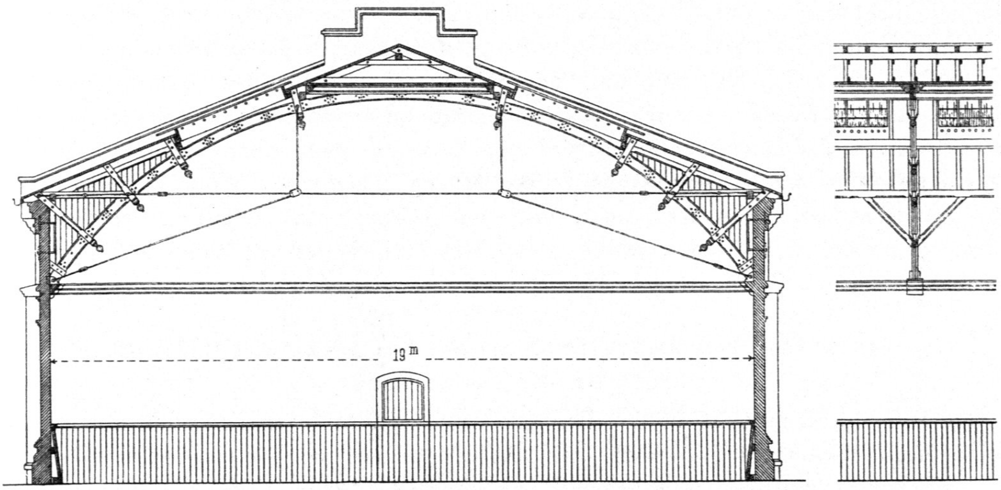
Fig. 345.

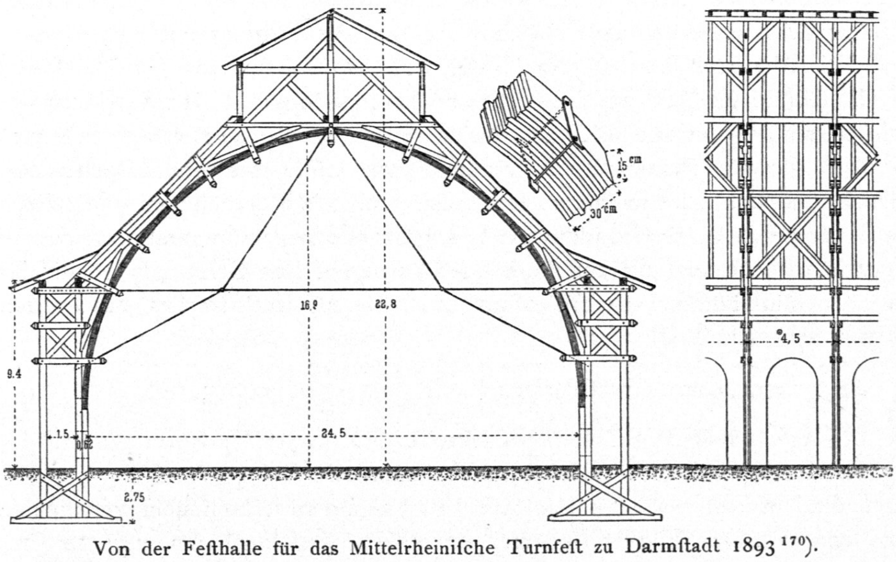


Vom Taterfall zu Mannheim [169]).

$^1/_{200}$ n. Gr.

Arch.: *Manchot.*

Fig. 346.



Von der Fefthalle für das Mittelrheinifche Turnfeft zu Darmftadt 1893 [170]).

$^1/_{375}$ n. Gr.

28. Kapitel

Hölzerne Thurmdächer, Zelt- und Kuppeldächer.

a) Hölzerne Thurmdächer.

Thurmdächer find fteile Zeltdächer über quadratifcher oder achteckiger, auch wohl kreisförmiger, felten über einer anders geformten Grundfläche. Diefelben 113. Einleitung.

werden hauptſächlich durch den Winddruck gefährdet; Schnee bleibt wegen der Steilheit nicht liegen; das Eigengewicht erzeugt keine bedeutenden Beanſpruchungen.

Eine gute Thurmdach-Conſtruction muſs folgenden Anforderungen Genüge leiſten: ſie muſs ſtandfeſt und fähig ſein, auch bei ungünſtigſter Belaſtung die auf ſie einwirkenden Kräfte ſicher und, ohne merkbare Formänderung zu erleiden, in das unterſtützende Mauerwerk zu leiten; ſie muſs der Zerſtörung durch Feuchtigkeit und Faulen möglichſt wenig Angriffspunkte bieten; ſie muſs leichten und ſicheren Aufbau geſtatten, bequemes Ausbeſſern und Auswechſeln etwa ſchadhaft gewordener Hölzer ermöglichen; ſie darf nicht zu viel Holz erfordern, um nicht zu theuer zu werden.

1) Statiſche Verhältniſſe und theoretiſche Grundlagen für die Conſtruction.

114. Kräfte.

Die Thurmdächer ſetzen ſich ſtets auf hohe Mauern; für dieſe ſind aber wagrechte Kräfte beſonders gefährlich; deſshalb ordne man die Conſtruction ſtets ſo an, daſs die wagrechten Kräfte möglichſt gering werden. Dem gemäſs ſind Sprengwerks-Conſtructionen, welche ſtets auch wagrechte Kräfte auf die Mauern übertragen, hier ausgeſchloſſen. Die ſchiefen Windkräfte haben allerdings ſtets wagrechte auf die Conſtruction wirkende Seitenkräfte, die man nicht fortſchaffen kann. Man muſs aber ſuchen, dieſe gefährlichen Seitenkräfte und ihr Umſturzmoment ſo klein wie möglich zu machen; durch eine zweckmäſsige Form des Thurmdaches iſt eine ſolche Verkleinerung wohl möglich, wie die Ueberlegung unter α zeigt.

115. Windbelaſtungen.

α) Windbelaſtungen. Nach den Unterſuchungen in Theil I, Band 1, zweite Hälfte (2. Aufl., S. 23 u. 24) dieſes »Handbuches« iſt der Winddruck gegen ein achtſeitiges Prisma kleiner, als derjenige gegen ein vierſeitiges Prisma; das Gleiche gilt für die Pyramide. Nennt man die Höhe des Thurmdaches h, den Winddruck auf das Flächenmeter ſenkrecht getroffener Fläche p, die Seite des Quadrates, bezw. des Grundquadrates der Grundfläche B, nimmt man den Winddruck als wagrecht wirkend an und berechnet (mit geringem Fehler) ſo, als ob die Seitenflächen lothrecht ſtänden, ſo erhält man als die auf Umſturz des ganzen Thurmdaches wirkende Kraft W:

bei quadratiſcher Grundfläche $W = p\,\frac{B h}{2} = 0{,}5\, p B h$;

bei regelmäſsiger Achteck-Grundfläche (Fig. 349) $W = 0{,}414\, p B h$;

bei kreisförmiger Grundfläche (Kegeldach) $W = 0{,}39\, p B h$;

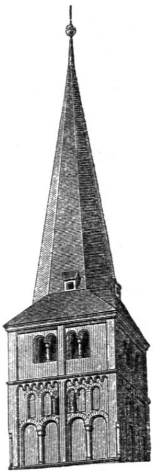
d. h. die auf Umſturz wirkende Kraft iſt bei einem Thurmdach über regelmäſsigem Achteck um etwa 17 Procent und bei einem Kreiskegeldach um etwa 22 Procent geringer, als bei einem Dach über quadratiſcher Grundfläche (Höhe und untere Breite als gleich angenommen).

Bei dreieckiger Seitenfläche des Thurmdaches liegt die Mittelkraft der Windkräfte in ein Drittel der Höhe über der Grundfläche; das Umſturzmoment iſt dann:

$$M_{Umſturz} = W\,\frac{h}{3}\,.$$

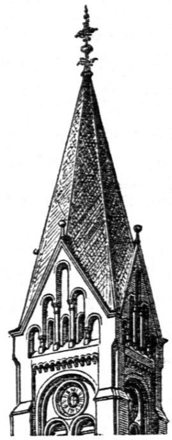
Eine Verkleinerung des Umſturzmoments kann ſowohl durch Verringerung von W, wie auch von h erreicht werden; die letztere Verkleinerung, d. h. eine tiefere Lage von W wird durch Verbreitern der Grundfläche und Anwendung verſchiedener Dachneigungen in den verſchiedenen Theilen des Thurmdaches erzielt. Eine ſolche in

Fig. 347.



Von der Kirche zu Schwarz-rheindorf[171]).

Fig. 348.



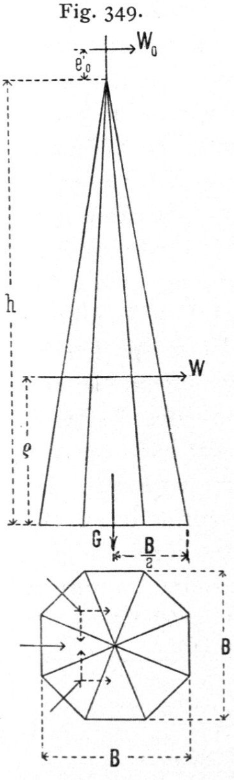
Von der reformirten Kirche zu Inſterburg[172]).

Fig. 347[171]) dargeſtellte Anordnung hat neben dem Vortheil der tiefen Lage von W noch den weiteren ſtatiſchen Vorzug, daſs die den unteren Theil belaſtenden Winddrücke gröſsere Winkel mit der Wagrechten einſchlieſsen, als die auf den ſteileren Theil wirkenden; ſie ſind kleiner und haben eine günſtigere Richtung.

Statiſch günſtig iſt auch die vielfach ausgeführte, architektoniſch ſehr wirkſame Anordnung von vier Giebeln (Fig. 348[170]); durch dieſelben wird ein Theil des Daches der Einwirkung des Windes entzogen.

Endlich iſt auch eine Form des Thurmdaches zweckmäſsig, bei welcher daſſelbe eine über Ecke geſtellte vierſeitige Pyramide bildet, deren Kanten nach den Spitzen der vier Giebel laufen; dieſe ſog. Rhombenhaube (Rautenhaube) iſt günſtiger, als die einfache Pyramide, deren Kanten nach den Ecken des Grundquadrats laufen. Die gröſste auf Umkanten wirkende Windkraft in der Diagonalebene iſt allerdings genau ſo groſs, wie die in der Mittelebene des Thurmes ungünſtigſtenfalls wirkende; beide ſind aber annähernd 30 Procent geringer, als wenn das Dach als vierſeitige Pyramide mit nach den Ecken des Quadrats laufenden Kanten hergeſtellt wäre.

Fig. 349.



Den Winddruck auf das Flächenmeter ſenkrechter Thurmquerſchnittsfläche ſetze man $p = 200$ kg für 1 qm; an beſonders dem Wind ausgeſetzten Stellen rechne man mit $p = 250$ kg für 1 qm.

116. Standſicherheit des Thurmhelms.

β) Standſicherheit des Thurmhelms. Für die Standſicherheit muſs zunächſt verlangt werden, daſs nicht das Thurmdach als Ganzes ſeitlich verſchoben oder umgekantet werden könne. Der erſteren Bewegung wirkt der Reibungswiderſtand an den Auflagern entgegen, der Drehung um eine Kante das Stabilitätsmoment. Nennt man die ganze ungünſtigſtenfalls auf das Thurmdach wirkende Windkraft W, die Höhe des Angriffspunktes dieſer Kraft über der Grundfläche ρ, den auf das Thurmkreuz wirkenden Winddruck W_0 und ſeine Höhe über der Thurmſpitze e_0, ſo iſt das Umſturzmoment (Fig. 349)

$$M_{Umſturz} = W\rho + W_0\,(h + e_0)\,;$$

ρ iſt meiſtens nahezu gleich $\frac{h}{3}$. Das Stabilitätsmoment iſt, wenn man das Gewicht des Thurmdaches mit G und die Breite der Grundfläche mit B bezeichnet,

$$M_{Stab} = \frac{GB}{2}\,.$$

171) Facſ.-Repr. nach: DOHME, R. Geſchichte der deutſchen Baukunſt. Berlin 1890. S. 68.

172) Facſ.-Repr. nach: Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 451.

Damit ftets ausreichende Sicherheit gegen Umkanten vorhanden fei, mache man das Stabilitätsmoment gröfser, als das Umfturzmoment jemals werden kann.

