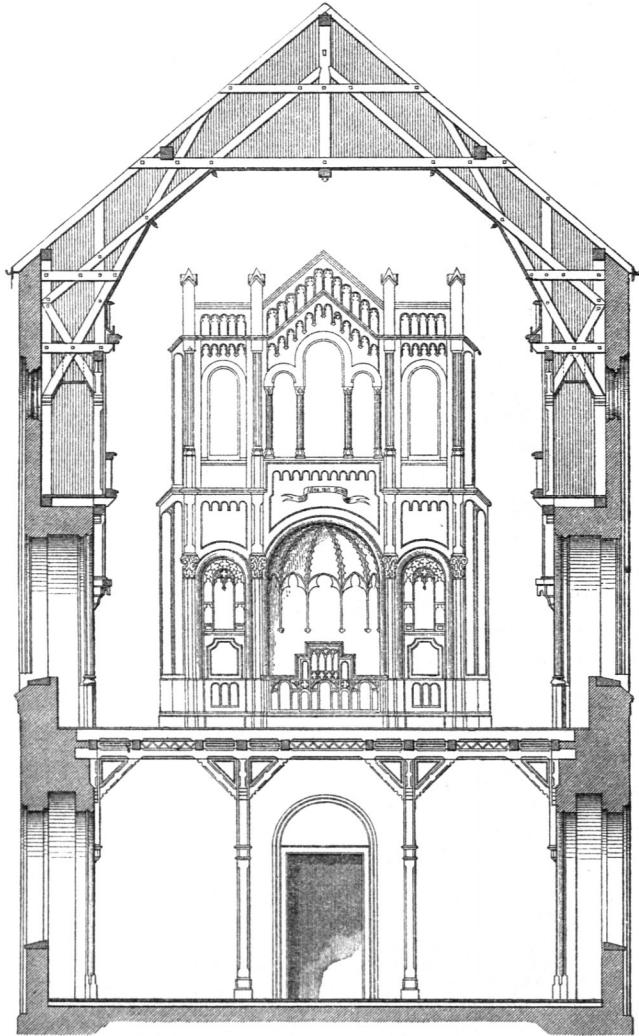


Bedingungen desselben keineswegs erfüllt sind. Die an den Knotenpunkten durchgehenden Balken (Stäbe) können Momente aufnehmen. Eine einigermaßen genaue Berechnung dürfte allerdings bedeutende Schwierigkeit bereiten.

Die vorbesprochene Construction ist als Reithalle in Wiesbaden ausgeführt und in Fig. 330<sup>161)</sup> dargestellt. Eine verwandte, ähnliche Anordnung zeigt Fig. 331<sup>162)</sup>.

Fig. 333.

Turnsaal der Gymnasiums- und der höheren Bürgerschule zu Hannover<sup>164)</sup>. $\frac{1}{150}$  n. Gr.

Ein gut aussehendes Sprengwerk zeigt auch die in Fig. 332 dargestellte Mittelhalle der im Jahre 1886 gelegentlich des Jubiläums der Universität Heidelberg errichteten Festhalle (Fig. 332<sup>163)</sup>. Das Hauptsprengwerk (entsprechend *ACDB* in der schematischen Skizze in Fig. 329) ist in den Punkten *C* und *D* durch Stäbe *c, c* zur Aufnahme der Momente fähig gemacht; diese Stäbe beanspruchen dann allerdings

<sup>164)</sup> Facf.-Repr. nach: Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1855, Bl. 11.

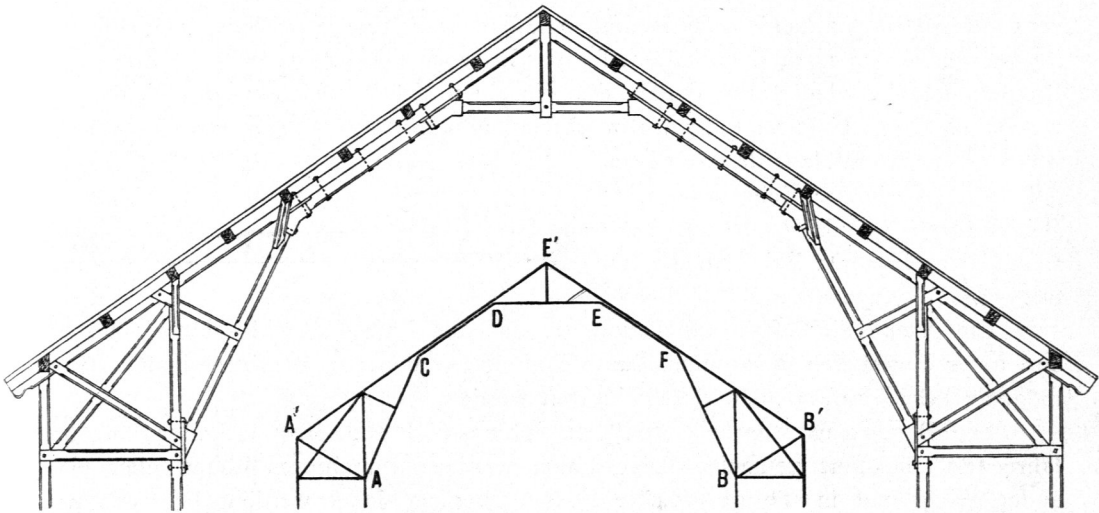
den Spannriegel  $CD$  auf Biegung, was ein Nachtheil ist. Im Uebrigen reiht sich Dreieck an Dreieck.

Das Sprengwerksdach über dem Turnsaal des Gymnasiums und der höheren Bürgerschule zu Hannover (Fig. 333<sup>164</sup>) ist offenbar ebenfalls unter dem Einflusse der *Moller'schen* Construction entstanden; hier sind gewissermaßen zwei Sprengwerke in einander geschachtelt, deren eines zwei Lastpunkte aufweist und deren anderes einen mittleren Lastpunkt hat. Die Construction ist nicht recht klar.

Auf Grund der vorstehenden Entwicklungen wird man leicht im Stande sein, ein der gestellten Aufgabe entsprechendes Sprengwerksdach zu entwerfen, andererseits auch die Güte einer Construction zu beurtheilen. Mit besonderer Aufmerksamkeit sind Binder zu behandeln, welche nach dem Schema in Fig. 334<sup>165</sup>) gebaut sind. Das Sechseck  $ACDEFB$  ist nur bei ganz bestimmter Belastungsart die Gleichgewichtsform; bei jeder anderen Belastung, also fast stets, entstehen Momente in den ver-

103.  
Andere  
Binder.

Fig. 334<sup>165</sup>).



chiedenen Binderstellen. Um dieselben in  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  aufzunehmen, hat man wohl die durchgehenden Pfettenträger  $A'E'$  und  $B'E'$  mit den Sprengwerksstreben  $CD$ , bezw.  $EF$  verschraubt, verzahnt oder verdübelt. Alsdann nimmt der Querschnitt des Pfettenträgers die in den Eckpunkten wirkenden Momente auf; für die Strecke  $CD$ , bezw.  $EF$  wirkt der Querschnitt der beiden mit einander verbundenen Hölzer den Momenten entgegen.

Constructions, wie die in Fig. 334 gezeichnete, werden besser vermieden.

#### b) Dächer mit Bogensprengwerken.

Das Bestreben, dem Dachbinder eine dem Auge angenehme Form zu geben, führte schon bei den aus einzelnen Stäben hergestellten Sprengwerksdächern zu einer dem Bogen angenäherten Vieleckform. Es ist nun auch möglich, für die tragenden Binder die vollständige Bogenform zu verwenden. Krumm gewachsene Hölzer stehen allerdings selten zur Verfügung; das Biegen starker Hölzer hat gleichfalls Schwierig-

104.  
Verschiedenheit.

165) Nach: WANDERLEY, G. Die Constructions in Holz. Halle 1877. S. 265.

keit. Man hat deshalb die Bogen aus einzelnen mit einander verbundenen Bohlen hergestellt, und zwar sind zwei verschiedene Anordnungen üblich:

- 1) Bogen aus lothrecht gestellten Bohlen und
- 2) Bogen aus wagrecht gelegten Bohlen.

105.  
Bogen aus  
lothrecht  
gestellten  
Bohlen.

Die Bogen aus lothrecht gestellten Bohlen sollen zuerst von *Philibert de l'Orme* 1561 ausgeführt sein; doch wird behauptet<sup>166)</sup>, daß sie schon mehrere Jahrhunderte früher in Gebrauch gewesen seien. In der neueren Praxis sind sie unter dem Namen »de l'Orme'sche Bogendächer« bekannt. Die Bogenstücke werden aus genügend breiten, 4 bis 6 cm starken Brettern oder Bohlen ausgeschnitten, wobei innere und äußere Krümmung dem gewählten Halbmesser entspricht. Von diesen Stücken werden nunmehr, je nach Stützweite und Krümmung, mehr oder weniger Lagen auf einander gelegt und mit einander durch hölzerne, besser durch eiserne Nägel verbunden, wobei die Stoszfugen der einzelnen Lagen gegen einander verwechselt werden müssen. Bei drei Lagen würde man z. B. die Fugen der zweiten und dritten Lage stets mit dem ersten, bezw. zweiten Drittel der Länge der zur ersten Lage verwendeten Bohlenstücke zusammenfallen lassen. Die Länge der einzelnen Bohlenstücke richtet sich nach dem Halbmesser des Bogens und der Breite der verfügbaren Bretter; man schneidet aus diesen die einzelnen Stücke nach einer Schablone, welche man, um Holz zu sparen, abwechselnd umkehrt (Fig. 335). Man kann auch, wenn es die Architektur des Gebäudes gestattet, die innere Begrenzung der Bohlenstücke geradlinig lassen. Die Länge der einzelnen Bohlenstücke beträgt 1,25 bis 2,50 m.

Fig. 335.



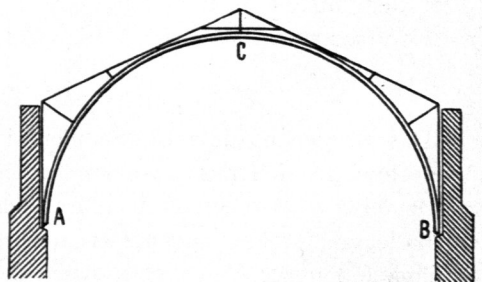
Ein Nachtheil dieser Construction ist, daß die Längsfasern des Holzes außen und unter Umständen auch innen durchschnitten werden; es ist vortheilhaft, wenn möglichst viele Fasern nicht durchschnitten werden.

106.  
Bogen aus  
wagrecht  
gelegten  
Bohlen.

Die Bogen aus wagrecht gelegten Bohlen sind von *Emy* erfunden und im Jahre 1828 bekannt gemacht. Die Bohlen werden in mehreren Lagen über einander gelegt und in die gewünschte Form gebogen; dabei werden die einzelnen Lagen durch Schraubenbolzen und Bügel mit einander zu einem Ganzen verbunden. Auch hier nagelt man die einzelnen Bretter auf einander und versetzt die Stöße. Als Vortheil dieser Construction vor der älteren ist hervorzuheben, daß man keinen Verschnitt hat, daß die Längsfasern der Bohlen nicht durchschnitten werden und daß man die Bretter, bezw. Bohlen in ihrer vollen Länge verwenden, ja bei vorübergehenden Bauten nach dem Abbrechen wieder zu anderen Zwecken gebrauchen kann. Ein Nachtheil sind die zwischen den einzelnen Bohlen auftretenden Schubspannungen, welche aber durch die Schraubenbolzen und Bügel unschädlich gemacht werden können.

Man verwendet die Bohlenbogen sowohl als Sparren, so daß also die einzelnen

Fig. 336.



166) Siehe: LANG, G. Zur Entwicklungsgeschichte der Spannwerke des Bauwesens. Riga 1890. S. 18.

Gebinde fämmtlich einander gleich sind und in geringen Abständen stehen (0,80 bis 1,50 m), so wie auch als Binder. Im letzteren Falle tragen die Bogen Pfetten und diese wieder Sparren in der sonst üblichen Weise.

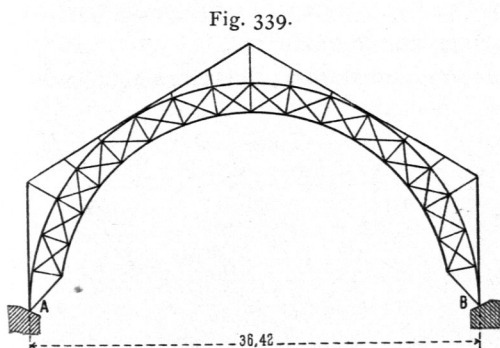
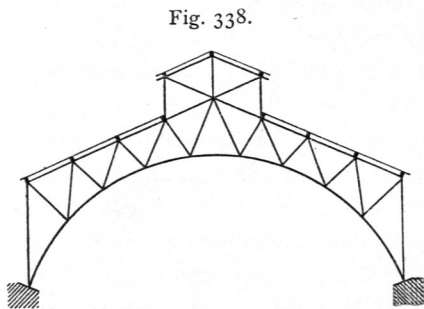
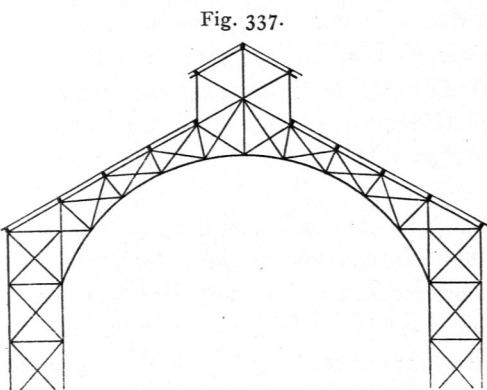
Die Bohlenbogen sind Sprengwerke von unendlich vielen Seiten, d. h. von

107.  
Statische  
Verhältnisse.

continuirlicher Krümmung; sie üben, wie alle Bogen, auf die Stützen (auch bei nur lothrechten Belastungen) schiefe Drücke aus, selbst wenn sie sich mit lothrechten Tangenten auf die Stützpunkte setzen. Bei der Berechnung ist dies zu beachten; die Ansicht, daß keine wagrechte Seitenkraft in dem auf die Seitenstütze übertragenen Drucke vorhanden sei, ist unrichtig, es sei denn, daß ein Stützpunkt wagrecht frei beweglich ist. Die Seitenmauern müssen also zur Aufnahme der schiefen Kräfte genügend stark sein. Bei der üblichen Constructionsart kann man den Bogen als einen solchen mit zwei Kämpfergelenken berechnen. Der Bogen ist aber statisch unbestimmt.

Ein Bogen bildet, wie auch ein Sprengwerk, nur für eine ganz bestimmte Belastungsart die Gleichgewichtsform; sobald die Belastung sich irgend wie ändert, wird er das Bestreben haben, seine Form zu ändern, d. h. die der neuen Belastung entsprechende Gleichgewichtsform anzunehmen. Diese Formänderung darf nicht eintreten; der Bogen muß im Stande sein, auch bei geänderter Belastung seine alte Form zu behalten. Um dies zu erreichen, macht man entweder den Querschnitt des Bogens so groß, daß er den auf die Formänderung hinwirkenden Momenten ohne unzulässige Beanspruchung widerstehen kann, oder verbindet den Bogen mit einem aus Dreiecken zusammengesetzten Fachwerk.

Die einfachste Anordnung ist in Fig. 336 angegeben: der tragende Bogen



$ACB$  ist als steifer Bohlenbogen gedacht; nach aufsen soll das Dach ein Satteldach sein; es sind deshalb Gurtsparren angeordnet und mit dem Bohlenbogen durch Zangen verbunden. Wenn Bogen und Gurtsparren in sehr innige Verbindung gebracht werden, so kann man den Querschnitt der Sparren für die Berechnung des Bogens theilweise mit in Betracht ziehen.

Man kann auch, wie in Fig. 337 angedeutet ist, ähnlich wie bei den neueren Eisendächern, ein richtiges Fachwerk herstellen, dessen innere Begrenzung die

Bogengurtung bildet und dessen obere Gurtungen parallel den Dachflächen sind. Die Stäbe der oberen Gurtung werden zweckmäßig als durchlaufende Hölzer genommen, das Gitterwerk mit nach dem Bogenmittelpunkt laufenden Pfosten und gekreuzten Schrägstäben in jedem Felde. Statt dieses Gitterwerkes kann man auch Netzwerk nach Fig. 338 wählen. Für sehr weit gespannte Hallen empfiehlt es sich vielleicht, Bogen mit zwei gleich laufenden Gurtungen zu verwenden, welche durch Gitterwerk mit einander verbunden sind und zweckmäßig bis zum Sockelmauerwerk herabreichen (Fig. 339). Beide Bogen können als Bohlenparren und die radialen Pfosten als Doppelzangen hergestellt werden. Auch ist nicht ausgeschlossen, daß man mit Zuhilfenahme des Eisens bei den Fußpunkten des Bogens zwei Kämpfergelenke und im Scheitel ein drittes Gelenk anbringt, wodurch der Bogen für die Ermittlung der Kämpferdrücke statisch bestimmt würde.

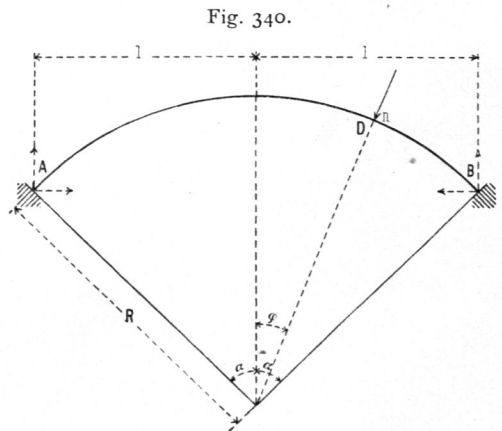
108.  
Berechnung  
der  
Bohlenbogen.

