c) Abmeſſungen von Balkenlagen mit Unterzügen.

102. Continuirliche Gelenkträger.

Es wurde bereits in Art. 10 bis 13 (S. 24 bis 26) erläutert, weſshalb die Verwendung von continuirlichen Trägern für den Hochbau auf Bedenken ſtöſst, zugleich aber, daſs die Anordnung continuirlicher Gelenkträger[145]) wegen der durch ſie bedingten Materialerſparniſs[146]) durchweg zu empfehlen iſt. Es ſollen daher im Nachſtehenden noch die zur Anordnung dieſer Art von Trägern über beliebig vielen Oeffnungen nöthigen Angaben folgen.

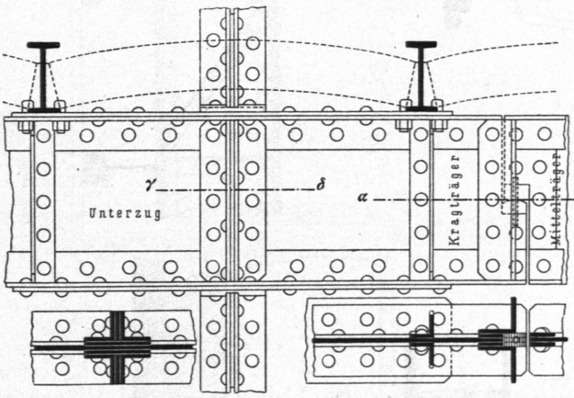
Für dieſe Träger iſt zu unterſcheiden, ob die Stützen alle gleich weit ſtehen, oder ob es geſtattet iſt, den Stützen verſchiedene Abſtände zu geben. Die Belaſtung ſei g (in Kilogr.) für 1 cm Länge des Trägers als Eigenlaſt, p (in Kilogr.) für 1 cm als Nutzlaſt und q (in Kilogr.) für 1 cm als Laſtenſumme.

1) Gleiche Oeffnungsweiten.

103. Lage der Gelenke.

In dieſem Falle iſt es zweckmäſsig, die Momente über den Stützen durch die Wahl der Lage der Gelenke (Fig. 213 bis 216) gleich den gröſsten Momenten in den ununterbrochenen Oeffnungen zu machen, damit die durchzuführenden Trägerſtücke dieſer Oeffnungen möglichſt gleichmäſsig ausgenutzt werden. Es entſteht ſo die in Fig. 217 bis 219 angedeutete Gruppirung der Maximalmomente, von denen M_3, M_4, M_5 nach den Regeln des Trägers auf 2 Stützen zu ermitteln ſind.

Fig. 213.



Schnitt $\gamma\,\delta$. Schnitt $\alpha\,\beta$.

Die Lage der Gelenke, welche Vorbedingung dieſer Momentengruppirung iſt, ſo wie die Gröſse der Momente folgen aus den nachſtehenden Gleichungen, welche durch Fig. 217 u. 219 erläutert ſind.

$$k = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{g}{g+q}}\right) \quad \ldots \quad 42.$$

$$k_1 = \frac{q}{4\,(g+q)} \quad \ldots \quad 43.$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\left[1 - k_1 + m - \sqrt{(1-k_1+m)^2 - 4m}\right], \text{ worin } m = \left[\frac{q}{g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{g}{q}}\right)\right]^2 \quad 44.$$

$$k_2 = \frac{k_1}{1 - k_3} \quad \ldots \quad 45.$$

$$M_1 = \frac{q\,k_1\,l^2}{2} = \frac{q\,k\,l^2}{2}\,(1-k) = \frac{q^2\,l^2}{8\,(g+q)} \quad \ldots \quad 46.$$

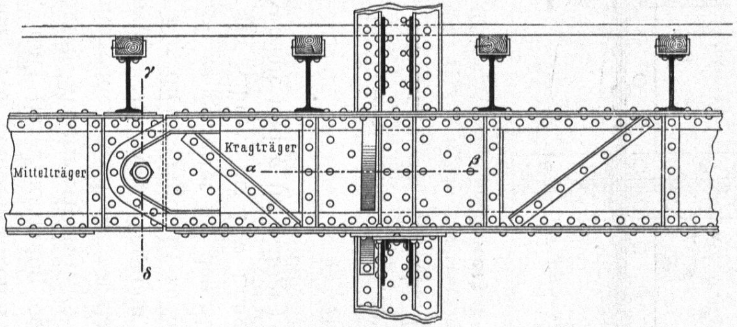
$$M_2 = \frac{q\,k_3\,l^2}{2}\,(1-k_2) \quad \ldots \quad 47.$$

145) Siehe Theil I, Band 1, zweite Hälfte (S. 329; 2. Aufl.: S. 138) dieſes »Handbuches«.