Der ungünftigfte Fall tritt unmittelbar vor der Fertigftellung des Thurmes ein, wenn die Dachdeckung noch nicht aufgebracht, das Thurmgewicht folglich verhältnifsmäfsig klein ift. Falls auch die Verfchalung noch fehlt, kann der Wind im Zimmerwerk, in den Balkenlagen und ihren Abdeckungen unter Umftänden gröfsere Angriffsflächen finden, als nachher; jedenfalls berechne man den Thurm wenigftens fo, dafs er ohne Dachdeckung, aber mit Lattung oder Schalung ausreichende Sicherheit gegen Umfturz und Verfchieben bietet.

Soll ein frei auf das Thurmmauerwerk gefetztes Thurmdach nicht feitlich verfchoben werden, fo mufs die gröfste wagrechte Windkraft kleiner fein, als der Reibungswiderftand an den Auflagern. Der Reibungs-Coefficient kann zu 0,5 bis 0,6 angenommen werden; es mufs demnach

$$W + W_0 < 0{,}5\ G$$

fein.

Wenn das Eigengewicht des Thurmes die verlangte Standficherheit nicht liefert, fo bleibt nichts übrig, als das Thurmdach mit dem Thurmmauerwerk zu verankern.

117.
Verankerung des Thurmhelms.

Die Frage, ob eine Verankerung nothwendig oder auch nur zuläffig fei, wird ganz verfchieden beantwortet. Früher galt es als ausgemacht, dafs man eine Verankerung des Thurmhelms im Mauerwerk vermeiden müffe, weil durch eine folche das Mauerwerk gezwungen würde, an den Bewegungen des Thurmdaches theilzunehmen, was dem Mauerwerk über Kurz oder Lang fchädlich werden müffe. Auch verwies man auf die aus alter Zeit ftammenden, nicht verankerten Thürme, welche fich gut gehalten haben. *Moller* fchreibt beftimmt vor[173]), dafs das Zimmerwerk der Thurmfpitze unmittelbar auf den oberen Theil der Mauer gefetzt werden folle, fo dafs die Holz-Conftruction ganz für fich beftehe und das Mauerwerk keine weitere Verbindung mit erfterer habe, als dafs es derfelben zur Unterlage diene. Das Eigengewicht der Dach-Conftruction mufs alsdann genügen, um ein Kanten zu verhüten.

Andererfeits mufs aber doch verlangt werden, dafs das Bauwerk unter allen Umftänden ftandfeft fei. Genügt hierzu das Eigengewicht nicht, fo verankere man oder vermindere die Höhe fo weit, bis das Gewicht für die Standfeftigkeit ausreicht. Letzteres ift vielfach nicht möglich; folglich bleibt nur die Verankerung übrig. Es fragt fich nun, ob denn wirklich die gegen die Verankerung in das Feld geführten Bedenken fo fchwer wiegend find. Die gefürchtete Bewegung der Füfse des Thurmhelmes kann dann nicht eintreten, wenn man diefelben feft und genügend tief mit dem Mauerwerk verankert; es kann fich ftets nur um Verringerung des Auflagerdruckes handeln, der auch negativ werden kann und dann durch das Gewicht des angehängten Mauerwerkes aufgehoben wird. So lange Gleichgewicht vorhanden ift, werden keine oder höchftens durch die Elafticität bedingte, fehr geringfügige Bewegungen eintreten, welche dem Mauerwerk nicht fchaden. Aber auch die Erfahrung fpricht nicht gegen die Verankerung. *Otzen* verankert feine hölzernen Thurmhelme ohne nachtheilige Ergebniffe; nach Mittheilung von *Mohrmann*[174]) greift auch der Altmeifter der Gothik, *Haafe*, neuerdings unbedenklich zur Ver-

---

173) In: MOLLER, G. Beiträge zu der Lehre von den Conftructionen: Ueber die Conftruction hölzerner Thurmfpitzen. Darmftadt und Leipzig 1832—44.

174) In: Deutfche Bauz. 1895, S. 394.

ankerung hölzerner Thurmdächer. Endlich ist auch nicht einzusehen, warum es zulässig sein soll, eiserne Thürme zu verankern, ohne für das Mauerwerk schlimme Folgen zu befürchten, während dies für Holzthürme unzulässig sei. Auch kann man auf die hohen eisernen Viaductpfeiler hinweisen, welche stets verankert werden, ohne dass man Befürchtungen für das Mauerwerk des Unterbaues hegt. Wenn aber auf die alten Thürme hingewiesen wird, welche unverankert Stand gehalten haben, so ist zu bemerken, dass diese ein nicht unbedeutend grösseres Eigengewicht hatten; sie enthielten theilweise mehr Holz und vor Allem schwereres Holz, da sie meist aus Eichenholz hergestellt wurden, während heute das leichtere Tannenholz die Regel bildet.

Nach dem Vorstehenden kann der Verfasser sich nur für die Verankerung der hölzernen Thurmhelme aussprechen; dieselbe muss im Stande sein, auch bei ungünstigsten Kräftewirkungen die Standsicherheit zu erhalten.

Bereits oben ist bemerkt, dass man den Winddruck zu 200 kg (bezw. 250 kg) für 1 qm lothrechten Thurmquerschnittes setzen soll, dass ferner der Zustand des noch nicht gedeckten, aber bereits verschalten oder verlatteten Thurmes der Rechnung zu Grunde zu legen ist. Man bestimme nun die Verankerung so, dass das Stabilitätsmoment, einschliesslich des Moments des an den Ankern hängenden Mauergewichtes, wenigstens doppelt so gross ist, als das Umsturzmoment [175]).

Von grosser Bedeutung für die Standsicherheit ist das Verhältniss der Pyramidenhöhe h zur Breite B der Grundfläche (die Bezeichnungen entsprechen denjenigen in Fig. 349, S. 143). Dasselbe ist in erster Linie von architektonischen Erwägungen abhängig; doch dürfte es sich empfehlen, auch die statischen Verhältnisse in Betracht zu ziehen und allzu grosse Höhen zu vermeiden. Die Ausführungen zeigen die Verhältnisse $\frac{h}{B} = 3$ bis $4\frac{1}{2}$, ausnahmsweise auch wohl bis $\frac{h}{B} = 5$.

γ) Thurm-Fachwerk; Allgemeines. Es genügt nicht, dass die Thurmpyramide, als Ganzes betrachtet, stabil sei; auch die einzelnen Theile derselben müssen ein unverrückbares Fachwerk bilden, welches die an beliebigen Stellen aufgenommenen belastenden Kräfte sicher und ohne merkliche Formänderungen in den Unterbau befördert; sie muss ein geometrisch bestimmtes, wo möglich auch ein statisch bestimmtes Fachwerk sein. Um Klarheit über den Aufbau zu bekommen, sind einige allgemeine Untersuchungen über das räumliche Fachwerk hier vorzunehmen, welche sowohl für die Holzthürme, wie für die Eisenthürme Geltung haben. 118. Thurm-Fachwerk.

Die Voraussetzungen, welche hier gemacht werden, sind allerdings bei den Holzthürmen nicht ganz erfüllt; insbesondere ist die Annahme der gelenkigen Knotenverbindung der Fachwerkstäbe nicht genau. Dennoch sind die nachfolgenden Untersuchungen auch für die Holzthürme nicht werthlos. Wenn sich ergiebt, dass (für unsere Voraussetzungen) das Thurm-Fachwerk bei der einen Anordnung der Stäbe labil, bei einer etwas geänderten Stabanordnung aber stabil sein würde, so wird man zweckmäsig die zweite Anordnung vorziehen. Denn es ist stets misslich, sich auf die unbekannten Hilfskräfte zu verlassen, welche auftreten, weil die Voraussetzungen

---

175) Siehe auch: LODEMANN. Verankerung der Thurmhelme mit dem Mauerwerk. Centralbl. d. Bauverw. 1895, S. 481.
SEIBERTS. Der Absturz des Thurmhelms an der St. Matthiaskirche zu Berlin. Deutsche Bauz. 1895, S. 382.
RINCKLAKE, MOHRMANN. Ueber dasselbe. Deutsche Bauz. 1895, S. 393.
MARSCHALL, CORNEHL. Ueber dasselbe. Deutsche Bauz. 1895, S. 477.
SEIBERTS. Desgl. Deutsche Bauz. 1895, S. 415.

nicht genau erfüllt ſind, zumal wenn, wie hier, die rechneriſche Ermittelung dieſer Hilfskräfte eine äuſserſt umſtändliche und ſchwierige Arbeit iſt. Da nun die folgenden Unterſuchungen wegen der eiſernen Thürme u. ſ. w. ohnehin vorgenommen werden müſſen und auf die üblichen Thurm-Fachwerke ein klares Licht werfen, ſo dürfte für dieſelben hier die geeignete Stelle ſein.

Die Thurmhelme ſind Raum-Fachwerke. Die einfachſte Stützung eines Raum-Fachwerkes iſt diejenige vermittels dreier Fuſspunkte. Die ſämmtlichen Unbekannten der Auflagerdrücke dürfen die Zahl 6 nicht überſchreiten, wenn die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen ſtarrer Körper zu ihrer Ermittelung ausreichen ſollen. Man muſs nun, um ſowohl eine wagrechte Verſchiebung der ganzen Conſtruction, als auch eine Drehung derſelben um eine lothrechte Axe zu verhüten, ein Auflager feſt, ein zweites in einer geraden Linie verſchiebbar machen, während das dritte in der Stützungsebene frei beweglich ſein kann. Der Auflagerdruck des feſten Auflagers kann eine ganz beliebige Richtung annehmen, enthält alſo drei Unbekannte, als welche man zweckmäſsig die drei Seitenkräfte einführt, welche ſich bei rechtwinkeliger Zerlegung des Auflagerdruckes nach drei Axen ergeben. Der Auflagerdruck des in einer Geraden verſchiebbaren Lagers muſs ſenkrecht zu der Geraden — der ſog. Auflagerbahn — gerichtet ſein, weil die in die Richtung dieſer Linie fallende Seitenkraft, der Beweglichkeit wegen, ſtets Null iſt; dieſer Auflagerdruck enthält alſo nur zwei Unbekannte, nämlich die beiden Seitenkräfte in der zur Auflagerbahn ſenkrecht gerichteten Ebene. Im Auflagerdruck des dritten, in einer Ebene beweglichen Auflagers iſt nur eine Unbekannte, die Gröſse der Kraft, enthalten; denn die Richtung iſt dieſem Auflagerdruck vorgeſchrieben: er muſs wegen der Beweglichkeit des Auflagers ſenkrecht zur Auflagerebene ſtehen.

Allgemein bedeutet nach Vorſtehendem beim Raum-Fachwerk jedes feſte Auflager drei Unbekannte (entſpricht drei Auflagerbedingungen), jedes in einer Linie bewegliche Auflager zwei Unbekannte (entſpricht zwei Auflagerbedingungen) und jedes in einer Ebene bewegliche Auflager eine Unbekannte (entſpricht einer Auflagerbedingung). Wir werden weiterhin die drei Arten der Auflager kurz als Punktlager, Linienlager, Ebenenlager bezeichnen.

Im oben angenommenen Falle dreier Auflager, von denen je eines ein Punkt-, ein Linien- und ein Ebenenlager iſt, enthalten alſo die Auflagerkräfte $3 + 2 + 1 = 6$ Unbekannte, für deren Ermittelung die Gleichgewichtslehre bekanntlich 6 Gleichungen bietet. Die Auflagerkräfte werden ſich demnach nach den Gleichgewichtsbedingungen ſtarrer Körper beſtimmen.

Es müſſen aber auch die Spannungen der einzelnen Stäbe des Raum-Fachwerkes für beliebige mögliche Belaſtungen ermittelt werden können. Am einfachſten kann dies geſchehen, wenn das Fachwerk ſtatiſch beſtimmt iſt, d. h. wenn alle Stabſpannungen aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können. Damit dies möglich ſei, muſs die Zahl der Stäbe zu derjenigen der Knotenpunkte in einem beſtimmten Verhältniſſe ſtehen.

