

## IX.

## Ueber den Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung aus denselben drei vollständigen Beobachtungen

hat Herr Professor Encke in den Nummern 640 und 641 der Astronomischen Nachrichten sich ausgesprochen. Auf diese Abhandlung muss daher hier verwiesen werden. Setzt man  $m = cQ \sin \omega$ ;  $q = (\omega + \sigma)$ , so wird die Gleichung IV im Artikel 141 der Theoria motus, falls  $r'$  grösser als  $R'$

$$m \sin z^4 = \sin(z - q),$$

und falls  $r'$  kleiner als  $R'$

$$m \sin z^4 = \sin(z + q),$$

wobei  $m$  stets positiv.

Folgendes sind die Bedingungen, unter denen es möglich ist, eine von der Erdbahn verschiedene Planetenbahn zu finden, welche drei vollständigen Beobachtungen Genüge leisten soll. Erstens. Die Gleichung

$$m \sin z^4 = \sin(z + q)$$

muss vier reelle Wurzeln haben. — Hiezu ist erforderlich, dass ohne Rücksicht auf das Zeichen  $\sin q$  kleiner sein muss als  $\frac{3}{5}$ , und dass  $m$  zwischen den Grenzen  $m'$  und  $m''$  liegen muss. ( $m'$  und  $m''$  sind in der umstehenden Tafel angegeben.)

Zweitens. Von diesen vier reellen Wurzeln müssen drei positiv und eine negativ sein. Um diese Bedingung zu erfüllen, ist es nothwendig, dass  $\cos q$  positiv bleiben muss für alle vier derjenigen Werthe, für welche  $\sin q$  kleiner ist, als  $\pm \frac{3}{5}$ ; die beiden im zweiten und dritten Quadranten sind ausgeschlossen, und nur Werthe zwischen  $-36^\circ 52'$  und  $+36^\circ 52'$  beizubehalten.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so muss stets eine der drei positiven reellen Wurzeln der Erdbahn entsprechen, und diese kann daher nicht in Frage kommen. Im Allgemeinen wird es nicht zweifelhaft sein, welche der beiden anderen Wurzeln zur Lösung der Aufgabe zu benutzen ist. Unter Anwendung der obigen Bezeichnung auf die Artikel 139 und 140 der Theoria motus hat man

$$\frac{\sin z}{R'} = \frac{\sin(\delta' - z)}{\rho'} = \frac{\sin \delta'}{r'}.$$

Es müssen daher nicht nur  $z$  und  $\delta'$  stets kleiner sein als  $180^\circ$ , sondern es muss auch  $\sin(\delta' - z)$  positiv sein, mithin  $\delta'$  grösser als  $z$ .

Stellt man nun die drei reellen positiven Wurzeln nach Ordnung ihrer absoluten Grösse zusammen, so lassen sich drei Fälle unterscheiden. Entweder die kleinste Wurzel nähert sich dem Werthe für  $\delta'$  am meisten und entspricht mithin der Erdbahn. In diesem Falle ist die Aufgabe unmöglich, weil die Bedingung, dass  $\delta'$  grösser als  $z$ , nicht erfüllt werden kann. Oder die mittlere Wurzel coincidirt mit  $\delta'$ ; dann kann die Aufgabe nur mittelst der kleinsten Wurzel gelöst werden. Oder endlich die grösste der drei Wurzeln ist nur wenig verschieden von  $\delta'$ . In diesem Falle hat man die Wahl zwischen beiden kleineren Wurzeln, von denen jede eine planetarische Bahn liefert, weil beide alle Bedingungen erfüllen, und es muss dann erst durch Zuziehung von anderen, als den drei gegebenen, der bisherigen Rechnung zum Grunde liegenden Beobachtungen bestimmt werden, welche Bahn die richtige ist.

Den von Herrn Professor Encke in Nr. 641 der Astronomischen Nachrichten gegebenen Rechnungsbeispielen fügen wir auf Seite 72 noch ein dem Astronomischen Journale von Gould, Band I, Nr. 19, entnommenes Exempel hinzu.