Bei der Berechnung muß der Bohlenbogen als elastischer Bogen angesehen und nach der Theorie der krummen Träger berechnet werden. Der Querschnitt des Bogens wird auf seine ganze Länge constant ausgeführt, und die Verhältnisse liegen theoretisch eben so, wie beim frei tragenden Wellblechdache, für welches der Verfasser der vorliegenden Kapitel die Berechnung durchgeführt und Formeln aufgestellt hat<sup>167)</sup>. Bei dieser Berechnung sind allerdings Durchzüge angenommen, welche die wagrechten Kräfte der beiden Stützpunkte ausgleichen; man sieht aber leicht, daß, wenn die elastische Veränderung der Zugstange gleich Null gesetzt wird, die dann erhaltenen Formeln genau unserer Annahme fester Kämpferpunkte entsprechen müssen. Ferner trifft die dort bezüglich des Winddruckes gemachte Annahme hier nicht stets zu. Dort ist angenommen, daß die Dachfläche die Bogenkrümmung habe und daß also der Winddruck auf die Dachfläche stets radial wirke. Wenn aber über dem Bogen Gurtparren liegen, welche mit dem Bogen durch radiale Zangen verbunden sind, so kann man mit genügender Genauigkeit annehmen, daß die Winddrücke auch hier radial wirken, und wird bei Benutzung der a. a. O. entwickelten Formeln keinen großen Fehler machen. Will man jedoch auch hier genauer rechnen, so kann man auf dem in der genannten Schrift gezeigten Wege auch diese Rechnung ohne besondere Schwierigkeit durchführen.

Der Berechnung sind nun die folgenden Annahmen und Bezeichnungen zu Grunde gelegt. Der Bogen ist ein Kreisbogen (Fig. 340) vom Halbmesser  $R$ ; beide Auflager liegen gleich hoch und wirken wie Kämpfergelenke; der Mittelpunktswinkel des ganzen Bogens ist  $2\alpha$ . Das Eigengewicht ist für das lauf. Meter der Grundfläche des Bogens gleich groß eingeführt und für das Quadr.-Meter der Grundfläche mit  $g$  bezeichnet.

Die Schneelast  $p$  für das Quadr.-Meter der Grundfläche ist einmal als das ganze Dach, sodann als nur eine Dachhälfte gleichmäßig belastend eingeführt.

Die Windbelastung ist für das Quadr.-



<sup>167)</sup> Siehe: LANDSBERG, TH. Berechnung freitragender Wellblechdächer. Zeitschr. f. Bauw. 1891, S. 381. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Berlin 1891.

Meter schräger Dachfläche, welche den Winkel  $\varphi$  mit der Wagrechten einschließt, also in einem Punkte  $D$  dessen Mittelpunktswinkel  $\varphi$  ist,

$$n = a \sin \varphi.$$

Die Stützweite des Bogens wird mit  $2l$  bezeichnet. Alle Formeln beziehen sich auf ein Stück Dach, welches senkrecht zur Bildfläche gemessen  $1^m$  lang ist.

Alsdann erhält man die folgenden Rechnungsergebnisse:

1) Belaftung durch das Eigengewicht. Die wagrechte Seitenkraft des Kämpferdruckes in  $A$ , bezw.  $B$  ist

$$H_g = \frac{g R A_1}{C}.$$

$$\text{Darin bedeutet } A_1 = \frac{7}{6} \sin^3 \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha + \alpha \cos^3 \alpha - \frac{\sin \alpha}{2},$$

$$C = \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Im Scheitel des Bogens ist das Moment

$$M'_{g \max} = g R^2 \left[ \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{A_1}{C} (1 - \cos \alpha) \right].$$

Ein negativer Größtwerth des Momentes findet für den Mittelpunktswinkel  $\varphi_{\max}$  statt und hat die Gröfse

$$M''_{g \max} = -g R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{C} \right)^2 - \frac{A_1}{C} \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2} \right].$$

Für die verschiedenen Werthe von  $\alpha$ , also für die verschiedenartigen Bogen ist die folgende Tabelle ausgerechnet; der Bogen mit  $\alpha = 90^\circ$  würde z. B. dem Halbkreife entsprechen.

$\alpha$	$A_1$	$C$	$H_g$	$M'_{g \max}$	$M''_{g \max}$	$\varphi_{\max}$ abgerundet
25	0,00385	0,00407	0,9460	0,00067	-0,00079	18°54'
30	0,00914	0,00996	0,9382	0,00070	-0,00260	20°14'
35	0,01893	0,02112	0,8965	0,00236	-0,00299	26°18'
40	0,03488	0,04028	0,8660	0,00399	-0,00499	30°
45	0,05893	0,07080	0,8323	0,00622	-0,00784	33°40'
50	0,09273	0,11658	0,7954	0,00928	-0,01165	37°18'
60	0,19386	0,27176	0,7184	0,01832	-0,02276	44°30'
75	0,41232	0,73437	0,5615	0,05036	-0,04579	55°51'
90	0,66667	1,57080	0,4244	0,07559	-0,09006	64°53'
Grad			$\cdot g R$	$\cdot g R^2$	$\cdot g R^2$	

Man sieht, die absolut genommen ungünstigsten Momente sind die Werthe  $M''_{g \max}$  an den Stellen, welche den Mittelpunktswinkeln  $\varphi_{\max}$  entsprechen. Die Momente werden in Kilogr.-Met. und die Werthe  $H_g$  in Kilogr. erhalten.

2) Belaftung durch volle Schneelast. Die Werthe für  $H$  und ungünstigstes Moment werden aus den unter 1 entwickelten Gleichungen erhalten, indem man einfach  $p$  anstatt  $g$  einführt.

3) Belaftung durch einseitige Schneelast. Die wagrechte Seitenkraft  $H_p$  der Kämpferdrücke ist halb so groß, wie bei voller Belaftung. Man erhält daher

$$H_p = \frac{p R A_1}{2 C}.$$

Nennt man den Größtwerth des Momentes auf der belasteten Seite  $M_{\beta max}$ , denjenigen auf der unbelasteten Seite  $M'_{\beta max}$ , die zugehörigen Mittelpunktswinkel  $\varphi_{max}$  und  $\varphi'_{max}$ , so erhält man die folgende Tabelle, in welche auch die an den Maximalstellen der Momente wirkenden Axialkräfte  $P_{\beta}$ , bzw.  $P'_{\beta}$  aufgenommen sind.

$\alpha$	$H_{\beta}$	Belastete Hälfte			Unbelastete Hälfte		
		$\varphi_{max}$	$M_{\beta max}$	$P_{\beta}$	$\varphi'_{max}$	$M'_{\beta max}$	$P'_{\beta}$
25	0,4730	11°48'	0,0110	0,4831	12°35'	-0,0114	0,4846
30	0,4691	14°	0,0145	0,4835	14°55'	-0,0168	0,4856
35	0,4483	15°33'	0,0201	0,4653	17°44'	-0,0212	0,4706
40	0,4330	17°5'	0,0252	0,4529	20°22'	-0,0268	0,4620
45	0,4162	18°20'	0,0304	0,4384	22°	-0,0325	0,4520
50	0,3977	19°20'	0,0356	0,4215	26°2'	-0,0391	0,4430
60	0,3567	20°30'	0,0462	0,3808	31°15'	-0,0516	0,4170
90	0,2122	18°48'	0,0778	0,2220	49°40'	-0,0780	0,3280
Grad	$\cdot \beta R$		$\cdot \beta R^2$	$\cdot \beta R$		$\cdot \beta R^2$	$\cdot \beta R$

Bei den Bogen mit großen Mittelpunktswinkeln sind diese Ergebnisse nur richtig, wenn die Dachneigung nicht dem Bogen folgt, weil sonst auf den steilen, nahe den Kämpfern gelegenen Bogentheilen der Schnee nicht liegen bleibt. Für die meist üblichen Anordnungen aber sind die Tabellenwerthe richtig. Man sieht, daß die größten Momente auf der nicht belasteten Seite stattfinden. Der Vergleich mit der Tabelle unter 1 lehrt ferner, daß mit Ausnahme des Werthes  $\alpha = 90$  Grad für alle Bogen die einseitige Schneelast ungünstiger ist, als die beiderseitige; nur für den Halbkreisbogen und die diesem nahe kommenden Bogen ist volle Schneelast die ungünstigere.

4) Belastung durch Winddruck. Da beide Kämpfer hier als fest gelten, so ist nur der Fall in das Auge zu fassen, welcher in der Eingangs erwähnten Schrift zuerst behandelt ist, daß nämlich die Belastung durch Wind von der Seite des festen Auflagers stattfindet. Man erhält für die Windbelastung der einen Seite die lothrechten und wagrechten Seitenkräfte der Auflagerdrücke (Fig. 341):

$$D_0 = \frac{Ra}{2} \left( \frac{2 \sin^3 \alpha - \sin \alpha + \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \right),$$

$$D_1 = \frac{Ra}{4} \left( \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \right),$$

$$H_w - H'_w = \frac{Ra}{2} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha),$$

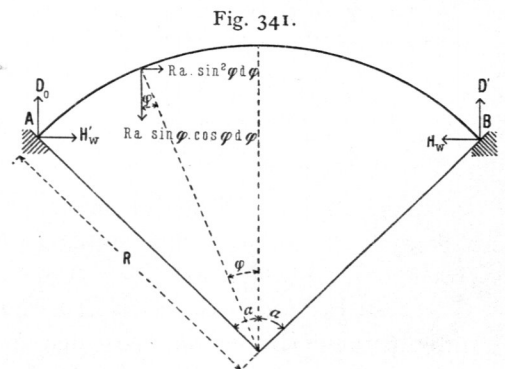
$$H_w = \frac{BaR}{2C},$$

in welcher Gleichung  $C$  denselben Werth hat, wie auf S. 135, und

$$B = \frac{9}{4} \sin^2 \alpha - 2 + 2 \cos \alpha + \frac{\alpha^2}{4} + \alpha^2 \cos^2 \alpha - \frac{5}{2} \alpha \cos \alpha \sin \alpha$$

bedeutet. Abkürzungsweise werde  $\frac{B}{2C} = \rho$  gesetzt; alsdann ist

$$H_w = \rho a R.$$



Man erhält für die verschiedenen Werthe  $\alpha$  die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werthe.

$\alpha$	$B$	$C$	$\rho = \frac{B}{2C}$
25°	0,00065	0,00407	0,0795
30°	0,00189	0,00996	0,0950
35°	0,00468	0,02112	0,1108
40°	0,01019	0,04028	0,1260
45°	0,02010	0,07080	0,1420
50°	0,03671	0,11658	0,1574
60°	0,10219	0,27176	0,1880
90°	0,86685	1,57080	0,2760

Aus dieser Tabelle können nun leicht die wagrechten Seitenkräfte  $H_w$  und  $H'_w$ , welche von den Bogen auf die Seitenmauern als Schub übertragen werden, entnommen und mit den lothrechten Seitenkräften  $A$  und  $B$  zusammengesetzt werden.

Die größten durch den Winddruck an den beiden Seiten erzeugten Momente finden bezw. in den zu den Mittelpunktwinkeln  $\varphi_{max}$  und  $\psi_{max}$  gehörigen Bogenpunkten statt; dieselben haben die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werthe.

Windseite				Vom Winde abgewendete Seite		
$\alpha$	$\varphi_{max}$	$M_{wmax}$	$P$	$\psi_{max}$	$M'_{wmax}$	$P$
25	16°	0,0032	0,0753	11°26'	-0,0023	0,0811
30	18°40'	0,0055	0,0878	13°46'	-0,0039	0,0978
35	21°50'	0,0090	0,0997	16°6'	-0,0058	0,1150
40	24°50'	0,0135	0,1096	18°26'	-0,0093	0,1330
45	27°50'	0,0192	0,1190	20°42'	-0,0135	0,1520
50	31°	0,0264	0,1257	23°2'	-0,0186	0,1710
60	36°45'	0,0459	0,1320	27°44'	-0,0328	0,2120
90	53°7'	0,1620	0,0900	42°10'	-0,1224	0,3700
Grad		$\cdot R^2 a$	$\cdot R a$		$\cdot R^2 a$	$\cdot R a$

Die an den Maximal-Momentstellen auftretenden Axialkräfte  $P$  sind in obige Tabelle gleichfalls aufgenommen.

Für andere Werthe von  $\alpha$ , als die in die Tabellen aufgenommenen, genügt es, zu interpoliren; doch macht auch eine genaue Berechnung nach den Formeln der erwähnten Arbeit keine Schwierigkeit.

Beispiel. Es soll ein Bogendach von 16 m Stützweite zwischen den Kämpfern construiert werden; die Bogenform soll ein Halbkreis vom Halbmesser  $R = 8$  m sein. Das Dach ist nach aufsen als Satteldach ausgebildet mit der Dachneigung  $\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$ ; das Dach ist mit Pappe gedeckt. Das Eigengewicht auf das Quadr.-Meter Grundfläche wird zu  $g = 60$  kg angenommen.

1) Eigengewicht für 1 lauf. Met. Dachlänge:

$$H_g = 0,4244 g R = 0,4244 \cdot 60 \cdot 8 = \approx 204 \text{ Kilogr.};$$

$$A = B = 8 \cdot 60 = 480 \text{ Kilogr.};$$

$$M_{gmax} = -0,09006 g R^2 = -0,09006 \cdot 60 \cdot 64 = -345,83 \text{ Kilogr.-Met.} = -34583 \text{ Kilogr.-Centim.}$$

2) Belastung durch Schnee. Volle Schneelast erzeugt ein größeres Moment ( $-0,09006 \rho R^2$ ),



als einseitige Schneelast ( $-0,078 p R^2$ ). Es soll also erstere der Berechnung zu Grunde gelegt werden. Man erhält, wenn  $p = 75$  kg ist,

$$H_p = 0,4244 p R = 0,4244 \cdot 75 \cdot 8 = \infty 255 \text{ Kilogr.};$$

$$A = B = 8 \cdot 75 = 600 \text{ Kilogr.};$$

$$M_p^{max} = -0,09006 p R^2 = -0,09006 \cdot 75 \cdot 64 = -432,29 \text{ Kilogr.-Met.} = -43229 \text{ Kilogr.-Centim.}$$

3) Belastung durch Winddruck. Der Winddruck für das Quadr.-Met. senkrecht getroffener Fläche sei  $a = 120$  kg. Dann ist

$$H_w = \rho a R = 0,276 \cdot 120 \cdot 8 = \infty 265 \text{ Kilogr.};$$

$$H_w' = -\frac{Ra}{2} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + H_w = -\frac{8 \cdot 120}{2} 1,57 + 265 = -489 \text{ Kilogr.};$$

$$H_w'' = -489 \text{ Kilogr.};$$

$$A = \frac{8 \cdot 120}{4} = 240 \text{ Kilogr.}, \text{ und } B = \frac{8 \cdot 120}{4} = 240 \text{ Kilogr.}$$

Das größte Moment findet auf der Windseite statt; dasselbe ist positiv; da aber das durch Eigengewicht und Schneedruck erzeugte Maximalmoment nahe bei dieser Stelle negativ ist, so hebt es sich mit dem positiven Windmoment zum Theile auf. Gefährlicher ist demnach das negative Windmoment auf der vom Winde abgewendeten Seite, welches sich mit den negativen Momenten durch Eigengewicht und Schnee addirt. Dasselbe ist

$$M_w^{max} = -0,1224 R^2 a = -0,1224 \cdot 64 \cdot 120 = -940 \text{ Kilogr.-Met.} = -94000 \text{ Kilogr.-Centim.}$$

4) Querschnittsbestimmung. Nimmt man nun, etwas ungünstiger als in Wirklichkeit, an, daß alle Größtmomente an demselben Bogenpunkte stattfinden, und addirt sie einfach, so erhält man als ungünstigstenfalls auftretendes Größtmoment:

$$M_g + M_p + M_w = -(34583 + 43229 + 94000) = -171812 \text{ Kilogr.-Centim.},$$

also

$$M_{max} = -171812 \text{ Kilogr.-Centim.}$$

Dieses Maximalmoment kommt auf die Dachlänge von 1 m. Bei einem Binderabstande  $e$  entfallen auf jeden Binder  $e$  Met. Dachlänge; das von einem Binder aufzunehmende Moment ist alsdann ( $e$  in Met. einzuführen)

$$M_{max} = -171812 e \text{ Kilogr.-Centim.}$$

Ist der Binderabstand  $e = 3$  m, so wird (absolut genommen)

$$M_{max} = 515436 \text{ Kilogr.-Centim.},$$

und ohne Rücksicht auf die Axialkraft muß

$$\frac{f}{a} = \frac{M_{max}}{K}$$

sein.  $K$  kann hier wegen der nur ganz ausnahmsweise gleichzeitig auftretenden ungünstigsten Belastungen ziemlich hoch angenommen werden; wir setzen  $K = 120$  Kilogr. für 1 cm und nehmen den Querschnitt rechteckig mit der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  an. Dann wird

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{515436}{120} \text{ und } h^2 = \frac{515436}{120} \cdot \frac{6}{b} = \frac{25771}{b}.$$

Ist  $b = 20$  cm, so wird

$$h^2 = \frac{25771}{20} = 1288 \text{ und } h = 35,9 = \infty 36 \text{ Centim.}$$

Man kann also den Bogen aus 9 über einander gelegten Lagen von je 4 cm starken und 20 cm breiten Brettern construiren.

5) Wirkung des Dachbinders auf die Seitenstützen. Die verschiedenen Belastungen rufen in den Kämpferpunkten Stützdrücke hervor, deren wagrechte, bezw. lothrechte Seitenkräfte auf Grund vorstehender Rechnungen in nachstehender Tabelle zusammengestellt sind, wenn  $e$  den Binderabstand (in Met.) bezeichnet.

