cm} = \frac{245}{1,1} = 223 \text{ kg/cm},$$

einen Flankendruck:

$$K_{1\text{cm}} = \frac{Z_{1\text{cm}}}{2 \cos(\psi - \varrho)} = \frac{223}{2 \cdot \cos(60^\circ - 8^\circ)} = 181 \text{ kg/cm}$$

und einen mittleren Flächendruck an den Flanken:

$$p = \frac{K_{1\text{cm}} \cdot \cos \varrho}{a_1} = \frac{181 \cdot \cos 8^\circ}{0,7} = 256 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Schaufel, für sich allein betrachtet, würde zu 136 kg Flankendruck und etwa 850 kg/cm<sup>2</sup> Flächendruck führen.

Mit  $a = 0,58 \text{ cm}$  wird:

$$x_1 = \sqrt{\frac{6 K_{1\text{cm}} \cdot a}{k_b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 181 \cdot 0,58}{750}} = 0,92 \text{ cm},$$

$$\text{mit } 1,41 \frac{K_{1\text{cm}}}{k_z} = 1,41 \cdot \frac{181}{750} = 0,340 \quad x_2 = 0,340 + \sqrt{0,340(0,340 + 4,25 \cdot 0,58)} = 1,32 \text{ cm},$$

$$\text{mit } 2 \frac{K_{1\text{cm}}}{k_z} = 2 \cdot \frac{181}{750} = 0,483 \quad x_3 = 0,483 + \sqrt{0,483(0,483 + 3 \cdot 0,58)} = 1,52 \text{ cm}.$$

Für die Schaufeln der zweiten Reihe gelten die folgenden Zahlen: Fliehkraft der Schaufel 134, des Füllstückes 41,5 kg; Belastung des Kranzes 185 kg/cm, Flankendruck 150 kg/cm,  $x_1 = 0,83$ ,  $x_2 = 1,06$ ,  $x_3 = 1,36 \text{ cm}$ . Mit diesen Werten ist der Kranz Abb. 2263 aufgezeichnet. Dabei ist der berechnete strichpunktierte Umriß auf der rechten Seite

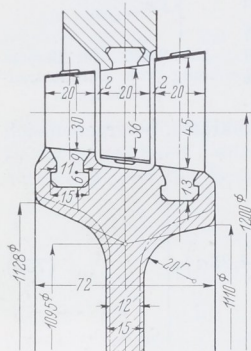


Abb. 2270. Kranz mit zwei Geschwindigkeitstufen und Befestigung der Schaufeln durch Hammerfüße.

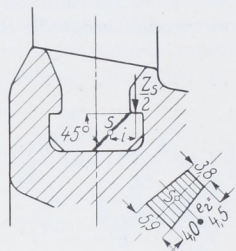


Abb. 2271. Zur Berechnung des Hammerfußes an den Schaufeln Abb. 2270.

durch den stark ausgezogenen ersetzt werden, um einen zur Scheibenmittelebene annähernd symmetrischen Kranz zu bekommen.

Welche Änderungen zweckmäßig sind, wenn die gleichen Schaufeln durch Hammerfüße befestigt werden, zeigt das folgende Beispiel.

**Beispiel 3.** Zur Befestigung der Beschauflung, Abb. 2263, sollen Hammerfüße benutzt werden.

Vermindert man die Halsstärke der Schaufel wegen der geringeren Kerbwirkung auf 11 mm, Abb. 2270, so läßt sich die Breite des Fußes bei etwa dem gleichen Flächendruck wie

am Schwalbenschnanz auf 15 mm herabsetzen. Wählt man die Nasenhöhe zu 6 mm und nimmt die Schaufelfliehkraft ebenso groß wie im Beispiel 2 zu  $Z_s = 168 \text{ kg}$  an, so wird die Biegebeanspruchung in einem unter 45° von der Kehle verlaufenden, annähernd trapezförmigen Schnitt an einer Schaufel der ersten Reihe, Abb. 2271, nach der Theorie der geraden Balken:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{Z_s \cdot \cos 45^\circ}{2 F} + \frac{Z_s \cdot i}{2 W} = \frac{168 \cdot 0,707}{2 \cdot 0,86 \cdot 0,49} + \frac{168 \cdot 0,41}{2 \cdot 0,913} = 141 + 38 = 179 \text{ kg/cm}^2.$$

Berechnet man die Spannung entsprechend dem Vorschlage von Bach auf S. 49 nach der Formel für gekrümmte, stabförmige Körper, so ergeben sich bei Annahme einer scharfen Kehle und unter Einsetzen des ungünstigeren kleineren Wertes für den Krümmungshalbmesser  $r$  die folgenden Zahlen:

$$r = \sqrt{0,01 e_2^2 + \varrho^2 + e_2} = \sqrt{0,01 \cdot 0,45^2 + 0 + 0,45} = 0,50 \text{ cm}; \quad Z = 0,0775 \text{ cm}^4;$$

$$M_b = \frac{Z_s \cdot i}{2} = \frac{168 \cdot 0,5}{2} = 42 \text{ kgcm} \quad \text{und nach Formel (46)}$$

$$\sigma = \frac{P + M_b/r}{F} + \frac{M_b \cdot r}{Z} \cdot \frac{e_2}{r + e_2} = \frac{168/2 + 42/0,5}{0,85 \cdot 0,49} + \frac{42 \cdot 0,5}{0,0775} \cdot \frac{0,45}{0,5 + 0,45} = 527 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Spannung würde demnach infolge der Kerbwirkung auf das 2,9fache der bei der ersten Rechnung ermittelten steigen, ist aber sicher noch zulässig. Zur Bestimmung der Nutenwandstärke wurde das Gewicht des Füllstücks zu 9,6 g, die von ihm entwickelte Fließkraft zu 56 kg ermittelt, woraus sich die Belastung der Längeneinheit der Nuten zu  $Z_{1\text{cm}} = 204 \text{ kg/cm}$  ergab. Die Nutenwand wird auf Zug und Biegung beansprucht und muß bei  $k_b = k_z = 750 \text{ kg/cm}^2$  zulässiger Beanspruchung 6,8 mm stark werden, wie nach Abb. 2272 aus:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{Z_{1\text{cm}}}{2 x_1} + \frac{6 Z_{1\text{cm}} (x_1/2 + c_1)}{2 x_1^2} = k_z$$

oder

$$x_1 = \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + \sqrt{\frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} \left( \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + 3 c_1 \right)} \quad (754)$$

oder mit

$$\frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} = \frac{204}{750} = 0,272 \text{ aus } x_1 = 0,272 + \sqrt{0,272 (0,272 + 3 \cdot 0,11)} = 0,68 \text{ cm}$$

folgt. In einem unter  $45^\circ$  durch die Kehle gelegten Schnitt wird:

$$x_2 = 0,71 \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + \sqrt{0,71 \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} \left( 0,71 \frac{Z_{1\text{cm}}}{k_z} + 4,25 c_1 \right)} \quad (755)$$

$$= 0,193 + \sqrt{0,193 (0,193 + 4,25 \cdot 0,11)} = 0,55 \text{ cm}.$$

Schließlich kann man in gleicher Weise auch den Querschnitt 3 auf das Biegemoment  $\frac{Z_{1\text{cm}}}{2} \cdot c_3$  berechnen, wenn auch zu beachten ist, daß diese Berechnung zu ungünstig ist, weil ein um so größerer Teil der Kraft  $Z_{1\text{cm}}/2$  durch tangentielle Spannungen im Kranz aufgenommen wird, je weiter der Querschnitt vom Angriffspunkt der Kraft abliegt. Der Sicherheit wegen auf das volle Moment berechnet, wird:

$$x_3 = \sqrt{\frac{6 Z_{1\text{cm}} \cdot c_3}{2 k_b}} \quad (756)$$

$$= \sqrt{\frac{6 \cdot 204 \cdot 1,39}{2 \cdot 750}} = 1,06 \text{ cm}$$

erforderlich. In Abb. 2270 sind diese Maße zur Aufzeichnung des strichpunktierten Randes des Kranzes benutzt, der beim Vergleich mit Abb. 2263 deutlich die viel günstigeren Verhältnisse bei Verwendung von Hammerfüßen erkennen und diese namentlich für hochbeanspruchte Schaufeln vorteilhaft erscheinen läßt. Insbesondere ist die Kranzbreite in Abb. 2270 nur 72 gegenüber 92 mm in Abb. 2263.

Praktisch wird man den Kranz, Abb. 2270, in Rücksicht auf größere Steifigkeit etwas verstärken und ihm den kräftig angedeuteten Umriß geben.

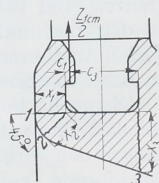


Abb. 2272. Berechnung der Kranzabmessungen im Fall der Befestigung der Schaufeln durch Hammerfüße.

## IV. Trommeln und Scheiben.

### A. Werkstoffe der Trommeln und Scheiben von Dampfturbinen. Wahl der zulässigen Beanspruchung, Ausführungen.

In Rücksicht auf die Betriebsicherheit muß von den Werkstoffen der Trommeln und Scheiben der Dampfturbinen große Festigkeit und Zähigkeit, namentlich aber größte Gleichmäßigkeit und Spannungsfreiheit verlangt werden. Man verwendet deshalb ausschließlich zähe, gut durchgeschmiedete und vor der letzten Bearbeitung zwecks Beseitigung aller Spannungen sorgfältig ausgeglühte Stähle. Für gering beanspruchte, mit mäßiger Geschwindigkeit laufende Trommeln und Scheiben genügt im Siemens-

Martinofen hergestellter Regelstahl St 42.11 der DIN 1611 mit 4200...5000 kg/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit,  $\delta_5 = 30\%$  Bruchdehnung und 2300...2750 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze oder Regelstahl St 50.11 der DIN 1611 mit 5000...6000 kg/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit,  $\delta_5 = 24\%$  Bruchdehnung und 2750...3300 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze.

Für höher beanspruchte nimmt man:

St C 45.61 der DIN 1661, der ausgeglüht 6000...7000 kg/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit,  $\delta_5 = 19\%$  Bruchdehnung und 3400 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze, vergütet 6500...7500 kg/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit,  $\delta_5 = 18\%$  sowie 3900 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze besitzt.

Bei sehr hohen Beanspruchungen greift man zu legierten Stählen, insbesondere zu Nickelstahl von 6000...7000 kg/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit, 3500...4000 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze oder Chromnickelstahl von 7000 kg/cm<sup>2</sup> Zugfestigkeit,  $\delta_5 = 15\%$  Bruchdehnung und 5000 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze.

Die Proben zur Nachprüfung der Festigkeitseigenschaften werden zweckmäßigerweise den Stücken selbst entnommen, vgl. Abb. 76, und zwar bei Trommeln dem ausgebohrten Kern, bei Scheiben an der Nabe, weil dort die höchste Beanspruchung durch die tangentialen Zugspannungen auftritt und das Stück am wenigsten durchgeschmiedet ist, so daß die Proben Mindestzahlen ergeben werden. Das schwierige Durcharbeiten der Naben von Scheiben sucht man übrigens durch Aufdornen der Bohrung zu erreichen.

Gleichmäßigkeit und Spannungsfreiheit der Stücke muß gefordert werden in Rücksicht auf die Erwärmung beim Betrieb, welche die Spannungen zur Wirkung kommen läßt und Werfen und Verziehen, damit aber unruhigen Lauf und selbst Anstreifen der Scheiben- und Trommelkränze an den ruhenden Teilen verursachen kann.

Die zulässige Beanspruchung wählt man am besten in Abhängigkeit von der Streckgrenze. Nach Stodola nimmt man bei der Berechnung der Scheiben auf die normale Laufgeschwindigkeit für  $k_z$  das 0,25...0,4fache der Spannung an der Streckgrenze. Sind Ventilationslöcher in den Scheiben vorgesehen, so pflegen die Spannungen an den Lochumfängen nach den Formeln (792) und (793) die höchsten zu sein. Praktische Ausführungen zeigen dort nach der gleichen Quelle 0,35...0,6 der Spannung an der Streckgrenze.

Die recht hohen Beanspruchungen im Vergleich mit den sonst im Maschinenbau üblichen sind zulässig, weil die an einfachen Trommeln und Scheiben errechneten Spannungen den wirklichen nahe kommen und weil die Inanspruchnahme durch den Betrieb gleichförmig, ruhender Belastung ähnlich ist, solange keine Schwingungen auftreten; sie setzen aber auch fehlerfreie Werkstoffe voraus. Zur Beurteilung der größten Inanspruchnahme genügt es, sofern man die höchste Schubspannung als maßgebend ansieht, die Tangentialspannung in der Mitte der Scheibe oder am Umfang der Bohrungen zu kennen. Da die Spannung parallel zur Drehachse  $\sigma_3 = 0$  ist, wird nach den Ausführungen auf S. 46  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_t + 0) = \frac{\sigma_t}{2}$ .

Naturgemäß ist auch auf die genaue Bearbeitung und den sorgfältigen Zusammenbau der Teile großer Wert zu legen. Alle raschlaufenden müssen ausgewuchtet werden. Bedingt doch schon eine Abweichung des Schwerpunktes eines 1000 kg schweren Ankers um 0,1 mm von der Drehachse bei 3000 Umläufen in der Minute  $\frac{1000}{981} \cdot 314^2 \cdot 0,01 = 1010$  kg

Fliehkraft. Das Auswuchten geschieht zunächst meist statisch, indem man die Teile an den Lagerstellen auf zwei genau wagerechte und parallele Lineale stützt und nachprüft, ob sie in allen Stellungen im Gleichgewicht bleiben, also keine ausgesprochene Ruhelage infolge einseitiger Lage des Schwerpunktes zeigen. Durch diese statische Untersuchung lassen sich jedoch etwaige Zentrifugalmomente nicht nachweisen, die entstehen, wenn die Schwerpunkte einzelner Teile außerhalb, der Gesamtschwerpunkt aber auf der Drehachse liegen. Solche Fehler werden durch dynamisches Auswuchten nachgewiesen, wobei man den Läufer in federnd gestützten Lagern laufen läßt und beobachtet, ob das

Ganze dauernd ruhig bleibt. Ist das nicht der Fall, so läßt sich an den Ausschlägen die Lage der Schwerpunkte ermitteln und der Fehler durch Anbringen von Ausgleichgewichten beseitigen.

Zur Nachprüfung der mechanischen Festigkeitsverhältnisse zusammengebauter Teile dient die Schleuderprobe. Bei derselben wird die Drehzahl auf das 1,15 bis 1,2fache, am Dynamoankern und Rädern von Kreisverdichtern bis auf das 1,5fache der normalen gesteigert und dadurch das Stück der 1,32- bis 2,25fachen Beanspruchung durch die Fliehkraft ausgesetzt. Wenn dabei an einzelnen Stellen die Fließgrenze überschritten wird, z. B. die Naben sich erweitern und auf den Wellen locker werden, so hält man das für zulässig, weil sich der Werkstoff verfestigt hat und weitere Belastungen in gleicher Höhe aushält, sofern keine wechselnden Spannungen auftreten. Denn dann wäre Ermüdung, schließlich Rißbildung und Bruch zu erwarten. Auch darf sich der Fließvorgang nicht auf zu weite Gebiete erstrecken.