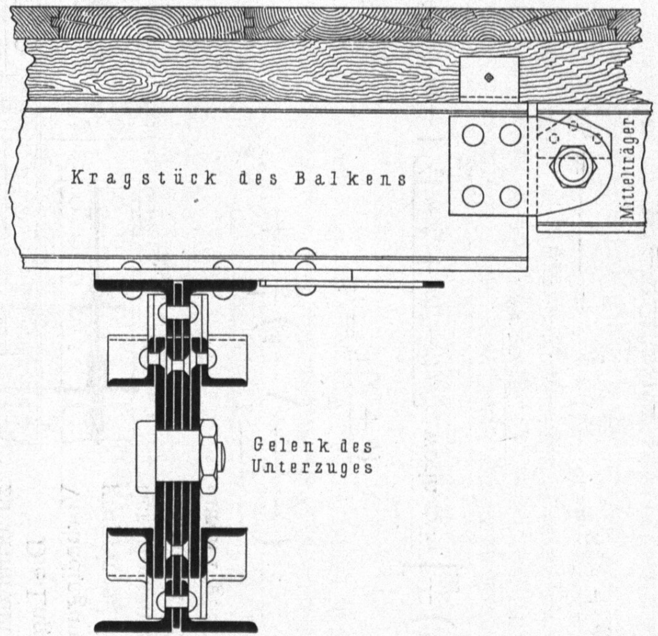
146) Siehe ebendaſ., Art. 369, S. 333 (2. Aufl.: Art. 161, S. 142).

Fig. 214.

Schnitt $\varepsilon\,\zeta$.



Schnitt $\gamma\,\delta$.



Schnitt $\alpha\beta$.

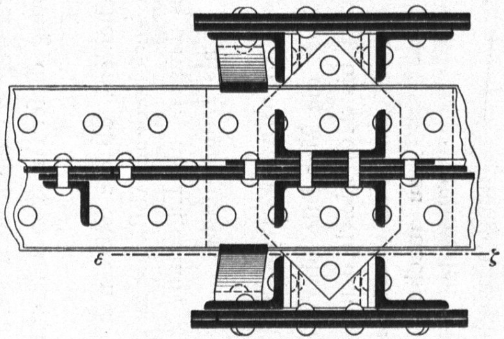


Fig. 215.

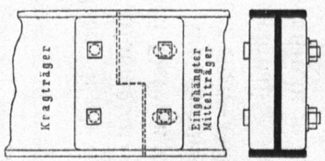


Fig. 216.

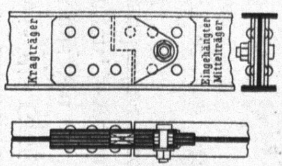


Fig. 217.

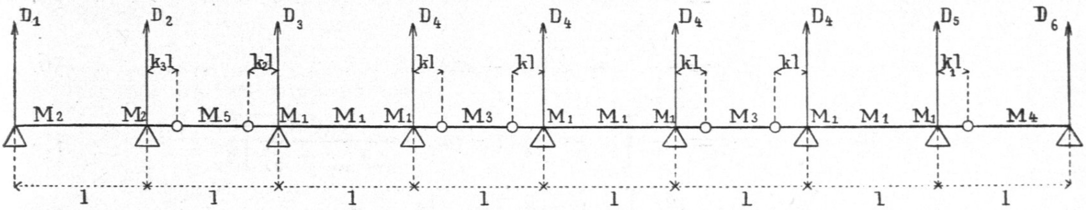


Fig. 218.

