Der Vergleich der Formeln (351) und (354) zeigt, daß die größte Pfeilhöhe am Halszapfen gleicher Abmessung und gleicher Beanspruchung rund 3,1mal größer ist als am Stirnzapfen. Die bekannte Neigung von Mittellagern zum Heißlaufen ist eben auf die bedeutenderen Formänderungen zurückzuführen, die höhere Kantenpressung oder stärkere Verminderung der Schmierschichtdicke in der Lagermitte zur Folge haben. Sie läßt sich, wie Formel (354) lehrt, in erster Linie durch Verringern der Lagerlänge oder durch Niedrighalten der Biegespannung bekämpfen.

Zahlenbeispiel 11. Würde der Zapfen des Beispiels 10 von $d = 20$ cm Durchmesser und $l = 30$ cm Länge als Halszapfen einem größten Biegemoment von 549 800 cmkg, entsprechend $\sigma_b = 700$ kg/cm², ausgesetzt sein und würde die Momentenfläche nach Abb. 1121 verlaufen, so ergibt sich folgender Rechnungsgang: Da der Längenmaßstab 1 : 10 ist und 1 cm² $125000 \cdot 10 = 1250000$ cmkg · cm bedeutet, die Flächen $F_1 = 5{,}48$ und $F_2 = 6{,}18$ cm² Inhalt haben und die Abstände $\xi_1 = 0{,}77$, $\xi_2 = 0{,}76$ cm sind, so wird:

$$f' = \frac{10\,\alpha}{d^4}(F_1\xi_1 + F_2\xi_2) = \frac{10}{2\,200\,000 \cdot 20^4}(5{,}48 \cdot 1\,250\,000 \cdot 0{,}77 \cdot 10 + 6{,}18 \cdot 1\,250\,000 \cdot 0{,}76 \cdot 10) = \frac{3{,}21}{1000}\,\text{cm}\,.$$

Die Näherungsformel (354) liefert:

$$f' = 0{,}25\,\alpha \cdot \sigma_b \frac{l^2}{d} = \frac{0{,}25 \cdot 700 \cdot 30^2}{2\,200\,000 \cdot 20} = \frac{3{,}58}{1000}\,\text{cm}\,,$$

einen etwas zu großen Wert, wie im vorliegenden Falle nach der Form der Momentenfläche in Abb. 1121 zu erwarten war.

6. Berechnung von Zapfen mit Laufsitzpassung, die unter flüssiger Reibung laufen.

Den Weg, den zweckmäßigsten Durchmesser d bei Laufsitzpassung zu berechnen, wenn die Belastung P und die Umdrehzahl n in der Minute gegeben sind, hat Falz zuerst angegeben [XV, 20]. Die folgenden Formeln sind auf dem gleichen Wege, aber so aufgestellt, daß sie ein beliebiges Verhältnis $\frac{l}{d}$ und die Ausstrahlfähigkeit der Lager anschaulich an Hand der Abb. 1118 zu berücksichtigen gestatten. Das mittlere Spiel der Laufsitzpassung unter Einschluß der gewöhnlichen Beträge für die Oberflächenrauhigkeit läßt sich genügend genau durch die empirische Gleichung:

$$s = \frac{\sqrt[3{,}3]{d}}{224} = \frac{d^{0{,}303}}{224} \tag{355}$$

ausdrücken. In Formel (340) eingeführt, wird:

$$\frac{4\,\eta \cdot n \cdot d^2}{183\,600\,p} \cdot \frac{l}{d + l} = s_{best}^2 = \frac{d^{0{,}606}}{224^2}$$

oder die Zähigkeit:

$$\eta = 0{,}915\,\frac{p}{n \cdot d^{1{,}4}}\left(\frac{d}{l} + 1\right). \tag{356}$$

Bei dieser Zähigkeit stellt sich eine Stärke der Ölschicht an der engsten Stelle:

$$h = \frac{s}{4} = \frac{d^{0{,}303}}{900} \tag{357}$$

ein. Dadurch wird auch der schmierungstechnisch günstigste Wert für d nach Formel (345) gewährleistet, wie man sich überzeugt, wenn man η und h dort einsetzt.