Dem Lockerwerden auf der eigentlichen Welle beugt man dadurch vor, daß man das Ausdrehen auf den endgültigen Durchmesser erst nach dem Schleudern vornimmt und die Teile warm aufzieht oder durch kegelige Buchsen verspannt oder auf federnde Ringe stützt, damit sie trotz der Erweiterung beim Laufen und Warmwerden beim Anlassen dauernd festsitzen oder zentrisch laufen.

## B. Berechnung raschlaufender Trommeln und Scheiben auf Festigkeit.

Für die Beanspruchung raschlaufender Trommeln und Scheiben sind in erster Linie die Eigenfliehkraft und die Fliehkraftwirkung der auf dem Umfang sitzenden Schaufeln, Becher, Pole usw. entscheidend, während die Wirkung der durch das Treibmittel erzeugten Umfangskraft meist vernachlässigt werden kann. Dabei nimmt man gewöhnlich die Wirkung der Schaufeln, Pole usw. gleichmäßig längs des Umfangs oder der Oberfläche verteilt an. Gegenüber der so ermittelten Spannung fällt jedoch die tatsächliche um so höher aus, je mehr die Belastung aus einzelnen örtlich wirkenden Kräften besteht, je kleiner z. B. die Zahl der Pole an einem Dynamoanker ist. Eine genauere Untersuchung dieses Falles hat H. Schmalz [XXIX, 9] durchgeführt, indem er die Gesamtbelastung in eine gleichmäßige Grundbelastung und mehrere darüber gelagerte harmonische Lastwellen zerlegt, die zugehörigen Spannungen ermittelt und übereinander lagert.

### 1. Beanspruchung von Trommeln.

An Trommeln, die mit Nuten zur Befestigung der Beschauelung versehen sind, Abb. 2273, ermittelt man zunächst die mittlere Wandstärke  $s_t$  und den zugehörigen Außenhalbmesser  $R_1$ . Liegt nun das Verhältnis des Innen- zu diesem Außenhalbmesser  $\frac{R_2}{R_1}$  in der Nähe von 1, ist also die Wandstärke der Trommel nicht allzu beträchtlich, so dürfen die beim Laufen in der Wandung entstehenden tangentialen Zugspannungen gleichmäßig verteilt angenommen werden. Wenn  $\gamma$  das Einheitsgewicht des Werkstoffes in  $\text{kg/cm}^3$ ,  $v_t$  die Laufgeschwindigkeit am mittleren Wandungshalbmesser in  $\text{cm/sek}$  und  $g = 981 \text{ cm/sek}^2$  die Fallbeschleunigung bedeuten, so bedingt die Eigenfliehkraft eine mittlere Zugspannung:

$$\sigma_{z1} = \frac{\gamma \cdot v_t^2}{g} \text{ kg/cm}^2, \quad (757)$$

wie des näheren beim Riementrieb auf S. 1168 unter Beachtung der dort verwandten andern Maßeinheiten nachgewiesen wurde. Aus den folgenden, für verschiedene Lauf-

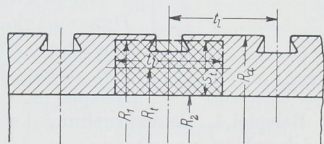


Abb. 2273. Bezeichnungen an Trommelwandungen.

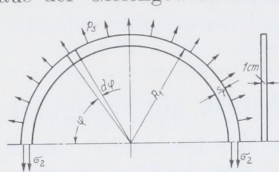
geschwindigkeiten  $v_t$  bei  $\gamma = 7,85/1000 \text{ kg/cm}^3$  gültigen Werten erhellt, daß Trommeln nur für mäßige Laufgeschwindigkeiten bis zu etwa 100 m/sek geeignet sind.

$v_t =$	20	40	60	80	100	120 m/sek
$\sigma_{z1} =$	32	128	288	512	800	1150 kg/cm <sup>2</sup> .

Auch die von der Beschauelung entwickelten Fliehkräfte erzeugen tangentielle Zugspannungen in der Wandung. Zur Berechnung derselben geht man von der auf 1 cm des Trommelumfangs vom Halbmesser  $R_1$  entwickelten Fliehkraft  $Z_{1 \text{ cm}}$  aus und denkt sie sich gleichmäßig über die Teilung  $t_t$ , den Mittenabstand zweier Schaufelreihen, Abb. 2273, verteilt. Dann stellt  $p_s = \frac{Z_{1 \text{ cm}}}{t_t}$  die mittlere, auf einen cm<sup>2</sup> der Trommeloberfläche entfallende Belastung dar, welche Spannungen in Höhe von:

$$\sigma_2 = \frac{p_s \cdot R_1}{s_t} = \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_1}{s_t \cdot t_t} \quad (758)$$

erzeugt, wie sich leicht bei Betrachtung eines Trommelstreifens von 1 cm Breite, Abb. 2274, aus der Gleichgewichtsbedingung in senkrechter Richtung:



$$2 \sigma_2 \cdot 1 \cdot s_t = \int_0^\pi p_s \cdot 1 \cdot R_1 \cdot d\varphi \cdot \sin \varphi = 2 p_s \cdot R_1$$

nachweisen läßt. Somit ist die Gesamtbeanspruchung der Wandung:

$$\sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\gamma \cdot v_t^2}{g} + \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_1}{s_t \cdot t_t} \quad (759)$$

Abb. 2274. Zur Ermittlung der Spannungen infolge der Fliehkräfte der Schaufeln.

Neben diesen tangentialen Spannungen entstehen noch radial gerichtete in Ansatzquerschnitt III der Zacken, Abb. 2267, der die von den Schaufeln und den Zacken selbst entwickelten Fliehkräfte zu übertragen hat. Sie fallen aber nur bei ungewöhnlich schmalen Zacken größer als die Tangentialspannungen aus und sind erst dann für die Inanspruchnahme der Trommelwandung entscheidend.

Die radiale Erweiterung  $\varrho$ , der die Trommel beim Laufen unterliegt, ergibt sich auf Grund der gleichen Betrachtung, wie sie für die Erweiterung  $\varrho_k$  von Riemenscheibenkränzen nach Formel (683) S. 1204 gilt:

$$\varrho = \alpha \cdot \sigma_z \cdot R_t \quad (760)$$

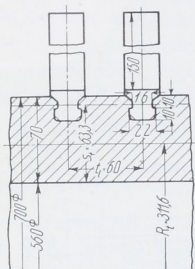


Abb. 2275. Zu Beispiel 4.

Sie ist u. a. beim Einschrumpfen der Zapfen oder Wellenden in die Trommeln zu beachten; das radiale Schrumpfmaß muß größer als diese Erweiterung sein, um das Lösen der Verbindung beim Laufen zu vermeiden, was nicht allein in Rücksicht auf die Übertragung des Drehmoments, sondern auch wegen des ruhigen zentrischen Laufes notwendig ist.

Dickwandige Trommeln, wie sie u. a. als Kernkörper von Dynamoankern vorkommen, müssen als durchbohrte Scheiben gleicher Stärke — man denkt sich aus dem Kern eine solche von 1 cm Dicke herausgeschnitten — berechnet werden, vgl. Beispiel 8.

**Beispiel 4.** Beanspruchung der Trommelwandung, Abb. 2275, bei 3000 Umläufen/min. Auf dem Umfange sitzen  $z = 152$  mit dem Füllstück aus einem Stück bestehende Schaufeln von 150 mm wirksamer Länge. Jede von ihnen entwickelt beim Laufen eine Fliehkraft von 560 kg. Trommelwerkstoff: Siemens-Martinstahl St 50. 11 DIN 1611 mit mindestens 2750 kg/cm<sup>2</sup> Spannung an der Streckgrenze.

Die mittlere Wandstärke ergibt sich aus dem Wandquerschnitt  $F$  zwischen zwei Schaufelreihen von  $t_t = 60$  mm Abstand:

$$s_t = \frac{F}{t_t} = \frac{7,0 \cdot 6,0 - 2,2 \cdot 1,0 - 1,6 \cdot 1,0 - 0,5 \cdot 0,4}{6} = \frac{38}{6} = 6,33 \text{ cm.}$$

Mittlerer Wandungshalbmesser  $R_t = \frac{56,0 + 6,33}{2} = 31,16 \text{ cm}$ , ideeller Außenhalbmesser  $R_u = 34,33 \text{ cm}$ , mittlere Wandungsgeschwindigkeit  $v_t = \omega \cdot R_t = 314 \cdot 31,16 = 9790 \text{ cm/sek}$ .  
Mittlere Tangentialspannung beim Laufen:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma \cdot v_t^2}{g} = \frac{7,85 \cdot 9790^2}{1000 \cdot 981} = 767 \text{ kg/cm}^2.$$

Wirkung der Schaufeln. Teilung längs des Kreises vom Halbmesser  $R_1$ :

$$t = \frac{2 \pi \cdot R_1}{z} = \frac{2 \pi \cdot 34,33}{152} = 1,42 \text{ cm}.$$

Fliehkraft auf 1 cm Länge:

$$Z_{1 \text{ cm}} = \frac{Z_s}{t} = \frac{560}{1,42} = 394 \text{ kg/cm}.$$

Tangentialspannung:

$$\sigma_2 = \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_1}{s_t \cdot t_l} = \frac{394 \cdot 34,33}{6,33 \cdot 6} = 356 \text{ kg/cm}^2.$$

Summe der Spannungen:

$$\sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 = 767 + 356 = 1123 \text{ kg/cm}^2.$$

Von der Mindestspannung an der Streckgrenze werden somit  $\frac{1123}{2750} \cdot 100 = 40,8\%$  ausgenutzt.

Die mittlere Radialspannung im Ansatzquerschnitt der Zacken von  $e = 38 \text{ mm}$  Breite ist niedrig. Eigenfliehkraft des Zackens von  $7,8 \text{ cm}^2$  Querschnitt je Zentimeter Länge:

$$(Z_s)_{1 \text{ cm}} = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_z = \frac{7,8 \cdot 1 \cdot 7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 34 = 209 \text{ kg/cm};$$

$$\sigma_r = \frac{(Z_1)_{1 \text{ cm}} + (Z_s)_{1 \text{ cm}}}{e} = \frac{394 + 209}{3,8} = 159 \text{ kg/cm}^2.$$

Die radiale Erweiterung der Trommel beim Laufen beträgt:

$$\varrho = \alpha \cdot \sigma_z \cdot R_t = \frac{1123 \cdot 31,16}{2100000} = 0,0167 \text{ cm}.$$

## 2. Berechnung raschlaufender Scheiben.

Höhere Umfangsgeschwindigkeiten als  $100 \dots 120 \text{ m/sek}$  lassen sich an den rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen nur durch Scheiben ermöglichen. Sie gestatten  $300 \text{ m/sek}$  und mehr auszunutzen, weil die durch die Eigenfliehkraft niedrig beanspruchten mittleren Teile der Scheibe zur Aufnahme der Fliehkräfte der äußeren herangezogen werden. Die Ausbildung oder das Einsetzen der Beschauelung verlangen meist die Verstärkung des Außenrandes zu einem Kranz, die Befestigung auf der Welle vielfach auch die Ausbildung einer Nabe, so daß man an Scheibenrädern meist drei Teile unterscheiden kann, die auch bei der Berechnung oft für sich betrachtet werden, den Kranz, die eigentliche Scheibe und die Nabe.

Dementsprechend wurden auch die Bezeichnungen nach Abb. 2276 gewählt, diejenigen der eigentlichen Scheibe durch Zahlen:  $R_1, x_1$  und  $R_2, x_2$ , die des Kranzes durch das Bezeichnen  $k: R_k, b_k, s_k$ , die der Nabe durch  $n: R_n, b_n, s_n$  gekennzeichnet. Der Außenhalbmesser ist  $R_a$ , der Nabenbohrungshalbmesser  $R_o$  genannt. Zu dem beliebigen Durchmesser  $r$  gehört die Scheibenstärke  $x$ .

Die folgenden Berechnungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Scheiben symmetrisch zu ihrer Mittelebene ausgebildet sind und daß sich ihre Stärke so allmählich



ändert, daß man die Neigung der radialen Spannungen vernachlässigen kann. Dann entstehen beim Laufen nur radiale und tangentielle Zugspannungen, die man genügend genau über die Dicke der Scheibe gleichmäßig verteilt ansehen kann. Der Fliehkraft  $Z$  des Scheibenausschnittes  $A$  in Abb. 2277 wird durch den Zuwachs, den die eingezeichneten Tangential- und Radialspannungen  $\sigma_t$  und  $\sigma_r$  erfahren, das Gleichgewicht gehalten. Es gilt, die Größe dieser Spannungen in beliebigen Abständen von der Drehachse, also den Spannungsverlauf längs des Scheibenhalmessers zu ermitteln.

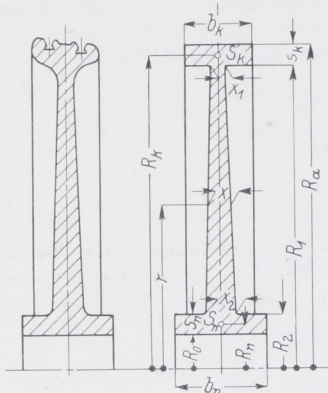


Abb. 2276. Bezeichnungen an Scheiben.

Zu dem Zweck denkt man sich aus einem Elementarringe der Scheibe vom Halbmesser  $r$  und der Stärke  $dr$  ein Element unter dem Winkel  $d\varphi$ , Abb. 2278, herausgeschnitten. Hat die Scheibe die Stärke  $x$ , so ist der Inhalt des Elements durch

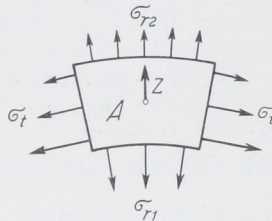


Abb. 2277.

seine Masse durch  $dV = r \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr$ , und die von ihm entwickelte Fliehkraft bei der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  durch:

$$dM = \frac{\gamma}{g} \cdot r \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr$$

$$dZ = dM \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr$$

gegeben. Wirken nun an den Begrenzungsflächen des Elements die Spannungen:

$\sigma_r$  an der Innenfläche 1, radial nach innen gerichtet, die um das Differential größere  $\sigma_r + d\sigma_r$  an der Fläche 2, radial nach außen und die einander gleichgroßen Tangentialspannungen  $\sigma_t$  an den Flächen 3 und 4, so erhält man die am Element angreifenden, in Abb. 2279 eingeschriebenen Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $T$ ,

wenn man die Spannungen mit den Flächen, an denen sie wirken, multipliziert. Das Gleichgewicht in Richtung des Halbmessers verlangt nun, daß:

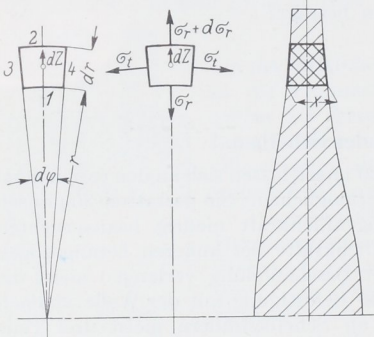


Abb. 2278.