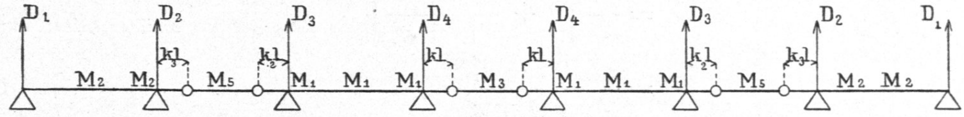
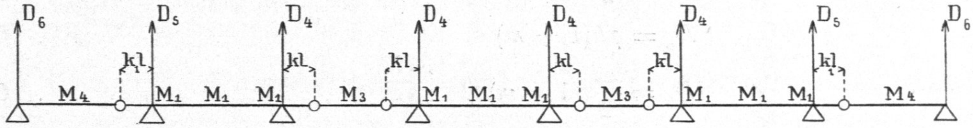


Fig. 219.



$$M_3 = \frac{q\,l^2}{8}\,(1 - 2\,k)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 48.$$

$$M_4 = \frac{q\,l^2}{8}\,(1 - k_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 49.$$

$$M_5 = q\,\frac{l^2}{8}\,(1 - k_2 - k_3)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 50.$$

Fig. 220.

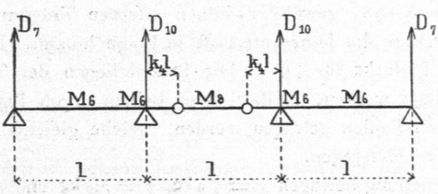
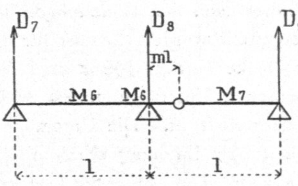


Fig. 221.



Diese Gleichungen decken alle Fälle für beliebig viele Stützen nach Maſsgabe von Fig. 217 bis 219 bis auf die beiden in Fig. 220 u. 221 dargeſtellten Anordnungen für 3 und 4 Stützen. Für dieſe treten noch die folgenden Gleichungen hinzu:

$$k_4 = 0{,}5 - \sqrt{0{,}25 - m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 51.$$

$$M_6 = \frac{m\,q\,l^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 52.$$

$$M_7 = \frac{q\,l^2}{8}\,(1 - m)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 53.$$

$$M_8 = \frac{q\,l^2}{8}\,(1 - 2\,k_4)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 54.$$

Für die Berechnung der Belaſtung von Unterzügen durch die Balken und der Stützenbelaſtungen durch die Unterzüge iſt die Kenntniſs der gröſsten Werthe der Auflagerdrücke von Wichtigkeit, welche ſich nach folgenden Ausdrücken mit Berückſichtigung der Bezeichnungen in Fig. 217 bis 221 berechnen laſſen: 104. Stützenbelaſtungen.

$$D_1 = \frac{l\,[q - g\,k_3\,(1 - k_2)]}{2} \quad \ldots \ldots \quad 55.$$

$$D_2 = \frac{q\,l}{2}\,(1 + k_3)\,(2 - k_2) \quad \ldots \ldots \quad 56.$$

$$D_3 = \frac{q\,l}{2}\left[(2 - k_3)\,(1 + k_2) - \frac{g}{4\,(g + q)}\right] \quad \ldots \ldots \quad 57.$$

$$D_4 = \frac{q\,l}{2}\left[2 + \frac{q - g}{4\,(q + g)}\right] \quad \ldots \ldots \quad 58.$$

$$D_5 = \frac{q\,l}{2}\left[2 + \frac{2\,q - g}{4\,(q + g)}\right] \quad \ldots \ldots \quad 59.$$

$$D_6 = \frac{q\,l}{2}\,\frac{3\,q + 4\,g}{4\,(q + g)} \quad \ldots \ldots \quad 60.$$

$$D_7 = \frac{l}{2}\,(q - m\,g) \quad \ldots \ldots \quad 61.$$

$$D_8 = q\,l\,(1 + m) \quad \ldots \ldots \quad 62.$$

$$D_9 = \frac{q\,l}{2}\,(1 - m) \quad \ldots \ldots \quad 63.$$

$$D_{10} = \frac{q\,l}{2}\,(2 + m) \quad \ldots \ldots \quad 64.$$

Nach den Gleichungen 55 bis 64 erhält man auch die geringſten Werthe der Stützen-, bezw. Auflagerdrücke, wenn man überall g mit q und q mit g vertauſcht. Dieſe kleinſten Werthe ſind von beſonderer Wichtigkeit, wenn ſie bei geringem Werthe von g negativ werden, da ſie dann eine Verankerung der Träger nach unten bedingen; ihre Berechnung zu verabſäumen, kann daher verhängniſsvoll werden.