Wir bezeichnen mit k die Anzahl der Knotenpunkte, s die Anzahl der Stäbe, p die Anzahl der feſten Auflager (Punktlager), l die Anzahl der in Linien geführten Lager (Linienlager) und mit e die Anzahl der in Ebenen geführten Lager (Ebenenlager); alsdann iſt die Zahl aller Unbekannten

$$s + 3p + 2l + e.$$

An jedem Knotenpunkte ergeben ſich aus den drei Gleichgewichtsbedingungen drei

Gleichungen, alſo bei k Knotenpunkten erhält man $3k$ Gleichungen. Die Zahl der Unbekannten muſs für ſtatiſche Beſtimmtheit gleich der Zahl der Gleichungen ſein; mithin iſt die Bedingung für ſtatiſche Beſtimmtheit:

$$s + 3p + 2l + e = 3k,$$

und wenn man abkürzungsweiſe die Zahl der Auflager-Unbekannten

$$3p + 2l + e = n \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7.$$

ſetzt, ſo wird $s + n = 3k$ und

$$s = 3k - n \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8.$$

Bei der obigen Annahme dreier Auflager, eines Punkt-, eines Linien- und eines Ebenenlagers war $p = 1$, $l = 1$ und $e = 1$, alſo $n = 3 + 2 + 1 = 6$; mithin muſs für dieſen Fall ſein

$$s = 3k - 6 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9.$$

Das einfachſte räumliche Fachwerk iſt das Tetraëder, welches 4 Knotenpunkte und 6 Stäbe hat; bei demſelben iſt thatſächlich $s = 3k - 6 = 3 . 4 - 6 = 6$; daſſelbe iſt alſo ein ſtatiſch beſtimmtes Fachwerk. Ein Punkt im Raume wird aber geometriſch beſtimmt, wenn er durch Linien (Stäbe) mit 3 feſten Punkten verbunden wird, welche mit ihm nicht in derſelben Ebene liegen; alsdann findet auch eine zweifelloſe Zerlegung jeder auf dieſen Punkt wirkenden Kraft auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen ſtatt. Man kann alſo durch allmähliches Anfügen von je einem Knotenpunkte und drei Stäben an den Grundkörper des Tetraëders ein geometriſch und ſtatiſch beſtimmtes Raum-Fachwerk erhalten. Dies folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 9. Nennt man die Zahl der zu einem ſtatiſch beſtimmten Fachwerk hinzukommenden Knotenpunkte allgemein $\varkappa$, diejenige der hinzukommenden Stäbe σ, ſo iſt das entſtehende Fachwerk ſtatiſch beſtimmt, wenn ſtattfindet:

$$s + \sigma = 3 (k + \varkappa) - 6 .$$

Es war aber auch $s = 3k - 6$, woraus folgt, daſs für den Fall ſtatiſcher Beſtimmtheit

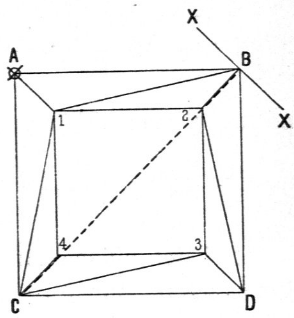
$$\sigma = 3\varkappa.$$

ſein muſs.

Soll alſo das Fachwerk auch nach dem Hinzufügen der neuen Knotenpunkte ſtatiſch beſtimmt bleiben, ſo muſs ſtets die Zahl der hinzukommenden Stäbe 3-mal ſo groſs ſein, wie die Zahl der hinzukommenden Knotenpunkte. Für $\varkappa = 1$ muſs $\sigma = 3$ ſein.

Die Anordnung eines Thurmes mit nur drei Fuſspunkten iſt nicht üblich; es ſind aber auch Stützungen auf mehr als drei Füſsen als ſtatiſch beſtimmte, räumliche Fachwerke möglich. Dies könnte auffallen, wenn man bedenkt, daſs nur dann die Auflagerdrücke eines Körpers mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können, wenn die Zahl der Fuſspunkte nicht gröſser als 3 iſt. Bei einem Fachwerk aber kann man die Auflagerdrücke dennoch beſtimmen, auch wenn die Zahl der in dieſen enthaltenen Unbekannten gröſser als 6 iſt; nur muſs man dafür Sorge tragen, daſs das Fachwerk ſelbſt ſo viele weniger Stäbe, alſo Unbekannte, enthält, wie zu viel Unbekannte in den Auflagerdrücken ſind. Selbſtverſtändlich darf man nicht beliebige Stäbe entfernen und muſs in jedem Falle genau unterſuchen, ob das entſtehende Fachwerk ſtatiſch und geometriſch beſtimmt iſt oder nicht. Aehnliche Anordnungen ſind beim ebenen Fachwerk vorhanden, ſo bei den Bogenträgern mit 3 Gelenken, den Auslegerträgern etc. Man muſs alſo auch hier, wegen der hinzukommenden Auflagerunbekannten, neue Bedingungen durch die Conſtruction ſchaffen. Nachſtehend ſollen die beiden wichtigſten Fälle des vierſeitigen und des achtſeitigen Thurm-Fachwerkes in dieſer Hinſicht beſprochen werden.

Fig. 350.



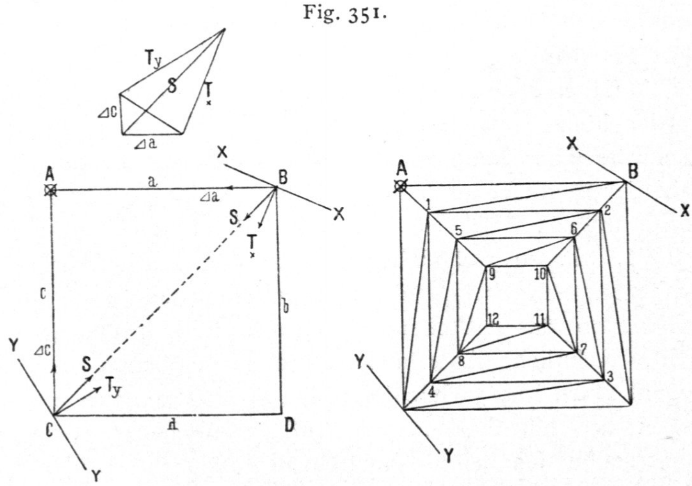
119. Vierſeitige Thurm-pyramide. δ) Vierſeitige Thurmpyramide. Die vier Fuſspunkte derſelben ſeien A, B, C, D (Fig. 350); einer davon, etwa A, ſei feſt, ein zweiter, B, ſei in einer Linie, etwa XX, die beiden anderen in der Ebene $ABCD$ beweglich. Die Auflagerdrücke enthalten alſo $n = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$ Unbekannte. Geht man wieder vom Tetraëder aus und legt das Dreieck ABC zu Grunde, wobei A mit 3, B mit 2 und C zunächſt mit einer Auflagerbedingung, ſo ſind alle drei Punkte in der Ebene genau durch die Auflagerbedingungen und die Längen der Dreieckſeiten beſtimmt, wenn nicht etwa die Auflagerbahn XX des Punktes B ſenkrecht zu AB gerichtet iſt. Der Punkt *1* in einer über ABC liegenden Ebene wird nunmehr durch die drei Stäbe $A\,1$, $B\,1$ und $C\,1$ geometriſch beſtimmt. Das erhaltene Tetraëder iſt geometriſch und ſtatiſch beſtimmt. Verbindet man nunmehr den vierten Fuſspunkt D mit 2 Punkten, etwa mit B und C, in derſelben Ebene, ſo wird auch D geometriſch feſt gelegt, da dieſer Punkt in der Ebene ABC bleiben muſs; der dritte Stab, welcher eigentlich erforderlich wäre, um C feſt zu legen, wird durch die Auflagerbedingung bei D erſetzt. Daraus folgt, daſs, wie die Spannung dieſes (nicht angeordneten) Stabes ſtets bekannt wäre, wenn D kein Auflagerpunkt wäre, ſo auch der Auflagerdruck bei D ſtets nach ſtatiſchen Geſetzen ermittelt werden kann. D iſt als in der Ebene $ABCD$ beweglich zu conſtruiren. (Man kann auch, wie dies mehrfach geſchehen iſt, für die Unterſuchung den Auflagerdruck durch einen gedachten Stab erſetzen). Für das Fachwerk mit 4 Stützpunkten nach Fig. 350 iſt alſo die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 7$, die Zahl der Stäbe s und die Zahl der Knotenpunkte k; alſo muſs für den Fall ſtatiſcher Beſtimmtheit

$$s + 7 = 3k \quad \text{oder} \quad s = 3k - 7$$

ſein. Man kann nun Knotenpunkt *2* mit *1*, B, D, Punkt *3* mit *2*, D, C und Punkt *4* mit *3*, C, *1* verbinden und erhält ſo das in Fig. 350 gezeichnete Fachwerk, welches geometriſch und auch ſtatiſch beſtimmt iſt.

Bislang war angenommen, daſs ein Stab BC vorhanden ſei; dieſer Stab iſt unter Umſtänden unbequem und für die Benutzung ſtörend. Es fragt ſich, ob derſelbe fortgelaſſen werden, bezw. unter welchen Bedingungen dies geſchehen kann. Stab BC war angeordnet, um Punkt C in der Auflagerebene geometriſch feſt zu legen. Man kann dies auch dadurch erreichen, daſs man für C, wie für B, eine Auflagerbahn, etwa YY (Fig. 351) vor-

Fig. 351.

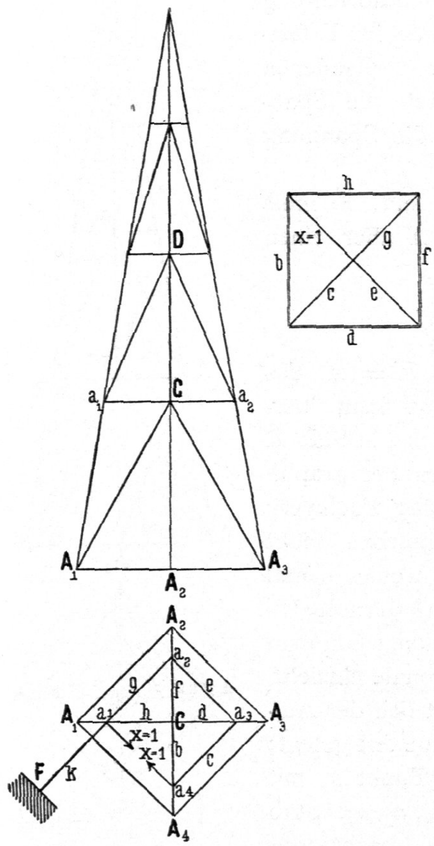


ſchreibt; dieſelbe kann beliebige Richtung haben; nur darf ſie nicht ſenkrecht zu AC ſtehen, da ſonſt eine ſehr kleine Bewegung des Punktes C, nämlich eine Drehung um A, möglich wäre. Da nun Punkt C ohne Stab BC feſt gelegt iſt, ſo kann dieſer fortfallen; das Fachwerk wird alſo nunmehr durch Fortlaſſen des Stabes BC nicht labil.

Man kann ſich dies auch dadurch klar machen, daſs man zunächſt den Stab BC als vorhanden annimmt und nun unterſucht, ob die Spannung deſſelben durch das wirklich vorhandene Fachwerk, d. h. nach Fortnahme von BC geleiſtet werden kann. Iſt die Spannung des Stabes BC gleich S_c, ſo zerlegt ſich S_c in zwei Seitenkräfte, deren eine ſenkrecht zur Auflagerbahn YY, deren andere in die Linie AC fällt; in die Linie CD kann kein Theil der Kraft fallen, weil er in D (dort iſt ein bewegliches Flächenlager) nicht aufgenommen werden kann. Eben ſo wird die in B angreifende Kraft $S_B = S_c$ durch den Gegendruck der Auflagerbahn XX und die hinzukommende Spannung in BA geleiſtet. Die beiden Kräfte Δa in AB und Δc in CA werden dann im feſten Punkte A in das Mauerwerk geleitet. Der Thurm mit vier Fuſspunkten kann alſo als ſtatiſch beſtimmtes Fachwerk hergeſtellt werden, wenn ein Auflager feſt, ein zweites Auflager in der Auflagerebene, die beiden weiteren Auflager in geraden Linien beweglich gemacht ſind und an dieſe vier Auflagerpunkte weitere Punkte nach der allgemeinen Regel (je 1 Knotenpunkt und 3 Stäbe) angeſchloſſen werden. Grundbedingung für die Stabzahl iſt hier, weil $n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$ iſt,

$$s = 3k - 8 .$$

Fig. 352.



Eine ſolche Anordnung zeigt Fig. 351, bei welcher die Spitze des Thurmhelms nicht gezeichnet iſt. Durch dieſe wird, weil hier ein Knotenpunkt mit 4 Stäben hinzukommt, das Fachwerk ſtatiſch unbeſtimmt; es bleibt aber geometriſch beſtimmt.