Zur Berechnung der Spannungen in Scheiben.

$$\begin{aligned} -P_1 + P_2 - 2T \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + dZ &\approx -P_1 + P_2 \\ &- T \cdot d\varphi + dZ \\ &= -\sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot x + (\sigma_r + d\sigma_r)(x + dx)(r + dr) d\varphi \\ &- \sigma_t \cdot x \cdot dr \cdot d\varphi + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot d\varphi \cdot x \cdot dr = 0 \end{aligned}$$

sei. Vernachlässigt man die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung, so geht die Gleichung über in:

$$+\sigma_r \cdot dx \cdot r + \sigma_r \cdot x \cdot dr + d\sigma_r \cdot x \cdot r - \sigma_t \cdot x \cdot dr + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x \cdot dr = 0 \quad (761)$$

und führt zur ersten Hauptgleichung:

$$\frac{d(\sigma_r \cdot x \cdot r)}{dr} - \sigma_t \cdot x + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x = 0. \quad (762)$$

Die zweite Hauptgleichung gewinnt man auf Grund der Formänderungen, denen das Element und die Ringe unterliegen, aus denen die Scheibe zusammengesetzt gedacht

werden kann. Bei einer Dehnungszahl  $\alpha$  des Scheibenwerkstoffs würde die Radialspannung  $\sigma_r$  allein eine Dehnung in radialer Richtung  $\alpha \cdot \sigma_r$  erzeugen. Die tangential Spannung  $\sigma_t$  verringert dieselbe um  $\frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_t$ , wenn  $m$  die Querdehnungszahl ist. Mithin beträgt die radiale Gesamtdehnung:

$$\varepsilon_r = \alpha \left( \sigma_r - \frac{1}{m} \cdot \sigma_t \right). \quad (763)$$

Entsprechend wird die tangentiale:

$$\varepsilon_t = \alpha \left( \sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r \right). \quad (764)$$

Löst man die Gleichungen nach  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  auf, so folgt:

$$\sigma_r = \frac{m(m \cdot \varepsilon_r + \varepsilon_t)}{\alpha(m^2 - 1)}; \quad \sigma_t = \frac{m(\varepsilon_r + m \cdot \varepsilon_t)}{\alpha(m^2 - 1)}.$$

Der Elementarring vom Halbmesser  $r$  und Umfang  $U = 2\pi r$  nimmt beim Laufen einen größeren Durchmesser an. Beträgt die radiale Erweiterung  $\varrho$  cm, so ist sein innerer Umfang  $2\pi(r + \varrho)$  geworden und mithin um  $\lambda = 2\pi\varrho$  cm gewachsen. Die Tangentialdehnung läßt sich somit auch durch:

$$\varepsilon_t = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varrho}{2\pi r} = \frac{\varrho}{r} \quad (765) \quad P_2 \cdot (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (x + dx) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi$$

ausdrücken. In radialer Richtung nimmt die Erweiterung auf der Strecke  $dr$  um  $d\varrho$  zu; also ist die Radialdehnung:

$$\varepsilon_r = \frac{d\varrho}{dr}. \quad (766)$$

Diese Beziehungen gestatten, die Spannungen allein auf die Verschiebung  $\varrho$  in radialer Richtung zurückzuführen:

$$\sigma_r = \frac{m \left( m \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)}, \quad \sigma_t = \frac{m \left( \frac{d\varrho}{dr} + m \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)}. \quad (767)$$

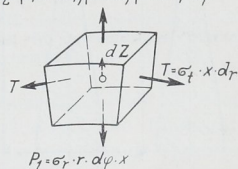


Abb. 2279.

In die erste Hauptgleichung eingeführt, wird:

$$\begin{aligned} d \left[ \left( m \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right) \cdot x \cdot r \right] - \left( \frac{d\varrho}{dr} + m \frac{\varrho}{r} \right) \cdot x + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x &= 0, \\ m \cdot d \left( \frac{d\varrho}{dr} \cdot x \cdot r \right) + d(\varrho \cdot x) - \frac{d\varrho}{dr} \cdot x - m \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot x + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch  $m \cdot x \cdot r$ :

$$\frac{1}{x \cdot r} \cdot d \left( \frac{d\varrho}{dr} \cdot x \cdot r \right) + \frac{1}{m} \cdot \frac{d(\varrho \cdot x)}{x \cdot r} - \frac{1}{m \cdot r} \cdot \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r = 0$$

läßt sich die Differentiation durchführen:

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr} \cdot \frac{d \ln x}{dr} + \frac{d\varrho}{dr} \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{m} \cdot \frac{d\varrho}{r \cdot dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{d \ln x}{dr} - \frac{1}{m \cdot r} \cdot \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} + \alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r = 0,$$

eine Beziehung, die mit  $\alpha \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 = A$  zur zweiten Hauptgleichung führt:

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr} \left( \frac{d \ln x}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \varrho \left( \frac{1}{m \cdot r} \cdot \frac{d \ln x}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + A \cdot r = 0. \quad (768)$$

a) Die Scheibe gleicher Festigkeit ohne Bohrung.

Die von de Laval angegebene und zuerst angewandte Scheibenform gestattet, alle Elemente der Scheibe mit der noch zulässig erachteten Beanspruchung auszunutzen, führt zu geringen Scheibengewichten und ermöglicht, die bei der betreffenden Spannung größtmögliche Geschwindigkeit zu erreichen. Mit  $\sigma_t = \sigma_r = \sigma$  und  $d\sigma_r = 0$  geht die erste Hauptgleichung (762) über in:

$$\sigma \frac{d(x \cdot r)}{dr} - \sigma \cdot x + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x = \sigma \cdot r \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot x = 0.$$

Zur Trennung der Veränderlichen multipliziert man die Gleichung mit  $\frac{dr}{\sigma \cdot r \cdot x}$ , wobei:

$$\frac{dx}{x} = - \frac{\gamma}{\sigma} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot r \cdot dr$$

wird und die Integration zu:

$$\ln x = - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

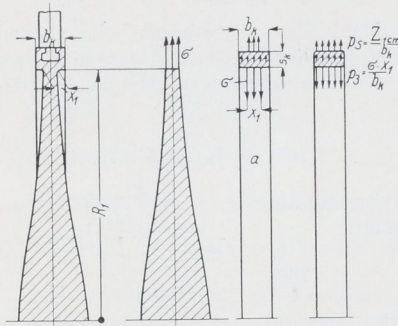


Abb. 2280.

Zur Berechnung der Scheibe gleicher Spannung.

führt.  $C$  findet man aus der Bedingung, daß die Scheibe nach Abb. 2280 am Übergang zum Kranz in der Entfernung  $R_1$  von der Drehachse eine bestimmte Stärke  $x_1$  haben muß, wie weiter unten des näheren ausgeführt ist, so daß  $x = x_1$  für  $r = R_1$  wird. Damit findet sich:

$$C = + \frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot R_1^2 + \ln x_1$$

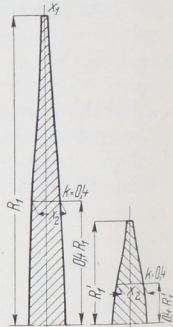


Abb. 2281.

Scheiben gleicher Festigkeit verschiedenen Durchmessers, aber für gleiche Umfangsgeschwindigkeit.

und

$$\ln x = + \ln x_1 + \frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} (R_1^2 - r^2)$$

oder

$$x = x_1 \cdot e^{\frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} (R_1^2 - r^2)} = x_1 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot v_1^2}{2g \cdot \sigma} (1 - k^2)} \tag{769}$$

In der letzten Form ist  $k = \frac{r}{R_1}$  und  $\omega \cdot R_1 = v_1$ , der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, gesetzt. Dabei zeigt sich, daß die Scheibenstärke  $x$  bei demselben Wert für  $k$ , d. h. in verhältnismäßigem Abstand von der Drehachse gleich groß ist, Abb. 2281.

Wie die Spannung, so ist auch die Dehnung an allen Stellen der Scheibe gleich groß:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \alpha \left( \sigma - \frac{1}{m} \cdot \sigma \right) = \alpha \frac{m-1}{m} \cdot \sigma, \tag{770}$$

so daß ein beliebiger Halbmesser  $r$  in radialer Richtung um:

$$q = \varepsilon_r \cdot r = \alpha \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot r \tag{771}$$

wächst.

Abb. 2282 bis 2285 geben die Form von Scheiben gleicher Festigkeit auf Grund der vorstehenden Ableitung berechnet wieder. Angenommen sind dabei:  $\sigma = 2000 \text{ kg/cm}^2$ , Scheibenstärke am äußeren Rande in der Entfernung  $R_1 = 1000 \text{ mm}$   $x_1 = 20 \text{ mm}$  und

bei Abb.	2282	2283	2284	2285
oder	$v_1 = 100$	200	300	400 m/sek Umfangsgeschwindigkeit
	$n = 955$	1900	2865	3820 Umläufe in der Minute.

Die Abbildungen zeigen deutlich, in welchem Maße die Scheiben an der Nabe mit steigender Umfangsgeschwindigkeit verstärkt werden müssen. Die Grenze der praktischen Ausführbarkeit liegt, sofern man nicht höhere Beanspruchungen zulassen will, nach Abb. 2285 bei etwa 400 m/sek, da in dem Falle die auf S. 1313 bei der Ableitung gemachte Voraussetzung, daß sich die Stärke der Scheibe so allmählich ändere, daß die Neigung der radialen Spannungen vernachlässigt werden kann, nur unvollkommen erfüllt ist.

Beispielweise ergibt sich für  $v = 300$  m/sek Umfangsgeschwindigkeit der Exponent von  $e$

$$\frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{v^2}{\sigma} (1 - k^2) = \frac{7,85}{2 \cdot 1000 \cdot 981} \cdot \frac{30000^2}{2000} (1 - k^2) = 1,800 (1 - k^2),$$

womit die folgende Zahlenreihe errechnet ist:

Abstand $r$	100	80	60	40	20	0 cm
$k$	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$1 - k^2$	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1
Scheibenstärke $x$	2,0	3,8	6,3	9,1	11,3	12,1 cm

Um nun den Anschluß des Kranzes an die Scheibe ohne zusätzliche Spannungen zu ermöglichen, muß sich der Kranz beim Laufen um den gleichen Betrag erweitern, um den sich der Rand der Scheibe vergrößert. Zum Aufstellen dieser Randbedingung betrachte man den Kranz nach Abb. 2280 als einen geschlossenen Ring oder als Stück einer Trommelwandung  $a$ , die 1. durch die Eigenfliehkraft, 2. durch die Fliehkkräfte der Beschauelung radial nach außen zu, 3. durch die in der Scheibe herrschende Spannung  $\sigma_r = \sigma$  auf der Breite  $x_1$  radial nach innen zu belastet ist. Die Wirkung der unter 1. und 2. genannten Kräfte läßt sich nach Formel (759) beurteilen, wenn sinngemäß für  $v_t$  die mittlere Kranzgeschwindigkeit  $v_k$ , für  $s_t$  die Kranzstärke  $s_k$  und für  $t_t$  die Kranzbreite  $b_k$  eingeführt wird. Die dritte Belastung denkt man sich in derselben Weise wie diejenige der Schaufeln gleichmäßig über die Kranzbreite  $b_k$  verteilt, wodurch sie einer radialen Belastung des Ringes  $p_3 = \frac{\sigma \cdot x_1}{b_k}$  kg/cm<sup>2</sup> gleichkommt. Ihr entspricht eine mittlere Druckspannung im Kranz  $\sigma_3 = -\frac{p_3 \cdot R_1}{s_k} = -\frac{\sigma \cdot x_1 \cdot R_1}{s_k \cdot b_k}$  kg/cm<sup>2</sup>, wie sich auf dem gleichen Wege nachweisen läßt, der für die Ermittlung von  $\sigma_2$  an Abb. 2274 benutzt wurde, so daß der Kranz insgesamt beansprucht ist mit:

$$\sigma_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{\gamma}{g} \cdot v_k^2 + \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_a}{s_k \cdot b_k} - \frac{\sigma \cdot x_1 \cdot R_1}{s_k \cdot b_k} \quad (772)$$

Nach Formel (760) erweitert er sich beim Laufen um  $\varrho_k = \alpha \cdot \sigma_k \cdot R_k$ . Durch Gleichsetzen mit der radialen Vergrößerung der Scheibe nach (771) mit  $r = R_1$  wird:

$$\sigma_k = \frac{m - 1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_1}{R_k} \quad (773)$$

woraus unter Beachtung der Beziehung (772):

$$x_1 = \frac{s_k \cdot b_k}{\sigma \cdot R_1} \left[ \frac{\gamma}{g} v_k^2 + \frac{Z_{1 \text{ cm}} \cdot R_a}{s_k \cdot b_k} - \frac{m - 1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_1}{R_k} \right] \quad (774)$$

folgt. Untere Grenzwerte für  $x_1$  sind allerdings durch die Bearbeitung und die Neigung der Scheibe zum Werfen gezogen. Stodola gibt für  $x_1$  mindestens 7...12 mm bei

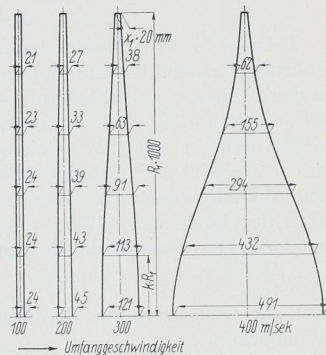


Abb. 2282 bis 2285. Scheiben gleicher Festigkeit für verschiedene Umfangsgeschwindigkeit. M. 1:20.

1 m und 25 . . . 40 mm bei 3 m Scheibendurchmesser an. Karraß [XXIX, 2] empfiehlt:

$$x_1 \geq 0,01 D, \quad (775)$$

also verhältnismäßig dem Scheibendurchmesser  $D$  zu nehmen.