Durch Einführung von η in die Formel (343) entsteht eine Beziehung zur Reibungsarbeit oder Ausstrahlfähigkeit an Lagern mit Laufsitzpassung:

$$a_{R_0} = 8{,}75 \cdot 10^{-7} \frac{P \cdot n}{d^{1,7}} \cdot \frac{d}{l} \sqrt{4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 5\frac{d}{l} + 1},$$

aus der die Formel:

$$d = C \sqrt[1,7]{\frac{P \cdot n}{a_{R_0}}} \tag{358}$$

zur Bestimmung von d folgt, wenn P und n gegeben sind, die zulässige spezifische Reibungsarbeit a_{R_0} aber, je nach der Bauart der Lager an Abb. 1118 geschätzt wird. C ist eine nur vom Verhältnis $\frac{l}{d}$ abhängige Größe:

$$C = 2{,}73 \cdot 10^{-4} \sqrt[1,7]{\frac{d}{l} \sqrt{4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 5\frac{d}{l} + 1}}, \tag{359}$$

deren Werte Zusammenstellung 122 zu entnehmen sind.

Zusammenstellung 122. **Werte von C und $C^{1,7}$ in der Falzschen Formel für verschiedene Verhältnisse $\frac{l}{d}$.**

$\frac{l}{d}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
C	$8{,}97 \cdot 10^{-4}$	$7{,}67 \cdot 10^{-4}$	$6{,}70 \cdot 10^{-4}$	$5{,}97 \cdot 10^{-4}$	$5{,}38 \cdot 10^{-4}$	$4{,}91 \cdot 10^{-4}$	$4{,}52 \cdot 10^{-4}$
$\log C$	0,9528 — 4	0,8845 — 4	0,8263 — 4	0,7756 — 4	0,7310 — 4	0,6910 — 4	0,6550 — 4
$C^{1,7}$	$6{,}60 \cdot 10^{-6}$	$5{,}06 \cdot 10^{-6}$	$4{,}02 \cdot 10^{-6}$	$3{,}30 \cdot 10^{-6}$	$2{,}77 \cdot 10^{-6}$	$2{,}37 \cdot 10^{-6}$	$2{,}06 \cdot 10^{-6}$
$\log C^{1,7}$	0,8197 — 6	0,7037 — 6	0,6047 — 6	0,5186 — 6	0,4426 — 6	0,3747 — 6	0,3135 — 6

$\frac{l}{d}$	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0
C	$4{,}19 \cdot 10^{-4}$	$3{,}91 \cdot 10^{-4}$	$3{,}65 \cdot 10^{-4}$	$3{,}46 \cdot 10^{-4}$	$3{,}11 \cdot 10^{-4}$	$2{,}83 \cdot 10^{-4}$
$\log C$	0,6222 — 4	0,5922 — 4	0,5621 — 4	0,5388 — 4	0,4926 — 4	0,4519 — 4
$C^{1,7}$	$1{,}81 \cdot 10^{-6}$	$1{,}61 \cdot 10^{-6}$	$1{,}43 \cdot 10^{-6}$	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$	$1{,}09 \cdot 10^{-6}$	$9{,}29 \cdot 10^{-7}$
$\log C^{1,7}$	0,2577 — 6	0,2067 — 6	0,1556 — 6	0,1159 — 6	0,0375 — 6	0,9682 — 7

Zahlenbeispiel 12. Der Zapfen und das Lager des Beispiels 8 für $P = 5000$ kg Dauerbelastung bei $n = 250$ Umdr./min. sollen zwecks Ausführung nach den Normen der Laufsitzpassung (Einheitsbohrung) berechnet werden. Das Lager werde nach Bauart *II* der Abb. 1118 durchgebildet.

Um den Einfluß verschiedener Zapfenlängen im Verhältnis zum Durchmesser zu zeigen, sei die Rechnung für $\frac{l}{d} = 1$, 1,5 und 2 durchgeführt. Nach Kurve *II* der Abb. 1118 ist die Ausstrahlfähigkeit a_{R_0} bei 20° Luft- und 70° Öltemperatur am Lager zu 0,029 mkg/sek · cm² anzunehmen. Man ermittelt zunächst den Zapfendurchmesser nach Formel (358) und an Hand des angenommenen Verhältnisses $\frac{l}{d}$ die Zapfenlänge l. Das Ausführungsmaß des Durchmessers wird man der Reihe der Normaldurchmesser der DIN 3 anpassen, die Länge aber auf 5 oder 10 mm abrunden, wenn man sich nicht sogar an die Normalzahlen der DIN 323 halten will. Die unten eingetragene Beanspruchung auf Biegung σ_b gilt für Stirnzapfen. Wichtig ist die Berechnung der Zähigkeit η, um das für den Betrieb bei 70° zweckmäßige Öl an Hand der Zusammenstellung 114 aussuchen zu können. Schließlich dient Formel (344) zur Bestimmung des Reibungsverlustes in Pferdestärken. Die Werte s, h, μ_1 und v sind nur der besseren Veranschaulichung wegen ermittelt worden. Neben denjenigen von s nach Formel (355) sind eingeklammert die an den Normen der Laufsitzfeinpassung nach dem Einheitsbohrungssystem ermittelten

Spiele eingetragen. p, μ_1 und v müssen, in Formel (322) eingesetzt, angenähert den angenommenen Wert a_{R_0} ergeben und können so zur Nachprüfung der Rechnung dienen.