Belastungsart	Linker Kämpfer		Rechter Kämpfer	
	$D_0$	$H$	$D'$	$H$
Eigengewicht . . .	480 $e$	204 $e$	480 $e$	204 $e$
Volle Schneelast . .	600 $e$	255 $e$	600 $e$	255 $e$
Winddruck links . .	240 $e$	-489 $e$	240 $e$	265 $e$
Winddruck rechts . .	240 $e$	265 $e$	240 $e$	-489 $e$

K i l o g r.

Die wagrechte Seitenkraft des bei linksseitigem Winddruck im linken Kämpfer entstehenden Druckes ist nach außen gerichtet; dies bedeutet das Minuszeichen. Da nun, nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung, der auf die Stütze vom Binder ausgeübte Druck stets demjenigen genau entgegengesetzt wirkt, welcher von der Stütze auf den Binder wirkt, so erstrebt der von links kommende Winddruck Umsturz der linksseitigen Mauer nach innen. Ungünstigste Stützenbeanspruchung findet demnach bei der angenommenen Belastung auf der rechten Seite statt, wo die wagrechten durch alle drei Belastungen erzeugten Seitenkräfte in gleichem Sinne wirken, d. h. auf die Binder nach innen, auf die Stützen nach außen. Die ungünstigsten Werthe der Seitenkräfte sind:

$$\Sigma(D_1) = (480 + 600 + 240) e = 1320 e.$$

$$\Sigma(H_{rechts}) = (204 + 255 + 265) e = 724 e.$$

Daraus kann nun in einem jeden Falle leicht das Umsturzmoment bestimmt und die Stabilität des Mauerpfeilers ermittelt werden. Nur kurz erwähnt zu werden braucht, daß bei von rechts kommender Windbelastung der linke Kämpfer in derselben Weise wirkt, wie oben der rechte.

Bei voller Schneebelastung, ohne Winddruck, ergibt sich

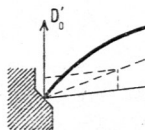
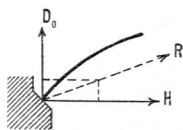
$$\Sigma(H_{links}) = \Sigma(H_{rechts}) = 459 e \quad \text{und} \quad \Sigma(D_1) = \Sigma(D_2) = 1080 e.$$

Die gefährlichen wagrechten Schubkräfte, so weit sie nicht von den Winddrücken herkommen, kann man von den Seitenstützen durch eiserne Durchzüge fern halten, welche die beiden Kämpfer oder zwei über den Kämpfern symmetrisch zur lothrechten Mittelaxe gelegene Bogenpunkte verbinden. Man verwandelt durch diese Eisenstäbe eigentlich das Sprengwerksdach in ein Balkendach; denn nunmehr heben sich die wagrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke gegenseitig auf, und es bleiben nur die lothrechten Auflagerdrücke. Dennoch muß der Sprengwerks-, bezw. Bogenbinder wie ein Sprengwerk, bezw. Bogen berechnet werden; denn für den Dachbinder selbst macht es keinen grundlegenden Unterschied, ob die schiefe Auflagerkraft  $R$  als Mittelkraft der von der Stütze geleisteten Seitenkräfte  $H$  und  $D_0$  auftritt

110.  
Sprengwerks-  
bogen mit  
Durchzügen.

oder als Mittelkraft des lothrechten Stützendruckes  $D_0'$  und der Stabspannung  $S$  (Fig. 342). Die Binder der Sprengwerksdächer mit Durchzug können also ebenfalls hier mit behandelt werden.

Fig. 342.



Auf die Stützpunkte der Binder werden nach Vorstehendem nur lothrechte Kräfte und die durch den Winddruck erzeugten wagrechten Seitenkräfte übertragen. Dieselben werden berechnet, wie bei den Balkendächern<sup>168)</sup> angegeben ist. Eine Ungewissheit erhebt sich dadurch, daß nicht, wie dort angenommen ist, bei den Holzdächern ein Auflager als beweglich ausgeführt wird. Man kann für überschlägliche Rechnungen annehmen, daß jedes der beiden Auflager die Hälfte der wagrechten Seitenkraft des gesammten Winddruckes übernimmt.

111.  
Berechnung.

Was den Bogen anbelangt, so berechne man, wie bei den Bogen ohne Durchzug gezeigt worden ist; die wagrechte Kraft  $H$ , welche am Kämpfer wirkend dort vom Seitenmauerwerk auf den Bogen übertragen wurde, wirkt hier als Seitenkraft der Spannung des Durchzuges. Dabei wird die elastische Formänderung des Durchzuges unberücksichtigt gelassen, was hier unbedenklich zulässig ist. Aus der Größe des Werthes  $H$ , der demnach als bekannt angenommen werden kann, erhält man nun leicht die Spannung im Durchzuge.

Es sei (Fig. 343) für irgend eine Belastungsart  $R$  die Mittelkraft, welche von der Stütze geleistet werden muß, d. h. die Mittelkraft der oben mit  $D_0$ , bezw.  $H$  bezeichneten Seitenkräfte; alsdann muß  $R$  durch den lothrechten Auflagerdruck, der

<sup>168)</sup> Siehe Theil I, Band 1, zweite Hälfte (Art. 416, S. 380; 2. Aufl.: Art. 205, S. 187) dieses »Handbuches«.

hier mit  $D_0'$  bezeichnet werde, und durch die Spannung  $S_0$  des nächsten Stabes vom Durchzuge geleitet werden. Da  $H$  und  $D_0$  bekannt sind, so auch  $R$ , und man sieht leicht, daß stattfindet:

$$S_0 = \frac{H}{\cos \gamma_0} \quad \text{und} \quad D_0' = D_0 - H \operatorname{tg} \gamma_0.$$

Für  $\gamma_0 = 0$  wird  $S_0 = H$  und  $D_0' = D_0$ .

Die Spannungen der einzelnen Stäbe des Durchzuges und der lothrechten Hängestäbe folgen leicht aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knotenpunkten des Durchzuges. Es ist

$$S_1 = \frac{H}{\cos \gamma_1}, \quad S_2 = \frac{H}{\cos \gamma_2};$$

$$V_1 = H(\operatorname{tg} \gamma_0 - \operatorname{tg} \gamma_1), \quad V_2 = H(\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2).$$

Die vieleckige Form des Durchzuges hat zur Folge, daß in den Anschlußpunkten der Hängestäbe an den Bogen auf diesen die Spannungen dieser Stäbe als Lasten übertragen werden; dadurch wird die Rechnung verwickelter. Die Kräfte  $V$  sind aber bei geringem Pfeil des Durchzuges so klein, daß man dieselben für die Berechnung des Bogens unbeachtet lassen kann.

Wenn der Durchzug wagrecht ist, so sind

$$S_0 = S_1 = S_2 \dots = H \quad \text{und} \quad V_1 = V_2 = V_3 \dots = \text{Null}.$$

Man ordne aber doch einige Hängestäbe an, da sonst der Durchzug in Folge seines Gewichtes etwas durchhängt.

Der Durchzug wird am zweckmäßigsten nach den beiden Kämpfern, den Fußpunkten des Bogens geführt (vergl. die schematische Darstellung in Fig. 344). In Fig. 345<sup>169)</sup> u. 346<sup>170)</sup> sind zwei Dachstühle dargestellt, in denen außer von den Kämpferpunkten aus auch noch von den höher gelegenen Bogenpunkten  $C$  und  $D$  aus Verbindungsstäbe auslaufen. Dadurch wird die Kraftwirkung unklar. Diese Stäbe  $CI$  und  $IID$  dienen wohl dazu, den Schub der auf die Bogen gelegten besonderen Gurtungsparren aufzuheben; man lasse sie bei  $C$  und  $D$  um den Bogen herumgreifen und nach  $C'$ , bzw.  $D'$  laufen. Die Spannung in  $AI$  ist nach Vorstehendem leicht zu finden; aus derselben ergeben sich diejenigen in  $III$ . Zu der Spannung in  $III$ , welche hierdurch erzeugt wird, kommt noch diejenige hinzu, welche in  $C'I$  herrscht.

Die in Fig. 337, 338 u. 339 (S. 133) vorgeführten Bogendächer, bei denen der Bogen als ein Gitterwerk gebildet ist, können auch mit Durchzügen hergestellt werden.

Fig. 343.

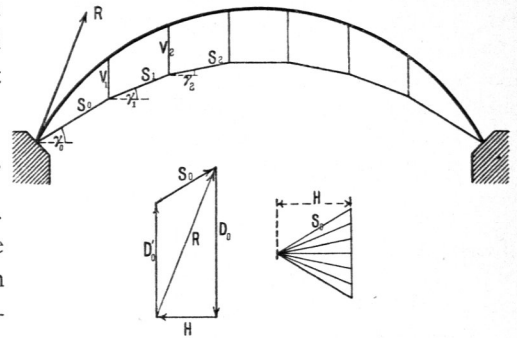
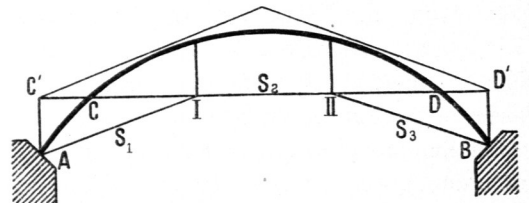


Fig. 344.

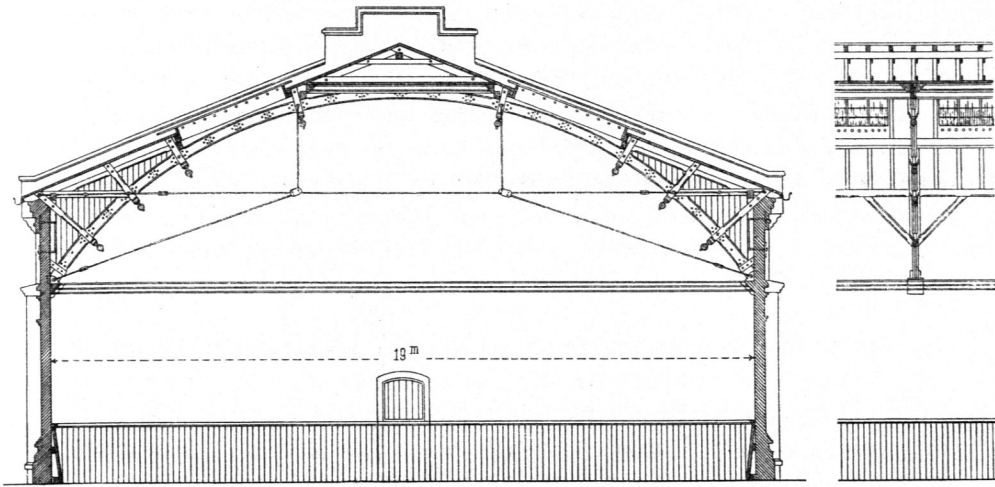


112.  
Verschiedene  
Constructions.

<sup>169)</sup> Nach freundlichen Mittheilungen des Herrn Professor *Manhot* in Frankfurt a. M. — Vergl. auch: *Centrabl. d. Bauverw.* 1890, S. 117.

<sup>170)</sup> Nach: *Deutsche Bauz.* 1893, S. 577.

Fig. 345.

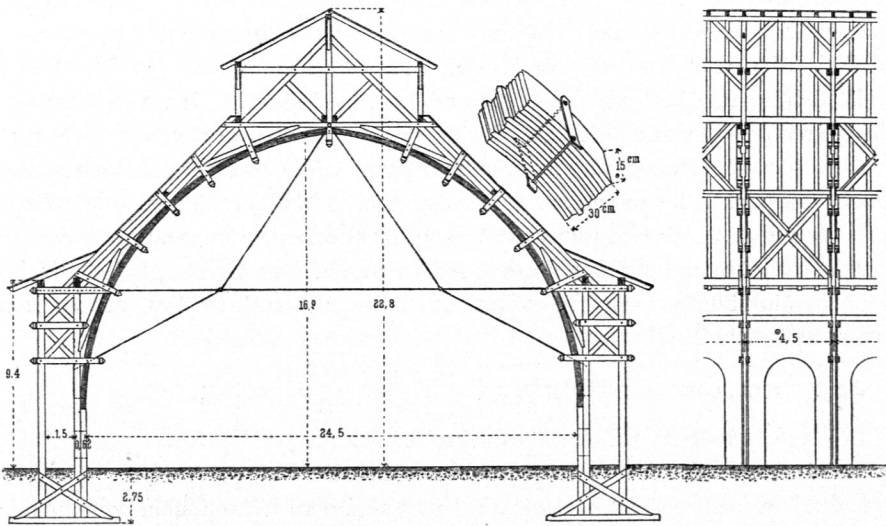


Vom Taterfall zu Mannheim 169).

$\frac{1}{200}$  n. Gr.

Arch.: *Manhot.*

Fig. 346.



Von der Festhalle für das Mittelrheinische Turnfest zu Darmstadt 1893 170).

$\frac{1}{375}$  n. Gr.

## 28. Kapitel

### Hölzerne Thurmdächer, Zelt- und Kuppeldächer.

#### a) Hölzerne Thurmdächer.

Thurmdächer sind steile Zelttücher über quadratischer oder achteckiger, auch wohl kreisförmiger, selten über einer anders geformten Grundfläche. Dieselben

werden hauptsächlich durch den Winddruck gefährdet; Schnee bleibt wegen der Steilheit nicht liegen; das Eigengewicht erzeugt keine bedeutenden Beanspruchungen.

Eine gute Thurmdach-Construction muß folgenden Anforderungen Genüge leisten: sie muß standfest und fähig sein, auch bei ungünstigster Belastung die auf sie einwirkenden Kräfte sicher und, ohne merkbare Formänderung zu erleiden, in das unterstützende Mauerwerk zu leiten; sie muß der Zerstörung durch Feuchtigkeit und Faulen möglichst wenig Angriffspunkte bieten; sie muß leichten und sicheren Aufbau gestatten, bequemes Ausbessern und Auswechselln etwa schadhafte gewordener Hölzer ermöglichen; sie darf nicht zu viel Holz erfordern, um nicht zu theuer zu werden.

### 1) Statistische Verhältnisse und theoretische Grundlagen für die Construction.

114.  
Kräfte.

Die Thurmdächer setzen sich stets auf hohe Mauern; für diese sind aber wagrechte Kräfte besonders gefährlich; deshalb ordne man die Construction stets so an, daß die wagrechten Kräfte möglichst gering werden. Dem gemäß sind Sprengwerks-Constructionen, welche stets auch wagrechte Kräfte auf die Mauern übertragen, hier ausgeschlossen. Die schiefen Windkräfte haben allerdings stets wagrechte auf die Construction wirkende Seitenkräfte, die man nicht fortfchaffen kann. Man muß aber suchen, diese gefährlichen Seitenkräfte und ihr Umsturzmoment so klein wie möglich zu machen; durch eine zweckmäßige Form des Thurmdaches ist eine solche Verkleinerung wohl möglich, wie die Ueberlegung unter  $\alpha$  zeigt.

115.  
Wind-  
belastungen.

$\alpha$ ) Windbelastungen. Nach den Untersuchungen in Theil I, Band 1, zweite Hälfte (2. Aufl., S. 23 u. 24) dieses »Handbuches« ist der Winddruck gegen ein achtseitiges Prisma kleiner, als derjenige gegen ein vierseitiges Prisma; das Gleiche gilt für die Pyramide. Nennt man die Höhe des Thurmdaches  $h$ , den Winddruck auf das Flächenmeter senkrecht getroffener Fläche  $p$ , die Seite des Quadrates, bezw. des Grundquadrates der Grundfläche  $B$ , nimmt man den Winddruck als wagrecht wirkend an und berechnet (mit geringem Fehler) so, als ob die Seitenflächen lothrecht ständen, so erhält man als die auf Umsturz des ganzen Thurmdaches wirkende Kraft  $W$ :

$$\text{bei quadratischer Grundfläche } W = p \frac{Bh}{2} = 0,5 p B h;$$

$$\text{bei regelmässiger Achteck-Grundfläche (Fig. 349) } W = 0,414 p B h;$$

$$\text{bei kreisförmiger Grundfläche (Kegeldach) } W = 0,39 p B h;$$

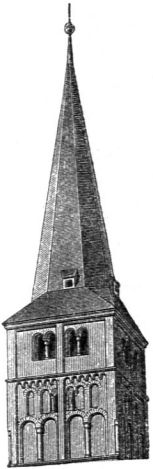
d. h. die auf Umsturz wirkende Kraft ist bei einem Thurmdach über regelmässigem Achteck um etwa 17 Procent und bei einem Kreis Kegeldach um etwa 22 Procent geringer, als bei einem Dach über quadratischer Grundfläche (Höhe und untere Breite als gleich angenommen).

Bei dreieckiger Seitenfläche des Thurmdaches liegt die Mittelkraft der Windkräfte in ein Drittel der Höhe über der Grundfläche; das Umsturzmoment ist dann:

$$M_{\text{Umsturz}} = W \frac{h}{3}.$$

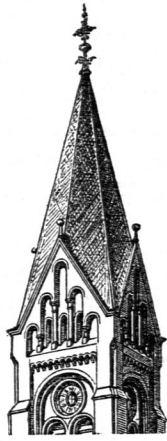
Eine Verkleinerung des Umsturzmoments kann sowohl durch Verringerung von  $W$ , wie auch von  $h$  erreicht werden; die letztere Verkleinerung, d. h. eine tiefere Lage von  $W$  wird durch Verbreitern der Grundfläche und Anwendung verschiedener Dachneigungen in den verschiedenen Theilen des Thurmdaches erzielt. Eine solche in

Fig. 347.



Von der Kirche zu Schwarzrheindorf<sup>171)</sup>.

Fig. 348.



Von der reformirten Kirche zu Insterburg<sup>172)</sup>.