Will man von einem bestimmten Wert für  $x_1$  ausgehen, so liefert die Gleichung (774) die Spannung  $\sigma$ , welche der Berechnung der Scheibe zugrunde zu legen ist:

$$\sigma = \frac{m \cdot R_k (\gamma \cdot v_k^2 \cdot s_k \cdot b_k + g \cdot Z_{1\text{cm}} \cdot R_a)}{g \cdot R_1 [m \cdot R_k \cdot x_1 + (m-1) \cdot s_k \cdot b_k]}, \quad (776)$$

**Beispiel 5.** Für die Beschauflung Abb. 2270 ist eine Scheibe gleicher Festigkeit ohne Bohrung für 3000 Umläufe/min zu berechnen. In der ersten Schaufelreihe sitzen  $z_1 = 334$ , in der zweiten  $z_2 = 382$  Schaufeln, die samt den zugehörigen Füllstücken Fliehkräfte von je  $Z_1 = 224$  und  $Z_2 = 186$  kg ausüben.

Bei dem in Abb. 2270 strichpunktiert gezeichneten Mindestquerschnitt des Kranzes von  $F_k = 13,1$  cm<sup>2</sup> Inhalt, mit einem Schwerpunkthalbmesser  $R_k = 56,7$  cm, einem Anschlußhalbmesser an die Scheibe  $R_1 = 55,5$  cm und der Mindeststärke der letzteren nach der Beziehung (775)  $x_1 \geq 0,01 D = 0,01 \cdot 1200 = 12$  mm, wenn man für  $D$  den mittleren Durchmesser der Beschauflung einsetzt, wird die mittlere Kranzgeschwindigkeit:

$$v_k = \omega \cdot R_k = 314 \cdot 56,7 = 17810 \text{ cm/sek}$$

und die Belastung der Kranzaußenfläche auf 1 cm des Umfangs bei  $R_a = 57,8$  cm Außenhalbmesser:

$$Z_{1\text{cm}} = \frac{z_1 \cdot Z_1 + z_2 \cdot Z_2}{2 \pi \cdot R_a} = \frac{334 \cdot 224 + 382 \cdot 186}{2 \pi \cdot 57,8} = 402 \text{ kg/cm}.$$

Führt man noch  $s_k \cdot b_k = F_k$  in Formel (776) ein, so wird die Spannung an der Anschlußstelle und damit in der eigentlichen Scheibe:

$$\sigma = \frac{m \cdot R_k (\gamma \cdot v_k^2 \cdot F_k + g \cdot Z_{1\text{cm}} \cdot R_a)}{g \cdot R_1 [m \cdot R_k \cdot x_1 + (m-1) \cdot F_k]} = \frac{3,3 \cdot 56,7 \left( \frac{7,85}{1000} \cdot 17810^2 \cdot 13,1 + 981 \cdot 402 \cdot 57,8 \right)}{981 \cdot 55,5 (3,3 \cdot 56,7 \cdot 1,2 + 2,3 \cdot 13,1)} = 736 \text{ kg/cm}^2.$$

Verstärkt man den Kranz dem stark ausgezogenen Umriß der Abb. 2270 entsprechend, so erhöht sich mit  $F'_k = 16$  cm<sup>2</sup>,  $R'_k = 56,5$ ,  $R'_1 = 54,8$  cm und  $v'_k = 17750$  cm/sek die Scheibenspannung bei der gleichen Stärke an der Anschlußstelle von 12 mm auf  $\sigma' = 818$  kg/cm<sup>2</sup>. Der Vergleich von  $\sigma'$  und  $\sigma$  zeigt, in welchem Maße der schwerere Kranz spannungserhöhend wirkt. (Der Kranz allein, als frei umlaufender Ring berechnet, würde einer tangentialen Fliehspannung von:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot v_k^2 = \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 17750^2 = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

ausgesetzt sein. Durch die Verbindung mit der Scheibe wird dieser Betrag nach (773) auf eine mittlere Tangentialspannung

$$\sigma_k = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma' \cdot \frac{R'_1}{R'_k} = \frac{2,3}{3,3} \cdot 818 \cdot \frac{54,8}{56,5} = 554 \text{ kg/cm}^2$$

herabgemindert.)

Wählt man in Rücksicht auf größere Steifigkeit der Scheibe  $x'_1 = 15$  mm, entsprechend der stark umrissenen Form in Abb. 2270 und 2286, so sinkt die Spannung wieder auf  $\sigma'' = 673$  kg/cm<sup>2</sup>. Die Scheibenstärken in verschiedenen Abständen nach Formel (769) geben die folgenden Zahlenreihen an:

	$r = 0$	10	20	30	40	50 cm
bei $x_1 = 12$ mm und $F_k = 13$ cm <sup>2</sup>	$x = 62,7$	59,4	50,6	38,7	26,6	16,0 mm
bei $x'_1 = 15$ mm und $F'_k = 16,0$ cm <sup>2</sup>	$x' = 87,4$	82,4	69,1	51,5	34,2	20,2 mm.

Die Ableitung der Formel (769) setzt eine volle Scheibe ohne Bohrung voraus. Konstruktiv hat de Laval diese Bedingung durch die Befestigung der Wellenschenkel an Rädern hoher Umfangsgeschwindigkeit nach Abb. 2219 erfüllt, indem er zwei be-

sondere Ränder für die Gewindelöcher der Anschlußschrauben vorsah. Bohrungen selbst kleinsten Durchmessers erhöhen die örtlichen Spannungen auf mindestens das doppelte, wie für die Scheiben gleicher Stärke auf S. 1323 nachgewiesen wird. An der Thyssen-Röder-Turbine Abb. 2225 sind zum Ausgleich dort, wo die Anschlußschrauben der Trommel und des Wellenendes sitzen, Verstärkungen der Scheiben vorgesehen, die gleichzeitig der gegenseitigen Zentrierung der Teile dienen. (Die in Abb. 2219 ange deutete Eindrehung unter dem Kranze bezweckt, dort die größte Spannung entstehen zu lassen, damit bei etwaigen Überbeanspruchungen nur der Kranz wegfliegt, nicht aber die ganze Scheibe in Mitleidenschaft gezogen wird und mit ihrer gesamten Wucht zur Wirkung kommt.)

b) Die Scheibe gleicher Festigkeit mit Nabe.

Soll die Scheibe eine Bohrung bekommen, so muß die Nabe derart bemessen sein, daß, ähnlich wie oben am Kranz gezeigt, die vorgeschriebene Radialspannung an der Übergangsstelle bei gleicher radialer Vergrößerung der Scheibe und der Nabe vorhanden ist. Die Nabe, als geschlossener Ring betrachtet, steht:

1. unter der Wirkung der Eigenfliehkraft, ist
2. durch die in der Scheibe herrschende Radialspannung  $\sigma_r = \sigma$  auf der Breite  $x_2$ , Abb. 2289, radial nach außen zu belastet und kann

3. noch einer Radialpressung an der Nabinnenfläche  $p_0$  ausgesetzt sein, die beim Zusammenbau der Scheibe mit der Welle benutzt wird, um das Losewerden der Scheibe beim Laufen zu vermeiden.

Bei der im Verhältnis zum Bohrungshalbmesser meist nicht un beträchtlichen Nabenwandstärke ist es nun nicht mehr zulässig, mit der mittleren Tangentialspannung wie am Kranz zu rechnen. Das würde zu einer wesentlichen Unterschätzung der größten Spannung an der Innenfläche der Nabe, einer Überschätzung an der Anschlußstelle der Scheibe führen. Nimmt man in erster An näherung hyperbolische Spannungsverteilung in der Nabenwand nach Linie ABC in Abb. 2287 an, so ergeben sich die Spannungen an der Innen- und Außenfläche  $\sigma_0$  und  $\sigma_2$  aus der mittleren Spannung  $\sigma_n$ :

$$\sigma_0 = \sigma_n \cdot \frac{R_n}{R_0} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \sigma_n \cdot \frac{R_n}{R_2}; \quad (777)$$

vgl. hierzu die Ausführungen auf S. 1280 unten und 1281. Damit läßt sich die Ableitung der Formel auf die mittlere Spannung  $\sigma_n$  zurückführen; sie erfolgt auf dem gleichen Wege wie am Kranz.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 2288 ergibt sich nach Abb. 2289:

1. eine mittlere Fliehschpannung  $\sigma_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_n^2$ , Zur Berechnung der Nabe.

2. infolge der Radialspannung  $\sigma$  an der Ansatzstelle der Scheibe von der Breite  $x_2$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} \cdot \frac{R_2}{s_n},$$

wenn die Belastung  $\sigma \cdot x_2$  auf der Nabenbreite  $b_n$  gleichmäßig verteilt in Höhe von  $\frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}$  angenommen wird,

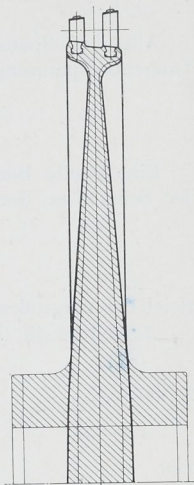


Abb. 2286. Scheiben gleicher Festigkeit zum Kranz Abb. 2270. M. 1:8.

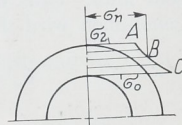


Abb. 2287. Zur Berechnung der Nabe.

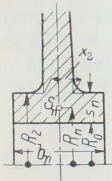


Abb. 2288. Bezeichnungen an der Nabe von Scheiben.

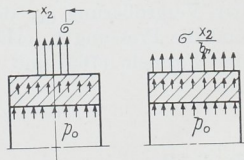


Abb. 2289.

3. infolge der radialen an der Innenfläche vom Halbmesser  $R_0$  wirkenden Pressung  $p_0$ :

$$\sigma_3 = \frac{p_0 \cdot R_0}{s_n}.$$

Alle drei Spannungen sind Zugspannungen. Insgesamt wird somit die mittlere Tangentialspannung in der Nabe:

$$\sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_n^2 + \frac{\sigma \cdot x_2 \cdot R_2}{b_n \cdot s_n} + \frac{p_0 \cdot R_0}{s_n}. \quad (778)$$

Eine zweite Beziehung ergibt sich aus der Bedingung, daß die radiale Erweiterung der Scheibe an der Anschlußstelle nach Formel (771):

$$\varrho_2 = \alpha \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot R_2 \quad (779)$$

gleich der Vergrößerung der Nabe sein muß. Die letztere beträgt

$$\alpha \cdot \sigma_2 \cdot R_2 = \alpha \cdot \sigma_n \cdot \frac{R_n}{R_2} \cdot R_2 = \alpha \cdot \sigma_n \cdot R_n,$$

so daß:

$$\frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot R_2 = \sigma_n \cdot R_n$$

oder

$$\frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_2}{R_n} = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_n^2 + \frac{\sigma \cdot x_2 \cdot R_2}{b_n \cdot s_n} + \frac{p_0 \cdot R_0}{s_n} \quad (780)$$

sein muß. Falls der Bohrungshalbmesser  $R_0$  gegeben ist und die Nabenstärke  $s_n$  angenommen wird, folgt daraus die Nabenbreite:

$$b_n = \frac{m \cdot g \cdot x_2 \cdot R_2 \cdot R_n \cdot \sigma}{(m-1) \cdot g \cdot s_n \cdot R_2 \cdot \sigma - m \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot s_n \cdot R_n^3 - m \cdot g \cdot p_0 \cdot R_0 \cdot R_n}. \quad (781)$$

Die Spannung an der Nabeninnenfläche wird:

$$\sigma_0 = \sigma_{\max} = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_2}{R_0}. \quad (782)$$

Genauer läßt sich die Spannungsverteilung, insbesondere die größte Spannung in der Nabenbohrung ermitteln, wenn man die Nabe als eine Scheibe gleicher Stärke  $b_n$  betrachtet und nach den auf S. 1326 abgeleiteten Formeln berechnet, wie Beispiel 9 zeigt.

Das Schrumpfmaß, mit dem die Scheibe aufzuziehen ist, ergibt sich aus der Summe der Vergrößerung  $\varrho_0$ , die der Bohrungshalbmesser durch die Tangentialspannung  $\sigma_0$  und die Pressung  $p_0$  erfährt und der Zusammendrückung  $\varrho_w$  der Welle durch  $p_0$ . Nach den Formeln (765) und (764) ist:

$$\varrho_0 = \varepsilon_t \cdot R_0 = \alpha \left( \sigma_0 + \frac{p_0}{m} \right) R_0 \quad \text{und} \quad \varrho_w = \alpha \left( p_0 - \frac{p_0}{m} \right) R_0,$$

da die Pressung  $p_0$  eine gleichhohe tangential Druckspannung an der Wellenoberfläche erzeugt. Somit wird das beim Aufziehen anzuwendende Schrumpfmaß, bezogen auf den Bohrungsdurchmesser:

$$2(\varrho_0 + \varrho_w) = 2\alpha \cdot (\sigma_0 + p_0) \cdot R_0. \quad (783)$$

**Beispiel 6.** Zu der stark ausgezogenen Form der Scheibe gleicher Festigkeit, Abb. 2286, soll die Breite der Nabe von  $2R_0 = 150$  mm Bohrungsdurchmesser und  $s_n = 70$  mm Wandstärke näherungsweise berechnet werden, wenn die Zusammenbauspannung bei 3000 Umläufen/min noch  $p_0 = 50$  kg/cm<sup>2</sup> beträgt.

Mit  $R_n = 75 + 35 = 110$  mm mittlerem und  $R_2 = 75 + 70 = 145$  mm äußerem Halbmesser der Nabe wird  $x_2 = 78$  mm und

$$b_n = \frac{3,3 \cdot 981 \cdot 7,8 \cdot 14,5 \cdot 11 \cdot 673}{2,3 \cdot 981 \cdot 7,0 \cdot 14,5 \cdot 673 - 3,3 \cdot \frac{785}{1000} \cdot 314^2 \cdot 7,0 \cdot 11^3 - 3,3 \cdot 981 \cdot 50 \cdot 7,5 \cdot 11} = 23,2 \text{ cm.}$$

An der Nabeninnenfläche herrschen:

$$\sigma_0 = \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot \frac{R_2}{R_0} = \frac{2,3}{3,3} \cdot 673 \cdot \frac{14,5}{7,5} = 907 \text{ kg/cm}^2$$

Spannung. Das Schrumpfmaß beträgt:

$$2\alpha(\sigma_0 + p_0) \cdot R_0 = \frac{2(907 + 50) \cdot 7,5}{2100000} = 0,0068 \text{ cm.}$$

c) Die Scheibe gleicher Stärke.

$x = \text{konst.}$  und  $d \ln x = 0$  läßt die zweite Hauptgleichung (768) übergehen in:

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\varrho}{r^2} + A \cdot r = 0$$

oder

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(\varrho \cdot r)}{dr} \right] = -A \cdot r,$$

(weil

$$\frac{1}{r} \frac{d(\varrho \cdot r)}{dr} = \frac{1}{r} \left( r \cdot \frac{d\varrho}{dr} + \varrho \right) = \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}$$

und

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right] = \frac{1}{dr} \left[ \frac{d^2 \varrho}{dr^2} - \frac{d\varrho \cdot dr^2}{dr^2} + \frac{d\varrho}{r} - \varrho \cdot \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2}$$

ist, da das zweite Glied in der Klammer unendlich klein höherer Ordnung ist.)