Es liegt nahe, die vierſeitige Thurmpyramide dadurch zu verſteifen, daſs man in die beiden lothrechten Diagonalebenen Dreieckverband legt. Dieſe Anordnung iſt von den Alten vielfach ausgeführt und hat ſich bewährt; auſser dieſer Verſteifung iſt aber noch eine ſolche in den Seitenebenen anzubringen, worauf bereits *Moller*[176]) aufmerkſam gemacht hat. Fig. 352 zeigt den Grundriſs und den Diagonalſchnitt eines ſolchen Thurmdaches; die Helmſtange reicht bis zum zweiten Stockwerk hinab; die Diagonalebenen ſollen durch die Schrägſtäbe A_1C, A_2C, A_3C, A_4C, a_1D, a_2D, a_3D, a_4D, u. ſ. w. verſteift werden. 120. Vierſeitige Thurmpyramide mit Kaiſerſtiel.

Um die Stabilität des Fachwerkes zu unterſuchen, bauen wir von den vier

176) A. a. O., Heft 4.

feſten Auflagern A_1, A_2, A_3, A_4 aus auf. Zunächſt wird C mit allen vier Auflagern durch Stäbe verbunden; es genügten ſchon drei Stäbe, um C im Raume geometriſch feſt zu legen; der vierte Stab macht die Conſtruction ſtatiſch unbeſtimmt, aber nicht labil. Nun verbinden wir a_1 durch Stäbe mit $A_1 C$ und einem auſserhalb gelegenen feſten Punkte F; wegen des letzteren, des ſog. Erſatzſtabes k, iſt noch eine weitere Unterſuchung vorzunehmen. Ferner wird verbunden: Punkt a_2 mit A_2, a_1, C, Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, C. Es fragt ſich nun, ob an Stelle des Erſatzſtabes $a_1 F$ der Stab $a_1 a_4$ treten kann, d. h. ob mit Stab $a_1 a_4$, aber ohne Stab k die Conſtruction ſtabil iſt. Zieht man den Stab $a_1 a_4$ ein, ſo möge bei beliebiger äuſserer Belaſtung darin die Spannung X entſtehen, welche bei a_4 und bei a_1 je in der Stabrichtung wirkt. Wäre der Stab nicht vorhanden, ſo würde im Erſatzſtab die Spannung $\mathfrak{S}_{0k}$ auftreten; die auſserdem vorhandenen Kräfte X im Stabe $a_1 a_4$ erzeugen im Erſatzſtab die Spannung $X S_k'$; es iſt alſo im Ganzen im Stabe k die Spannung

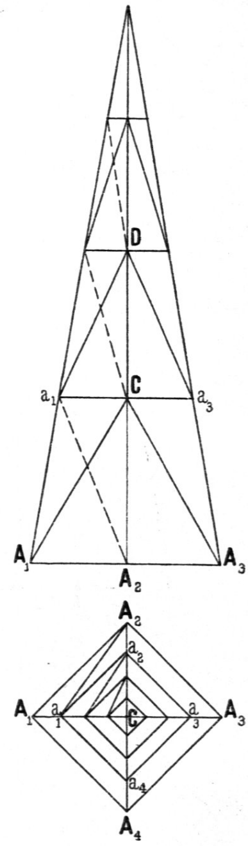
$$S_k = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k'.$$

Soll ohne Erſatzſtab k die Conſtruction ſtabil ſein, ſo muſs für beliebige Belaſtung S_k gleich Null ſein, X aber einen reellen Werth haben; d. h. es muſs

$$0 = \mathfrak{S}_{0k} + X S_k' \quad \text{und} \quad X = -\frac{\mathfrak{S}_{0k}}{S_k'}$$

ſein. Ergiebt ſich $S_k' = 0$, ſo iſt nur bei $X = \infty$ das Gleichgewicht möglich, d. h. das Gleichgewicht iſt dann überhaupt nicht möglich. S_k' iſt die Spannung, welche in Stab K durch $X = 1$ erzeugt wird. Man ſieht leicht aus der graphiſchen Zerlegung in Fig. 352, daſs $S_k' = 0$, das Fachwerk alſo nicht brauchbar iſt. Iſt aber dieſer Unterbau nicht ſtabil, ſo iſt es auch der weitere Aufbau eben ſo wenig, zumal ſich die Anordnung in den oberen Geſchoſſen wiederholt[177]).

Fig. 353.



Zweifellos brauchbar wird aber die Conſtruction, wenn man in eines der trapezförmigen Seitenfelder eine Diagonale einzieht, z. B. die Diagonale $a_1 A_2$ (Fig. 353). Dann ergiebt ſich der Aufbau wie folgt: Zunächſt wird C wie oben im Raume feſt gelegt; nun wird verbunden: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C, Punkt a_2 mit A_2, a_1, C, Punkt a_3 mit A_3, a_2, C und Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_1. Stab $a_4 C$ wird gewöhnlich zugefügt; er iſt überzählig, macht aber die Conſtruction nicht labil. In gleicher Weiſe kann man weiter gehen. Die Helmſtange dient nur dazu, die Bildung der Knotenpunkte C, D u. ſ. w. zu erleichtern. In der Anſicht (Fig. 353) ſind die in den Seitenfeldern liegenden Diagonalen punktirt. — Gewöhnlich wird man ſtatt einer Diagonale Andreaskreuze oder gekreuzte Zugdiagonalen, und zwar nicht nur in einem Felde, ſondern in mehreren Feldern anordnen.

Dieſes Fachwerk iſt nicht ſo klar, wie das zuerſt (Fig. 351) beſprochene, bei welchem nur in den Seitenebenen Stäbe liegen; die praktiſche Conſtruction iſt aber ſehr bequem: Doppelzangen in jeder Balkenlage verbinden die diagonal einander gegenüber ſtehenden Gratſparren und nehmen die Helmſtange zwiſchen ſich; gegen dieſe ſetzen

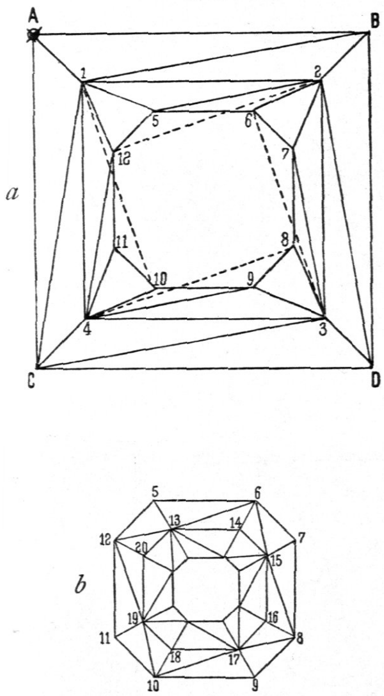
177) Das vorſtehend angewendete Verfahren, welches ſtets zum Ziele führt und in der Folge noch mehrfach benutzt werden wird, iſt angegeben in: MÜLLER-Breslau. Die neueren Methoden der Feſtigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig 1893. S. 4 u. 5.

ſich die in den ſich kreuzenden Mittelebenen angeordneten Diagonalen. Die herumlaufenden Balken dienen als Pfetten; in dieſe ſetzen ſich die Andreaskreuze.

ε) Achtſeitige Thurmpyramide. Bei dieſer ſind verſchiedene Arten des Aufbaues möglich. Man kann die 8 Grate bis zu den Auflagern hinabführen; man kann ferner 4 Grate zu der Auflagerebene hinabgehen laſſen und die 4 zwiſchen dieſen liegenden Grate auf Giebelſpitzen ſetzen laſſen (Fig. 356); endlich kann man von den 8 Graten im unterſten Stockwerk je 2 zu einer Ecke des Grundquadrats zuſammenführen. Bei den letzten beiden Anordnungen ſind nur 4 Auflager vorhanden; die Ueberführung vom Viereck in das Achteck iſt beſonders zu unterſuchen.

121. Achtſeitige Thurmpyramide mit 4 Lagerpunkten.

Fig. 354.



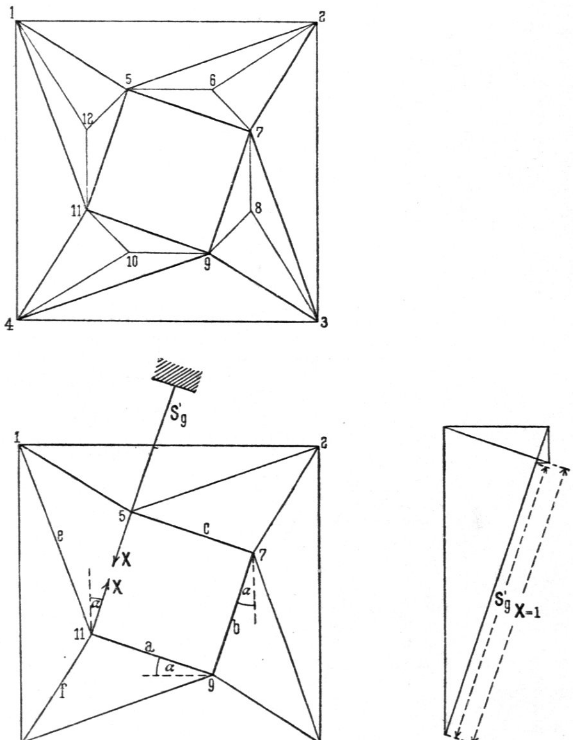
α) Achtſeitige Thurmpyramide mit vier Lagerpunkten. Fig. 354 zeigt dieſe Löſung, wobei der gröſseren Allgemeinheit halber unter die achtſeitige Pyramide noch eine vierſeitige, ein Stockwerk hohe, abgeſtumpfte Pyramide (*ABCD1234*) geſetzt iſt. Dieſelbe kann man auch fortlaſſen; alsdann ſind *1, 2, 3, 4* die Auflager. Da dieſes untere Stockwerk nach Vorſtehendem geometriſch und ſtatiſch beſtimmt iſt, ſo bleibt auch das Ganze eben ſo, falls der hinzukommende, oberhalb *1234* befindliche Theil geometriſch und ſtatiſch beſtimmt iſt. Die zu führende Unterſuchung gilt alſo auch für den in *1234* aufgelagerten Thurm. Das achtſeitige Thurmdach ſoll nunmehr aus dem Unterbau dadurch entwickelt werden, daſs jeder neue Knotenpunkt durch drei Stäbe an drei bereits vorhandene Knotenpunkte angeſchloſſen wird, welche mit ihm nicht in derſelben Ebene liegen dürfen. Punkt *12* iſt mit *1, 4, 2* verbunden. Die Stäbe *12 1* und *12 4* liegen in begrenzenden Ebenen, *12 2* aber nicht. Ferner ſind angegliedert: Punkt *5* an *12, 1, 2*, Punkt *6* an *2, 5, 3* und ſo weiter. Die weiteren Stockwerke ergeben ſich einfach; ſie ſind der gröſseren Deutlichkeit halber in einer beſonderen Abbildung (Fig. 354*b*) gezeichnet. Bei dieſen liegen alle Stäbe in den begrenzenden Ebenen; das Innere bleibt frei. In Fig. 354*a* ſind 16 Knotenpunkte und 40 Stäbe, alſo thatſächlich

$$s = 3k - 8.$$

Die vier in Fig. 354*a* punktirten Stäbe (*12 2, 6 3, 8 4, 10 1*), welche weder in Seitenflächen der Pyramiden noch in wagrechten Ebenen liegen, können unbequem ſein; man kann ſie vermeiden. Man lege das tiefſtliegende Achteck (*5 6 7 8 9 10 11 12*) gegen den unteren vierſeitigen Theil geometriſch feſt, indem man die Punkte *1, 2, 3, 4* als feſte Punkte betrachtet (was ſie ja ſind) und die 8 hinzukommenden Knotenpunkte durch $3 . 8 = 24$ Stäbe anſchlieſst. Dabei ſind verſchiedene Stabanordnungen möglich; eine ſolche iſt in Fig. 355 angegeben. Man verbinde zunächſt Punkt *5* durch Stab *5 1* und *5 2* mit bezw. *1* und *2*; alsdann fehlt zunächſt für die Beſtimmung von *5* noch ein Stab, was vorläufig bemerkt werde.