Fig. 347<sup>171)</sup> dargestellte Anordnung hat neben dem Vortheil der tiefen Lage von  $W$  noch den weiteren statischen Vorzug, dass die den unteren Theil belastenden Winddrücke grössere Winkel mit der Wagrechten einschliessen, als die auf den steileren Theil wirkenden; sie sind kleiner und haben eine günstigere Richtung.

Statisch günstig ist auch die vielfach ausgeführte, architektonisch sehr wirkfame Anordnung von vier Giebeln (Fig. 348<sup>170)</sup>; durch dieselben wird ein Theil des Daches der Einwirkung des Windes entzogen.

Endlich ist auch eine Form des Thurmdaches zweckmässig, bei welcher dasselbe eine über Ecke gestellte vierseitige Pyramide bildet, deren Kanten nach den Spitzen der vier Giebel laufen; diese sog. Rhombenhaube (Rautenhaube) ist günstiger, als die einfache Pyramide, deren

Kanten nach den Ecken des Grundquadrats laufen. Die grösste auf Umkanten wirkende Windkraft in der Diagonalebene ist allerdings genau so gross, wie die in der Mittelebene des Thurmes ungünstigstenfalls wirkende; beide sind aber annähernd 30 Procent geringer, als wenn das Dach als vierseitige Pyramide mit nach den Ecken des Quadrats laufenden Kanten hergestellt wäre.

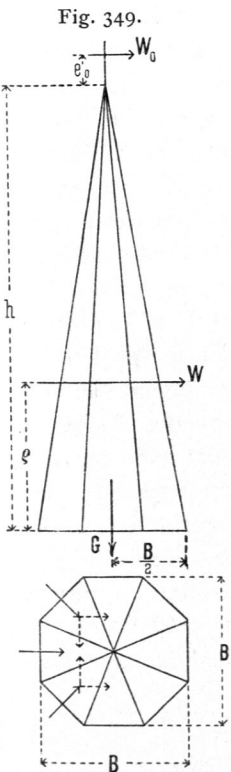
Den Winddruck auf das Flächenmeter senkrechter Thurmsquerschnittsfläche setze man  $p = 200 \text{ kg}$  für  $1 \text{ qm}$ ; an besonders dem Wind ausgesetzten Stellen rechne man mit  $p = 250 \text{ kg}$  für  $1 \text{ qm}$ .

β) Standficherheit des Thurmhelms. Für die Standficherheit muss zunächst verlangt werden, dass nicht das Thurmdach als Ganzes seitlich verschoben oder umgekantet werden könne. Der ersteren Bewegung wirkt der Reibungswiderstand an den Auflagern entgegen, der Drehung um eine Kante das Stabilitätsmoment. Nennt man die ganze ungünstigstenfalls auf das Thurmdach wirkende Windkraft  $W$ , die Höhe des Angriffspunktes dieser Kraft über der Grundfläche  $\rho$ , den auf das Thurmkreuz wirkenden Winddruck  $W_0$  und seine Höhe über der Thurmspitze  $e_0$ , so ist das Umsturzmoment (Fig. 349)

$$M_{\text{Umsturz}} = W_0 + W_0 (h + e_0);$$

$\rho$  ist meistens nahezu gleich  $\frac{h}{3}$ . Das Stabilitätsmoment ist, wenn man das Gewicht des Thurmdaches mit  $G$  und die Breite der Grundfläche mit  $B$  bezeichnet,

$$M_{\text{Stab}} = \frac{GB}{2}.$$



116.  
Standficherheit  
des  
Thurmhelms.

171) Facf.-Repr. nach: DOHME, R. Geschichte der deutschen Baukunst. Berlin 1890. S. 68.  
172) Facf.-Repr. nach: Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 457.

Damit stets ausreichende Sicherheit gegen Umkanten vorhanden sei, mache man das Stabilitätsmoment gröfser, als das Umsturzmoment jemals werden kann.

Der ungünstigste Fall tritt unmittelbar vor der Fertigstellung des Thurmes ein, wenn die Dachdeckung noch nicht aufgebracht, das Thurmgewicht folglich verhältnismäfsig klein ist. Falls auch die Verschalung noch fehlt, kann der Wind im Zimmerwerk, in den Balkenlagen und ihren Abdeckungen unter Umständen gröfsere Angriffsflächen finden, als nachher; jedenfalls berechne man den Thurm wenigstens so, dafs er ohne Dachdeckung, aber mit Lattung oder Schalung ausreichende Sicherheit gegen Umsturz und Verschieben bietet.

Soll ein frei auf das Thurmmauerwerk gesetztes Thurmdach nicht seitlich verschoben werden, so mufs die gröfste wagrechte Windkraft kleiner sein, als der Reibungswiderstand an den Auflagern. Der Reibungs-Coefficient kann zu 0,5 bis 0,6 angenommen werden; es mufs demnach

$$W + W_0 < 0,5 G$$

sein.

Wenn das Eigengewicht des Thurmes die verlangte Standfestigkeit nicht liefert, so bleibt nichts übrig, als das Thurmdach mit dem Thurmmauerwerk zu verankern.

117.  
Verankerung  
des  
Thurmhelms.

Die Frage, ob eine Verankerung nothwendig oder auch nur zuläfsig sei, wird ganz verschieden beantwortet. Früher galt es als ausgemacht, dafs man eine Verankerung des Thurmhelms im Mauerwerk vermeiden müsse, weil durch eine solche das Mauerwerk gezwungen würde, an den Bewegungen des Thurmdaches theilzunehmen, was dem Mauerwerk über Kurz oder Lang schädlich werden müsse. Auch verwies man auf die aus alter Zeit stammenden, nicht verankerten Thürme, welche sich gut gehalten haben. *Moller* schreibt bestimmt vor<sup>173)</sup>, dafs das Zimmerwerk der Thurmspitze unmittelbar auf den oberen Theil der Mauer gesetzt werden solle, so dafs die Holz-Construction ganz für sich bestehe und das Mauerwerk keine weitere Verbindung mit ersterer habe, als dafs es derselben zur Unterlage diene. Das Eigengewicht der Dach-Construction mufs alsdann genügen, um ein Kanten zu verhüten.

Andererseits mufs aber doch verlangt werden, dafs das Bauwerk unter allen Umständen standfest sei. Genügt hierzu das Eigengewicht nicht, so verankere man oder vermindere die Höhe so weit, bis das Gewicht für die Standfestigkeit ausreicht. Letzteres ist vielfach nicht möglich; folglich bleibt nur die Verankerung übrig. Es fragt sich nun, ob denn wirklich die gegen die Verankerung in das Feld geführten Bedenken so schwer wiegend sind. Die gefürchtete Bewegung der Füfse des Thurmhelms kann dann nicht eintreten, wenn man dieselben fest und genügend tief mit dem Mauerwerk verankert; es kann sich stets nur um Verringerung des Auflagedruckes handeln, der auch negativ werden kann und dann durch das Gewicht des angehängten Mauerwerkes aufgehoben wird. So lange Gleichgewicht vorhanden ist, werden keine oder höchstens durch die Elasticität bedingte, sehr geringfügige Bewegungen eintreten, welche dem Mauerwerk nicht schaden. Aber auch die Erfahrung spricht nicht gegen die Verankerung. *Otzen* verankert seine hölzernen Thurmhelme ohne nachtheilige Ergebnisse; nach Mittheilung von *Mohrmann*<sup>174)</sup> greift auch der Altmeister der Gothik, *Haase*, neuerdings unbedenklich zur Ver-

<sup>173)</sup> In: MOLLER, G. Beiträge zu der Lehre von den Constructionen: Ueber die Construction hölzerner Thurmspitzen. Darmstadt und Leipzig 1832—44.

<sup>174)</sup> In: Deutsche Bauz. 1895, S. 394.

ankerung hölzerner Thurmdächer. Endlich ist auch nicht einzusehen, warum es zulässig sein soll, eiserne Thürme zu verankern, ohne für das Mauerwerk schlimme Folgen zu befürchten, während dies für Holzthürme unzulässig sei. Auch kann man auf die hohen eisernen Viaductpfeiler hinweisen, welche stets verankert werden, ohne daß man Befürchtungen für das Mauerwerk des Unterbaues hegt. Wenn aber auf die alten Thürme hingewiesen wird, welche unverankert Stand gehalten haben, so ist zu bemerken, daß diese ein nicht unbedeutend größeres Eigengewicht hatten; sie enthielten theilweise mehr Holz und vor Allem schwereres Holz, da sie meist aus Eichenholz hergestellt wurden, während heute das leichtere Tannenholz die Regel bildet.

Nach dem Vorstehenden kann der Verfasser sich nur für die Verankerung der hölzernen Thurmhelme aussprechen; dieselbe muß im Stande sein, auch bei ungünstigsten Kräftwirkungen die Standicherheit zu erhalten.

Bereits oben ist bemerkt, daß man den Winddruck zu 200 kg (bezw. 250 kg) für 1 qm lothrechten Thurmschnittes setzen soll, daß ferner der Zustand des noch nicht gedeckten, aber bereits verschalten oder verlatteten Thurmes der Rechnung zu Grunde zu legen ist. Man bestimme nun die Verankerung so, daß das Stabilitätsmoment, einschließlic des Moments des an den Anker hängenden Mauergewichtes, wenigstens doppelt so groß ist, als das Umsturzmoment<sup>175)</sup>.

Von großer Bedeutung für die Standicherheit ist das Verhältniß der Pyramidenhöhe  $h$  zur Breite  $B$  der Grundfläche (die Bezeichnungen entsprechen denjenigen in Fig. 349, S. 143). Dasselbe ist in erster Linie von architektonischen Erwägungen abhängig; doch dürfte es sich empfehlen, auch die statischen Verhältnisse in Betracht zu ziehen und allzu große Höhen zu vermeiden. Die Ausführungen zeigen die Verhältnisse  $\frac{h}{B} = 3$  bis  $4\frac{1}{2}$ , ausnahmsweise auch wohl bis  $\frac{h}{B} = 5$ .

γ) Thurm-Fachwerk; Allgemeines. Es genügt nicht, daß die Thurmpyramide, als Ganzes betrachtet, stabil sei; auch die einzelnen Theile derselben müssen ein unverrückbares Fachwerk bilden, welches die an beliebigen Stellen aufgenommenen belastenden Kräfte sicher und ohne merkliche Formänderungen in den Unterbau befördert; sie muß ein geometrisch bestimmtes, wo möglich auch ein statisch bestimmtes Fachwerk sein. Um Klarheit über den Aufbau zu bekommen, sind einige allgemeine Untersuchungen über das räumliche Fachwerk hier vorzunehmen, welche sowohl für die Holzthürme, wie für die Eifenthürme Geltung haben.

Die Voraussetzungen, welche hier gemacht werden, sind allerdings bei den Holzthürmen nicht ganz erfüllt; insbesondere ist die Annahme der gelenkigen Knotenverbindung der Fachwerkstäbe nicht genau. Dennoch sind die nachfolgenden Untersuchungen auch für die Holzthürme nicht werthlos. Wenn sich ergibt, daß (für unsere Voraussetzungen) das Thurm-Fachwerk bei der einen Anordnung der Stäbe labil, bei einer etwas geänderten Stabanordnung aber stabil sein würde, so wird man zweckmäßig die zweite Anordnung vorziehen. Denn es ist stets mißlich, sich auf die unbekanntenen Hilfskräfte zu verlassen, welche auftreten, weil die Voraussetzungen

118.  
Thurm-  
Fachwerk.

<sup>175)</sup> Siehe auch: LODEMANN. Verankerung der Thurmhelme mit dem Mauerwerk. Centralbl. d. Bauverw. 1895, S. 481.  
SEIBERTS. Der Abtutz des Thurmhelms an der St. Matthiaskirche zu Berlin. Deutsche Bauz. 1895, S. 382.

RINCKLAKE, MOHRMANN. Ueber dasselbe. Deutsche Bauz. 1895, S. 393.

MARSCHALL, CORNEHL. Ueber dasselbe. Deutsche Bauz. 1895, S. 477.

SEIBERTS. Desgl. Deutsche Bauz. 1895, S. 475.



nicht genau erfüllt sind, zumal wenn, wie hier, die rechnerische Ermittlung dieser Hilfskräfte eine äußerst umständliche und schwierige Arbeit ist. Da nun die folgenden Untersuchungen wegen der eisernen Thürme u. s. w. ohnehin vorgenommen werden müssen und auf die üblichen Thurm-Fachwerke ein klares Licht werfen, so dürfte für dieselben hier die geeignete Stelle sein.

Die Thurmhelme sind Raum-Fachwerke. Die einfachste Stützung eines Raum-Fachwerkes ist diejenige vermittelt dreier Fußpunkte. Die sämtlichen Unbekannten der Auflagerdrücke dürfen die Zahl 6 nicht überschreiten, wenn die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper zu ihrer Ermittlung ausreichen sollen. Man muß nun, um sowohl eine wagrechte Verschiebung der ganzen Construction, als auch eine Drehung derselben um eine lothrechte Axe zu verhüten, ein Auflager fest, ein zweites in einer geraden Linie verschiebbar machen, während das dritte in der Stützungsebene frei beweglich sein kann. Der Auflagerdruck des festen Auflagers kann eine ganz beliebige Richtung annehmen, enthält also drei Unbekannte, als welche man zweckmäßig die drei Seitenkräfte einführt, welche sich bei rechtwinkliger Zerlegung des Auflagerdruckes nach drei Axen ergeben. Der Auflagerdruck des in einer Geraden verschiebbaren Lagers muß senkrecht zu der Geraden — der sog. Auflagerbahn — gerichtet sein, weil die in die Richtung dieser Linie fallende Seitenkraft, der Beweglichkeit wegen, stets Null ist; dieser Auflagerdruck enthält also nur zwei Unbekannte, nämlich die beiden Seitenkräfte in der zur Auflagerbahn senkrecht gerichteten Ebene. Im Auflagerdruck des dritten, in einer Ebene beweglichen Auflagers ist nur eine Unbekannte, die Größe der Kraft, enthalten; denn die Richtung ist diesem Auflagerdruck vorgeschrieben: er muß wegen der Beweglichkeit des Auflagers senkrecht zur Auflagerebene stehen.

Allgemein bedeutet nach Vorstehendem beim Raum-Fachwerk jedes feste Auflager drei Unbekannte (entspricht drei Auflagerbedingungen), jedes in einer Linie bewegliche Auflager zwei Unbekannte (entspricht zwei Auflagerbedingungen) und jedes in einer Ebene bewegliche Auflager eine Unbekannte (entspricht einer Auflagerbedingung). Wir werden weiterhin die drei Arten der Auflager kurz als Punktlager, Linienlager, Ebenenlager bezeichnen.

Im oben angenommenen Falle dreier Auflager, von denen je eines ein Punkt-, ein Linien- und ein Ebenenlager ist, enthalten also die Auflagerkräfte  $3 + 2 + 1 = 6$  Unbekannte, für deren Ermittlung die Gleichgewichtslehre bekanntlich 6 Gleichungen bietet. Die Auflagerkräfte werden sich demnach nach den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper bestimmen.

Es müssen aber auch die Spannungen der einzelnen Stäbe des Raum-Fachwerkes für beliebige mögliche Belastungen ermittelt werden können. Am einfachsten kann dies geschehen, wenn das Fachwerk statisch bestimmt ist, d. h. wenn alle Stabspannungen aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können. Damit dies möglich sei, muß die Zahl der Stäbe zu derjenigen der Knotenpunkte in einem bestimmten Verhältnisse stehen.

Wir bezeichnen mit  $k$  die Anzahl der Knotenpunkte,  $s$  die Anzahl der Stäbe,  $p$  die Anzahl der festen Auflager (Punktlager),  $l$  die Anzahl der in Linien geführten Lager (Linienlager) und mit  $e$  die Anzahl der in Ebenen geführten Lager (Ebenenlager); alsdann ist die Zahl aller Unbekannten

$$s + 3p + 2l + e.$$

An jedem Knotenpunkte ergeben sich aus den drei Gleichgewichtsbedingungen drei

Gleichungen, also bei  $k$  Knotenpunkten erhält man  $3k$  Gleichungen. Die Zahl der Unbekannten muß für statische Bestimmtheit gleich der Zahl der Gleichungen sein; mithin ist die Bedingung für statische Bestimmtheit:

$$s + 3p + 2l + e = 3k,$$

und wenn man abkürzungsweise die Zahl der Auflager-Unbekannten

$$3p + 2l + e = n \dots \dots \dots 7.$$

setzt, so wird  $s + n = 3k$  und

$$s = 3k - n \dots \dots \dots 8.$$

Bei der obigen Annahme dreier Auflager, eines Punkt-, eines Linien- und eines Ebenenlagers war  $p = 1$ ,  $l = 1$  und  $e = 1$ , also  $n = 3 + 2 + 1 = 6$ ; mithin muß für diesen Fall sein

$$s = 3k - 6 \dots \dots \dots 9.$$

Das einfachste räumliche Fachwerk ist das Tetraëder, welches 4 Knotenpunkte und 6 Stäbe hat; bei demselben ist thatfächlich  $s = 3k - 6 = 3 \cdot 4 - 6 = 6$ ; dasselbe ist also ein statisch bestimmtes Fachwerk. Ein Punkt im Raume wird aber geometrisch bestimmt, wenn er durch Linien (Stäbe) mit 3 festen Punkten verbunden wird, welche mit ihm nicht in derselben Ebene liegen; alsdann findet auch eine zweifellose Zerlegung jeder auf diesen Punkt wirkenden Kraft auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen statt. Man kann also durch allmähliches Anfügen von je einem Knotenpunkte und drei Stäben an den Grundkörper des Tetraëders ein geometrisch und statisch bestimmtes Raum-Fachwerk erhalten. Dies folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 9. Nennt man die Zahl der zu einem statisch bestimmten Fachwerk hinzukommenden Knotenpunkte allgemein  $\alpha$ , diejenige der hinzukommenden Stäbe  $\sigma$ , so ist das entstehende Fachwerk statisch bestimmt, wenn stattfindet:

$$s + \sigma = 3(k + \alpha) - 6.$$

Es war aber auch  $s = 3k - 6$ , woraus folgt, daß für den Fall statischer Bestimmtheit

$$\sigma = 3\alpha.$$

sein muß.