Die Gleichung läßt sich integrieren und führt zu:

$$\frac{1}{r} \frac{d(\varrho \cdot r)}{dr} = -A \cdot \frac{r^2}{2} + C_1$$

und

$$d(\varrho \cdot r) = -\frac{A}{2} \cdot r^3 \cdot dr + C_1 \cdot r \cdot dr$$

$$\varrho \cdot r = -\frac{A}{8} \cdot r^4 + C_1 \cdot \frac{r^2}{2} + C_2 \quad \text{oder} \quad \varrho = -\frac{A \cdot r^3}{8} + \frac{C_1 \cdot r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Mit

$$\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{3}{8} A \cdot r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$$

und

$$\frac{\varrho}{r} = -\frac{A}{8} \cdot r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}$$

wird nach den Beziehungen (767) die Radialspannung:

$$\sigma_r = \frac{m \left( m \cdot \frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)} = \frac{m}{\alpha(m^2 - 1)} \left[ -\frac{A \cdot r^2}{8} (3m + 1) + \frac{C_1}{2} \cdot (m + 1) - \frac{C_2}{r^2} (m - 1) \right], \quad (784)$$

die Tangentialspannung

$$\sigma_t = \frac{m \left( \frac{d\varrho}{dr} + m \cdot \frac{\varrho}{r} \right)}{\alpha(m^2 - 1)} = \frac{m}{\alpha(m^2 - 1)} \left[ -\frac{A \cdot r^2}{8} (m + 3) + \frac{C_1}{2} (m + 1) + \frac{C_2}{r^2} (m - 1) \right], \quad (785)$$

$C_1$  und  $C_2$  finden sich aus den von den jeweiligen Umständen abhängigen Randbedingungen.



$\alpha$ ) Die Scheibe gleicher Stärke ohne Bohrung.

An einer vollen Blechscheibe, wie sie z. B. an Wasserbremsen vorkommen, wird am äußeren Rand, also für  $r = R_1$ ,  $\sigma_r = 0$ , im Mittelpunkt der Scheibe, also für  $r = 0$ ,  $\sigma_t = \sigma_r$ . Diese Bedingungen, eingesetzt in die Gleichungen 784 und 785, führen zu:

$$0 = -\frac{A \cdot R_1^2}{8} (3m+1) + \frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{r^2} (m-1)$$

und

$$\frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{0} (m-1) = \frac{C_1}{2} (m+1) + \frac{C_2}{0} (m-1)$$

oder

$$C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{A}{4} R_1^2 \frac{3m+1}{m+1}.$$

Damit wird die Spannung im Abstände  $r$  von der Drehachse in radialer Richtung:

$$\sigma_r = \frac{A \cdot m}{\alpha (m^2 - 1)} \left[ -\frac{r^2}{8} (3m+1) + \frac{R_1^2}{8} (m+1) \right],$$

$$\sigma_r = \frac{A \cdot m (3m+1)}{8 \alpha (m^2 - 1)} (R_1^2 - r^2) = \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (3m+1) (R_1^2 - r^2), \quad (786)$$

in tangentialer:

$$\sigma_t = \frac{A \cdot m}{8 \alpha (m^2 - 1)} [(3m+1) R_1^2 - (m+3) r^2] = \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1) R_1^2 - (m+3) r^2]. \quad (787)$$

Die größte herrscht in der Mitte der Scheibe:

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{t \max} = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_1^2. \quad (788)$$

**Beispiel 7.** An einer Scheibe von 1200 mm Durchmesser von beliebiger, aber durchweg gleicher Stärke treten bei  $n = 3000$  Umläufen/min die folgenden Spannungen auf: am äußeren Umfang bei  $r = R_1 = 60$  cm:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_t = \frac{m-1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_1^2 = \frac{2,3}{4 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 60^2 = 495 \text{ kg/cm}^2,$$

in der Mitte der Scheibe bei  $r = 0$ :

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_1^2 = \frac{10,9}{8 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 60^2 = 1175 \text{ kg/cm}^2.$$

$\beta$ ) Die Scheibe gleicher Stärke mit Bohrung.

Für eine freiumlaufende Scheibe gleicher Stärke mit einer Bohrung vom Halbmesser  $R_2$  lauten die Randbedingungen:

für  $r = R_1$ ,  $\sigma_r = 0$ , für  $r = R_2$ ,  $\sigma_r = 0$ . Durch Einführen in die Beziehung (784):

$$-\frac{A}{8} R_1^2 (3m+1) + \frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{R_1^2} (m-1) = 0,$$

$$-\frac{A}{8} R_2^2 (3m+1) + \frac{C_1}{2} (m+1) - \frac{C_2}{R_2^2} (m-1) = 0$$

findet man:

$$C_1 = \frac{A}{4} \frac{3m+1}{m+1} (R_1^2 + R_2^2) \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{A}{8} \frac{3m+1}{m-1} \cdot R_1^2 \cdot R_2^2;$$

$$\sigma_r = \frac{A \cdot m (3m+1)}{8 \alpha (m^2 - 1)} \left( R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} - r^2 \right) = \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left( R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} - r^2 \right), \quad (789)$$

$$\sigma_t = \frac{A \cdot m}{8 \alpha (m^2 - 1)} \left[ (3m+1) \left( R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right) - (m+3) r^2 \right]$$

$$= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left[ (3m+1) \left( R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right) - (m+3) r^2 \right]. \quad (790)$$

Zahlenmäßig ist  $\sigma_t$  stets größer als  $\sigma_r$ . Am Rand der Bohrung, also für  $r = R_2$ , entsteht die größte Tangentialspannung:

$$\begin{aligned}\sigma_{t\max} &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)(2R_1^2 + R_2^2) - (m+3)R_2^2] \\ &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)R_1^2 + (m-1)R_2^2].\end{aligned}\quad (791)$$

Im Vergleich mit der Tangentialspannung in der vollen Scheibe nach Formel (788):

$$\sigma'_t = \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (3m+1) \cdot R_1^2$$

ist sie rund doppelt so groß, wenn der Bohrungshalbmesser  $R_2$  klein ist. Sie wächst weiter an, wenn  $R_2$  zunimmt.

Wird die Scheibe des Beispiels 7 mit einer Bohrung von 150 mm Durchmesser versehen, so wächst die Tangentialspannung am äußeren Rande auf 532, am Bohrungsumfang auf 2355 kg/cm<sup>2</sup>.

Nach Kirsch [III, 4] steigt die Spannung am Umfang einer Bohrung in einer unbegrenzten ebenen Platte auf das Doppelte, wenn die Platte nach allen Richtungen gleichmäßig gespannt ist und sogar auf das Dreifache, wenn die Platte nur einer gleichmäßigen Längsspannung in einer bestimmten Richtung ausgesetzt ist. Dieser Höchstwert tritt in den Endpunkten des zur Zugrichtung senkrechten Bohrungsdurchmessers auf, während in den Endpunkten des zur Zugrichtung parallelen Durchmessers ein der Zugspannung gleich großer tangentialer Druck auftritt. Wendet man nach Stodola dieses Ergebnis auf ein kleines Loch an einer beliebigen Stelle einer umlaufenden Scheibe an, die unter der radialen Spannung  $\sigma_r$ , unter der tangentialen  $\sigma_t$  steht, so kann man in erster Annäherung in den Endpunkten des radial gerichteten Bohrungsdurchmessers eine Spannung erwarten:

$$\sigma' = 3\sigma_t - \sigma_r, \quad (792)$$

in den Endpunkten des dazu senkrechten Bohrungsdurchmessers eine solche von:

$$\sigma'' = 3\sigma_r - \sigma_t. \quad (793)$$

Bohrungen an irgend einer Stelle einer Scheibe erhöhen also die Spannung am Bohrungsumfange auf mindestens das Doppelte derjenigen an derselben Stelle der vollen Scheibe. Ist eine der beiden Spannungen klein, so steigt die größte Beanspruchung am Lochrande auf das Dreifache der anderen.

#### γ) Die Scheibe gleicher Stärke mit Randbelastung; Berechnung raschlaufender Dynamoanker.

Unterliegt eine Scheibe gleicher Stärke radialen Belastungen am äußeren oder inneren Rande in Höhe von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  kg/cm<sup>2</sup>, so entstehen Spannungen, die sich aus den Grundgleichungen (784) und (785) ergeben, wenn man  $\omega$  und damit  $A = 0$ , ferner am äußeren Rande, also für  $r = R_1$ ,  $\sigma_r = \sigma_1$ , am Innenrande, also für  $r = R_2$ ,  $\sigma_r = \sigma_2$  einsetzt und  $C_1$  und  $C_2$  bestimmt:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{m}{\alpha(m^2-1)} \left[ \frac{C_1}{2}(m+1) - \frac{C_2}{R_1^2}(m-1) \right] \left| \begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \end{array} \right| \\ \sigma_2 &= \frac{m}{\alpha(m^2-1)} \left[ \frac{C_1}{2}(m+1) - \frac{C_2}{R_2^2}(m-1) \right] \left| \begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \end{array} \right| - 1 \\ C_1 &= \frac{2\alpha(m-1)}{m} \frac{\sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}; \quad C_2 = \frac{\alpha(m+1)}{m} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}.\end{aligned}$$

Damit wird die Radialspannung in der Entfernung  $r$  von der Achse:

$$\sigma_r = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[ \sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot R_2^2 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right]. \quad (794)$$

die Tangentialspannung:

$$\sigma_t = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[ \sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot R_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r^2} \right]. \quad (795)$$

Die größte Spannung bildet sich an der Lochleibung aus:

$$\sigma_{t\max} = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[ 2 \sigma_1 \cdot R_1^2 - \sigma_2 \cdot (R_1^2 + R_2^2) \right]. \quad (796)$$

Nach den vorstehend entwickelten Formeln läßt sich die Beanspruchung der oft langen, manchmal auch aus mehreren Platten nach Abb. 2290 zusammengesetzten, raschlaufenden Dynamoanker berechnen, wenn man der Betrachtung eine Scheibe von 1 cm Stärke zugrunde legt, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 8.** Die Beanspruchung des Ankers, Abb. 2268, ist bei der normalen Drehzahl  $n = 333/\text{min}$  und bei der Durchgangdrehzahl  $1,8 n = 600/\text{min}$  zu ermitteln. Die sechs geblätterten und durch Schrauben zusammengehaltenen Pole sind mit Schwalbenschwänzen in fünf den Ankerkern bildenden Stahlplatten befestigt. (Das Beispiel entspricht etwa dem Anker des Wechselstromgenerators des Spullerseekraftwerks nach der Zeitschrift „Elektrotechnik und Maschinenbau“ 1927, S. 985.)

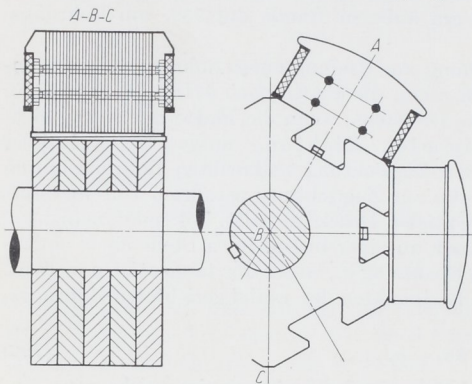


Abb. 2290. Dynamoanker.

Winkelgeschwindigkeit bei der normalen Drehzahl  $\omega = 34,87/\text{sek}$ . Beim Durchgehen der Maschine steigen sämtliche von Fliehkräften abhängigen Spannungen auf das  $1,8^2 = 3,24$ fache, wie jeweils eingeklammert angegeben ist.

Beanspruchung der Pole. Das Gewicht einer 1 cm starken, aus den Polen

herausgeschnittenen Scheibe außerhalb Ebene  $I$  einschließlich der Wicklung errechnet sich, wenn man auch für die letztere das Einheitsgewicht des Stahls  $7,85 \text{ kg}/\text{dm}^3$  einsetzt, zu 38,6 kg. Bei dem Schwerpunktabstand von der Drehachse  $R_p = 108 \text{ cm}$  beträgt die Fliehkraft:

$$(Z_1)_{1\text{cm}} = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R_p = \frac{38,6}{981} \cdot 34,87^2 \cdot 108 = 5170 \text{ kg}/\text{cm}$$

und die Beanspruchung des Kehlquerschnitts  $I$ :

$$\sigma_{zI} = \frac{(Z_1)_{1\text{cm}}}{a_I} = \frac{5170}{24} = 216 \text{ kg}/\text{cm}^2 \quad (700 \text{ kg}/\text{cm}^2).$$

Der Polfuß wiegt 4,36 kg/cm Breite, hat 69,2 cm Schwerpunkthalbmesser und entwickelt:

$$(Z_2)_{1\text{cm}} = \frac{4,36}{981} \cdot 34,87^2 \cdot 69,2 = 375 \text{ kg}/\text{cm}$$

Fliehkraft. Die Summe beider Kräfte  $(Z_p)_{1\text{cm}} = 5545 \text{ kg}/\text{cm}$  zerlegt sich in Flankendrucke längs der Schwalbenschwanznut in Höhe von:

$$K_{1\text{cm}} = \frac{(Z_p)_{1\text{cm}}}{2 \cos(\psi - \varrho)} = \frac{5545}{2 \cos(60^\circ - 8^\circ)} = 4500 \text{ kg}/\text{cm}.$$

Flächendruck an den Flanken (749):

$$p = \frac{K_{1\text{cm}} \cdot \cos \varrho}{b_1} = \frac{4500 \cdot \cos 8^\circ}{13,5} = 330 \text{ kg}/\text{cm}^2 \quad (1070 \text{ kg}/\text{cm}^2).$$

Beanspruchung der Zacken. In den Schnitten *II* der Nebenabbildung 2268 (*a*) entstehen durch die in der Mitte der Nutflanken vereinigt gedachten Drucke und durch die Eigenfliehkraft der Zackennasen, die sich zu  $K_{1\text{cm}} = 248 \text{ kg/cm}$  ergab, nach den Formeln (750) und (751) mit  $\frac{K}{l} = K_{1\text{cm}}$  und  $\frac{Z'}{l} = Z'_{1\text{cm}}$  die folgenden Beanspruchungen:

$$\sigma_b + \sigma_z = \frac{6 K_{1\text{cm}} \cdot a}{h^2} + \frac{K_{1\text{cm}} \cdot \sin \beta}{h} = \frac{6 \cdot 4500 \cdot 10}{29,6^2} + \frac{4500 \cdot \sin 10^\circ}{29,6} = 305 + 27 = 332 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_b + \sigma'_z = \frac{6 Z'_{1\text{cm}} \cdot c}{h^2} + \frac{Z'_{1\text{cm}} \cdot \sin \gamma}{h} = \frac{6 \cdot 248 \cdot 7,0}{29,6^2} + \frac{248 \cdot \sin 43^\circ}{29,6} = 12 + 6 = 18 \text{ kg/cm}^2,$$

in Summe  $350 \text{ kg/cm}^2$  ( $1134 \text{ kg/cm}^2$ ). Die Flankendrucke setzen sich zu einer Resultierenden:

$$Q_{1\text{cm}} = 2 K_{1\text{cm}} \cdot \cos(\psi - \varrho - \varphi/2) = 2 \cdot 4500 \cdot \cos(60^\circ - 8^\circ - 30^\circ) = 8350 \text{ kg/cm}$$

zusammen.