Nunmehr betrachte man, vorbehältlich ſpäteren Nachtrages, Punkt *5* als feſt, verbinde Punkt *7* mit *5*, *2*, *3*, Punkt *9* mit *7*, *3*, *4* und Punkt *11* mit *9*, *4*, *1*. Punkt *6* kann man nun mit *5*, *7*, *2*, Punkt *8* mit *7*, *3*, *9*, Punkt *10* mit *11*, *9*, *4* und Punkt *12* mit *5*, *11*, *1* verbinden. Die Verbindungsſtäbe der 4 letztgenannten Punkte können für die vorläufige Betrachtung fortgelaſſen werden, da das ganze Fachwerk ſtabil iſt, wenn es ohne dieſe 12 Stäbe ſtabil iſt. Nunmehr fehlt noch ein Stab, da Punkt *5* nur mit 2 feſten Punkten durch Stäbe verbunden war; es möge nun Stab *5 11* hinzugefügt werden; das Fachwerk hat dann die vorgeſchriebene Zahl von Stäben. Wird nur das Fachwerk ohne die Knotenpunkte *6*, *8*, *10*, *12* betrachtet, ſo ſind 4 Knotenpunkte und 12 Stäbe hinzugekommen. Ergiebt ſich bei beliebiger Belaſtung für die Stabſpannung des Stabes *11 5* ein reeller Werth, ſo iſt das Fachwerk ſtatiſch und geometriſch beſtimmt. Um dieſe Unterſuchung zu führen, werde der Stab *11 5* herausgenommen und durch die darin herrſchende, unbekannte Spannung X erſetzt; da aber dann ein Stab fehlt, wird ein Erſatzſtab S_g' angebracht, der in der wagrechten Ebene liegend nach einem feſten Punkte geführt werde. In Fig. 355 iſt der feſte Punkt durch Schraffirung angedeutet. Nun wirke in Knotenpunkt *11* eine beliebige äuſsere Kraft P in beliebiger Richtung, auſserdem X in der Richtung *11 5*; erſtere zerlegt ſich in *11* nach den Richtungen der jetzt hier noch vorhandenen Stäbe (*11 1*, *11 4*, *11 9*); dieſe Spannungen ſind leicht zu ermitteln und können als bekannt angenommen werden. Die in *11 1* und *11 4* wirkenden Kräfte gehen nach den feſten Punkten *1* und *4*; die Spannung in *11 9* zerlegt ſich in Punkt *9* gleichfalls nach den Richtungen der dort zuſammentreffenden 3 Stäbe, von welchen zwei nach den feſten Punkten *4* und *3* gehen und diejenige in *9 7* nach Punkt *7* geht. So geht die Zerlegung weiter; die Spannung in *7 5* zerlegt ſich in Punkt *5* nach den drei Stabrichtungen *5 1*, *5 2* und S_g'. Alle dieſe Spannungen ſind beſtimmt und leicht zu finden. Wir bezeichnen ſie mit $\mathfrak{S}$; diejenige im Erſatzſtab ſei $\mathfrak{S}_0$. Auſser der Kraft P wirken noch die beiden unbekannten Stabſpannungen X in *11*, bezw. *5*. Die in Punkt *11* wirkende Kraft X erzeugt Spannungen, welche X-mal ſo groſs ſind, als diejenigen, welche durch die Kraft $X = 1$ erzeugt werden würden. Wir nennen die letzteren σ und ermitteln dieſelben. Die in Punkt *11* wagrecht wirkende Kraft $X = 1$ zerlegt ſich in zwei wagrechte Kräfte: in die Reſultirende von den

Fig. 355.



Spannungen der Stäbe e und f, welche mit e und f in derſelben Ebene liegt, alſo parallel zur Linie *1 4* ſein muſs, und in die Spannung a des Stabes a. Man ſieht leicht, daſs

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

iſt; a iſt Druck, alſo

$$a = -\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Fig. 356.

Ueberlegt man in gleicher Weiſe, daſs a am Punkte *9* ſich
…hnlich zerlegt, ſo erhält
…ergl. die graphiſche Zer-
… in Fig. 355):

… $\mathrm{tg}\,\alpha$ und $b = \mathrm{tg}^2\alpha$.

…ug. Weiter erhält man
… $\mathrm{tg}^3\alpha$ und $d = \cancel{+} - \mathrm{tg}^4\alpha$,
… auch in Punkt *5* die
…kraft $X = 1$ wirkt, als
…ing im Erſatzſtabe durch

$$\sigma = 1 \cancel{+} - \mathrm{tg}^4\alpha\,;$$

… iſt die ganze Spannung
…atzſtabe durch beide X
…rch P

$$\ldots = \mathfrak{S}_0 + (1 \cancel{+} - \mathrm{tg}^4\alpha)\,X\,.$$

…er die Spannung im Er-
…be gleich Null ſein muſs —
…e iſt ja nicht vorhanden —,
…tet die Bedingungsglei-
… für X:

$$\ldots_0 + (1 \cancel{+} - \mathrm{tg}^4\alpha)\,X \quad \text{oder}$$

$$\ldots = -\,\frac{\mathfrak{S}_0}{1 \cancel{+} - \mathrm{tg}^4\alpha}\,.$$

Handbuch der Architektur.

Dritter Theil. 2. Band. 4. Heft.

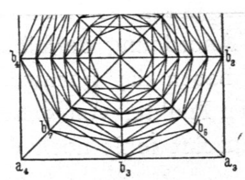
Es wird gebeten, vor Gebrauch des vorliegenden Heftes …n nachſtehenden, leider überſehenen Fehler zu verbeſſern:

Auf Seite 153, Zeile 16 von oben muſs es heiſsen ſtatt $= +\,\mathrm{tg}^4\alpha$:

$$d = -\,\mathrm{tg}^4\alpha, \text{ alſo weiter auch } \sigma = 1 - \mathrm{tg}^4\alpha$$

$$X = -\,\frac{\mathfrak{S}_0}{1 - \mathrm{tg}^4\alpha}\,.$$

Das Syſtem der Fig. 355 iſt demnach nur brauchbar für …erthe von α, die von 45° verſchieden ſind.



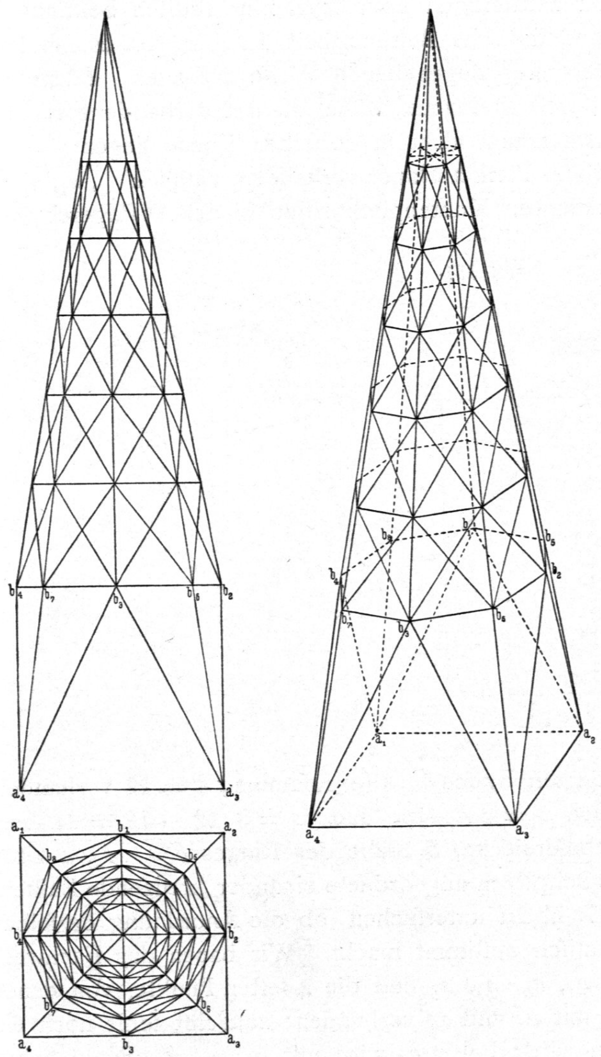
Dieſer Werth iſt ein ganz beſtimmter reeller Werth; mithin iſt das Syſtem ſtatiſch und geometriſch beſtimmt. Damit iſt nachgewieſen, daſs vorſtehendes Syſtem brauchbar iſt. Auf dem Achteck *5 6 7 8 9 10 11 12* kann nun das weitere Achteck aufgebaut werden (Fig. 354 *b*).

Eine andere Löſung, die achtſeitige Pyramide auf nur vier Auflager zu ſetzen, 122. Achtſeitige Thurmpyramide mit vier Gratſparren auf Giebelſpitzen.
wird unter Benutzung von vier Giebeldreiecken im unterſten Stockwerk des Thurmes erhalten; dieſe Thurm-Conſtruction iſt vielfach von *Otzen* ausgeführt. Nach den Ecken des Grundquadrates $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ (Fig. 356) gehen vier Gratſparren hinab, während die zwiſchen dieſen liegenden Gratſparren ſich auf die Spitzen b_1, b_2, b_3, b_4 von vier Giebeldreiecken ſetzen, alſo ein Stockwerk weniger weit hinabreichen, als

Spannungen der Stäbe e und f, welche mit e und f in derselben Ebene liegt, also parallel zur Linie *1 4* sein muss, und in die Spannung a des Stabes a. Man sieht leicht, dass

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Fig. 356.



ist; a ist Druck, also

$$a = -\operatorname{tg} \alpha .$$

Ueberlegt man in gleicher Weise, dass a am Punkte *9* sich ganz ähnlich zerlegt, so erhält man (vergl. die graphische Zerlegung in Fig. 355):

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad b = \operatorname{tg}^2 \alpha .$$

b ist Zug. Weiter erhält man $c = -\operatorname{tg}^3 \alpha$ und $d = + \operatorname{tg}^4 \alpha$, und da auch in Punkt *5* die Gegenkraft $X = 1$ wirkt, als Spannung im Ersatzstabe durch $X = 1$

$$\sigma = 1 + \operatorname{tg}^4 \alpha ;$$

mithin ist die ganze Spannung im Ersatzstabe durch beide X und durch P

$$S = \mathfrak{S}_0 + (1 + \operatorname{tg}^4 \alpha) X .$$

Da aber die Spannung im Ersatzstabe gleich Null sein muss — derselbe ist ja nicht vorhanden —, so lautet die Bedingungsgleichung für X:

$$0 = \mathfrak{S}_0 + (1 + \operatorname{tg}^4 \alpha) X \quad \text{oder}$$

$$X = -\frac{\mathfrak{S}_0}{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha} .$$

Dieser Werth ist ein ganz bestimmter reeller Werth; mithin ist das System statisch und geometrisch bestimmt. Damit ist nachgewiesen, dass vorstehendes System brauchbar ist. Auf dem Achteck *5 6 7 8 9 10 11 12* kann nun das weitere Achteck aufgebaut werden (Fig. 354 *b*).

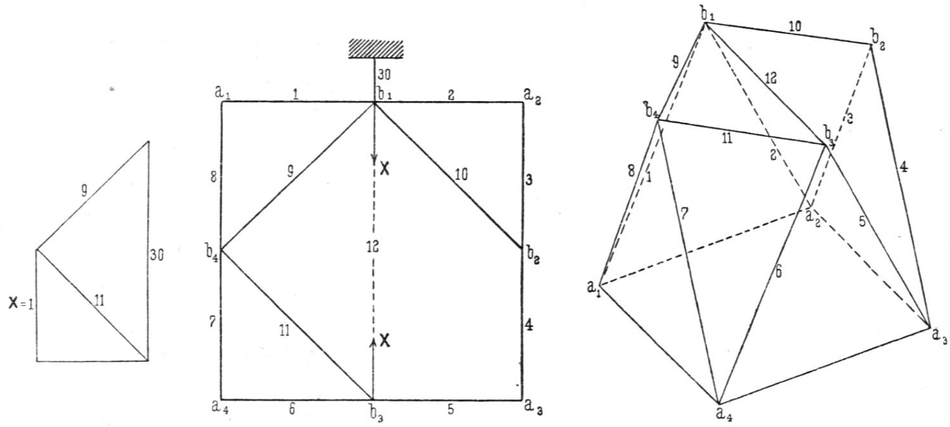
Eine andere Lösung, die achtseitige Pyramide auf nur vier Auflager zu setzen, wird unter Benutzung von vier Giebeldreiecken im untersten Stockwerk des Thurmes erhalten; diese Thurm-Construction ist vielfach von *Otzen* ausgeführt. Nach den Ecken des Grundquadrates $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ (Fig. 356) gehen vier Gratsparren hinab, während die zwischen diesen liegenden Gratsparren sich auf die Spitzen b_1, b_2, b_3, b_4 von vier Giebeldreiecken setzen, also ein Stockwerk weniger weit hinabreichen, als

122. Achtseitige Thurmpyramide mit vier Gratsparren auf Giebelspitzen.

die erstgenannten Gratsparren. Von den Spitzen der Giebeldreiecke werden die Spannungen der Gratsparren in die vier Auflagerpunkte der anderen Sparren geführt. Die Hauptauflager sind a_1, a_2, a_3, a_4; die Punkte b_1, b_2, b_3, b_4 kann man als Giebelauflager ansehen. Damit die Giebelspitzen nicht durch die wagrechten Seitenkräfte der Sparrendrücke aus den lothrechten Ebenen herausgeschoben werden, sind in der Höhe derselben vier radiale Balken ($b_1 b_3$, $b_2 b_4$, $b_5 b_7$, $b_6 b_8$) angeordnet, welche im Verein mit dem umlaufenden Ringe $b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4 b_8$ eine Scheibe bilden. Es fragt sich, ob dieser Unterbau der achtseitigen Thurmpyramide statisch bestimmt ist. Ergiebt sich die geometrische und statische Bestimmtheit des Unterbaues, so kann man auf demselben weiter in der oben angegebenen Weise aufbauen, indem man stets einen neuen Knotenpunkt durch drei neue Stäbe an drei vorhandene Knotenpunkte anschliefst, welche mit dem neuen nicht in derselben Ebene liegen.