Soll also das Fachwerk auch nach dem Hinzufügen der neuen Knotenpunkte statisch bestimmt bleiben, so muß stets die Zahl der hinzukommenden Stäbe 3-mal so groß sein, wie die Zahl der hinzukommenden Knotenpunkte. Für  $\alpha = 1$  muß  $\sigma = 3$  sein.

Die Anordnung eines Thurmes mit nur drei Fußpunkten ist nicht üblich; es sind aber auch Stützungen auf mehr als drei Füßen als statisch bestimmte, räumliche Fachwerke möglich. Dies könnte auffallen, wenn man bedenkt, daß nur dann die Auflagerdrücke eines Körpers mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können, wenn die Zahl der Fußpunkte nicht größer als 3 ist. Bei einem Fachwerk aber kann man die Auflagerdrücke dennoch bestimmen, auch wenn die Zahl der in diesen enthaltenen Unbekannten größer als 6 ist; nur muß man dafür Sorge tragen, daß das Fachwerk selbst so viele weniger Stäbe, also Unbekannte, enthält, wie zu viel Unbekannte in den Auflagerdrücken sind. Selbstverständlich darf man nicht beliebige Stäbe entfernen und muß in jedem Falle genau untersuchen, ob das entstehende Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist oder nicht. Aehnliche Anordnungen sind beim ebenen Fachwerk vorhanden, so bei den Bogenträgern mit 3 Gelenken, den Auslegerträgern etc. Man muß also auch hier, wegen der hinzukommenden Auflagerunbekannten, neue Bedingungen durch die Construction schaffen. Nachstehend sollen die beiden wichtigsten Fälle des vier-

feitigen und des achtseitigen Thurm-Fachwerkes in dieser Hinsicht besprochen werden.

119.  
Vierseitige  
Thurm-  
pyramide.

δ) Vierseitige Thurmpyramide. Die vier Fußpunkte derselben seien  $A, B, C, D$  (Fig. 350); einer davon, etwa  $A$ , sei fest, ein zweiter,  $B$ , sei in einer Linie, etwa  $XX$ , die beiden anderen in der Ebene  $ABCD$  beweglich. Die Auflagerdrücke enthalten also  $n = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$  Unbekannte. Geht man wieder vom Tetraëder aus und legt das Dreieck  $ABC$  zu Grunde, wobei  $A$  mit 3,  $B$  mit 2 und  $C$  zunächst mit einer Auflagerbedingung, so sind alle drei Punkte in der Ebene genau durch die Auflagerbedingungen und die Längen der Dreieckseiten bestimmt, wenn nicht etwa die Auflagerbahn  $XX$  des Punktes  $B$  senkrecht zu  $AB$  gerichtet ist. Der Punkt  $I$  in einer über  $ABC$  liegenden Ebene wird nunmehr durch die drei Stäbe  $AI, BI$  und  $CI$  geometrisch bestimmt. Das erhaltene Tetraëder ist geometrisch und statisch bestimmt. Verbindet man nunmehr den vierten Fußpunkt  $D$  mit 2 Punkten, etwa mit  $B$  und  $C$ , in derselben Ebene, so wird auch  $D$  geometrisch fest gelegt, da dieser Punkt in der Ebene  $ABC$  bleiben muß; der dritte Stab, welcher eigentlich erforderlich wäre, um  $C$  fest zu legen, wird durch die Auflagerbedingung bei  $D$  ersetzt. Daraus folgt, daß, wie die Spannung dieses (nicht angeordneten) Stabes stets bekannt wäre, wenn  $D$  kein Auflagerpunkt wäre, so auch der Auflagerdruck bei  $D$  stets nach statischen Gesetzen ermittelt werden kann.  $D$  ist als in der Ebene  $ABCD$  beweglich zu construieren. (Man kann auch, wie dies mehrfach geschehen ist, für die Untersuchung den Auflagerdruck durch einen gedachten Stab ersetzen). Für das Fachwerk mit 4 Stützpunkten nach Fig. 350 ist also die Zahl der Auflagerunbekannten  $n = 7$ , die Zahl der Stäbe  $s$  und die Zahl der Knotenpunkte  $k$ ; also muß für den Fall statischer Bestimmtheit

$$s + 7 = 3k \quad \text{oder} \quad s = 3k - 7$$

sein. Man kann nun Knotenpunkt 2 mit  $I, B, D$ , Punkt 3 mit  $2, D, C$  und Punkt 4 mit  $3, C, I$  verbinden und erhält so das in Fig. 350 gezeichnete Fachwerk, welches geometrisch und auch statisch bestimmt ist.

Bislang war angenommen, daß ein Stab  $BC$  vorhanden sei; dieser Stab ist unter Umständen un bequem und für die Benutzung störend. Es fragt sich, ob derselbe fortgelassen werden, bezw. unter welchen Bedingungen dies geschehen kann. Stab  $BC$  war angeordnet, um Punkt  $C$  in der Auflagerebene geometrisch fest zu legen. Man kann dies auch dadurch erreichen, daß man für  $C$ , wie für  $B$ , eine Auflagerbahn, etwa  $YY$  (Fig. 351) vor-

Fig. 350.

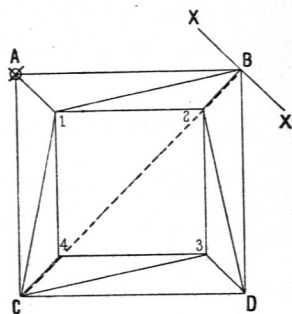
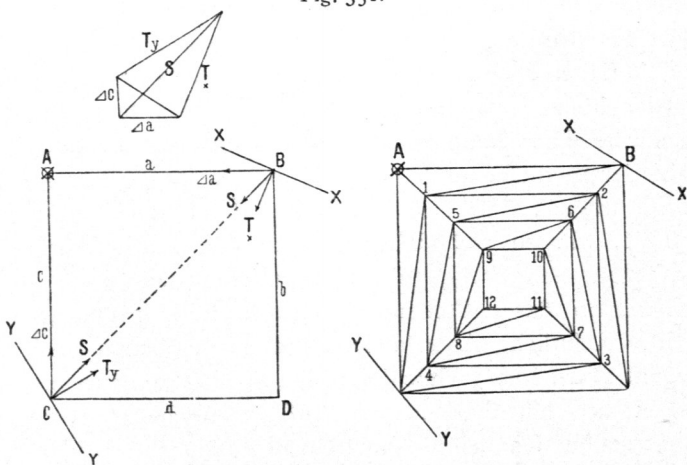


Fig. 351.



schreibt; dieselbe kann beliebige Richtung haben; nur darf sie nicht senkrecht zu  $AC$  stehen, da sonst eine sehr kleine Bewegung des Punktes  $C$ , nämlich eine Drehung um  $A$ , möglich wäre. Da nun Punkt  $C$  ohne Stab  $BC$  fest gelegt ist, so kann dieser fortfallen; das Fachwerk wird also nunmehr durch Fortlassen des Stabes  $BC$  nicht labil.

Man kann sich dies auch dadurch klar machen, daßs man zunächst den Stab  $BC$  als vorhanden annimmt und nun untersucht, ob die Spannung desselben durch das wirklich vorhandene Fachwerk, d. h. nach Fortnahme von  $BC$  geleistet werden kann. Ist die Spannung des Stabes  $BC$  gleich  $S_c$ , so zerlegt sich  $S_c$  in zwei Seitenkräfte, deren eine senkrecht zur Auflagerbahn  $YY$ , deren andere in die Linie  $AC$  fällt; in die Linie  $CD$  kann kein Theil der Kraft fallen, weil er in  $D$  (dort ist ein bewegliches Flächenlager) nicht aufgenommen werden kann. Eben so wird die in  $B$  angreifende Kraft  $S_B = S_c$  durch den Gegenruck der Auflagerbahn  $XX$  und die hinzukommende Spannung in  $BA$  geleistet. Die beiden Kräfte  $\Delta a$  in  $AB$  und  $\Delta c$  in  $CA$  werden dann im festen Punkte  $A$  in das Mauerwerk geleitet. Der Thurm mit vier Fußpunkten kann also als statisch bestimmtes Fachwerk hergestellt werden, wenn ein Auflager fest, ein zweites Auflager in der Auflagerebene, die beiden weiteren Auflager in geraden Linien beweglich gemacht sind und an diese vier Auflagerpunkte weitere Punkte nach der allgemeinen Regel (je 1 Knotenpunkt und 3 Stäbe) angeschlossen werden. Grundbedingung für die Stabzahl ist hier, weil  $n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$  ist,

$$s = 3k - 8.$$

Eine solche Anordnung zeigt Fig. 351, bei welcher die Spitze des Thurmhelms nicht gezeichnet ist. Durch diese wird, weil hier ein Knotenpunkt mit 4 Stäben hinzukommt,

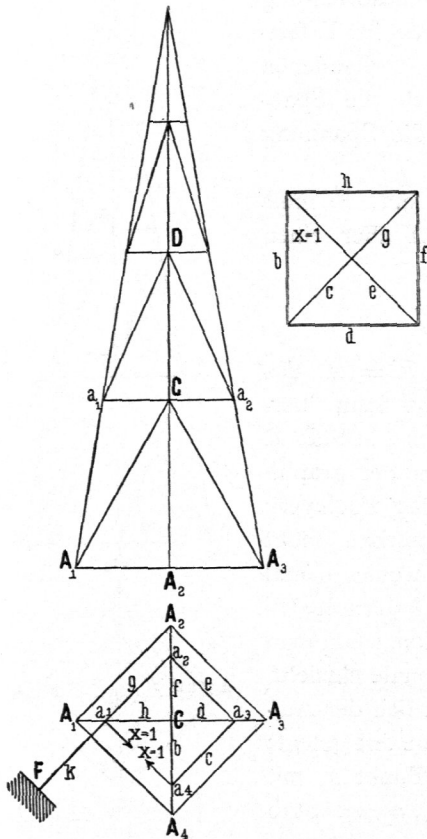
das Fachwerk statisch unbestimmt; es bleibt aber geometrisch bestimmt.

Es liegt nahe, die vierseitige Thurmpyramide dadurch zu versteifen, daßs man in die beiden lothrechten Diagonalebenen Dreieckverband legt. Diese Anordnung ist von den Alten vielfach ausgeführt und hat sich bewährt; außer dieser Versteifung ist aber noch eine solche in den Seitenebenen anzubringen, worauf bereits *Moller*<sup>176)</sup> aufmerksam gemacht hat. Fig. 352 zeigt den Grundriß und den Diagonalschnitt eines solchen Thurmdaches; die Helmstange reicht bis zum zweiten Stockwerk hinab; die Diagonalebenen sollen durch die Schrägstäbe  $A_1C$ ,  $A_2C$ ,  $A_3C$ ,  $A_4C$ ,  $a_1D$ ,  $a_2D$ ,  $a_3D$ ,  $a_4D$ , u. f. w. versteift werden.

Um die Stabilität des Fachwerkes zu untersuchen, bauen wir von den vier

<sup>176)</sup> A. a. O., Heft 4.

Fig. 352.



festen Auflagern  $A_1, A_2, A_3, A_4$  aus auf. Zunächst wird  $C$  mit allen vier Auflagern durch Stäbe verbunden; es genügte schon drei Stäbe, um  $C$  im Raume geometrisch fest zu legen; der vierte Stab macht die Construction statisch unbestimmt, aber nicht labil. Nun verbinden wir  $a_1$  durch Stäbe mit  $A_1 C$  und einem auferhalb gelegenen festen Punkte  $F$ ; wegen des letzteren, des fog. Ersatzstabes  $k$ , ist noch eine weitere Untersuchung vorzunehmen. Ferner wird verbunden: Punkt  $a_2$  mit  $A_2, a_1, C$ , Punkt  $a_3$  mit  $A_3, a_2, C$  und Punkt  $a_4$  mit  $A_4, a_3, C$ . Es fragt sich nun, ob an Stelle des Ersatzstabes  $a_1 F$  der Stab  $a_1 a_4$  treten kann, d. h. ob mit Stab  $a_1 a_4$ , aber ohne Stab  $k$  die Construction stabil ist. Zieht man den Stab  $a_1 a_4$  ein, so möge bei beliebiger äußerer Belastung darin die Spannung  $X$  entstehen, welche bei  $a_4$  und bei  $a_1$  je in der Stabrichtung wirkt. Wäre der Stab nicht vorhanden, so würde im Ersatzstab die Spannung  $\mathfrak{S}_{0k}$  auftreten; die außerdem vorhandenen Kräfte  $X$  im Stabe  $a_1 a_4$  erzeugen im Ersatzstab die Spannung  $X S_k'$ ; es ist also im Ganzen im Stabe  $k$  die Spannung

$$S_k = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k'.$$

Soll ohne Ersatzstab  $k$  die Construction stabil sein, so muß für beliebige Belastung  $S_k$  gleich Null sein,  $X$  aber einen reellen Werth haben; d. h. es muß

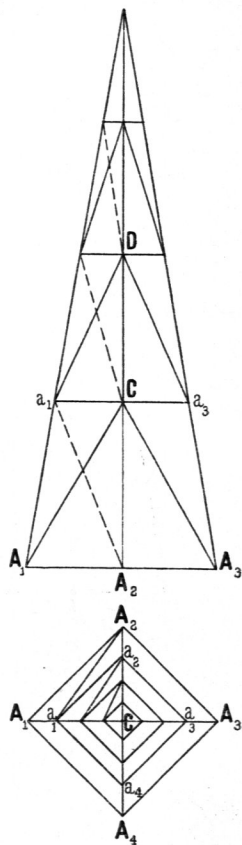
$$0 = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k' \quad \text{und} \quad X = - \frac{\mathfrak{S}_{0k}}{S_k'}$$

sein. Ergibt sich  $S_k' = 0$ , so ist nur bei  $X = \infty$  das Gleichgewicht möglich, d. h. das Gleichgewicht ist dann überhaupt nicht möglich.  $S_k'$  ist die Spannung, welche in Stab  $K$  durch  $X = 1$  erzeugt wird. Man sieht leicht aus der graphischen Zerlegung in Fig. 352, daß  $S_k' = 0$ , das Fachwerk also nicht brauchbar ist. Ist aber dieser Unterbau nicht stabil, so ist es auch der weitere Aufbau eben so wenig, zumal sich die Anordnung in den oberen Gefchoßen wiederholt<sup>177</sup>.

Zweifellos brauchbar wird aber die Construction, wenn man in eines der trapezförmigen Seitenfelder eine Diagonale einzieht, z. B. die Diagonale  $a_1 A_2$  (Fig. 353). Dann ergibt sich der Aufbau wie folgt: Zunächst wird  $C$  wie oben im Raume fest gelegt; nun wird verbunden: Punkt  $a_1$  mit  $A_1, A_2, C$ , Punkt  $a_2$  mit  $A_2, a_1, C$ , Punkt  $a_3$  mit  $A_3, a_2, C$  und Punkt  $a_4$  mit  $A_4, a_3, a_1$ . Stab  $a_4 C$  wird gewöhnlich zugefügt; er ist überzählig, macht aber die Construction nicht labil. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Die Helmstange dient nur dazu, die Bildung der Knotenpunkte  $C, D$  u. f. w. zu erleichtern. In der Ansicht (Fig. 353) sind die in den Seitenfeldern liegenden Diagonalen punktiert. — Gewöhnlich wird man statt einer Diagonale Andreaskreuz oder gekreuzte Zugdiagonalen, und zwar nicht nur in einem Felde, sondern in mehreren Feldern anordnen.

Dieses Fachwerk ist nicht so klar, wie das zuerst (Fig. 351) besprochene, bei welchem nur in den Seitenebenen Stäbe liegen; die praktische Construction ist aber sehr bequem: Doppelzangen in jeder Balkenlage verbinden die diagonal einander gegenüberstehenden Gratparren und nehmen die Helmstange zwischen sich; gegen diese setzen

Fig. 353.



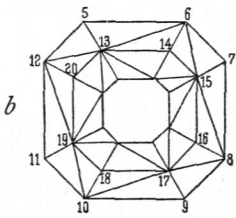
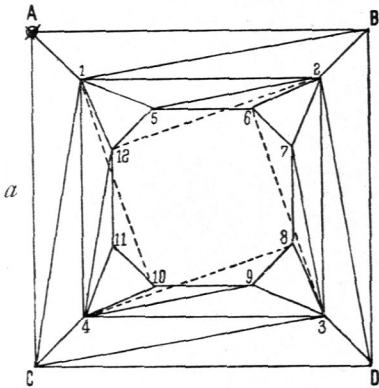
<sup>177</sup>) Das vorstehend angewendete Verfahren, welches stets zum Ziele führt und in der Folge noch mehrfach benutzt werden wird, ist angegeben in: MÜLLER-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig 1893. S. 4 u. 5.

sich die in den sich kreuzenden Mittelebenen angeordneten Diagonalen. Die herumlaufenden Balken dienen als Pfetten; in diese setzen sich die Andreaskreuze.

e) Achtseitige Thurmpyramide. Bei dieser sind verschiedene Arten des Aufbaues möglich. Man kann die 8 Grate bis zu den Auflagern hinabführen; man kann ferner 4 Grate zu der Auflagerebene hinabgehen lassen und die 4 zwischen diesen liegenden Grate auf Giebelspitzen setzen lassen (Fig. 356); endlich kann man von den 8 Graten im untersten Stockwerk je 2 zu einer Ecke des Grundquadrats zusammenführen. Bei den letzten beiden Anordnungen sind nur 4 Auflager vorhanden; die Ueberführung vom Viereck in das Achteck ist besonders zu untersuchen.