Durch die von dem  $8,46 \text{ kg/cm}$  schweren Zacken an einem Halbmesser von  $76,5 \text{ cm}$  entwickelte Fliehkraft:

$$Z_3 = \frac{8,46}{981} \cdot 34,87^2 \cdot 76,5 = 802 \text{ kg/cm}$$

wird der Kehlquerschnitt mit einer mittleren Zugspannung:

$$\sigma_{z3} = \frac{(Q + Z_3)_{1\text{cm}}}{e} = \frac{8350 + 802}{30} = 305 \text{ kg/cm}^2 \quad (988 \text{ kg/cm}^2)$$

beansprucht.

Läuferkern. In erster Annäherung darf er als eine durchbohrte Scheibe gleicher Stärke vom Außenhalbmesser  $R_1 = 620$  und Bohrungshalbmesser  $R_2 = 260 \text{ mm}$  angesehen werden, die der Eigenfliehkraft und einer gleichmäßig auf dem äußeren Umfang verteilten Belastung

$$\sigma_1 = \sigma_{z3} \cdot \frac{e}{\varphi \cdot R_1} = 305 \cdot \frac{30}{\pi/3 \cdot 62} = 141 \text{ kg/cm}^2$$

ausgesetzt ist.

Tangentialspannung am Umfang der Bohrung durch die Fliehkraft:

$$\begin{aligned} \sigma_{t1} &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)(2R_1^2 + R_2^2) - (m+3)R_2^2] \\ &= \frac{1}{8 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 34,87^2 [10,9(2 \cdot 62^2 + 26^2) - 6,3 \cdot 26^2] = 32 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

durch die Pole:

$$\sigma_{t2} = \frac{2 \sigma_1 \cdot R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{2 \cdot 141 \cdot 62^2}{62^2 - 26^2} = 342 \text{ kg/cm}^2.$$

Berücksichtigt man die örtliche Wirkung der Pole nach H. Schmalz [XXIX, 9], so tritt eine weitere Steigerung der Spannungen in den Symmetrieebenen der Zacken um  $27 \text{ kg/cm}^2$  ein, so daß die höchste Beanspruchung längs der Bohrungswandung  $32 + 342 + 27 = 401$  ( $1300$ )  $\text{kg/cm}^2$  wird.

Preßt man den Anker auf die Welle auf oder schrumpt man beide zusammen, derart, daß bei der normalen Umlaufgeschwindigkeit noch eine Zusammenbauspannung von  $\sigma_2 = -50 \text{ kg/cm}^2$  zwischen beiden herrscht, so erhöht sich die Spannung noch um:

$$\sigma_{t3} = -\frac{\sigma_2 (R_1^2 + R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{50(62^2 + 26^2)}{62^2 - 26^2} = 71 \text{ kg/cm}^2.$$

Beim Durchgehen ist die Erweiterung der Bohrung größer als das Schrumpfmaß, wie sich ohne weiteres nach der beträchtlichen Zunahme der Tangentialspannungen um  $1300 - 472 = 828 \text{ kg/cm}^2$  gegenüber  $\sigma_{t3} = 71 \text{ kg/cm}^2$  erwarten läßt.

Nach der vorstehenden Rechnung tritt zahlenmäßig die höchste Beanspruchung des Ankers längs der Bohrungswandung auf; in Wirklichkeit ist sie aber infolge der Kerbwirkung in der Kehle an der Ansatzstelle der Zacken zu suchen.

δ) Berechnung der Nabe als Scheibe gleicher Stärke.

Die genauere Berechnung der Nabe als Scheibe gleicher Stärke am Rad gleicher Festigkeit, Abb. 2286, bedingt folgenden Rechnungsgang. Die Zunahme des Außenhalbmessers der Nabe ist unter Berücksichtigung der gleichmäßig nach Abb. 2289 auf der Nabe verteilten Radialspannung  $\sigma_{r_n} = \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}$  unter Bezugnahme auf die Formeln (765) und (764):

$$\rho_2 = \varepsilon_t \cdot R_2 = \alpha \left( \sigma_{t_n} - \frac{1}{m} \sigma_{r_n} \right) \cdot R_2.$$

Derjenigen der Scheibe nach (779) gleichgesetzt, führt sie zu der Bedingung:

$$\alpha \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \sigma \cdot R_2 = \alpha \left( \sigma_{t_n} - \frac{1}{m} \sigma_{r_n} \right) \cdot R_2; \quad \frac{m-1}{m} \cdot \sigma = \sigma_{t_n} - \frac{1}{m} \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}.$$

Die Tangentialspannung  $\sigma_{t_n}$  an der Nabenaußenfläche setzt sich zusammen aus der durch die Fliehkraft erzeugten nach Beziehung (790) und der durch die radial wirkenden Belastungen nach (795). Unter Austausch von  $R_2$  gegen  $R_0$  und von  $R_1$  und  $r$  gegen  $R_2$  sowie mit  $\sigma_1 = \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n}$ ,  $\sigma_2 = -p_0$  nach Abb. 2289 wird:

$$\begin{aligned} \sigma_{t_n} &= \frac{1}{8m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)(R_2^2 + R_0^2 + R_0^2) - (m+3) \cdot R_2^2] \\ &+ \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[ \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} \cdot R_2^2 + p_0 \cdot R_0^2 + \left( \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} + p_0 \right) \cdot R_0^2 \right] \\ &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1)R_2^2 + (3m+1)R_0^2] + \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[ \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} (R_2^2 + R_0^2) + 2p_0 \cdot R_0^2 \right]. \end{aligned}$$

Damit geht die oben abgeleitete Bedingung für die gleiche Formänderung an der Anschlußstelle über in:

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{m} \cdot \sigma &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1)R_2^2 + (3m+1)R_0^2] \\ &+ \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[ \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} (R_2^2 + R_0^2) + 2p_0 \cdot R_0^2 \right] - \frac{\sigma \cdot x_2}{m \cdot b_n}. \end{aligned} \quad (797)$$

Die Auflösung nach  $b_n$  liefert:

$$b_n = \frac{4g \cdot x_2 [(m-1)R_2^2 + (m+1)R_0^2] \cdot \sigma}{4g(m-1)(R_2^2 - R_0^2) \cdot \sigma - \gamma \cdot \omega^2 [(m-1)R_2^2 + (3m+1)R_0^2] \cdot (R_2^2 - R_0^2) - 8m \cdot g \cdot R_0^2 \cdot p_0} \quad (798)$$

Auf das Beispiel 6 angewendet, wird:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4 \cdot 981 \cdot 7,8 (2,3 \cdot 14,5^2 + 4,3 \cdot 7,5^2) \cdot 673}{4 \cdot 981 \cdot 2,3 (14,5^2 - 7,5^2) \cdot 673 - \frac{7,85}{1000} \cdot 314^2 (2,3 \cdot 14,5^2 + 10,9 \cdot 7,5^2) (14,5^2 - 7,5^2) - 8 \cdot 3,3 \cdot 981 \cdot 7,5^2 \cdot 3} \\ &= 20,3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

also 2,9 cm geringer als auf S. 1321 berechnet.

Die größte Tangentialspannung an der Innenfläche ergibt sich aus der Summe der Spannungen nach (791) und (796):

$$\begin{aligned} \sigma_{t_{\max}} &= \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1)R_2^2 + (m-1)R_0^2] + \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[ 2 \frac{\sigma \cdot x_2}{b_n} R_2^2 + p_0 (R_2^2 + R_0^2) \right] \\ &= \frac{1}{4 \cdot 3,3} \cdot \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 (10,9 \cdot 14,5^2 + 2,3 \cdot 7,5^2) \\ &+ \frac{1}{14,5^2 - 7,5^2} \left[ 2 \cdot \frac{673 \cdot 7,8}{20,3} \cdot 14,5^2 + 50 (14,5^2 + 7,5^2) \right] = 214 + 793 = 1007 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Zylindrische Naben erweitern sich nicht gleichmäßig, sondern nach Abb. 2291 in der Mitte stärker und sind infolgedessen dort auch höher beansprucht. Der Ausgleich ist entweder nach Abb. 2292 oder durch Verstärken oder Verlängern der Nabe möglich. Das letztere ist, abgesehen davon, daß es vielfach durch die konstruktiven Verhältnisse beschränkt sein wird, weniger wirksam, weil die Nabenquerschnitte um so geringer in Anspruch genommen sind, je weiter sie von der Mittelebene abliegen. In einer bestimmten, von den Abmessungen der Nabe und der Höhe der Spannungen an der Ansatzstelle der Scheibe abhängigen Entfernung wird überhaupt keine Formänderung mehr auftreten, eine Verlängerung daher unwirksam sein. Einseitig angesetzte Naben sind ungünstiger, nämlich rund doppelt so hoch beansprucht wie symmetrisch zur Scheibenmitte angeordnete und deshalb nur an mäßig belasteten Scheiben zulässig.

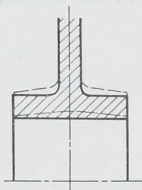


Abb. 2291.  
Formänderung langer Naben.

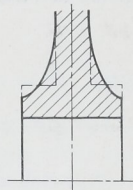


Abb. 2292.  
Zur Gestaltung der Naben.

ε) Die Scheibe gleicher Stärke mit Kranz und Nabe.

Die grundlegende Bedingung ist, daß die Formänderungen der drei Teile, Kranz, Scheibe, Nabe, an den beiden Übergangstellen in radialer Richtung gleich groß sein müssen. Bezeichnen  $\sigma_{r1}$  und  $\sigma_{r2}$  die an den genannten Stellen herrschenden Radialspannungen, so unterliegen die drei Teile den durch Abb. 2293 verdeutlichten Belastungen. Für die mittlere Tangentialspannung  $\sigma_k$  am Kranz gilt die auf S. 1317 abgeleitete Formel (772), wenn  $\sigma$  durch  $\sigma_{r1}$  und  $x_1$  durch die gleichmäßige Scheibenstärke  $x$  ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \frac{\gamma}{g} v_k^2 + \frac{Z_{1cm} \cdot R_a}{s_k \cdot b_k} \\ &- \frac{\sigma_{r1} \cdot x \cdot R_1}{s_k \cdot b_k}. \end{aligned} \quad (799)$$

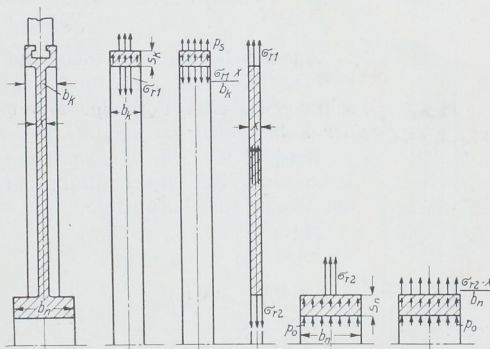


Abb. 2293.

Beanspruchung der Teile eines Rades gleicher Scheibenstärke.

Die zugehörige radiale Erweiterung  $\varrho_k = \alpha \cdot \sigma_k \cdot R_k$  muß gleich der Vergrößerung des Scheibenaußenhalbmessers

$$\alpha \left( \sigma_{t1} - \frac{\sigma_{r1}}{m} \right) R_1, \quad \text{also} \quad \sigma_k \cdot R_k = \left( \sigma_{t1} - \frac{\sigma_{r1}}{m} \right) R_1$$

sein. Die Tangentialspannung  $\sigma_{t1}$  am äußeren Rand der Scheibe setzt sich aus Spannungen infolge der Fliehkraft nach Formel (790) und infolge der Randbelastungen

$\sigma_{r_1}$  und  $\sigma_{r_2}$  nach (795) zusammen, wenn in diese Beziehungen  $r = R_1$  eingeführt wird. Damit ergibt sich:

$$I. \quad \frac{\gamma}{g} \cdot v_k^2 \cdot R_k + \frac{Z_{1\text{cm}} \cdot R_a \cdot R_k}{s_k \cdot b_k} - \frac{\sigma_{r_1} \cdot x \cdot R_1 \cdot R_k}{s_k \cdot b_k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1) R_1^3 + (3m+1) R_1 \cdot R_2^2] + \frac{\sigma_{r_1} (R_1^3 + R_1 \cdot R_2^2) - 2 \sigma_{r_2} \cdot R_1 \cdot R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{\sigma_{r_1}}{m} \cdot R_1. \quad (800)$$

In ähnlicher Weise gilt an der Nabe, daß die Erweiterung der Scheibe

$$\propto \left( \sigma_{t_2} - \frac{\sigma_{r_2}}{m} \right) \cdot R_2$$

gleich der auf S. 1326 abgeleiteten Vergrößerung  $\varrho_2$  des Nabelhalbmessers sein muß:

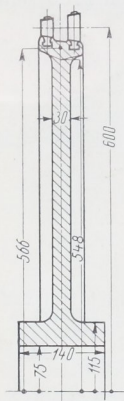
$$\propto \left( \sigma_{t_2} - \frac{1}{m} \sigma_{r_2} \right) R_2 = \alpha \left( \sigma_{t_n} - \frac{\sigma_{r_2}}{m} \cdot \frac{x}{b_n} \right) R_2$$

oder

$$\sigma_{t_2} - \frac{\sigma_{r_2}}{m} = \sigma_{t_n} - \frac{\sigma_{r_2}}{m} \cdot \frac{x}{b_n}.$$

$\sigma_{t_2}$  setzt sich aus der Wirkung der Fliehkraft nach (791) und derjenigen der Randbelastungen nach (796) mit  $\sigma_1 = \sigma_{r_1}$  und  $\sigma_2 = \sigma_{r_2}$  zusammen, während die rechte Seite der Beziehung in Form und Aufbau der Bedingungsgleichung (797) entspricht. Es braucht nur  $\sigma$  durch  $\sigma_{r_2}$  ersetzt zu werden. So ergibt sich als zweite Grundgleichung:

$$II. \quad \left. \begin{aligned} & \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(3m+1) R_1^2 + (m-1) R_2^2] + \frac{2 \sigma_{r_1} \cdot R_1^2 - \sigma_{r_2} (R_1^2 + R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{\sigma_{r_2}}{m} \\ & = \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 [(m-1) R_2^2 + (3m+1) R_0^2] + \frac{1}{R_2^2 - R_0^2} \left[ \sigma_{r_2} \cdot \frac{x}{b_n} (R_2^2 + R_0^2) + 2 p_0 R_0^2 \right] \\ & \quad - \frac{\sigma_{r_2} \cdot x}{m \cdot b_n}. \end{aligned} \right\} (801)$$



Aus den Beziehungen (800) und (801) die Unbekannten, z. B.  $\sigma_{r_1}$  und  $\sigma_{r_2}$  zu ermitteln, falls die Abmessungen der Scheibe gegeben sind, führt zu sehr verwickelten Formeln. Man tut gut, die Gleichungen unter Einführen der Zahlenwerte zu vereinfachen und dann erst zu lösen.