Zapfen Nr.	1	2	3
$l : d$	1	1,5	2
$d = C \sqrt[1,7]{\dfrac{P \cdot n}{a_{R_0}}} = C \sqrt[1,7]{\dfrac{5000 \cdot 250}{0{,}029}}$	16,67	11,3	8,77 cm
l	16,67	16,95	17,54 cm
Gewählt $d \cdot l$	16,5 · 16,5	11,5 · 17,0	9,0 · 17,5 cm
Flächendruck $p = \dfrac{P}{d \cdot l}$	18,4	25,6	31,8 kg/cm²
Beanspruchung auf Biegung $\sigma_b = \dfrac{5\,P \cdot l}{d^3}$	91,8	279	600 kg/cm²
Zähigkeit $\eta = 0{,}915 \dfrac{p}{n \cdot d^{1,4}} \left(\dfrac{d}{l} + 1\right)$	0,00266	0,00514	$0{,}00800 \dfrac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}$
Ölsorte nach Zusammenstellung 114	NÖ 12	NÖ 16	NÖ 24
Reibungsleistung $N = \dfrac{a_{R_0} \cdot \pi \cdot d \cdot l}{75}$	0,331	0,238	0,175
Mittleres Spiel $s = \dfrac{\sqrt[3,3]{d}}{224}$	0,0104 (0,01)	0,00936 (0,009)	0,00869 (0,009) cm
Schmierschichtstärke $h = \dfrac{s}{4}$	0,0026	0,00234	0,00217 cm
Zapfenreibungszahl $\mu_1 = 0{,}0055 \sqrt{\dfrac{\eta \cdot n}{p}\left(4\dfrac{d}{l} + 1\right)}$ . .	0,00234	0,00237	0,00241
Umfanggeschwindigkeit $v = \dfrac{\pi \cdot n \cdot d}{6000}$	2,16	1,51	1,18 m/sek

Beim Vergleich mit dem im Beispiel 5 nach der bisherigen Art berechneten Zapfen zeigt sich, daß die hydrodynamische Theorie im vorliegenden Falle auf wesentlich günstigere und namentlich kürzere Zapfen führt.

Ob aber die Rechnungsergebnisse praktisch anwendbar sind, ist von der Höhe der Biegebeanspruchung σ_b, der Zähigkeit η der zu benutzenden Öle und den Formänderungen, denen die Zapfen durch die Belastung ausgesetzt sind, abhängig. Während die Werte von σ_b in allen drei Fällen an Stirnzapfen zulässig sind, ergeben sich für den zweiten und namentlich den dritten Zapfen Öle, die sehr zähflüssig sind und die unter Druck zugeführt werden müßten, nicht aber für Tropf- oder selbsttätige Schmierung geeignet wären. Schmierringe würden in solchem Öl, wenn es nach längerem Stillstande kalt geworden ist, zu großen Widerstand finden und versagen. Will man etwas leichtflüssigere Öle verwenden, so bietet die Formel (339), die Möglichkeit, die Wirkung nachzurechnen, wie am Beispiel 9 auf Seite 663 gezeigt ist. Verwendet man am Zapfen 2 ein Öl von etwa den Eigenschaften des Normalöles 8 der Zusammenstellung 114, so ergibt sich eine Beharrungstemperatur von 62°. Die Schmierschichtstärke sinkt aber bei der zugehörigen Zähigkeit $\eta = 0{,}00305 \dfrac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}$ auf 0,00142 cm und damit auch die Sicherheit gegen den Eintritt halbflüssiger Reibung.

Etwas vorteilhafter werden die Verhältnisse, wenn man das günstigste Spiel nach der Formel (340):

$$s_{best} = 0{,}00467\, d \sqrt{\frac{\eta \cdot n}{p} \cdot \frac{l}{d + l}} = 0{,}00467 \cdot 11{,}5 \sqrt{\frac{0{,}00305 \cdot 250}{25{,}6} \cdot \frac{17}{11{,}5 + 17}} = 0{,}00716 \text{ cm}$$

zugrunde legt, da dann die Schmierschichtstärke an der engsten Stelle auf $\dfrac{s_{best}}{4} = 0{,}0018$ cm steigt. Die genaue Einhaltung dieses sehr kleinen Spiels ist aber nicht leicht.