121.  
Achtseitige  
Thurm-  
pyramide  
mit 4 Lager-  
punkten

Fig. 354.



a) Achtseitige Thurmpyramide mit vier Lagerpunkten. Fig. 354 zeigt diese Lösung, wobei der größeren Allgemeinheit halber unter die achtseitige Pyramide noch eine vierseitige, ein Stockwerk hohe, abgestumpfte Pyramide ( $ABCD1234$ ) gefetzt ist. Dieselbe kann man auch fortlassen; alsdann sind  $1, 2, 3, 4$  die Auflager. Da dieses untere Stockwerk nach Vorstehendem geometrisch und statisch bestimmt ist, so bleibt auch das Ganze eben so, falls der hinzukommende, oberhalb  $1234$  befindliche Theil geometrisch und statisch bestimmt ist. Die zu führende Untersuchung gilt also auch für den in  $1234$  aufgelagerten Thurm. Das achtseitige Thurmdach soll nunmehr aus dem Unterbau dadurch entwickelt werden, daß jeder neue Knotenpunkt durch drei Stäbe an drei bereits vorhandene Knotenpunkte angeschlossen wird, welche mit ihm nicht in derselben Ebene liegen dürfen. Punkt  $12$  ist mit  $1, 4, 2$  verbunden. Die Stäbe  $121$  und  $124$  liegen in begrenzenden Ebenen,  $122$  aber nicht. Ferner sind angegliedert: Punkt  $5$  an  $12, 1, 2$ , Punkt  $6$  an  $2, 5, 3$  und so weiter. Die weiteren Stockwerke ergeben sich einfach; sie sind der größeren

Deutlichkeit halber in einer besonderen Abbildung (Fig. 354b) gezeichnet. Bei diesen liegen alle Stäbe in den begrenzenden Ebenen; das Innere bleibt frei. In Fig. 354a sind 16 Knotenpunkte und 40 Stäbe, also thatfächlich

$$s = 3k - 8.$$

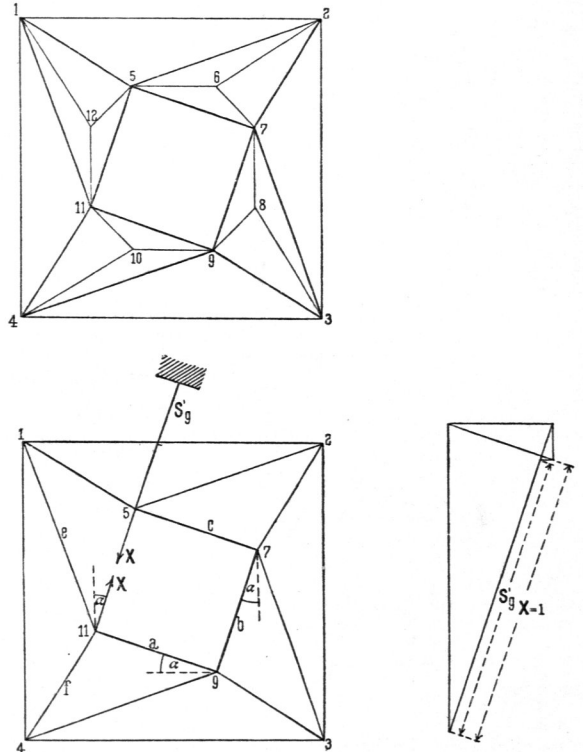
Die vier in Fig. 354a punktirten Stäbe ( $122, 63, 84, 101$ ), welche weder in Seitenflächen der Pyramiden noch in wagrechten Ebenen liegen, können un bequem sein; man kann sie vermeiden. Man lege das tieffliegende Achteck ( $56789101112$ ) gegen den unteren vierseitigen Theil geometrisch fest, indem man die Punkte  $1, 2, 3, 4$  als feste Punkte betrachtet (was sie ja sind) und die 8 hinzukommenden Knotenpunkte durch  $3 \cdot 8 = 24$  Stäbe anschließt. Dabei sind verschiedene Stabanordnungen möglich; eine solche ist in Fig. 355 angegeben. Man verbinde zunächst Punkt  $5$  durch Stab  $51$  und  $52$  mit bezw.  $1$  und  $2$ ; alsdann fehlt zunächst für die Bestimmung von  $5$  noch ein Stab, was vorläufig bemerkt werde.

Nunmehr betrachte man, vorbehaltlich späteren Nachtrages, Punkt 5 als fest, verbinde Punkt 7 mit 5, 2, 3, Punkt 9 mit 7, 3, 4 und Punkt 11 mit 9, 4, 1. Punkt 6 kann man nun mit 5, 7, 2, Punkt 8 mit 7, 3, 9, Punkt 10 mit 11, 9, 4 und Punkt 12 mit 5, 11, 1 verbinden. Die Verbindungsstäbe der 4 letztgenannten Punkte können für die vorläufige Betrachtung fortgelassen werden, da das ganze Fachwerk stabil ist, wenn es ohne diese 12 Stäbe stabil ist. Nunmehr fehlt noch ein Stab, da Punkt 5 nur mit 2 festen Punkten durch Stäbe verbunden war; es möge nun Stab 5 11 hinzugefügt werden; das Fachwerk hat dann die vorgeschriebene Zahl von Stäben. Wird nur das Fachwerk ohne die Knotenpunkte 6, 8, 10, 12 betrachtet, so sind 4 Knotenpunkte und 12 Stäbe hinzugekommen. Ergibt sich bei beliebiger

Belastung für die Stabspannung des Stabes 11 5 ein reeller Werth, so ist das Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt. Um diese Untersuchung zu führen, werde der Stab 11 5 herausgenommen und durch die darin herrschende, unbekannte Spannung  $X$  ersetzt; da aber dann ein Stab fehlt, wird ein Ersatzstab  $S_g'$  angebracht, der in der wagrechten Ebene liegend nach einem festen Punkte geführt werde. In Fig. 355 ist der feste Punkt durch Schraffurung angedeutet. Nun wirke in Knotenpunkt 11 eine beliebige äußere Kraft  $P$  in beliebiger Richtung, außerdem  $X$  in der Richtung 11 5; erstere zerlegt sich in 11 nach den Richtungen der jetzt hier noch vorhandenen Stäbe (11 1, 11 4, 11 9); diese Spannungen sind leicht zu ermitteln und können als bekannt angenommen werden. Die in 11 1 und 11 4 wirkenden Kräfte gehen nach den festen Punkten 1 und 4;

die Spannung in 11 9 zerlegt sich in Punkt 9 gleichfalls nach den Richtungen der dort zusammentreffenden 3 Stäbe, von welchen zwei nach den festen Punkten 4 und 3 gehen und diejenige in 9 7 nach Punkt 7 geht. So geht die Zerlegung weiter; die Spannung in 7 5 zerlegt sich in Punkt 5 nach den drei Stabrichtungen 5 1, 5 2 und  $S_g'$ . Alle diese Spannungen sind bestimmt und leicht zu finden. Wir bezeichnen sie mit  $\mathfrak{S}$ ; diejenige im Ersatzstab sei  $\mathfrak{S}_0$ . Außer der Kraft  $P$  wirken noch die beiden unbekanntenen Stabspannungen  $X$  in 11, bzw. 5. Die in Punkt 11 wirkende Kraft  $X$  erzeugt Spannungen, welche  $X$ -mal so groß sind, als diejenigen, welche durch die Kraft  $X=1$  erzeugt werden würden. Wir nennen die letzteren  $\sigma$  und ermitteln dieselben. Die in Punkt 11 wagrecht wirkende Kraft  $X=1$  zerlegt sich in zwei wagrechte Kräfte: in die Resultirende von den

Fig. 355.



Spannungen der Stäbe  $e$  und  $f$ , welche mit  $e$  und  $f$  in derselben Ebene liegt, also parallel zur Linie  $l$  sein muß, und in die Spannung  $a$  des Stabes  $a$ . Man sieht leicht, daß

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Fig. 356.



ist;  $a$  ist Druck, also

$$a = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Überlegt man in gleicher Weise, daß  $a$  am Punkte  $g$  sich ähnlich zerlegt, so erhält man (vgl. die graphische Zerlegung in Fig. 355):

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ und } b = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Wiederum. Weiter erhält man  $\operatorname{tg}^3 \alpha$  und  $d = \operatorname{tg}^4 \alpha$ , und auch in Punkt  $5$  die Kraft  $X = 1$  wirkt, also im Ersatzstabe durch

$$\sigma = 1 - \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

ist die ganze Spannung im Ersatzstabe durch beide durch  $P$

$$= \mathfrak{E}_0 + (1 - \operatorname{tg}^4 \alpha) X.$$

Da die Spannung im Ersatzstabe gleich Null sein muß — sie ist ja nicht vorhanden —, so setzt die Bedingungsgleichung für  $X$ :

$$\mathfrak{E}_0 + (1 - \operatorname{tg}^4 \alpha) X = 0 \text{ oder } X = -\frac{\mathfrak{E}_0}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha}.$$

Dieser Werth ist ein ganz bestimmter reeller Werth; mithin ist das System statisch und geometrisch bestimmt. Damit ist nachgewiesen, daß vorstehendes System brauchbar ist. Auf dem

## Handbuch der Architektur.

Dritter Theil. 2. Band. 4. Heft.

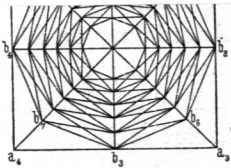
Es wird gebeten, vor Gebrauch des vorliegenden Heftes die nachstehenden, leider übersehenen Fehler zu verbessern:

Auf Seite 153, Zeile 16 von oben muß es heißen statt  $1 - \operatorname{tg}^4 \alpha$ :

$$d = -\operatorname{tg}^4 \alpha, \text{ also weiter auch } \sigma = 1 - \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$X = -\frac{\mathfrak{E}_0}{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha}.$$

Das System der Fig. 355 ist demnach nur brauchbar für Winkelthe von  $\alpha$ , die von  $45^\circ$  verschieden sind.



Achteck 5 6 7 8 9 10 11 12 kann nun das weitere Achteck aufgebaut werden (Fig. 354 b).

Eine andere Lösung, die achtseitige Pyramide auf nur vier Auflager zu setzen, wird unter Benutzung von vier Giebeldreiecken im untersten Stockwerk des Thurmes erhalten; diese Thurms-Construction ist vielfach von *Otzen* ausgeführt. Nach den Ecken des Grundquadrates  $a_1 a_2 a_3 a_4$  (Fig. 356) gehen vier Gratsparren hinab, während die zwischen diesen liegenden Gratsparren sich auf die Spitzen  $b_1, b_2, b_3, b_4$  von vier Giebeldreiecken setzen, also ein Stockwerk weniger weit hinabreichen, als

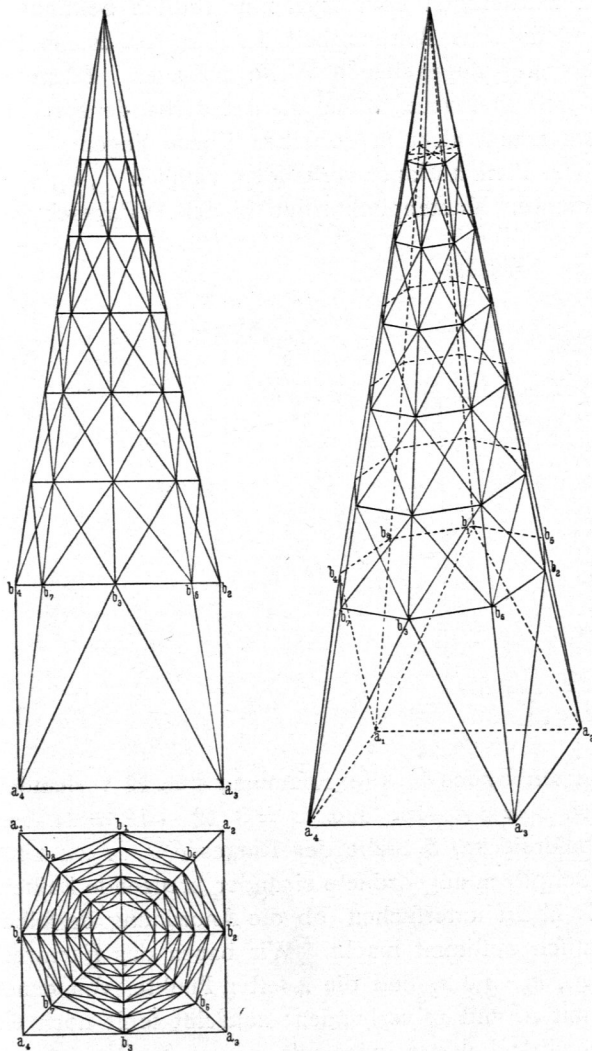
122.  
Achtseitige  
Thurm-  
pyramide  
mit vier  
Gratsparren  
auf  
Giebelspitzen.



Spannungen der Stäbe  $e$  und  $f$ , welche mit  $e$  und  $f$  in derselben Ebene liegt, also parallel zur Linie  $1 \ 4$  sein muß, und in die Spannung  $a$  des Stabes  $a$ . Man sieht leicht, daß

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Fig. 356.



ist;  $a$  ist Druck, also

$$a = - \operatorname{tg} \alpha.$$

Ueberlegt man in gleicher Weise, daß  $a$  am Punkte  $9$  sich ganz ähnlich zerlegt, so erhält man (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 355):

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha \text{ und } b = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$b$  ist Zug. Weiter erhält man  $c = - \operatorname{tg}^3 \alpha$  und  $d = \operatorname{tg}^4 \alpha$ , und da auch in Punkt  $5$  die Gegenkraft  $X = 1$  wirkt, als Spannung im Ersatzstabe durch  $X = 1$

$$\sigma = 1 \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

mithin ist die ganze Spannung im Ersatzstabe durch beide  $X$  und durch  $P$

$$S = \mathfrak{C}_0 + (1 \operatorname{tg}^4 \alpha) X.$$

Da aber die Spannung im Ersatzstabe gleich Null sein muß — derselbe ist ja nicht vorhanden —, so lautet die Bedingungsgleichung für  $X$ :

$$0 = \mathfrak{C}_0 + (1 \operatorname{tg}^4 \alpha) X \text{ oder}$$

$$X = - \frac{\mathfrak{C}_0}{1 \operatorname{tg}^4 \alpha}.$$

Dieser Werth ist ein ganz bestimmter reeller Werth; mithin ist das System statisch und geometrisch bestimmt. Damit ist nachgewiesen, daß vorstehendes System brauchbar ist. Auf dem

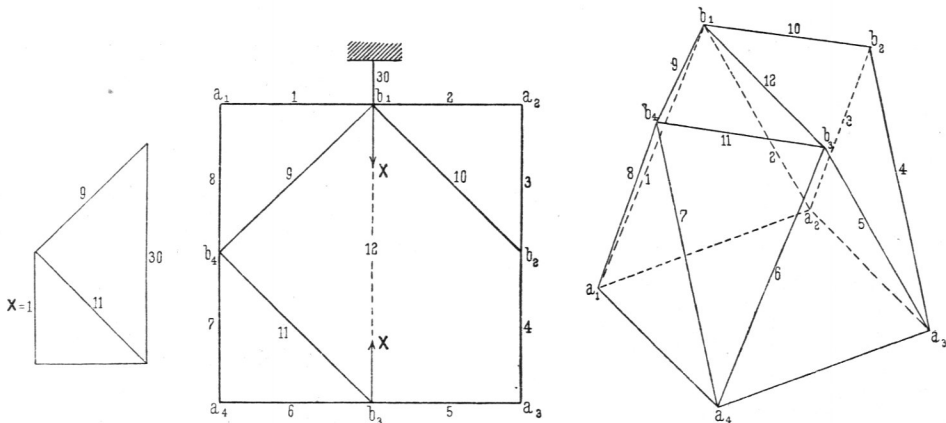
Achteck  $5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12$  kann nun das weitere Achteck aufgebaut werden (Fig. 354  $b$ ).

Eine andere Lösung, die achteckige Pyramide auf nur vier Auflager zu setzen, wird unter Benutzung von vier Giebdreiecken im untersten Stockwerk des Thurmes erhalten; diese Thurm-Construction ist vielfach von *Otzen* ausgeführt. Nach den Ecken des Grundquadrates  $a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4$  (Fig. 356) gehen vier Gratparren hinab, während die zwischen diesen liegenden Gratparren sich auf die Spitzen  $b_1, b_2, b_3, b_4$  von vier Giebdreiecken setzen, also ein Stockwerk weniger weit hinabreichen, als

die erstgenannten Gratsparren. Von den Spitzen der Giebel dreiecke werden die Spannungen der Gratsparren in die vier Auflagerpunkte der anderen Sparren geführt. Die Hauptauflager sind  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ; die Punkte  $b_1, b_2, b_3, b_4$  kann man als Giebelauflager ansehen. Damit die Giebelspitzen nicht durch die wagrechten Seitenkräfte der Sparrendrücke aus den lothrechten Ebenen herausgeschoben werden, sind in der Höhe derselben vier radiale Balken ( $b_1 b_3, b_2 b_4, b_5 b_7, b_6 b_8$ ) angeordnet, welche im Verein mit dem umlaufenden Ringe  $b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4 b_8$  eine Scheibe bilden. Es fragt sich, ob dieser Unterbau der achtförmigen Thurmpyramide statisch bestimmt ist. Ergiebt sich die geometrische und statische Bestimmtheit des Unterbaues, so kann man auf demselben weiter in der oben angegebenen Weise aufbauen, indem man stets einen neuen Knotenpunkt durch drei neue Stäbe an drei vorhandene Knotenpunkte anschliesst, welche mit dem neuen nicht in derselben Ebene liegen.