**Beispiel 9.** Die Beanspruchung der Scheibe Abb. 2294 mit einem Kranz und einer Beschaulung nach Abb. 2270 bei  $n = 2400$  Umläufen in der Minute ist zu ermitteln.

Hauptmaße:  $R_a = 57,8$ ;  $R_k = 56,6$ ;  $R_1 = 54,8$ ;  $R_2 = 11,5$ ;  $R_0 = 7,5$ ;  $x = 3,0$  cm;  $b_k \cdot s_k = F_k = 16$  cm<sup>2</sup>;  $b_n = 14$  cm;  $p_0 = 50$  kg/cm<sup>2</sup>;  $m = 3,3$ .

$$\omega = 251,3 \text{ /sek}; \quad \frac{1}{4m} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 = \frac{7,85 \cdot 251,3^2}{4 \cdot 3,3 \cdot 1000 \cdot 981} = 0,03828.$$

$$v_k = \omega \cdot R_k = 251,3 \cdot 56,6 = 14224 \text{ cm/sek}, \quad Z_{1\text{cm}} = 402 \left( \frac{2400}{3000} \right)^2 = 357 \text{ kg/cm}.$$

Mit diesen Werten wird Gleichung I:

$$\frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 14224^2 \cdot 56,6 + \frac{257 \cdot 57,8 \cdot 56,6}{16} - \frac{\sigma_{r_1} \cdot 3 \cdot 54,8 \cdot 56,6}{16} = 0,03828 (2,3 \cdot 54,8^3 + 10,9 \cdot 54,8 \cdot 11,5^2) + \frac{\sigma_{r_1} (54,8^3 + 54,8 \cdot 11,5^2) - 2 \sigma_{r_2} \cdot 54,8 \cdot 11,5^2}{54,8^2 - 11,5^2} - \frac{\sigma_{r_1}}{3,3} \cdot 54,8,$$

$$126100 - 623,7 \sigma_{r_1} + 5,04 \sigma_{r_2} = 0,$$

Gleichung II:

$$0,03828 (10,9 \cdot 54,8^2 + 2,3 \cdot 11,5^2) + \frac{2\sigma_{r1} \cdot 54,8^2 - \sigma_{r2} (54,8^2 + 11,5^2)}{54,8^2 - 11,5^2} - \frac{\sigma_{r2}}{3,3}$$

$$= 0,03828 (2,3 \cdot 11,5^2 + 10,9 \cdot 7,5^2) + \frac{\sigma_{r2} \cdot \frac{3}{14} (11,5^2 + 7,5^2) + 2 \cdot 50 \cdot 7,5^2}{11,5^2 - 7,5^2} - \frac{\sigma_{r2} \cdot 3}{3,3 \cdot 14}$$

$$1156 + 2,092 \sigma_{r1} - 1,860 \sigma_{r2} = 0.$$

Aus ihnen ergibt sich:  $\sigma_{r1} = 209$ ,  $\sigma_{r2} = 857$  kg/cm<sup>2</sup>. Die Spannung an der Innenfläche der Nabe setzt sich nach den Formeln (791) und (796) zusammen aus:

$$\sigma_{t0} = 0,03828 (10,9 \cdot 11,5^2 + 2,3 \cdot 7,5^2) + \frac{1}{11,5^2 - 7,5^2} \left[ \frac{2 \cdot 857 \cdot 3}{14} \cdot 11,5^2 + 50 (11,5^2 + 7,5^2) \right]$$

$$= 60 + 762 = 822 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei der langen, ziemlich dünnen Nabe dürften die wirklichen Spannungen in der Mitte nicht unbeträchtlich höher liegen.

Auch im Fall der praktisch häufig benutzten hyperboloidischen Scheiben, deren Profillinien Gleichungen  $x \cdot r^a = C$  folgen, lassen sich die Hauptgleichungen (762) und (768) integrieren und die Spannungen und Formänderungen rechnerisch ermitteln (XXIX, 1, 2).

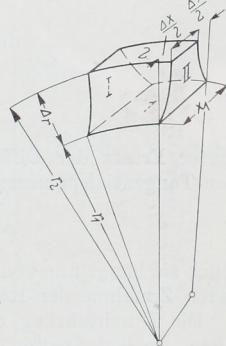
#### d) Berechnung einer Scheibe von gegebener Form.

Im folgenden ist ein von H. Keller [XXIX, 10] zuerst beschriebenes Verfahren erläutert, bei welchem die bei der Ableitung der Hauptgleichungen auf S. 1314 und 1315 benutzten Differentiale durch kleine endliche Differenzen ersetzt werden. Derartige Differenzenverfahren lassen sich mit Vorteil auch auf andere Fälle, z. B. die genauere Berechnung von Böden, Deckeln, Platten und einwandigen Kolben anwenden, sofern man nur die Differentialgleichungen der Spannungen an einem Körperelement aufstellen kann [XXIII, 10, XXIX, 11]. Wegen anderer rechnerischer und zeichnerischer Verfahren zur Untersuchung raschlaufender Scheiben vgl. [XXIX, 1].

Keller geht von einem Körperelement aus, Abb. 2295, das durch zwei um die Drehachse beschriebene Zylinderflächen I und 2 und zwei Radialebenen I und II begrenzt ist. Sind die Radial- und Tangentialspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  in der Fläche I, also im Abstand  $r_1$  von der Drehachse bekannt und gelangt es, ihre Zunahme  $\Delta\sigma_r$  und  $\Delta\sigma_t$  auf der Strecke  $\Delta r$  zu ermitteln, so sind die auf dem Zylinder 2 herrschenden Spannungen:

$$\sigma'_r = \sigma_r + \Delta\sigma_r \quad \text{und} \quad \sigma'_t = \sigma_t + \Delta\sigma_t. \quad (802)$$

Abb. 2295.



Sie bilden die Ausgangsspannungen am nächsten Element, das außen durch einen Zylinder vom Halbmesser  $r_3$  begrenzt ist. Von Element zu Element fortschreitend, wird die Scheibe stufenweise durchgerechnet. Das Maß  $\Delta r$  der einzelnen Stufen ist dort, wo die Stärke  $x$  der Scheibe oder die Spannungen größeren Änderungen unterliegen, klein, etwa 0,5 cm groß, zu nehmen, kann aber sonst 1...3 cm betragen. Am innern und äußern Rande der Scheibe müssen die Randbedingungen erfüllt sein, insbesondere die Radialspannung am innern gleich der Pressung, die zwischen der Scheibe und der Welle beim Laufen noch herrschen soll, am äußern Rande gleich der durch die Beschaufung erzeugten Spannung sein. Liegt eine Scheibe ohne Bohrung vor, so gilt für ihre Mitte:  $\sigma_r = \sigma_t$ .

1334  
677



Bei Division der Gleichung (761) durch  $x \cdot r$  findet sich die Zunahme der Radialspannung:

$$d\sigma_r = \frac{1}{r}(\sigma_t - \sigma_r)dr - \frac{\sigma_r \cdot dx}{x} - \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr.$$

Ersetzt man die Differentiale durch die endlichen Unterschiede nach Abb. 2295, so geht die Gleichung über in die Form:

$$\Delta\sigma_r = (\sigma_t - \sigma_r) \frac{\Delta r}{r} - \sigma_r \cdot \frac{\Delta x}{x} - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \cdot r \cdot \Delta r, \quad (803)$$

nach welcher sich die Zunahme  $\Delta\sigma_r$  auf der Strecke  $\Delta r$ , also zwischen den beiden Zylindern 1 und 2 berechnen läßt, weil auf der rechten Seite nur in der Fläche 1 bekannte Größen sowie  $\Delta r$  und  $\Delta x$  vorkommen.

Die radiale Dehnung  $\varepsilon_r$  kann man nach den Ausführungen auf S. 1315 durch zwei Beziehungen ausdrücken. Nach (763) ist:

$$\varepsilon_r = \alpha(\sigma_r - \sigma_t/m).$$

Andrerseits gilt nach (766), (765) und (764):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{d\varrho}{dr} = \frac{d(\varepsilon_t \cdot r)}{dr} = \frac{\alpha \cdot d(\sigma_t - \sigma_r/m) \cdot r}{dr} \\ &= \alpha \left[ \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} + r \left( \frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{1}{m} \frac{d\sigma_r}{dr} \right) \right]. \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der beiden Werte führt zu:

$$\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} + r \cdot \frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{r}{m} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}$$

und beim Multiplizieren mit  $\frac{dr}{r}$  zu:

$$\begin{aligned} d\sigma_t &= (\sigma_r - \sigma_t) \frac{dr}{r} - \frac{1}{m} (\sigma_t - \sigma_r) \frac{dr}{r} + \frac{1}{m} d\sigma_r \cdot \\ &= \frac{m+1}{m} (\sigma_r - \sigma_t) \frac{dr}{r} + \frac{1}{m} d\sigma_r. \end{aligned}$$

Unter Ersatz der Differentiale durch die endlichen Unterschiede wird die Zunahme der Tangentialspannung:

$$\Delta\sigma_t = -\frac{m+1}{m} (\sigma_t - \sigma_r) \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{m} \Delta\sigma_r. \quad (804)$$

Auch sie hängt nur von den Maßen des Elementes, von  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  und der nach (803) berechneten Zunahme der Radialspannung  $\Delta\sigma_r$  ab, läßt sich also zahlenmäßig berechnen.

Die Durchführung der Untersuchung erfolgt zweckmäßig an Hand der folgenden Liste. In den Spalten 1...7 sind zunächst die in den Formeln (803) und (804) vorkommenden Größen, die sich aus den Maßen der gewählten Elemente ergeben, zusammengestellt, in den Spalten 8...13 die Spannungen und die Glieder für die Zunahme der Radialspannung und in Spalte 14 diese selbst ermittelt. Die bei der ersten Durchrechnung gefundenen Größen sind durch einen Strich von den bei der zweiten Durchrechnung erhaltenen, mit zwei Strichen versehenen Größen unterschieden. 15 und 16 enthalten die zur Berechnung von  $\Delta\sigma_t'$  nötigen Glieder, Spalte 17  $\Delta\sigma_t'$  selbst. Schließlich sind in 18 und 19 die an den Außenflächen des betrachteten Elementarringes wirkenden Spannungen  $\sigma_t' + \Delta\sigma_t'$  und  $\sigma_r' + \Delta\sigma_r'$  eingetragen. Während Spalte 1...7 vor der Berechnung der Spannungen aufgestellt werden können, müssen Spalte 8...19 zeilenweise, von einem der Scheibenränder beginnend, entwickelt werden. In Zeile 1 ist  $\sigma_t'$  schätzungsweise angenommen,  $\sigma_r'$  aber unter Beachtung der einen Randbedingung gleich der

Spalte	Erste Durchrechnung												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Zeile	$r$	$\Delta r$	$x$	$\Delta x$	$\frac{\Delta r}{r}$	$\frac{\Delta x}{x}$	$r \cdot \Delta r$	$\sigma'_r$	$\sigma'_t$	$\sigma'_t - \sigma'_r$	$(\sigma'_t - \sigma'_r) \frac{\Delta r}{r}$	$\sigma'_{t,m}$	$\sigma'_{t,m} \cdot x_m \cdot \Delta r$
				$\text{cm}$			$(1) \cdot (2)$	$(4) / (3)$	$(8) - (9)$	$(10) \cdot (5)$	$(9) \cdot (6)$	$g$	
					$(2) / (1)$							$0,790 \cdot (7)$	
1	10,0	0,5	10	0	0,05	0	5,0	+ 940	- 50	+ 990	+ 49,5	0	+ 3,9
2	10,5	0,5	10	0	0,0476	0	5,25	+ 889,5	+ 4,4	+ 893,9	+ 42,6	0	+ 4,2
3	11,0	0,5	10	0	0,0455	0	5,5	+ 845,7	+ 34,1	+ 811,6	+ 36,9	0	+ 4,4
4	11,5	0,5	10	0	0,0435	0	5,75	+ 807,6	+ 66,6	+ 741,0	+ 32,2	0	+ 4,5
5	12	1	10	0	0,0833	0	12	+ 774,1	+ 94,3	+ 679,8	+ 56,7	0	+ 9,5
23	40	0,5	3,14	+ 2,02	0,0125	+ 0,643	20	+ 429,7	+ 194,8	+ 234,9	+ 2,9	+ 125,2	+ 15,8
24	40,5	0,5	5,16	+ 2,04	0,0123	+ 0,396	20,25	+ 384,0	+ 56,7	+ 327,3	+ 4,0	+ 22,5	+ 16,0
25	41	0,5	7,2	0	0,0122	0	20,5	+ 368,4	+ 22,3	+ 346,1	+ 4,2	0	+ 16,2
26	41,5	0,2	7,2	0	0,0048	0	8,3	+ 359,3	+ 10,3	+ 349,0	+ 1,7	0	+ 6,6
27								+ 355,6	+ 5,4				