Sorgfältig sind die Formänderungen an den längeren Zapfen zu beachten. Wird Zapfen Nr. 3 als Stirnzapfen verwandt, so wird die größte Pfeilhöhe nach Formel (351):

$$f_{max} = 0{,}08\, \alpha \cdot \sigma_b \cdot \frac{l^2}{d} = \frac{0{,}08 \cdot 600 \cdot 17{,}5^2}{2\,200\,000 \cdot 9} = \frac{7{,}42}{10\,000} \text{ cm},$$

die unter Berücksichtigung der Unebenheiten der Zapfen- und Schalenoberfläche zu einer Mindeststärke der Ölschicht nach Formel (352)

$$h_{\min} = \delta_1 + \delta_2 + \frac{f_{\max}}{2} = 0{,}0005 + 0{,}0005 + 0{,}00037 = 0{,}0014 \text{ cm}$$

führt. Die oben berechnete Stärke von 0,00217 cm bietet jedoch bei zähem Zylinderöl noch völlig ausreichende Sicherheit gegen Störungen.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn der Zapfen mitten in einer Welle sitzt und vergleichweise derselben Biegebeanspruchung $\sigma_b = 600$ kg/cm² ausgesetzt ist. Dann wird die Pfeilhöhe nach der Näherungsformel (354) 3,1 mal so groß, erreicht also 0,0026 cm und verlangt eine Mindeststärke der Ölschicht von 0,0023 cm, während nach der Berechnung nur 0,00217 cm vorhanden sind, so daß flüssige Reibung nicht möglich ist. Der Zapfen dürfte also nur an Stellen, wo mäßige Biegemomente auftreten, verwendet werden.

Dagegen ist der Zapfen mit $\frac{l}{d} = 1{,}5$ auch als Halszapfen brauchbar. Er bietet etwa die gleiche Sicherheit, wie der Stirnzapfen mit $\frac{l}{d} = 2$, da die Pfeilhöhe $f_{\max} = 0{,}00189$ und die Größen $h_{\min} = 0{,}00195$ cm, $h - h_{\min}$ aber 0,00039 gegenüber 0,00035 cm am Stirnzapfen werden.

Bei der Verwendung des dünnflüssigeren Normalöls 8 reicht die Schmierschicht selbst bei genauer Einhaltung des günstigsten Spiels nicht mehr aus. Die Benutzung eines genügend dickflüssigen Öles ist also geboten.

Berechnungsbeispiel 13. Die Wärme- und Reibungsverhältnisse an dem Zapfen einer Turbodynamo von 120 mm Durchmesser und 300 mm Länge für 1800 kg Belastung bei $n = 3000$ Umdr./min. sind zu untersuchen. Als Öl soll Normalöl 3 verwendet und eine Temperatur des Lagers von 50° zugelassen werden.

Ölzähigkeit bei 50° nach Zusammenstellung 114:

$$\eta = 0{,}0152\, i = 0{,}0152 \cdot 0{,}119 = 0{,}00181 \, \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}.$$

Bei $\frac{d}{l} = \frac{120}{300} = 0{,}4$ wird die spezifische Reibungsarbeit nach Formel (343):

$$a_{R_0} = 9{,}16 \cdot 10^{-7} \sqrt{\eta \cdot P \cdot n^3 \left[4\left(\frac{d}{l}\right)^2 + \frac{d}{l}\right]}$$

$$= 9{,}16 \cdot 10^{-7} \sqrt{0{,}00181 \cdot 1800 \cdot 3000^3 \left[4 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}4\right]} = 0{,}277 \, \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{sek} \cdot \text{cm}^2}.$$

Sie ist so groß, daß sie keinesfalls durch Ausstrahlung abgegeben werden kann; das Lager muß künstlich gekühlt werden. Ein Lager von gedrängter Bauart kann nach Kurve *II* der Abb. 1118, bei 50° 0,015, ein solches von schwerer Bauart nach Kurve *III* 0,029 mkg/sek · cm² ausstrahlen. Legt man der weiteren Rechnung vorsichtigerweise den niedrigeren Wert zugrunde, so müssen am ganzen Lager nach Formel (348):

$$Q = \frac{(a_{R_0} - a_s)\,\pi \cdot d \cdot l}{427} = \frac{(0{,}277 - 0{,}015) \cdot \pi \cdot 12 \cdot 30}{427} = 0{,}694 \, \frac{\text{kcal}}{\text{sek}}$$

künstlich abgeleitet werden.