Beiſpiel. In einem Gebäude von 30 m Länge und 15 m Tiefe ſoll eine Decke mit Kappen ſtets gleichen Schubes nach den Gleichungen 11 bis 16 (S. 98) gewölbt zwiſchen eiſernen Trägern von 1,0 m Theilung hergeſtellt werden, ſo daſs für die Balken nur die lothrechte Laſt in Frage kommt. Das Eigengewicht der Decke beträgt 400 kg und die Nutzlaſt 500 kg für 1 qm. Die Balken liegen der Tiefe nach und ſollen durch 2 Unterzüge in 5 m Abſtand geſtützt werden, ſo daſs jeder Balken durch Fig. 221 für $l = 500$ cm dargeſtellt iſt. Die Unterzüge ſollen von Säulen getragen werden, welche gleichfalls 5 m von einander ſtehen; der Unterzug erhält alſo 6 gleiche Oeffnungen.

α) Balken. Die Laſten für 1 cm bei 1,0 m Theilung betragen $g = 4{,}0$ kg, $p = 5{,}0$ kg und $q = 9{,}0$ kg; folglich iſt nach Gleichung 44

$$m = \left[\frac{9}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{9}}\right)\right]^2 = 0{,}2062$$

und nach Gleichung 51

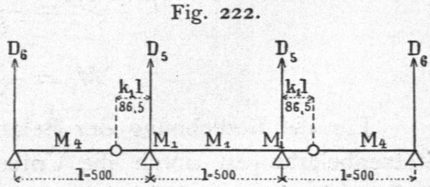
$$k_4 = 0{,}5 - \sqrt{0{,}25 - 0{,}2062} = 0{,}2907\,, \quad k_4\,l = 0{,}2907 \cdot 500 = 145{,}35 \text{ cm}.$$

Hier iſt das Gelenk nach Fig. 213 bis 215 oder 216 anzuordnen. Nach Gleichung 52 iſt

$$M_6 = \frac{0{,}2062 \cdot 9 \cdot 500^2}{2} = 232000 \text{ cmkg}.$$

Bei 1000 kg zuläſſiger Beanſpruchung iſt ſomit das Normalprofil Nr. 21 von I-Eiſen [147]) für die Endſtücke der Balken zu verwenden.

Fig. 222.



Für das Mittelſtück iſt $l = 500 - 2 \cdot 145{,}35 = 209{,}3$ cm; $b = 1{,}0$ m; $s : q = 1000 : 900 = 1{,}1$; alſo iſt nach der Tafel bei S. 113 Normalprofil Nr. 12 zu verwenden.

Werden die Balken mit Gelenken in den Endöffnungen

147) Siehe die betr. Tabelle in Theil I, Band 1, erſte Hälfte (S. 198) dieſes »Handbuches«.

nach Fig. 222 angeordnet, in welche die Bezeichnungen aus Fig. 219 übernommen wurden, so wird nach Gleichung 43

$$k_1 = \frac{9}{4\,(9+4)} = 0{,}173\,, \quad \text{also} \quad k_1\,l = 0{,}173 \,.\, 500 = 86{,}5 \text{ cm};$$

ferner nach den Gleichungen 46 und 49

$$M_1 = \frac{9^2 \,.\, 500^2}{8\,(9+4)} = 194711 \text{ cmkg} \quad \text{und} \quad M_4 = \frac{9 \,.\, 500^2\,(1 - 0{,}173)^2}{8} = 192\,355 \text{ cmkg}.$$

Bei 1000 kg Beanspruchung reicht somit nunmehr das Profil Nr. 20 für alle Theile des Balkens aus; es geht aber bei dieser Anordnung die unmittelbare Verbindung der Säulen mit den Wänden verloren, weil zwischen Wand und Säule nun ein Gelenk liegt.