Spalte	Erste Durchrechnung													Nachprüfung				
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25						
Zeile	$\Delta \sigma'_r$	$-\frac{m+1}{m}(\sigma'_t - \sigma'_r)$	$\frac{1}{m} \Delta \sigma'_t$	$\Delta \sigma'_t$	$\sigma'_t + \Delta \sigma'_t$	$\sigma'_r + \Delta \sigma'_r$	$x_m$	$x_m \cdot \Delta r$	$r_m$	$x_m \cdot \Delta r \cdot r_m$	$\sigma'_{t,m}$	$\sigma'_{t,m} \cdot x_m \cdot \Delta r$						
	$(11) - (12) - (13)$		$-1,3 \cdot (11)$	$kg/cm^2$			$(8) + (17)$	$(9) + (14)$	$(20) \cdot (2)$	$(21) \cdot (22)$	$(21) \cdot (22)$	$aus (8)$	$(24) \cdot (21)$					
							$cm$	$cm^2$	$cm$	$cm^3$	$kg/cm^2$	$kg$						
1	+ 45,6	- 64,3	+ 13,8	- 50,5	+ 889,5	- 4,4	10	5	10,3	51,3	915	4575						
2	+ 38,4	- 55,4	+ 11,6	- 43,8	+ 845,7	+ 35,0	10	5	10,8	53,8	868	4340						
3	+ 32,5	- 48,0	+ 9,9	- 38,1	+ 807,6	+ 66,6	10	5	11,3	56,3	827	4135						
4	+ 27,7	- 41,9	+ 8,4	- 33,5	+ 774,1	+ 94,3	10	5	11,8	58,8	791	3955						
5	+ 47,2	- 73,7	+ 14,3	- 59,4	+ 714,7	+ 141,5	10	10	12,5	125	744	7440						
23	- 138,1	- 3,8	- 41,9	- 45,7	+ 384,0	+ 56,7	41,5	2,08	40,3	83,3	407	847						
24	- 34,4	- 5,2	- 10,4	- 15,6	+ 368,4	+ 22,3	6,18	3,09	40,8	126	376	1162						
25	- 12,0	- 5,5	- 3,6	- 9,1	+ 359,3	+ 10,3	7,2	3,6	41,3	148,5	364	1310						
26	- 4,9	- 2,2	- 1,5	- 3,7	+ 355,6	+ 5,4	7,2	1,44	41,6	59,8	357	514						
27								160,36		3438,7		97000						

Spalte	Zweite Durchrechnung						
	26	27	28	29	30	31	32
	$\sigma'_r$	$\sigma'_t$	$\sigma'_t - \sigma'_r$ (26) - (27)	$(\sigma'_t - \sigma'_r) \frac{\Delta r}{r}$ (28) · (5)	$\sigma'_t \frac{\Delta x}{x}$ (27) · (6)	$\frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \Delta r}{g}$ 0,790 · (7)	$\Delta \sigma'_t$ (29) - (30) - (31)
kg/cm <sup>2</sup>							
1	+ 1070	- 50	+ 1120	+ 56	0	3,9	+ 52,1
2	+ 1013	- 2	+ 1015	+ 48,4	0	4,2	+ 44,2
3	+ 963,5	+ 42,2	+ 921,3	+ 41,9	0	4,4	+ 37,5
4	+ 920,4	+ 79,7	+ 840,7	+ 36,6	0	4,5	+ 32,1
5	+ 882,6	+ 111,8	+ 649,0	+ 64,3	0	9,5	+ 54,8
23	+ 533,8	+ 276,1	+ 257,7	+ 3,2	+ 177,8	15,8	- 190,4
24	+ 471,9	+ 85,7	+ 386,2	+ 4,8	+ 33,9	16,0	- 45,1
25	+ 452,0	+ 40,6	+ 411,4	+ 5,0	0	16,2	- 11,2
26	+ 442,1	+ 29,4	+ 412,7	+ 2,0	0	6,6	- 4,6
27	+ 438,1	+ 24,8					

Zusammenbauspannung  $p_0$ , mit der die Scheibe die Welle umschließen soll, angesetzt. Die Ergebnisse der Spalten 18 und 19 der ersten Zeile dienen als Ausgangszahlen der Zeile 2 in Spalte 8 und 9 usw.

Wäre  $\sigma'_t$  in Zeile 1, Spalte 8 richtig geschätzt worden, so müßte sich am Außenrand der Scheibe, also in Spalte 19 der letzten Zeile  $\sigma'_r + \Delta \sigma'_r = p_s$ , nämlich gleich der durch die Schaufeln erzeugten Randspannung ergeben. Das wird selten der Fall sein. Man müßte nun die Rechnung unter neuer Schätzung von  $\sigma'_t$  so oft durchführen, bis genügende Übereinstimmung erreicht ist. Abgesehen von der Umständlichkeit ist aber die Ermittlung der Radialspannungen in der Nähe des Außenrandes infolge des starken Fallens der Werte an der Übergangsstelle zum Kranz nach Abb. 2296 oft mit erheblichen Fehlern behaftet. Keller empfiehlt deshalb mit Recht, die Tangentialspannungen zur Nachprüfung der Richtigkeit der Rechnung zu benutzen. Der Eigenfliehkraft und den Randbelastungen einer Scheibenhälfte müssen nämlich die Tangentialspannungen in der Schnittfläche das Gleichgewicht halten. In Spalte 20 ist zunächst die mittlere Breite  $x_m$  und in 21 der Flächeninhalt  $x_m \cdot \Delta r$  der einzelnen Zonenquerschnitte ermittelt. Ihre Summe liefert den Flächeninhalt  $F$  eines Radialschnittes der Scheibe. Spalte 22 und 23 dienen zur Bestimmung der auf die Drehachse bezogenen statischen Momente, deren Summe  $S$  den Abstand des Schwerpunktes  $r_s = \frac{S}{F}$ , damit aber nach der Guldinschen Regel das Gewicht  $G/2$  sowie die Fliehkraft  $Z$  der halben Scheibe:

$$\frac{G}{2} = \gamma \cdot F \cdot \pi \cdot r_s \quad \text{und} \quad Z = \frac{G}{2g} \omega^2 \cdot r_s = \pi \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot \omega^2 \cdot r_s^2$$

zu bestimmen gestattet. Die Belastung der Scheibenhälfte durch die Beschauflung beträgt bei  $p_s$  kg/cm<sup>2</sup> der Oberfläche:  $2p_s \cdot R_a \cdot b_k$ , diejenige durch den Druck  $p_0$  an der Nabeninnenfläche:  $2p_0 \cdot R_0 \cdot b_n$ . In Spalte 24 sind noch die mittlere Tangentialspannung  $\sigma'_{t_m}$  in den einzelnen Zonen und in den Produkten der Spalte 25 die Tangentialkräfte  $\sigma'_{t_m} \cdot x_m \cdot \Delta r$  berechnet. War nun der Wert für  $\sigma'_t$  in Zeile 1 Spalte 8 richtig geschätzt, so muß:

$$2 \sum \sigma'_{t_m} \cdot x_m \cdot \Delta r = Z + 2(p_s \cdot R_a \cdot b_k + p_0 \cdot R_0 \cdot b_n)$$

sein. Trifft das nicht zu, so läßt sich der genauere Wert, wie unten gezeigt, ziemlich sicher schätzen, weil die Linien der Tangentialspannungen annähernd geometrisch ähnlich verlaufen.

**Beispiel 10.** Die Beanspruchung der Scheibe Abb. 2296 mit einer Beschauflung nach Abb. 2270 bei  $n = 3000$  Umläufen in der Minute und  $p_0 = -50$  kg/cm<sup>2</sup> Zusammenbauspannung an der Nabe ist zu untersuchen.

Zweite Durchrechnung					Nachprüfung	
33	34	35	36	37	38	39
$-\frac{m+1}{m}(\sigma'_i - \sigma'_r) \frac{\Delta r}{r}$	$\frac{1}{m} \Delta \sigma''$	$\Delta \sigma''$	$\sigma'_i + \Delta \sigma''$	$\sigma'_r + \Delta \sigma''$	$\sigma''_{im}$	$\sigma''_{im} \cdot x_m \cdot \Delta r$
- 1,3 · (29)	0,303 · (32)	(33) + (34)	(26) + (35)	(27) + (32)	aus (26)	(38) · (21)
kg/cm <sup>2</sup>					kg/cm <sup>2</sup>	
- 72,8	+ 15,8	- 57,0	+ 1013	- 2	1041,5	5207
- 62,9	+ 13,4	- 49,5	+ 963,5	+ 42,2	988	4941
- 54,5	+ 11,4	- 43,1	+ 920,4	+ 79,7	941,9	4710
- 47,5	+ 9,7	- 37,8	+ 882,6	+ 111,8	901,5	4507
- 83,6	+ 16,6	- 67,0	+ 815,6	+ 166,6	849,1	8491
- 4,2	- 57,7	- 61,9	+ 471,9	+ 85,7	502,9	1045
- 6,2	- 13,7	- 19,9	+ 452,0	+ 40,6	462	1428
- 6,5	- 3,4	- 9,9	+ 442,1	+ 29,4	447,1	1610
- 2,6	- 1,4	- 4,0	+ 438,1	+ 24,8	440,1	634
					112783	

Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 314/\text{sek}$ , Umlaufgeschwindigkeit am mittlern Schaufelhalbmesser  $v = \omega \cdot R = 314 \cdot 0,45 = 141,4 \text{ m/sek}$ . Denkt man sich den Kranz der Scheibe nach der Nebenabbildung *a* zur Mitte hin zusammengesoben, so entsteht bei *A* ein Absatz, der damit eine Unstetigkeit, die man bei den Durchrechnungen ausschaltet, wenn man die Scheibe nur bis *AA* reichend annimmt und den schräg gestrichelten Teil zur Randbelastung durch die Beschauflung hinzuzählt. Das ist um so mehr berechtigt, als die Inanspruchnahme dieses Kranzteils sehr verwickelt ist und die Annahme zugunsten der Sicherheit der Rechnung wirkt. Die Scheibe wurde nach Abb. 2296 in 26 Zonen von 0,2 ... 2 cm radialer Stärke eingeteilt, deren Begrenzungsflächen den 27 Zeilen der Berechnungstafel entsprechen. Die Randbelastung ergibt sich wie folgt:

Die auf S. 1307 und 1308 ermittelte Belastung von 223 und 185 kg/cm durch die beiden Schaufelreihen vermindert sich entsprechend dem anderen mittleren Halbmesser auf das  $\left(\frac{45}{60}\right)^2 = 0,563$ fache, also auf 126 und 104 kg je Zentimeter Umfang.

Wirkung des Scheibenrandes. Gewicht eines Stückes von 1 cm Länge, längs des Umfangs gemessen:

$$G = \frac{3,7 \cdot 1,3 \cdot 1 \cdot 7,85}{1000} = \frac{37,8}{1000} \text{ kg/cm.}$$

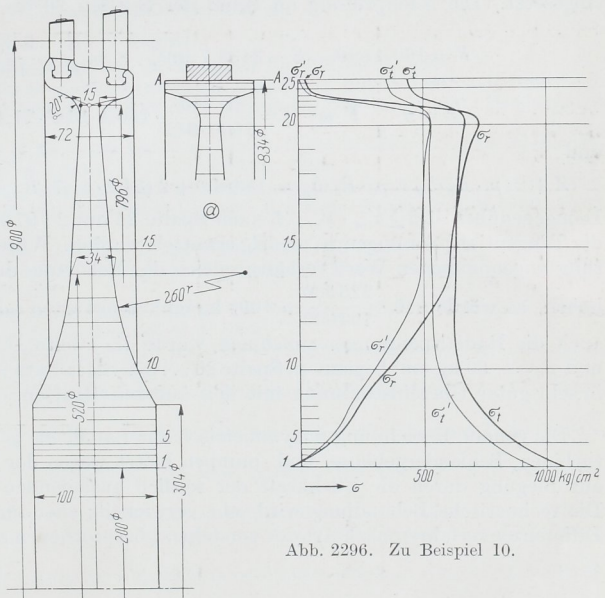


Abb. 2296. Zu Beispiel 10.

Flihkraft:

$$\frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{37,8}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 \cdot 42,4 = 161 \text{ kg/cm}.$$

Insgesamt ist also der Rand mit  $126 + 104 + 161 = 391 \text{ kg/cm}$  belastet. Denkt man sich diese Belastung auf der Kranzbreite von  $7,2 \text{ cm}$  gleichmäßig verteilt, so entsteht eine Randspannung von:

$$p_s = \frac{391}{7,2} = 54,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit den weiteren Größen  $\frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 = \frac{7,85}{1000 \cdot 981} \cdot 314^2 = 0,709 \text{ kg/cm}^4$ ,  $\frac{m+1}{m} = 1,30$

und  $\frac{1}{m} = 0,303$  ist die Zahlentafel durchgerechnet. Dabei muß die Ermittlung der Zahlen in den Spalten 8...19 mit der größten Sorgfalt geschehen, weil ein an irgendeiner Stelle gemachter Fehler auf die ganze darauffolgende Rechnung wirkt. Es ist zweckmäßig, derartige Rechnungen zu zweien durchzuführen oder sie durch gleichzeitiges Aufzeichnen der Hauptwerte zu verfolgen, wobei wenigstens grobe Fehler hervortreten werden.

Bei der ersten Durchrechnung wurde in der ersten Zeile der Spalten 8 und 9  $\sigma'_t = 940 \text{ kg/cm}^2$  angenommen, für  $\sigma'_t$  aber die vorgeschriebene Pressung  $p_0 = -50 \text{ kg/cm}^2$  eingesetzt. Die Nachprüfung an Hand der Spalten 20 bis 25 ergibt:

$$F = 160,4 \text{ cm}^2, \quad S = 3438,7 \text{ cm}^3, \quad r_s = \frac{S}{F} = \frac{3438,7}{160,4} = 21,42 \text{ cm};$$

$$Z = \pi \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot \omega^2 \cdot r_s^2 = \frac{\pi \cdot 785}{1000 \cdot 981} \cdot 160,4 \cdot 314^2 \cdot 21,4^2 = 183000 \text{ kg}$$

und

$$Z + 2(p_s \cdot R_a \cdot b_k + p_0 \cdot R_0 \cdot b_n) = 183000 + 2(54,2 \cdot 41,7 \cdot 7,2 + 50 \cdot 10 \cdot 10) = 225500 \text{ kg}.$$

Demgegenüber ist  $2 \sum \sigma'_{tm} \cdot x_m \cdot \Delta r$  nach Spalte 25 nur  $2 \cdot 97000 = 194000 \text{ kg}$ , mithin sind die Tangentialspannungen zu niedrig ermittelt worden. Würde man den an der Nabenbohrung angenommenen Wert verhältnismäßig der Belastung durch die äußeren Kräfte erhöhen, so würde  $940 \cdot \frac{225500}{194000} = 1090 \text{ kg/cm}^2$  zu erwarten sein. In Rücksicht darauf, daß auch die Radialspannungen zunehmen, wurde die zweite Durchrechnung mit  $\sigma''_t = 1070$  und  $p_0 = -50 \text{ kg/cm}^2$  begonnen, Spalte 26...37. Sie lieferte  $2 \sum \sigma''_{tm} \cdot x_m \cdot \Delta r = 225566 \text{ kg}$  in sehr guter Übereinstimmung mit den äußeren Kräften.

Die genaue Berechnung unsymmetrisch zur Laufebene gestalteter Räder von Wasserturbinen, Schleudergebläsen und -pumpen bietet wegen der Inanspruchnahme derselben auf Biegung durch die Flihkraft der seitlich ausladenden Schaufeln Schwierigkeiten. Die rechnerische Behandlung wird sehr verwickelt; eher dürften sich zeichnerische oder Differenzenverfahren nach Art des vorstehend besprochenen zur Untersuchung empfehlen.