Im untersten Stockwerk sind vier Punktauflager vorhanden, nämlich  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , also  $n = 3 \cdot 4 = 12$  Auflagerunbekannte. Knotenpunkte sind in der Auflagerebene 4,

Fig. 357.



in der durch die Giebelspitzen gelegten Ebene 8, also zusammen  $k = 12$  vorhanden. Die Zahl der Stäbe muß demnach  $s = 3k - n$  und  $s = 3 \cdot 12 - 12 = 24$  sein. Vorhanden sind: 8 Stäbe der Giebel dreiecke, 8 Stäbe des Ringes  $b_1 \dots b_8$ , 4 Gratsparren und 4 in der Ebene der Giebelspitzen angeordnete einander kreuzende Balken; die Zahl der Stäbe stimmt also. Es ist zu untersuchen, ob die Anordnung derselben das Fachwerk geometrisch und statisch bestimmt macht. Wir bauen das Fachwerk wieder von unten auf (Fig. 357).  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sind die 4 festen Punkte, von denen ausgegangen wird: Punkt  $b_1$  wird mit  $a_1$  und  $a_2$  verbunden; zunächst fehlt noch ein Stab, was im Gedächtniß behalten wird; Punkt  $b_4$  wird mit  $a_1, a_4, b_1$ , Punkt  $b_3$  mit  $a_4, a_3, b_4$  und Punkt  $b_2$  mit  $a_2, a_3, b_1$  verbunden. Nun fehlt noch ein Stab, da  $b_1$  nur mit zwei festen Punkten verbunden war. Fügt man den Stab  $b_1 b_3$  ein, so ist die Gesamtzahl der Stäbe für das bisher construierte Fachwerk richtig; ob die Anordnung richtig ist, wird gefunden, indem man Stab  $b_1 b_3$  durch einen Ersatzstab (Stab 30) ersetzt, welcher  $b_1$  mit einem beliebigen festen Punkte verbinde und die im Stabe  $b_1 b_3$  vorhandene, unbekannte Spannung  $X$  auf die beiden Knotenpunkte  $b_1$  und  $b_3$  wirken läßt. Soll das Fachwerk brauchbar sein, so muß für beliebige Belastung  $X$  einen reellen Werth und die Spannung im Ersatzstab 30 die Größe Null

haben, da ja dieser Ersatzstab wirklich nicht vorhanden ist und ohne ihn Gleichgewicht stattfinden muß. Für irgend welche beliebige Belastung, etwa durch eine wagrechte Kraft  $K$  in  $b_3$ , erhält man im Ersatzstabe 30 die Spannung

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{030} + \mathfrak{S}_{30}' X,$$

in welchem Ausdruck  $\mathfrak{S}_{030}$  die Spannung ist, welche allein durch  $K$ , und  $\mathfrak{S}_{30}'$  die Spannung, welche allein durch  $X=1$  im Stabe 30 erzeugt wird.  $K$  und  $X$  wirken gleichzeitig; also erhält man obigen Ausdruck für  $S_{30}$ .

$X=1$  zerlegt sich im Punkte  $b_3$  in eine Seitenkraft parallel zu  $a_4 a_3$  und eine in die Stabrichtung 11 fallende Kraft; es ist

$$\mathfrak{S}_{11}' = -\frac{1}{\cos \alpha}.$$

$\alpha$  ist der Winkel des Stabes 11 mit der Normalen zu  $b_1 b_3$  in der Ebene  $a_4 b_3 a_3$ , hier = 45 Grad.  $\mathfrak{S}_{11}'$  zerlegt sich in  $b_4$  weiter nach der Richtung des Stabes 9 und nach der Parallelen zu  $a_1 a_4$ ;  $\mathfrak{S}_9'$  im Punkte  $b_1$  nach der Richtung parallel zu  $a_1 a_2$  und der Richtung von Stab 30. Die Spannung  $\mathfrak{S}_{10}'$  ist Null, weil in  $b_2$  keine Kraft von Stab 10 übertragen werden kann. Durch  $X=1$  in Punkt  $b_3$  und  $X=1$  in Punkt  $b_1$  wird demnach (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 357)

$$\mathfrak{S}_{30}' = 1 + 1 = 2$$

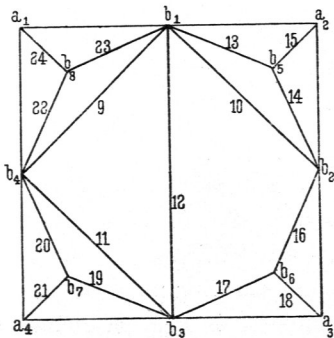
erzeugt; es ist also

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{030} + 2 X.$$

Der Ersatzstab 30 ist überflüssig, d. h. die Construction ohne ihn ausreichend, wenn für beliebige Belastung  $K$  die Spannung  $S_{30}$  gleich Null ist, dabei aber  $X$  einen reellen Werth hat. Für  $S_{30} = 0$  wird

$$X = -\frac{\mathfrak{S}_{030}}{2},$$

Fig. 358.



d. h. reell. Das Fachwerk ist also brauchbar.

Wollte man statt des Stabes  $b_1 b_3$  den vierten Stab des Viereckes in der oberen wagrechten Ebene, d. h. den Stab  $b_2 b_3$  einreihen, so erhielte man ein labiles Fachwerk. Man findet auf die gleiche Weise, wie eben gezeigt wurde, daß dann  $X = \infty$  wird, d. h. daß dieses Fachwerk unbrauchbar wäre.

Nachdem nunmehr das Fachwerk in Fig. 357 als stabil erwiesen ist, kann man den Punkt

$$\begin{array}{ll} b_5 & \text{mittels der Stäbe } 13, 14, 15, \\ b_6 & \text{» » » } 16, 17, 18, \\ b_7 & \text{» » » } 19, 20, 21, \\ b_8 & \text{» » » } 22, 23, 24 \end{array}$$

fest legen (Fig. 358). Man sieht, daß dieses Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist. Fügt man Stab  $b_2 b_3$  ein, so wird das Fachwerk statisch unbestimmt, wird aber nicht labil. Bei eisernen Thürmen kann man diesen Stab an einer Seite mit länglichen Schraubenlöchern befestigen, so daß er für die Berechnung als nicht vorhanden angesehen werden kann. Nun kann man weiter in bekannter Weise aufbauen. In Fig. 356 (S. 153) ist dieser Aufbau gezeichnet, dabei aber jedes Seitenfeld mit zwei gekreuzten Diagonalen versehen, welche als Gegendiagonalen wirken. Die Construction ist, abgesehen von der Spitze, statisch bestimmt. In der isometri-

sehen Ansicht von Fig. 356 find der grösseren Deutlichkeit wegen die Stäbe 9, 10, 11, 12 weggelassen.

Nachdem die Stabilität von Fig. 358 nachgewiesen ist, bleibt zu untersuchen, ob das Fachwerk stabil bleibt, wenn Stab 11 durch  $b_5 b_7$ , d. h. durch 31, Stab 9 durch  $b_6 b_8$ , d. h. durch 32, Stab 10 durch  $b_2 b_4$ , d. h. durch 33, und Stab 30 durch  $b_1 b_3$ , d. h. durch 12 ersetzt werden.

Der Gang der Untersuchung ist folgender. Jeder neu einzuführende Stab überträgt in seinen Anschluß-Knotenpunkten noch unbekannte Kräfte  $X$  auf dieselben und erzeugt in den zu ersetzenden Stäben Spannungen, welche den Kräften  $X$  proportional sind. In den Stäben 31, 32, 33, 12 (Fig. 359) mögen die Spannungen  $X_1, X_2, X_3, X_4$  wirken, welche in dem zu ersetzenden Stabe 11 die Spannungen

$$S_{11}'X_1, S_{11}''X_2, S_{11}'''X_3, S_{11}''''X_4$$

und im Stabe 9 die Spannungen

$$S_9'X_1, S_9''X_2, S_9'''X_3, S_9''''X_4 \text{ u. f. w.}$$

erzeugen mögen. Die sonst noch vorhandenen äußeren Lasten rufen in den Stäben die Spannungen  $\mathfrak{S}$  hervor, d. h.

in den Stäben 9, 10, 11, 30 die Spannungen  $\mathfrak{S}_9, \mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{30}$ . Die Spannungen  $\mathfrak{S}$  würden allein vorhanden sein, wenn die Stäbe 31, 32, 33, 12 nicht und nur die zu ersetzenden Stäbe 9, 10, 11, 30 vorhanden wären. Offenbar sind die  $S'$  die durch  $X_1 = 1$  erzeugten Spannungen,  $S''$ , bezw.  $S'''$ ,  $S''''$  die durch  $X_2 = 1$ , bezw.  $X_3 = 1, X_4 = 1$  erzeugten Spannungen. Die gefamnten in den zu ersetzenden Stäben 9, 10, 11, 30 auftretenden Spannungen sind nunmehr

$$\begin{aligned} S_{30} &= \mathfrak{S}_{30} + S_{30}'X_1 + S_{30}''X_2 + S_{30}'''X_3 + S_{30}''''X_4, \\ S_9 &= \mathfrak{S}_9 + S_9'X_1 + S_9''X_2 + S_9'''X_3 + S_9''''X_4, \\ S_{10} &= \mathfrak{S}_{10} + S_{10}'X_1 + S_{10}''X_2 + S_{10}'''X_3 + S_{10}''''X_4, \\ S_{11} &= \mathfrak{S}_{11} + S_{11}'X_1 + S_{11}''X_2 + S_{11}'''X_3 + S_{11}''''X_4. \end{aligned}$$

Sollen die Stäbe 9, 10, 11, 30 ersetzbar sein, so müssen die Spannungen dieser Stäbe den Werth Null haben, ohne daß dadurch diejenigen in den ersetzenden Stäben  $X_1, X_2, X_3, X_4$  unendlich groß werden. Die Bedingungsgleichungen für die Werthe von  $X_1, X_2, X_3, X_4$  sind demnach:

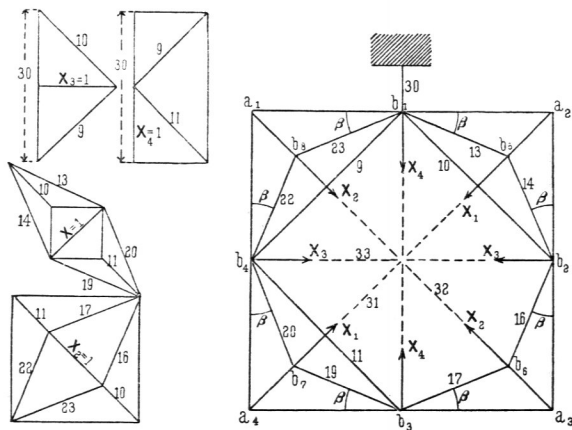
$$S_{30} = S_9 = S_{10} = S_{11} = \text{Null},$$

d. h.

$$\begin{aligned} X_1 S_{30}' + X_2 S_{30}'' + X_3 S_{30}''' + X_4 S_{30}'''' &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ X_1 S_9' + X_2 S_9'' + X_3 S_9''' + X_4 S_9'''' &= -\mathfrak{S}_9, \\ X_1 S_{10}' + X_2 S_{10}'' + X_3 S_{10}''' + X_4 S_{10}'''' &= -\mathfrak{S}_{10}, \\ X_1 S_{11}' + X_2 S_{11}'' + X_3 S_{11}''' + X_4 S_{11}'''' &= -\mathfrak{S}_{11}. \end{aligned}$$

Sollen  $X_1, X_2, X_3, X_4$  reell sein, so darf die Nenner-Determinante vorstehender Gleichungen nicht gleich Null sein; wenn dies stattfindet, so ist das Fachwerk stabil.

Fig. 359.



Wendet man diese Ueberlegung auf das zu betrachtende Thurm-Fachwerk an, und bringt in den betreffenden Knotenpunkten die Kräfte  $X_1, X_2, X_3, X_4$  als äußere Kräfte an, so erhält man durch Zerlegung die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werthe der Stabspannungen  $S', S'', S''', S''''$ , welche bezw. durch die Kräfte  $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1$  erzeugt werden.

Tabelle der Spannungen, welche in den Fachwerkflächen erzeugt werden durch:

	Stab 13	14	16	17	19	20
$X_1 = 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$
$X_2 = 1$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	0
$X_3 = 1$	0	0	0	0	0	0
$X_4 = 1$	0	0	0	0	0	0

	Stab 22	23	9	10	11	30
$X_1 = 1$	0	0	$-\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	0
$X_2 = 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	0
$X_3 = 1$	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	-2
$X_4 = 1$	0	0	$+\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	+2

Die Bedingungsgleichungen lauten also, wenn man abkürzungsweise

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{2} = b$$

setzt:

$$\begin{aligned} 0X_1 + 0X_2 - b^2X_3 + b^2X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -aX_1 + 0X_2 - bX_3 + bX_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ aX_1 + aX_2 - bX_3 + 0X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}, \\ aX_1 + aX_2 + 0X_3 - bX_4 &= -\mathfrak{S}_{11}. \end{aligned}$$

Die Nenner-Determinante ist, wie man leicht sieht, gleich Null, also das Fachwerk labil.

Wenn aber der Stab 11 im Fachwerk belassen und davon abgesehen wird, Stab 11 durch Stab 33 zu ersetzen, so erhält man ein stabiles Fachwerk. Alsdann lauten die Gleichungen, da nunmehr  $X_3$  gleich Null ist:

$$\begin{aligned} X_1S'_{30} + X_2S''_{30} + X_4S''''_{30} &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ X_1S'_9 + X_2S''_9 + X_4S''''_9 &= -\mathfrak{S}_9, \\ X_1S'_{10} + X_2S''_{10} + X_4S''''_{10} &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Mit den Werthen obiger Tabelle heißen diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0X_1 + 0X_2 + b^2X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -aX_1 + 0X_2 + bX_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ aX_1 + aX_2 + 0X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Die Nenner-Determinante dieser Gleichungen hat den Werth:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ -a & 0 & b \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = -b^2a^2 = -2 \frac{\sin^2\beta}{(\cos\beta - \sin\beta)^2}.$$

Fig. 360.

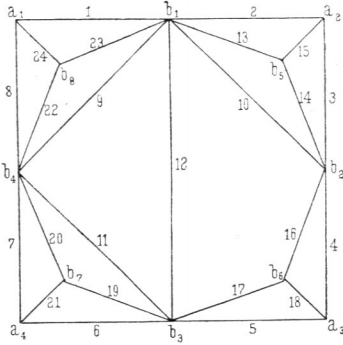
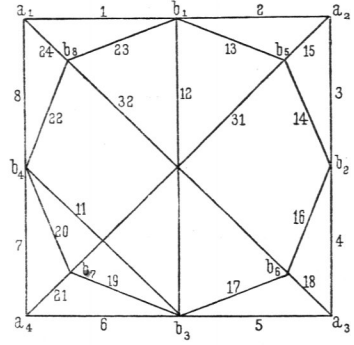


Fig. 361.



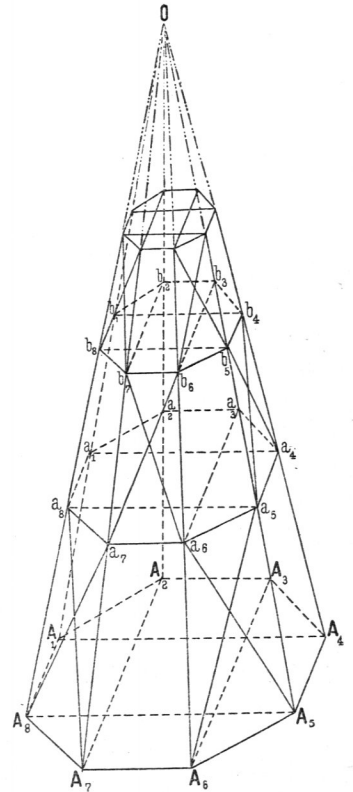
Das in Fig. 361 dargestellte Fachwerk ist also stabil, falls nicht  $\beta$  gleich Null ist. Dieser Werth ist ausgeschlossen, eben so der Werth  $\beta = 45$  Grad, für den  $a = \infty$  würde; aber auch Winkelwerthe von  $\beta$ , welche sich dem Nullwerthe nähern, sollten vermieden werden.

Die meist übliche Anordnung mit vier in der Ebene  $b_1 b_2 b_3 b_4$  einander kreuzenden Stäben ist also nicht stabil; wenn dieselbe trotzdem in der Praxis zu Aussetzungen bislang unfers Wissens keine Veranlassung gegeben hat, so liegt dies darin, daß die Verbindungen nicht gelenkig sind und an den Knotenpunkten Momente übertragen werden können. So wenig man aber die Hängewerke mit für die statische Bestimmtheit fehlenden Stäben als eine in jeder Beziehung befriedigende Stabanordnung erklären kann, eben so wenig ist dies mit der hier angegebenen Construction der Fall. Vielleicht empfiehlt sich am meisten das in Fig. 361 dargestellte Fachwerk. Eventuell ziehe man den Stab  $b_2 b_3$  ein, der das Fachwerk statisch unbestimmt, aber nicht labil macht.

Auf das Achteck  $b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4 b_8$  kann man nun die weitere Thurm-Construction aufbauen, wie in Art. 121 (Fig. 354b) angegeben ist, indem man nach und nach stets einen Knotenpunkt und drei Stäbe hinzufügt. Besonders werde bemerkt, daß in den wagrechten Trennungsebenen der oberen Geschosse nunmehr nur noch die achteckigen Ringe angeordnet zu werden brauchen. Das Raum-Fachwerk ist mit diesem stabil.