Im untersten Stockwerk sind vier Punktauflager vorhanden, nämlich a_1, a_2, a_3, a_4, also $n = 3 . 4 = 12$ Auflagerunbekannte. Knotenpunkte sind in der Auflagerebene 4,

Fig. 357.



in der durch die Giebelspitzen gelegten Ebene 8, also zusammen $k = 12$ vorhanden. Die Zahl der Stäbe mufs demnach $s = 3\,k - n$ und $s = 3 . 12 - 12 = 24$ sein. Vorhanden sind: 8 Stäbe der Giebeldreiecke, 8 Stäbe des Ringes $b_1 \ldots b_8$, 4 Gratsparren und 4 in der Ebene der Giebelspitzen angeordnete einander kreuzende Balken; die Zahl der Stäbe stimmt also. Es ist zu untersuchen, ob die Anordnung derselben das Fachwerk geometrisch und statisch bestimmt macht. Wir bauen das Fachwerk wieder von unten auf (Fig. 357). a_1, a_2, a_3, a_4 sind die 4 festen Punkte, von denen ausgegangen wird: Punkt b_1 wird mit a_1 und a_2 verbunden; zunächst fehlt noch ein Stab, was im Gedächtnifs behalten wird; Punkt b_4 wird mit a_1, a_4, b_1, Punkt b_3 mit a_4, a_3, b_4 und Punkt b_2 mit a_2, a_3, b_1 verbunden. Nun fehlt noch ein Stab, da b_1 nur mit zwei festen Punkten verbunden war. Fügt man den Stab $b_1 b_3$ ein, so ist die Gesammtzahl der Stäbe für das bisher construirte Fachwerk richtig; ob die Anordnung richtig ist, wird gefunden, indem man Stab $b_1 b_3$ durch einen Ersatzstab (Stab *30*) ersetzt, welcher b_1 mit einem beliebigen festen Punkte verbinde und die im Stabe $b_1 b_3$ vorhandene, unbekannte Spannung X auf die beiden Knotenpunkte b_1 und b_3 wirken läfst. Soll das Fachwerk brauchbar sein, so mufs für beliebige Belastung X einen reellen Werth und die Spannung im Ersatzstab *30* die Gröfse Null haben, da ja dieſer Erſatzſtab wirklich nicht vorhanden iſt und ohne ihn Gleichgewicht ſtattfinden muſs. Für irgend welche beliebige Belaſtung, etwa durch eine wagrechte Kraft K in b_3, erhält man im Erſatzſtabe *30* die Spannung

$$S_{30} = \mathfrak{S}_{0\,30} + \mathfrak{S}_{30}{}' X,$$

in welchem Ausdruck $\mathfrak{S}_{0\,30}$ die Spannung iſt, welche allein durch K, und $\mathfrak{S}_{30}{}'$ die Spannung, welche allein durch $X = 1$ im Stabe *30* erzeugt wird. K und X wirken gleichzeitig; alſo erhält man obigen Ausdruck für S_{30}.

$X = 1$ zerlegt ſich im Punkte b_3 in eine Seitenkraft parallel zu $a_4 a_3$ und eine in die Stabrichtung *11* fallende Kraft; es iſt

$$\mathfrak{S}_{11}{}' = -\frac{1}{\cos\alpha}.$$

α iſt der Winkel des Stabes *11* mit der Normalen zu $b_1\, b_3$ in der Ebene $a_4\, b_3\, a_3$, hier $= 45$ Grad. $\mathfrak{S}_{11}{}'$ zerlegt ſich in b_4 weiter nach der Richtung des Stabes *9* und nach der Parallelen zu $a_1\, a_4$; $\mathfrak{S}_9{}'$ im Punkte b_1 nach der Richtung parallel zu $a_1 a_2$ und der Richtung von Stab *30*. Die Spannung $\mathfrak{S}_{10}{}'$ iſt Null, weil in b_2 keine Kraft von Stab *10* übertragen werden kann. Durch $X = 1$ in Punkt b_3 und $X = 1$ in Punkt b_1 wird demnach (vergl. die graphiſche Zerlegung in Fig. 357)

$$\mathfrak{S}_{30}{}' = 1 + 1 = 2$$

erzeugt; es iſt alſo

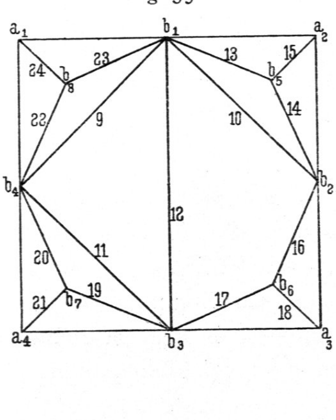
$$S_{30} = \mathfrak{S}_{0\,30} + 2\,X.$$

Der Erſatzſtab *30* iſt überflüſſig, d. h. die Conſtruction ohne ihn ausreichend, wenn für beliebige Belaſtung K die Spannung S_{30} gleich Null iſt, dabei aber X einen reellen Werth hat. Für $S_{30} = 0$ wird

$$X = -\frac{\mathfrak{S}_{0\,30}}{2},$$

d. h. reell. Das Fachwerk iſt alſo brauchbar.

Fig. 358.



Wollte man ſtatt des Stabes $b_1\, b_3$ den vierten Stab des Viereckes in der oberen wagrechten Ebene, d. h. den Stab $b_2\, b_3$ einreihen, ſo erhielte man ein labiles Fachwerk. Man findet auf die gleiche Weiſe, wie eben gezeigt wurde, daſs dann $X = \infty$ wird, d. h. daſs dieſes Fachwerk unbrauchbar wäre.

Nachdem nunmehr das Fachwerk in Fig. 357 als ſtabil erwieſen iſt, kann man den Punkt

b_5 mittels der Stäbe *13, 14, 15,*
b_6 » » » *16, 17, 18,*
b_7 » » » *19, 20, 21,*
b_8 » » » *22, 23, 24*

feſt legen (Fig. 358). Man ſieht, daſs dieſes Fachwerk ſtatiſch und geometriſch beſtimmt iſt. Fügt man Stab $b_2\, b_3$ ein, ſo wird das Fachwerk ſtatiſch unbeſtimmt, wird aber nicht labil. Bei eiſernen Thürmen kann man dieſen Stab an einer Seite mit länglichen Schraubenlöchern befeſtigen, ſo daſs er für die Berechnung als nicht vorhanden angeſehen werden kann. Nun kann man weiter in bekannter Weiſe aufbauen. In Fig. 356 (S. 153) iſt dieſer Aufbau gezeichnet, dabei aber jedes Seitenfeld mit zwei gekreuzten Diagonalen verſehen, welche als Gegendiagonalen wirken. Die Conſtruction iſt, abgeſehen von der Spitze, ſtatiſch beſtimmt. In der iſometriſchen Anſicht von Fig. 356 ſind der gröſseren Deutlichkeit wegen die Stäbe *9, 10, 11, 12* weggelaſſen.

Nachdem die Stabilität von Fig. 358 nachgewieſen iſt, bleibt zu unterſuchen, ob das Fachwerk ſtabil bleibt, wenn Stab *11* durch $b_5\,b_7$, d. h. durch *31*, Stab *9* durch $b_6\,b_8$, d. h. durch *32*, Stab *10* durch $b_2\,b_4$, d. h. durch *33*, und Stab *30* durch $b_1\,b_3$, d. h. durch *12* erſetzt werden.

Der Gang der Unterſuchung iſt folgender. Jeder neu einzuführende Stab überträgt in ſeinen Anſchluſs-Knotenpunkten noch unbekannte Kräfte X auf dieſelben und erzeugt in den zu erſetzenden Stäben Spannungen, welche den Kräften X proportional ſind. In den Stäben *31, 32, 33, 12* (Fig. 359) mögen die Spannungen X_1, X_2, X_3, X_4 wirken, welche in dem zu erſetzenden Stabe *11* die Spannungen

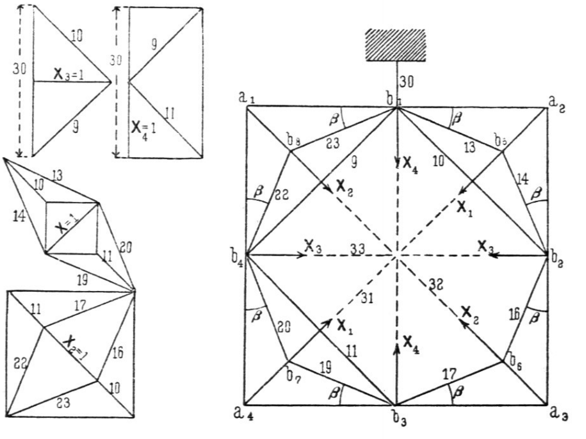
$$S_{11}'X_1\,,\quad S_{11}''X_2\,,\quad S_{11}'''X_3\,,\quad S_{11}''''X_4$$

und im Stabe *9* die Spannungen

$$S_9'X_1\,,\quad S_9''X_2\,,\quad S_9'''X_3\,,\quad S_9''''X_4 \text{ u. ſ. w.}$$

erzeugen mögen. Die ſonſt noch vorhandenen äuſseren Laſten rufen in den Stäben die Spannungen $\mathfrak{S}$ hervor, d. h. in den Stäben *9, 10, 11, 30* die Spannungen $\mathfrak{S}_9$, $\mathfrak{S}_{10}$, $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{30}$. Die Spannungen $\mathfrak{S}$ würden allein vorhanden ſein, wenn die Stäbe *31, 32, 33, 12* nicht und nur die zu erſetzenden Stäbe *9, 10, 11, 30* vorhanden wären. Offenbar ſind die S' die durch $X_1 = 1$ erzeugten Spannungen, S'', bezw. S''', S'''' die durch $X_2 = 1$, bezw. $X_3 = 1$, $X_4 = 1$ erzeugten Spannungen. Die geſammten in den zu erſetzenden Stäben *9, 10, 11, 30* auftretenden Spannungen ſind nunmehr

Fig. 359.



$$\begin{aligned}
S_{30} &= \mathfrak{S}_{30} + S_{30}'X_1 + S_{30}''X_2 + S_{30}'''X_3 + S_{30}''''X_4\,,\\
S_9 &= \mathfrak{S}_9 + S_9'X_1 + S_9''X_2 + S_9'''X_3 + S_9''''X_4\,,\\
S_{10} &= \mathfrak{S}_{10} + S_{10}'X_1 + S_{10}''X_2 + S_{10}'''X_3 + S_{10}''''X_4\,,\\
S_{11} &= \mathfrak{S}_{11}' + S_{11}'X_1 + S_{11}''X_2 + S_{11}'''X_3 + S_{11}''''X_4\,.
\end{aligned}$$

Sollen die Stäbe *9, 10, 11, 30* erſetzbar ſein, ſo müſſen die Spannungen dieſer Stäbe den Werth Null haben, ohne daſs dadurch diejenigen in den erſetzenden Stäben X_1, X_2, X_3, X_4 unendlich groſs werden. Die Bedingungsgleichungen für die Werthe von X_1, X_2, X_3, X_4 ſind demnach:

$$S_{30} = S_9 = S_{10} = S_{11} = \text{Null},$$

d. h.

$$\begin{aligned}
X_1 S_{30}' + X_2 S_{30}'' + X_3 S_{30}''' + X_4 S_{30}'''' &= -\,\mathfrak{S}_{30}\,,\\
X_1 S_9' + X_2 S_9'' + X_3 S_9''' + X_4 S_9'''' &= -\,\mathfrak{S}_9\,,\\
X_1 S_{10}' + X_2 S_{10}'' + X_3 S_{10}''' + X_4 S_{10}'''' &= -\,\mathfrak{S}_{10}\,,\\
X_1 S_{11}' + X_2 S_{11}'' + X_3 S_{11}''' + X_4 S_{11}'''' &= -\,\mathfrak{S}_{11}\,.
\end{aligned}$$

Sollen X_1, X_2, X_3, X_4 reell ſein, ſo darf die Nenner-Determinante vorſtehender Gleichungen nicht gleich Null ſein; wenn dies ſtattfindet, ſo iſt das Fachwerk labil.