Die dazu nötige Kühlwassermenge beträgt bei $t_1 = 20^0$ Zufluß- und $t_2 = 40^0$ Abflußtemperatur nach (349):

$$q = \frac{\gamma \cdot Q}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{1 \cdot 0{,}694}{1\,(40 - 20)} = 0{,}035 \text{ kg/sek} \quad \text{oder} \quad 2{,}1 \text{ l/min}.$$

An Öl mit $\gamma = 0{,}9$ und $c = 0{,}4$ würden:

$$q' = \frac{q}{\gamma \cdot c} = \frac{2{,}1}{0{,}9 \cdot 0{,}4} = 5{,}8 \text{ l/min}$$

notwendig sein.

Vgl. hierzu das Turbodynamolager, Abb. 1500, bei dem das Kühlwasser durch die hohlgegossenen Lagerschalen geleitet wird. Zur Schmierung dient bei der dargestellten älteren Ausführung noch Preßöl; es wird nahe der tiefsten Stelle durch eine breite Nut zugeführt, umspült den Zapfen und fließt oben im Scheitel ab, um in einem Ölkühler zurückgekühlt und wieder in Umlauf gesetzt zu werden. Flächendruck am Zapfen:

$$p = \frac{P}{d \cdot l} = \frac{1800}{12 \cdot 30} = 5 \text{ kg/cm}^2 .$$

Beanspruchung auf Biegung im Falle der Verwendung als Stirnzapfen:

$$\sigma_b = \frac{5\, P \cdot l}{d^3} = \frac{5 \cdot 1800 \cdot 30}{12^3} = 156 \text{ kg/cm}^2 .$$

Das schmiertechnisch günstigste Zapfenspiel ist nach (340):

$$s_{best} = 0{,}00467 \cdot d \sqrt{\frac{\eta \cdot n}{p} \cdot \frac{l}{d+l}} = 0{,}00467 \cdot 12 \sqrt{\frac{0{,}00181 \cdot 3000}{5} \cdot \frac{30}{12+30}} = 0{,}0494 \text{ cm} .$$

Zieht man den üblichen Betrag für die Oberflächenrauhigkeit von 0,002 cm ab, so bleibt als zweckmäßiger Unterschied des Bohrungs- und Zapfendurchmessers 0,0474 cm, ein Spiel, das beträchtlich größer ist als das mittlere der Laufsitzpassung von nur 0,007 cm. Auch die Schmierschichtstärke $h = \frac{s}{4} = 0{,}012$ cm gewährleistet flüssige Reibung mit großer Sicherheit.

C. Berechnung kegeliger und kugeliger Tragzapfen.

Diese seltener benutzten Formen werden kaum für wichtige Zapfen unter flüssiger Reibung verwendet werden. Deshalb ist im folgenden nur auf ihre Berechnung für halbflüssige Reibung ähnlich den zylindrischen Tragzapfen im Abschnitt IV A eingegangen.

An kegeligen Tragzapfen, Abb. 1079, besteht der Unterschied nur darin, daß bei der Bestimmung des Auflagedrucks und der Reibungsarbeit der mittlere Durchmesser zugrunde gelegt wird. Bei der Berechnung auf Biegung könnte die Mittelkraft etwas näher am dickeren Ende angenommen werden; meist wird jedoch als Hebelarm, an dem die Auflagekraft wirkt, $\frac{l}{2}$ eingesetzt.

An kugeligen Tragzapfen, Abb. 1122, darf die Auflagebreite b annähernd zu 0,7 d gewählt, der mittlere Durchmesser zu 0,9 d geschätzt und dann der mittlere Flächendruck p aus:

$$p = \frac{P}{f'} = \frac{P}{0{,}9 \cdot b \cdot d} = \frac{P}{0{,}63\, d^2} \qquad (360)$$

bestimmt werden. p sollte, wenn möglich niedriger sein, wie auf S. 644 angegeben ist.

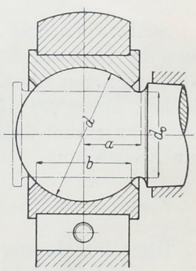

Abb. 1122. Kugelzapfen.

Die verhältnismäßig geringe Länge der Lagerschalen führt zu großen Zapfendurchmessern und Lagermaßen, die schwierige Herstellung der kugeligen Flächen an den Zapfen und in den Schalen macht die Ausführung teuer; Umstände, die begründen, daß man kugelige Zapfen tunlichst vermeiden soll. Sie finden sich als Kurbelzapfen an Sägegattern und an Lokomotiven, um geringe seitliche Ausweichungen oder Schwingungen der Schubstangen zu ermöglichen.

Die Beanspruchung des Halses auf Biegung verlangt ein Widerstandsmoment:

$$W \approx \frac{d_0^3}{10} = \frac{P \cdot a}{k_b} ,$$