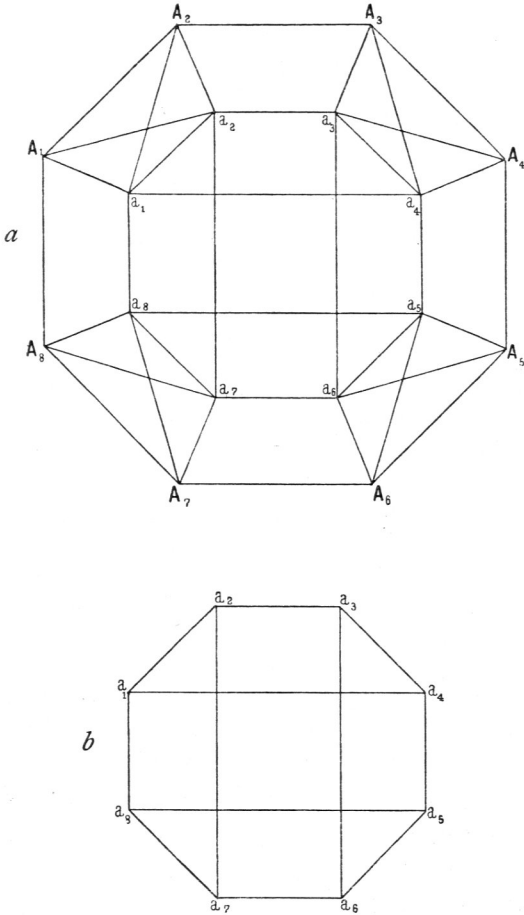
b) Achtseitige Thurmpyramide mit acht Lagerpunkten. Hier ist zunächst die Moller'sche Thurmpyramide (Fig. 362) zu betrachten. Alle acht Gratspalten sind bis zur gemeinsamen Auflagerebene hinabgeführt; zwischen je zwei Stockwerken sind herumlaufende Ringe angeordnet und in jedem Stockwerk vier Seitenfelder mit gekreuzten Stäben derart versehen, daß stets nur ein Feld um das andere ein

Fig. 362.



123.  
Moller'sche  
Thurm-  
pyramide.

Fig. 363.



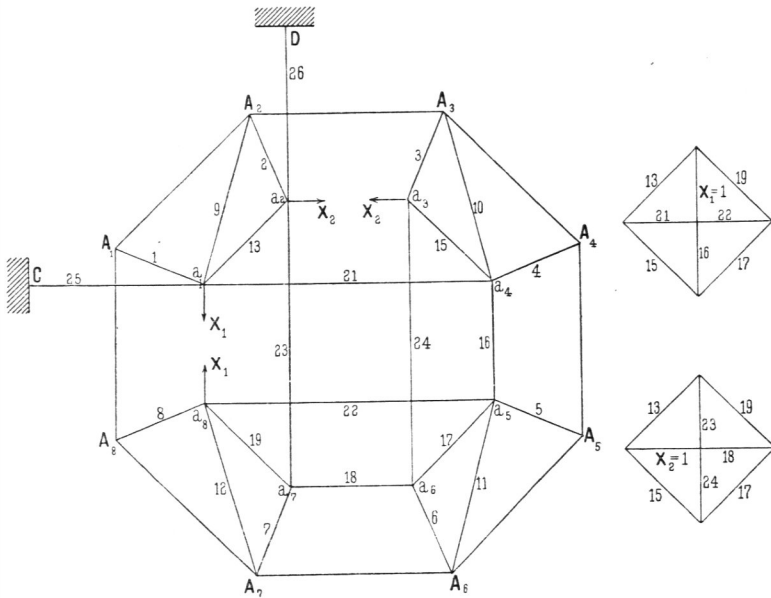
folches Andreaskreuz hat; diese verkreuzten Felder wechseln in den verschiedenen Stockwerken. Außerdem sind in den vier geneigten Ebenen  $A_1A_4O$ ,  $A_8A_5O$ ,  $A_2A_7O$  und  $A_3A_6O$  quer durchlaufende Balken, d. h. für das Stabsystem Stäbe  $a_1a_4$ ,  $a_8a_5$ ,  $a_2a_7$ ,  $a_3a_6$ , bezw.  $b_1b_4$ ,  $b_8b_5$ ,  $b_2b_7$ ,  $b_3b_6$  vorhanden. In Fig. 362 bezeichnet  $O$  die Spitze der Thurmpyramide. Es ergibt sich also zwischen je zwei Stockwerken eine Figur, wie in Fig. 363*b* dargestellt. Nunmehr soll untersucht werden, ob dieses Fachwerk statisch und geometrisch bestimmt ist, wobei zunächst, wie bisher stets, von der Spitze abgesehen werden soll, welche das Ganze statisch unbestimmt macht; ferner soll vor der Hand nur der Untertheil geprüft werden (Fig. 363*a*).

Die Scheibe  $a_1a_2 \dots a_7a_8$  ist ein ebenes, aber nicht steifes Fachwerk; rechnet man die Schnittpunkte der Balken nicht als Knotenpunkte, so hat sie 8 Knotenpunkte und nur 12 Stäbe, während die statische Bestimmtheit 13 Stäbe verlangt. Rechnet man aber die Schnittpunkte der Balken als Knoten, so ist die Zahl der

Knotenpunkte gleich 12 und die Zahl der Stäbe gleich 20; fonach fehlt für statische und geometrische Bestimmtheit wiederum ein Stab. Von den Auflagern werden vier als feste (als Punktauflager) und vier als Ebenenaflager angenommen; immer wechselt ein Punkt- und ein Ebenenaflager ab. Die vier Querbalken in der Auflagerebene sind dann, wenn ein Ring in derselben angeordnet wird, für die geometrische Bestimmtheit überflüssig und sollen als nicht vorhanden angesehen werden. Die Anzahl der Knotenpunkte des untersten Stockwerkes ist  $k = 16$ , die Zahl der Auflagerunbekannten  $n = 4 \cdot 3 + 4 = 16$  und diejenige der Stäbe  $s = 36$ ; für geometrische und statische Bestimmtheit müßte  $s^1 = 3k - n = 32$  sein; das betrachtete Raumfachwerk ist also vierfach statisch unbestimmt. Ordnet man nun statt der gekreuzten Stäbe in den vier Seitenfeldern einfache Stäbe an, so ist die erste Bedingung der statischen Bestimmtheit erfüllt.

Dieses Fachwerk soll untersucht werden; es genügt, ein Stockwerk, etwa das unterste, zu betrachten. Baut man dasselbe (Fig. 364) auf den acht Auflagern  $A_1 \dots A_8$  so auf, daß man jeden hinzukommenden Punkt mit drei bereits festen Punkten verbindet, so muß man wieder einige Ersatzstäbe — hier sind die Stäbe 25 und 26 gewählt — zu Hilfe nehmen. Verbunden ist: Punkt  $a_1$  mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $C$ , Punkt  $a_5$  mit  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $a_1$ , Punkt  $a_5$  mit  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $a_4$ , Punkt  $a_8$  mit  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $a_5$ ; ferner

Fig. 364.



Punkt  $a_2$  mit  $A_2$ ,  $a_1$ ,  $D$ , Punkt  $a_7$  mit  $A_7$ ,  $a_8$ ,  $a_2$ , Punkt  $a_6$  mit  $A_6$ ,  $a_5$ ,  $a_7$ , Punkt  $a_3$  mit  $A_3$ ,  $a_4$ ,  $a_6$ . In Wirklichkeit sind an Stelle der angegebenen Ersatzstäbe 25 und 26, welche das Fachwerk unzweifelhaft geometrisch und statisch bestimmen machen, die Stäbe  $a_1 a_8$  und  $a_2 a_3$  vorhanden. Nennt man ihre Spannungen bei beliebiger Belastung bezw.  $X_1$  und  $X_2$ , so sind die Spannungen in den einzelnen Stäben, nach Früherem und mit den früheren Bezeichnungen

$$S = \mathfrak{S} + S' X_1 + S'' X_2.$$

$S'$  ist die in einem Stabe durch  $X_1 = 1$ ,  $S''$  die in einem Stabe durch  $X_2 = 1$  erzeugte Spannung. In den Ersatzstäben müssen für beliebige Belastung die Spannungen  $S = 0$  werden, wenn dieselben überflüssig sein sollen; die  $X_1$  und  $X_2$  dürfen dabei aber nicht unendlich groß werden. Mithin ist die Bedingung für die Standfähigkeit des Fachwerkes: die Nenner-Determinante der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} S_{25}' X_1 + S_{25}'' X_2 &= -\mathfrak{S}_{25} \\ S_{26}' X_1 + S_{26}'' X_2 &= -\mathfrak{S}_{26} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10.$$

muss von Null verschieden sein, d. h.

$$\left\{ \begin{matrix} S_{25}' \cdot S_{25}'' \\ S_{26}' \cdot S_{26}'' \end{matrix} \right\} \geq 0.$$

Die Werthe  $S'$  und  $S''$  ergeben sich leicht aus den Kräfteplänen in Fig. 364. Man erhält:

$$\begin{aligned} S_{22}' &= -1, & S_{16}' &= +1, & S_{21}' &= -1, \\ & S_{25}' &= 0, & S_{26}' &= 0, \\ S_{24}'' &= -1, & S_{18}'' &= +1, & S_{22}'' &= 0, \\ S_{23}'' &= -1, & S_{26}'' &= 0, & S_{16}'' &= 0 = S_{21}'', \\ & S_{25}'' &= 0. \end{aligned}$$



Da  $S_{25}' = S_{26}' = S_{25}'' = S_{26}'' = 0$  sind, so ist die Nenner-Determinante gleich Null. Aber auch die Zähler-Determinante in den Ausdrücken für  $X_1$  und  $X_2$  der Gleichungen 10 wird gleich Null; mithin erhält man sowohl für  $X_1$ , wie für  $X_2$  zunächst den Werth  $\frac{0}{0}$ , also einen unbestimmten Werth, der auch endlich sein kann.

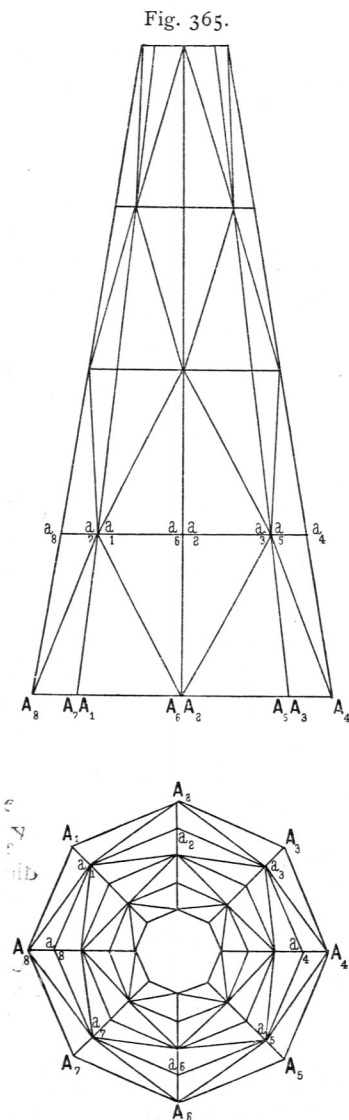
Dividirt man aber beide Gleichungen 10 durch  $S_{25}' = S_{25}'' = S_{26}' = S_{26}''$ , so sieht man, daß sich  $X_1 = X_2 = \infty$  ergibt. Sonach dürfen die Ersatzstäbe nicht fehlen; das Fachwerk ist ohne dieselben labil.

Es könnte die Frage aufgeworfen werden, ob nicht durch Einziehen einer Gegendiagonale in eines der bereits mit Diagonalen versehenen Felder die Stabilität hergestellt würde. Verzieht man etwa Feld  $A_1 A_2 a_2 a_1$  mit einer zweiten Diagonale, so wird zunächst die Gesamtzahl der Stäbe um einen Stab größer, als mit der statischen Bestimmtheit vereinbar ist; aber stabil wird das Fachwerk dadurch nicht. Denn in der Ebene dieses Feldes liegen die Punkte desselben schon, falls nur eine Diagonale vorhanden ist, fest, werden also durch die zweite Diagonale nur überbestimmt; das Verhältniß dieser Scheibe gegen das übrige Fachwerk aber, also für etwaige Drehungen derselben um die Axe  $A_1 A_2$ , bleibt vollständig unverändert. War also das frühere Fachwerk labil, so ist es auch das Fachwerk nach Einziehen der Gegendiagonale. Das Gleiche gilt von den anderen drei Gegendiagonalen, welche möglich und üblich sind. Das Fachwerk ist also auch mit den Gegendiagonalen eine labile Construction.

Ob man unter diesen Verhältnissen weiterhin empfehlen kann, Thurmdächer nach *Moller'scher* Construction auszuführen, ist fraglich. Dieselben haben sich allerdings bisher gut gehalten; aber eine als nicht stabil erkannte Construction, die überdies nicht berechnet werden kann, ist beim heutigen Stande der Constructionskunst nicht berechtigt.

Für Ausführung in Eifen-Construction ist die *Moller'sche* Thurmpyramide nicht geeignet.

c) Thurmflechtwerk mit bis zur Auflagerebene geführten Graten. Eine ganz klare Construction, bei welcher ebenfalls die Grate bis zu den



Auflagern hinabgeführt sind, wird erhalten, wenn man abwechselnd ein Auflager als Punktlager und eines als Ebenenlager construirt und nunmehr stets einen neuen Knotenpunkt mit drei neuen Stäben an vorhandene Knotenpunkte anfügt. Eine solche Anordnung ist in Fig. 365 angegeben. Punktlager sind  $A_1, A_3, A_5, A_7$ ; Ebenenlager sind  $A_2, A_4, A_6, A_8$ . Die letzteren sind durch die Stäbe des Fußringes mit den ersteren zu verbinden. Man verbinde Punkt  $a_1$  mit  $A_1, A_2, A_8$ , Punkt  $a_3$  mit  $A_2, A_3, A_4$ ,

124.  
Thurm-  
flechtwerk  
mit bis zur  
Auflagerebene  
geführten  
Graten.

Punkt  $a_5$  mit  $A_4, A_5, A_6$ , Punkt  $a_7$  mit  $A_6, A_7, A_8$ ; alsdann sind  $a_1, a_3, a_5, a_7$  als feste Punkte anzufehen. Nun verbinde man Punkt  $a_2$  mit  $A_2, a_1, a_3$ , Punkt  $a_4$  mit  $A_4, a_3, a_5$ , Punkt  $a_6$  mit  $A_6, a_5, a_7$ , Punkt  $a_8$  mit  $A_8, a_7, a_1$ . In folcher Weise kann man weiter bauen und erhält, abgesehen von der Spitze, ein statisch bestimmtes Raum-Fachwerk. Dasselbe kann in Holz (zweckmäßig mit eisernen Diagonalen in den Seitenflächen) ohne Schwierigkeit hergestellt werden.

## 2) Construction der hölzernen Thurmhelme.

125.  
Grundsätze.

Für die Construction der hölzernen Thürme hat *Moller*<sup>178)</sup> vor mehr als einem halben Jahrhundert Grundsätze aufgestellt, welche zum großen Theile auch heute noch als gültig aufgeführt werden können, auch in vielen Hinsichten mit denjenigen übereinstimmen, welche sich als Folgerung der vorstehenden theoretischen Untersuchungen ergeben haben.

*Moller* schreibt u. A. vor: »Das Innere des Thurmes werde möglichst leicht construirt; man verstärke dagegen die äußeren Dachwände; die langen und schweren sogenannten Helmstangen sind fortzulassen und auf eine kurze Hängefäule zum Tragen des Knopfes und zum Ansetzen der Sparren zu beschränken; die Eckpfosten oder Ecksparren (von uns als Gratsparren bezeichnet) dürfen nicht durch horizontale Hölzer unterbrochen, sondern sie müssen, wenn sie zu kurz sind, unmittelbar verlängert werden, so daß Hirnholz auf Hirnholz zu stehen kommt; die äußeren Dachwände sind so zu verbinden, daß sie keinen Seitendruck ausüben, sondern nur senkrecht auf die Mauer wirken können; dieselben sind durch horizontale Verbindungen (Kränze) in gewissen, nicht zu großen Entfernungen so abzuschließen, daß dadurch die Thurmpyramide in mehrere kleine, abgestumpfte Pyramiden zerlegt wird.«

Man sieht, *Moller* verlangt das vorstehend entwickelte Fachwerk, bei welchem die Gratsparren durchgehen, in den Höhen der einzelnen Balkenlagen umlaufende Ringe und in den trapezförmigen Seitenflächen Diagonalen angeordnet sind. Die letzteren führt er nicht besonders auf, hat sie aber in dem nach ihm benannten Thurmdach nahe den Seitenflächen angewendet. Die Kränze dienen als Pfetten, als Auflager für die Zwischensparren; der Thurm ist im Inneren möglichst frei von Constructionstheilen zu halten. Wenn *Moller* fordert, daß die Dach-Construction nur lothrechten Druck auf die Mauer übertragen könne, so ist dies leider nicht durchführbar.

Weiter fordert *Moller* von der Construction für die Dauerhaftigkeit u. A.: »Alle Zapfenlöcher, in welchen sich Wasser sammeln könnte, sind zu vermeiden; wo dieses nicht möglich ist, müssen sie unten geschlitzt werden, damit das Wasser ablaufen kann. Der Luftzug ist zu befördern.«

Für die Ausbesserungen fordert er: »Alle Hölzer sind so zu verbinden, daß die schadhafte leicht weggenommen werden können; mithin sollen die Gebälke, Sparrenbalken u. f. w. nicht unter die Hauptpfosten oder Ecksparren gelegt werden, sondern neben dieselben. Bei größeren Thürmen ist jedesmal außer den Ecksparren noch eine von denselben unabhängige Unterstützung anzubringen, so daß durch dieselbe, sowohl beim Aufschlagen, als bei Reparaturen, die Festigkeit des Ganzen gesichert wird und sie zugleich als Gerüst dienen kann. Die Kränze sind so ein-

<sup>178)</sup> A. a. O., Heft 4.