β) Unterzüge. Um die Belastung der Unterzüge zu erhalten, muss D_{10} nach Gleichung 64 für volle Belastung und für Eigenlast ermittelt werden. Es ist

$$max\ D_{10} = \frac{9 \,.\, 500}{2}\,(2 + 0{,}2062) = 4964 \text{ kg},$$

$$min\ D_{10} = \frac{4 \,.\, 500}{2}\,(2 + 0{,}2062) = 2200 \text{ kg}.$$

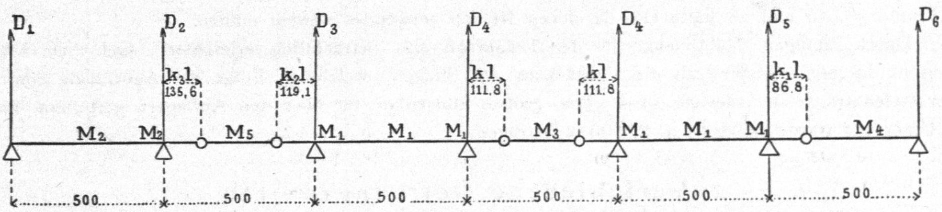
Bei der Anordnung der Balken mit Gelenken in den Endöffnungen wird die Belastung der Unterzüge (Fig. 222) nach Gleichung 59 berechnet. Sie ist

$$max\ D_5 = \frac{9 \,.\, 500}{2}\left[2 + \frac{2 \,.\, 9 - 4}{4\,(9+4)}\right] = 5106 \text{ kg},$$

$$min\ D_5 = \frac{4 \,.\, 500}{2}\left[2 + \frac{2 \,.\, 4 - 9}{4\,(4+9)}\right] = 1981 \text{ kg}.$$

Da somit bei der Anordnung nach Fig. 222 neben der schlechteren Säulenverankerung mit den Wänden auch noch eine ungünstigere Belastung der Unterzüge eintritt, so wird man in der Regel diejenige in Fig. 221 vorziehen. Diese Lasten treten als Einzellasten in 1,0 m Abstand auf; die Berechnung liefert

Fig. 223.



aber genügend genaue Ergebnisse, wenn die Last wieder gleichförmig vertheilt gedacht wird. Es ist somit für den Unterzug (Fig. 223), wenn die Balken nach Fig. 221 gebildet werden, für 1 cm Trägerlänge $g = 22$ kg und $q = 49{,}64$ kg, daher nach Gleichung 42

$$k = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{22}{22+50}}\right) = 0{,}2236 \quad \text{und} \quad k\,l = 0{,}2236 \,.\, 500 = 111{,}8 \text{ cm},$$

nach Gleichung 43

$$k_1 = \frac{50}{4\,(22+50)} = 0{,}1736 \quad \text{und} \quad k_1\,l = 0{,}1736 \,.\, 500 = 86{,}8 \text{ cm},$$

nach Gleichung 44

$$m = \left[\frac{50}{22}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{22}{50}}\right)\right]^2 = 0{,}2066\,,$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\left[1 - 0{,}1736 + 0{,}2066 - \sqrt{(1 - 0{,}1736 + 0{,}2066)^2 - 4 \,.\, 0{,}2066}\right] = 0{,}2712\,,$$

$$k_3\,l = 0{,}2712 \,.\, 500 = 135{,}6 \text{ cm},$$

nach Gleichung 45

$$k_2 = \frac{0{,}1736}{1 - 0{,}2712} = 0{,}2382 \quad \text{und} \quad k_2\,l = 0{,}2382 \,.\, 500 = 119{,}1 \text{ cm},$$

nach Gleichung 46

$$M_1 = \frac{50^2 \,.\, 500^2}{8\,(22+50)} = 1\,085\,070 \text{ cmkg}.$$

Bei 1000^{kg} Beanfpruchung müffen alfo die beiden beiderfeits überkragenden Trägerftücke aus Normalprofil Nr. 36 gebildet fein.

Nach Gleichung 47 ift $M_2 = \frac{50 \cdot 0{,}2712 \cdot 500^2}{2} (1 - 0{,}2382) = 1291250^{cmkg}$; für das überkragende Endftück links genügt alfo Profil Nr. 38 knapp.