Wendet man diefe Ueberlegung auf das zu betrachtende Thurm-Fachwerk an, und bringt in den betreffenden Knotenpunkten die Kräfte X_1, X_2, X_3, X_4 als äufsere Kräfte an, fo erhält man durch Zerlegung die in nachftehender Tabelle zufammengeftellten Werthe der Stabfpannungen S', S'', S''', S'''', welche bezw. durch die Kräfte $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$ erzeugt werden.

Tabelle der Spannungen, welche in den Fachwerkftäben erzeugt werden durch:

	Stab *13*	*14*	*16*	*17*	*19*	*20*
$X_1 = 1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$
$X_2 = 1$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	0
$X_3 = 1$	0	0	0	0	0	0
$X_4 = 1$	0	0	0	0	0	0

	Stab *22*	*23*	*9*	*10*	*11*	*30*
$X_1 = 1$	0	0	$-\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	0
$X_2 = 1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\beta - \sin\beta)}$	0	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	$+\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta}$	0
$X_3 = 1$	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	-2
$X_4 = 1$	0	0	$+\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	$+2$

Die Bedingungsgleichungen lauten alfo, wenn man abkürzungsweife

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{2} = b$$

fetzt:

$$\begin{aligned} 0\,X_1 + 0\,X_2 - b^2 X_3 + b^2 X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -a\,X_1 + 0\,X_2 - b\,X_3 + b\,X_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ a\,X_1 + a\,X_2 - b\,X_3 + 0\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}, \\ a\,X_1 + a\,X_2 + 0\,X_3 - b\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{11}. \end{aligned}$$

Die Nenner-Determinante ift, wie man leicht fieht, gleich Null, alfo das Fachwerk labil.

Wenn aber der Stab *11* im Fachwerk belaffen und davon abgefehen wird, Stab *11* durch Stab *33* zu erfetzen, fo erhält man ein ftabiles Fachwerk. Alsdann lauten die Gleichungen, da nunmehr X_3 gleich Null ift:

$$\begin{aligned} X_1 S_{30}' + X_2 S_{30}'' + X_4 S_{30}'''' &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ X_1 S_9' + X_2 S_9'' + X_4 S_9'''' &= -\mathfrak{S}_9, \\ X_1 S_{10}' + X_2 S_{10}'' + X_4 S_{10}'''' &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Mit den Werthen obiger Tabelle heifsen diefe Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0\,X_1 + 0\,X_2 + b^2 X_4 &= -\mathfrak{S}_{30}, \\ -a\,X_1 + 0\,X_2 + b\,X_4 &= -\mathfrak{S}_9, \\ a\,X_1 + a\,X_2 + 0\,X_4 &= -\mathfrak{S}_{10}. \end{aligned}$$

Die Nenner-Determinante diefer Gleichungen hat den Werth:

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ -a & 0 & b \\ a & a & 0 \end{Bmatrix} = -b^2 a^2 = -2\,\frac{\sin^2\beta}{(\cos\beta - \sin\beta)^2}.$$

Fig. 360.

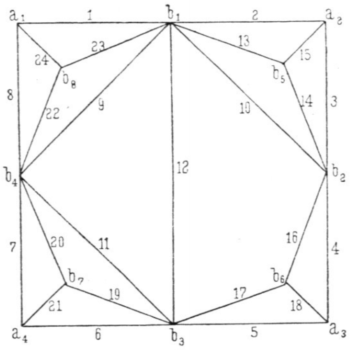
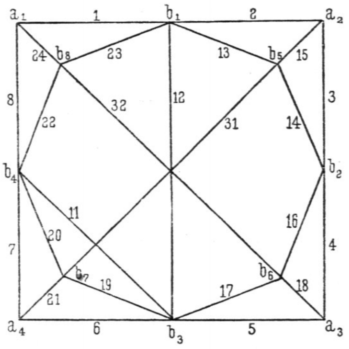


Fig. 361.

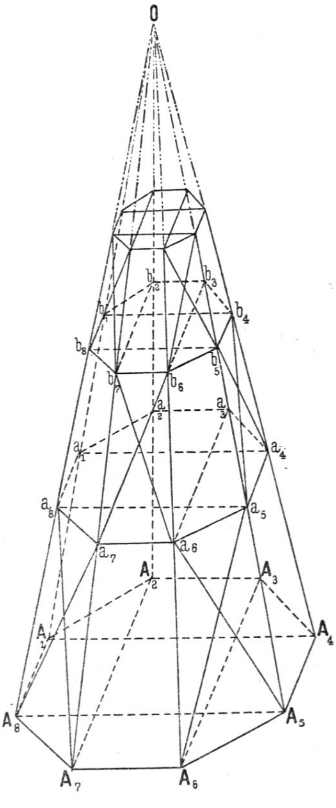


Das in Fig. 361 dargeftellte Fachwerk ift alfo ftabil, falls nicht β gleich Null ift. Diefer Werth ift ausgefchloffen, eben fo der Werth $\beta = 45$ Grad, für den $a = \infty$ würde; aber auch Winkelwerthe von β, welche fich dem Nullwerthe nähern, follten vermieden werden.

Die meift übliche Anordnung mit vier in der Ebene b_1 b_2 b_3 b_4 einander kreuzenden Stäben ift alfo nicht ftabil; wenn diefelbe trotzdem in der Praxis zu Ausfetzungen bislang unferes Wiffens keine Veranlaffung gegeben hat, fo liegt dies darin, dafs die Verbindungen nicht gelenkig find und an den Knotenpunkten Momente übertragen werden können. So wenig man aber die Hängewerke mit für die ftatifche Beftimmtheit fehlenden Stäben als eine in jeder Beziehung befriedigende Stabanordnung erklären kann, eben fo wenig ift dies mit der hier angegebenen Conftruction der Fall. Vielleicht empfiehlt fich am meiften das in Fig. 361 dargeftellte Fachwerk. Eventuell ziehe man den Stab b_2 b_3 ein, der das Fachwerk ftatifch unbeftimmt, aber nicht labil macht.

Auf das Achteck b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4 b_8 kann man nun die weitere Thurm-Conftruction aufbauen, wie in Art. 121 (Fig. 354*b*) angegeben ift, indem man nach und nach ftets einen Knotenpunkt und drei Stäbe hinzufügt. Befonders werde bemerkt, dafs in den wagrechten Trennungsebenen der oberen Gefchoffe nunmehr nur noch die achteckigen Ringe angeordnet zu werden brauchen. Das Raum-Fachwerk ift mit diefen ftabil.

Fig. 362.



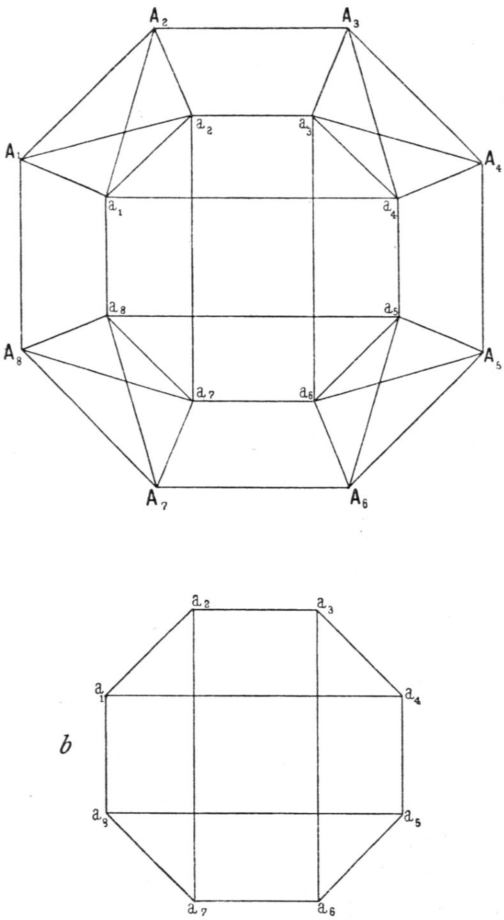
123. *Moller*'fche Thurmpyramide.

𝔟) Achtfeitige Thurmpyramide mit acht Lagerpunkten. Hier ift zunächft die *Moller*'fche Thurmpyramide (Fig. 362) zu betrachten. Alle acht Gratfparren find bis zur gemeinfamen Auflagerebene hinabgeführt; zwifchen je zwei Stockwerken find herumlaufende Ringe angeordnet und in jedem Stockwerk vier Seitenfelder mit gekreuzten Stäben derart verfehen, dafs ftets nur ein Feld um das andere ein

Fig. 363.

a

b

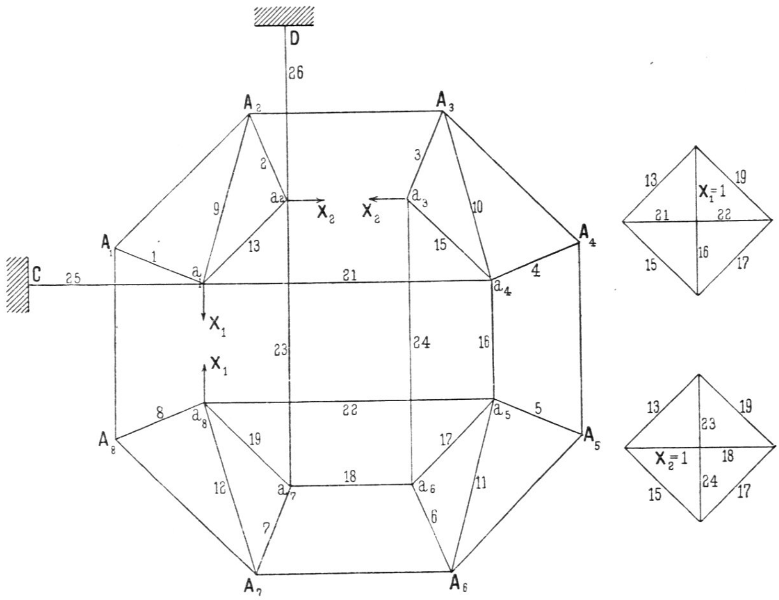


ſolches Andreaskreuz hat; dieſe verkreuzten Felder wechſeln in den verſchiedenen Stockwerken. Auſserdem ſind in den vier geneigten Ebenen $A_1 A_4 O$, $A_8 A_5 O$, $A_2 A_7 O$ und $A_3 A_6 O$ quer durchlaufende Balken, d. h. für das Stabſyſtem Stäbe $a_1 a_4$, $a_8 a_5$, $a_2 a_7$, $a_3 a_6$, bezw. $b_1 b_4$, $b_8 b_5$, $b_2 b_7$, $b_3 b_6$ vorhanden. In Fig. 362 bezeichnet O die Spitze der Thurmpyramide. Es ergiebt ſich alſo zwiſchen je zwei Stockwerken eine Figur, wie in Fig. 363*b* dargeſtellt. Nunmehr ſoll unterſucht werden, ob dieſes Fachwerk ſtatiſch und geometriſch beſtimmt iſt, wobei zunächſt, wie bisher ſtets, von der Spitze abgeſehen werden ſoll, welche das Ganze ſtatiſch unbeſtimmt macht; ferner ſoll vor der Hand nur der Untertheil geprüft werden (Fig. 363*a*).

Die Scheibe $a_1 a_2 \ldots . a_7 a_8$ iſt ein ebenes, aber nicht ſteifes Fachwerk; rechnet man die Schnittpunkte der Balken nicht als Knotenpunkte, ſo hat ſie 8 Knotenpunkte und nur 12 Stäbe, während die ſtatiſche Beſtimmtheit 13 Stäbe verlangt. Rechnet man aber die Schnittpunkte der Balken als Knoten, ſo iſt die Zahl der Knotenpunkte gleich 12 und die Zahl der Stäbe gleich 20; ſonach fehlt für ſtatiſche und geometriſche Beſtimmtheit wiederum ein Stab. Von den Auflagern werden vier als feſte (als Punktauflager) und vier als Ebenenauflager angenommen; immer wechſelt ein Punkt- und ein Ebenenauflager ab. Die vier Querbalken in der Auflagerebene ſind dann, wenn ein Ring in derſelben angeordnet wird, für die geometriſche Beſtimmtheit überflüſſig und ſollen als nicht vorhanden angeſehen werden. Die Anzahl der Knotenpunkte des unterſten Stockwerkes iſt $k = 16$, die Zahl der Auflagerunbekannten $n = 4 \cdot 3 + 4 = 16$ und diejenige der Stäbe $s = 36$; für geometriſche und ſtatiſche Beſtimmtheit müſſte $s^1 = 3k - n = 32$ ſein; das betrachtete Raum-Fachwerk iſt alſo vierfach ſtatiſch unbeſtimmt. Ordnet man nun ſtatt der gekreuzten Stäbe in den vier Seitenfeldern einfache Stäbe an, ſo iſt die erſte Bedingung der ſtatiſchen Beſtimmtheit erfüllt.