Nach Gleichung 48 ift $M_3 = \frac{50 \cdot 500^2 (1 - 2 \cdot 0{,}2236)^2}{8} = 477481^{cmkg}$; für den mittleren eingehängten Träger ift daher Profil Nr. 28 zu verwenden.

Nach Gleichung 49 ift $M_4 = \frac{50 \cdot 500^2 \cdot (1 - 0{,}1736)^2}{8} = 1068125^{cmkg}$; das linke Endftück mufs fonach aus Profil Nr. 36 beftehen.

Nach Gleichung 50 ift $M_5 = \frac{50 \cdot 500^2 (1 - 0{,}2382 - 0{,}2712)^2}{8} = 376075^{cmkg}$; für den linken eingehängten Träger ift alfo Profil Nr. 26 zu verwenden.

Die Belaftungen der Wände an den Enden der Unterzüge und die der ftützenden Säulen ergeben fich aus den Gleichungen 55 bis 60 ohne Weiteres; z. B. ift nach Gleichung 58

$$D_4 = \frac{50 \cdot 500}{2} \left[2 + \frac{50 - 22}{4 (50 + 22)} \right] = 26216^{kg},$$

oder nach Gleichung 57

$$D_3 = \frac{50 \cdot 500}{2} \left[(2 - 0{,}2712)(1 + 0{,}2382) - \frac{22}{4 (22 + 50)} \right] = 25802^{kg}.$$

Wären die Balken nicht überkragend angeordnet, fondern über den Unterzügen geftofsen, fo hätte fich für diefelben das gröfste Biegungsmoment zu $\frac{9 \cdot 500^2}{8} = 281250^{cm}$ ergeben, und ftatt der Querfchnitte Nr. 21 und 12 hätte Nr. 22 durchweg verwendet werden müffen.

Wären zugleich die Unterzüge über den Säulen geftofsen, fo hätte die Laft $(500 + 400) \frac{5}{100} = 45^{kg}$ für 1^{cm}, alfo das gröfste Biegungsmoment in allen Oeffnungen $\frac{45 \cdot 500^2}{8} = 1406250^{cmkg}$ betragen; ftatt der Profile 38, 36 und 28 hätte alfo durchweg Nr. 40 verwendet werden müffen.

Durch Einfügen der Gelenke ift der Trägerroft alfo beträchtlich erleichtert, und diefe Erleichterung ift durchfchlagender, als die Verftärkung der Stützen, welche in Folge der Anordnung continuirlicher Gelenkträger erforderlich wird. Die gröfste Stützenlaft für über den Auflagern geftofsene Balken und Unterzüge würde $500 \cdot 45 = 22500^{kg}$ betragen.

2) Verfchiedene Oeffnungsweiten.

105. Grundgedanke.

Da, wo verfchiedene Oeffnungsweiten, alfo ungleiche Stützenentfernungen zuläffig find, kann man diefen Umftand benutzen, um die Stütz- und Kraglängen den Werthen g und q fo anzupaffen, dafs das gröfste Moment auch der eingehängten Trägerftücke gleich den beiden gröfsten Momenten der Kragftücke und fomit alle gefährlichen Momente eines Trägers einander gleich werden. Man erreicht fo, neben der Möglichkeit, einen einheitlichen Querfchnitt für den ganzen Träger durchführen zu können, zugleich thunlichft geringes Gewicht der Träger.

Da die Stützentheilung bei Erfüllung diefer Bedingung aber von g und q abhängig ift, andererfeits bei mehrgefchoffigen Gebäuden die Stützen verfchiedener Gefchoffe lothrecht über einander ftehen follen, fo ift die günftigfte Stützentheilung in diefem Falle nicht gleichzeitig in allen Gefchoffen zu erreichen, wenn die verfchiedenen Gefchoffe auf verfchiedene Werthe von g und q einzurichten find. In einem folchen Falle richte man die Stützentheilung für diejenigen Werthe von g und q ein, welche in den meiften Gefchoffen wiederkehren; in den übrigen Gefchoffen ift völlige Ausgleichung der Momente dann nicht zu erreichen, und man mufs fich damit begnügen, wie bei gleicher Stützentheilung, die Momente nur an den gefährlichen Stellen der Kragtheile gleich zu machen.