Dieſes Fachwerk ſoll unterſucht werden; es genügt, ein Stockwerk, etwa das unterſte, zu betrachten. Baut man daſſelbe (Fig. 364) auf den acht Auflagern $A_1 \ldots A_8$ ſo auf, daſs man jeden hinzukommenden Punkt mit drei bereits feſten Punkten verbindet, ſo muſs man wieder einige Erſatzſtäbe — hier ſind die Stäbe *25* und *26* gewählt — zu Hilfe nehmen. Verbunden iſt: Punkt a_1 mit A_1, A_2, C, Punkt a_4 mit A_3, A_4, a_1, Punkt a_5 mit A_5, A_6, a_4, Punkt a_8 mit A_7, A_8, a_5; ferner

Fig. 364.



Punkt a_2 mit A_2, a_1, D, Punkt a_7 mit A_7, a_8, a_2, Punkt a_6 mit A_6, a_5, a_7, Punkt a_3 mit A_3, a_4, a_6. In Wirklichkeit find an Stelle der angegebenen Erfatzftäbe *25* und *26*, welche das Fachwerk unzweifelhaft geometrifch und ftatifch beftimmt machen, die Stäbe $a_1 a_8$ und $a_2 a_3$ vorhanden. Nennt man ihre Spannungen bei beliebiger Belaftung bezw. X_1 und X_2, fo find die Spannungen in den einzelnen Stäben, nach Früherem und mit den früheren Bezeichnungen

$$S = \mathfrak{S} + S' X_1 + S'' X_2 .$$

S' ift die in einem Stabe durch $X_1 = 1$, S'' die in einem Stabe durch $X_2 = 1$ erzeugte Spannung. In den Erfatzftäben müffen für beliebige Belaftung die Spannungen $S = 0$ werden, wenn diefelben überflüffig fein follen; die X_1 und X_2 dürfen dabei aber nicht unendlich grofs werden. Mithin ift die Bedingung für d Standfähigkeit des Fachwerkes: die Nenner-Determinante der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} S_{25}' X_1 + S_{25}'' X_2 = - \mathfrak{S}_{25} , \\ S_{26}' X_1 + S_{26}'' X_2 = - \mathfrak{S}_{26} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

mufs von Null verfchieden fein, d. h.

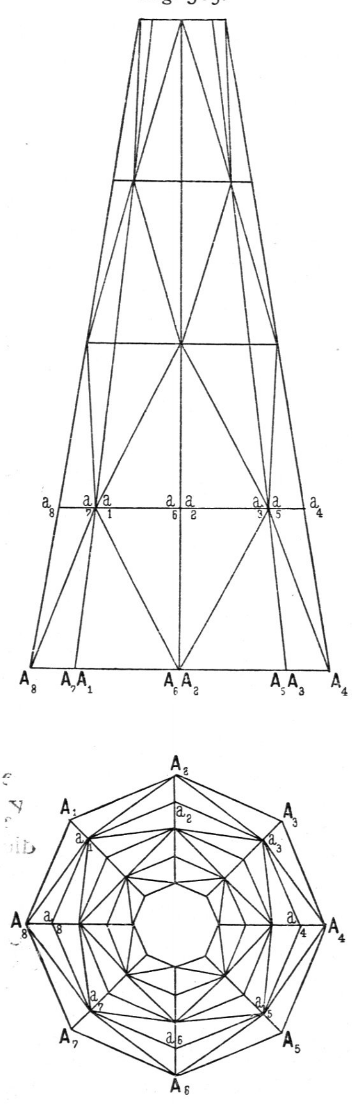
$$\left\{\begin{array}{l} S_{25}' \cdot S_{25}'' \\ S_{26}' \cdot S_{26}'' \end{array}\right\} \gtrless 0 .$$

Die Werthe S' und S'' ergeben fich leicht aus den Kräfteplänen in Fig. 364. Man erhält:

$$S_{22}' = -1, \quad S_{16}' = +1, \quad S_{21}' = -1,$$
$$S_{25}' = 0, \quad S_{26}' = 0,$$
$$S_{24}'' = -1, \quad S_{18}'' = +1, \quad S_{22}'' = 0,$$
$$S_{23}'' = -1, \quad S_{26}'' = 0, \quad S_{16}'' = 0 = S_{21}'',$$
$$S_{25}'' = 0.$$

Da $S_{25}' = S_{26}' = S_{25}'' = S_{26}'' = 0$ ſind, ſo iſt die Nenner-Determinante gleich Null. Aber auch die Zähler-Determinante in den Ausdrücken für X_1 und X_2 der Gleichungen 10 wird gleich Null; mithin erhält man ſowohl für X_1, wie für X_2 zunächſt den Werth $\frac{0}{0}$, alſo einen unbeſtimmten Werth, der auch endlich ſein kann. Dividirt man aber beide Gleichungen 10 durch $S_{25}' = S_{25}'' = S_{26}' = S_{26}''$, ſo ſieht man, daſs ſich $X_1 = X_2 = \infty$ ergiebt. Sonach dürfen die Erſatzſtäbe nicht fehlen; das Fachwerk iſt ohne dieſelben labil.

Fig. 365.



Es könnte die Frage aufgeworfen werden, ob nicht durch Einziehen einer Gegendiagonale in eines der bereits mit Diagonalen verſehenen Felder die Stabilität hergeſtellt würde. Verſieht man etwa Feld $A_1 A_2 a_2 a_1$ mit einer zweiten Diagonale, ſo wird zunächſt die Geſammtzahl der Stäbe um einen Stab gröſser, als mit der ſtatiſchen Beſtimmtheit vereinbar iſt; aber ſtabil wird das Fachwerk dadurch nicht. Denn in der Ebene dieſes Feldes liegen die Punkte deſſelben ſchon, falls nur eine Diagonale vorhanden iſt, feſt, werden alſo durch die zweite Diagonale nur überbeſtimmt; das Verhältniſs dieſer Scheibe gegen das übrige Fachwerk aber, alſo für etwaige Drehungen derſelben um die Axe $A_1 A_2$, bleibt vollſtändig unverändert. War alſo das frühere Fachwerk labil, ſo iſt es auch das Fachwerk nach Einziehen der Gegendiagonale. Das Gleiche gilt von den anderen drei Gegendiagonalen, welche möglich und üblich ſind. Das Fachwerk iſt alſo auch mit den Gegendiagonalen eine labile Conſtruction.

Ob man unter dieſen Verhältniſſen weiterhin empfehlen kann, Thurmdächer nach *Moller*'ſcher Conſtruction auszuführen, iſt fraglich. Dieſelben haben ſich allerdings bisher gut gehalten; aber eine als nicht ſtabil erkannte Conſtruction, die überdies nicht berechnet werden kann, iſt beim heutigen Stande der Conſtructionskunſt nicht berechtigt.

Für Ausführung in Eiſen-Conſtruction iſt die *Moller*'ſche Thurmpyramide nicht geeignet.

c) Thurmflechtwerk mit bis zur Auflagerebene geführten Graten. Eine ganz klare Conſtruction, bei welcher ebenfalls die Grate bis zu den Auflagern hinabgeführt ſind, wird erhalten, wenn man abwechſelnd ein Auflager als Punktlager und eines als Ebenenlager conſtruirt und nunmehr ſtets einen neuen Knotenpunkt mit drei neuen Stäben an vorhandene Knotenpunkte anfügt. Eine ſolche Anordnung iſt in Fig. 365 angegeben. Punktlager ſind A_1, A_3, A_5, A_7; Ebenenlager ſind A_2, A_4, A_6, A_8. Die letzteren ſind durch die Stäbe des Fuſsringes mit den erſteren zu verbinden. Man verbinde Punkt a_1 mit A_1, A_2, A_8, Punkt a_3 mit A_2, A_3, A_4,

124. Thurmflechtwerk mit bis zur Auflagerebene geführten Graten.

Punkt a_5 mit A_4, A_5, A_6, Punkt a_7 mit A_6, A_7, A_8; alsdann find a_1, a_3, a_5, a_7 als fefte Punkte anzufehen. Nun verbinde man Punkt a_2 mit A_2, a_1, a_3, Punkt a_4 mit A_4, a_3, a_5, Punkt a_6 mit A_6, a_5, a_7, Punkt a_8 mit A_8, a_7, a_1. In folcher Weife kann man weiter bauen und erhält, abgefehen von der Spitze, ein ftatifch beftimmtes Raum-Fachwerk. Daffelbe kann in Holz (zweckmäfsig mit eifernen Diagonalen in den Seitenflächen) ohne Schwierigkeit hergeftellt werden.

2) Conftruction der hölzernen Thurmhelme.

125. Grundfätze.

Für die Conftruction der hölzernen Thürme hat *Moller* [178]) vor mehr als einem halben Jahrhundert Grundfätze aufgeftellt, welche zum grofsen Theile auch heute noch als giltig aufgeführt werden können, auch in vielen Hinfichten mit denjenigen übereinftimmen, welche fich als Folgerung der vorftehenden theoretifchen Unterfuchungen ergeben haben.

Moller fchreibt u. A. vor: »Das Innere des Thurmes werde möglichft leicht conftruirt; man verftärke dagegen die äufseren Dachwände; die langen und fchweren fogenannten Helmftangen find fortzulaffen und auf eine kurze Hängefäule zum Tragen des Knopfes und zum Anfetzen der Sparren zu befchränken; die Eckpfoften oder Eckfparren (von uns als Gratfparren bezeichnet) dürfen nicht durch horizontale Hölzer unterbrochen, fondern fie müffen, wenn fie zu kurz find, unmittelbar verlängert werden, fo dafs Hirnholz auf Hirnholz zu ftehen kommt; die äufseren Dachwände find fo zu verbinden, dafs fie keinen Seitendruck ausüben, fondern nur fenkrecht auf die Mauer wirken können; diefelben find durch horizontale Verbindungen (Kränze) in gewiffen, nicht zu grofsen Entfernungen fo abzufchliefsen, dafs dadurch die Thurmpyramide in mehrere kleine, abgeftumpfte Pyramiden zerlegt wird.«

Man fieht, *Moller* verlangt das vorftehend entwickelte Fachwerk, bei welchem die Gratfparren durchgehen, in den Höhen der einzelnen Balkenlagen umlaufende Ringe und in den trapezförmigen Seitenflächen Diagonalen angeordnet find. Die letzteren führt er nicht befonders auf, hat fie aber in dem nach ihm benannten Thurmdach nahe den Seitenflächen angewendet. Die Kränze dienen als Pfetten, als Auflager für die Zwifchenfparren; der Thurm ift im Inneren möglichft frei von Conftructionstheilen zu halten. Wenn *Moller* fordert, dafs die Dach-Conftruction nur lothrechten Druck auf die Mauer übertragen könne, fo ift dies leider nicht durchführbar.

Weiter fordert *Moller* von der Conftruction für die Dauerhaftigkeit u. A.: »Alle Zapfenlöcher, in welchen fich Waffer fammeln könnte, find zu vermeiden; wo diefes nicht möglich ift, müffen fie unten gefchlitzt werden, damit das Waffer ablaufen kann. Der Luftzug ift zu befördern.«

Für die Ausbefferungen fordert er: »Alle Hölzer find fo zu verbinden, dafs die fchadhaften leicht weggenommen werden können; mithin follen die Gebälke, Sparrenbalken u. f. w. nicht unter die Hauptpfoften oder Eckfparren gelegt werden, fondern neben diefelben. Bei gröfseren Thürmen ift jedesmal aufser den Eckfparren noch eine von denfelben unabhängige Unterftützung anzubringen, fo dafs durch diefelbe, fowohl beim Auffchlagen, als bei Reparaturen, die Feftigkeit des Ganzen gefichert wird und fie zugleich als Gerüft dienen kann. Die Kränze find fo ein-

178) A. a. O., Heft 4.