$m \sin z^4 = \sin(z - q).$											$m$ und $q$ positiv.	
$q$	$\log m'$	$\log m''$	$z'$		$z''$		$z'''$		$z^{IV}$			
			$m''$	$m'$	$m'$	$m''$	$m''$	$m'$	$m'$	$m''$		
1 <sup>0</sup>	4,2976	9,9999	1 <sup>0</sup> 0'	1 <sup>0</sup> 20'	1 <sup>0</sup> 20'	89 <sup>0</sup> 40'	89 <sup>0</sup> 40'	177 <sup>0</sup> 37'	180 <sup>0</sup> 55'	181 <sup>0</sup> 0'		
2	3,3950	9,9996	2 0	2 40	2 40	89 20	89 20	175 14	181 51	182 0		
3	2,8675	9,9992	3 0	4 0	4 0	89 0	89 0	172 52	182 46	183 0		
4	2,4938	9,9986	4 0	5 20	5 20	88 40	88 40	170 28	183 42	184 0		
5	2,2044	9,9978	5 0	6 41	6 41	88 19	88 19	168 5	184 37	185 0		
6	1,9686	9,9968	6 0	8 1	8 1	87 59	87 59	165 41	185 32	186 0		
7	1,7698	9,9957	7 1	9 22	9 22	87 38	87 38	163 18	186 28	186 59		
8	1,5981	9,9943	8 1	10 42	10 42	87 18	87 18	160 52	187 23	187 59		
9	1,4473	9,9928	9 2	12 3	12 3	86 57	86 57	158 28	188 18	188 58		
10	1,3130	9,9911	10 3	13 25	13 25	86 35	86 35	156 3	189 13	189 57		
11	1,1922	9,9892	11 5	14 46	14 46	86 14	86 14	153 37	190 9	190 56		
12	1,0824	9,9871	12 7	16 8	16 8	85 52	85 52	151 10	191 4	191 54		
13	0,9821	9,9848	13 9	17 31	17 31	85 29	85 29	148 43	191 59	192 52		
14	0,8898	9,9823	14 12	18 53	18 53	85 7	85 7	146 14	192 54	193 49		
15	0,8045	9,9796	15 16	20 17	20 17	84 43	84 43	143 45	193 49	194 46		
16	0,7254	9,9767	16 20	21 40	21 40	84 20	84 20	141 14	194 44	195 42		
17	0,6518	9,9736	17 26	23 5	23 5	83 55	83 55	138 42	195 39	196 38		
18	0,5830	9,9702	18 33	24 30	24 30	83 30	83 30	136 9	196 33	197 33		
19	0,5185	9,9667	19 41	25 56	25 56	83 4	83 4	133 34	197 28	198 28		
20	0,4581	9,9629	20 51	27 23	27 23	82 37	82 37	130 58	198 23	199 22		
21	0,4013	9,9588	22 2	28 50	28 50	82 10	82 10	128 19	199 17	200 15		
22	0,3479	9,9545	23 15	30 19	30 19	81 41	81 41	125 38	200 11	201 8		
23	0,2976	9,9499	24 31	31 49	31 49	81 11	81 11	122 55	201 6	202 0		
24	0,2501	9,9451	25 49	33 20	33 20	80 40	80 40	120 9	202 0	202 51		
25	0,2053	9,9400	27 10	34 53	34 53	80 7	80 7	117 20	202 54	203 42		
26	0,1631	9,9345	28 35	36 28	36 28	79 32	79 32	114 27	203 47	204 32		
27	0,1232	9,9287	30 4	38 5	38 5	78 55	78 55	111 30	204 41	205 22		
28	0,0857	9,9226	31 38	39 45	39 45	78 15	78 15	108 27	205 35	206 11		
29	0,0503	9,9161	33 18	41 27	41 27	77 33	77 33	105 19	206 28	207 0		
30	0,0170	9,9092	35 5	43 13	43 13	76 47	76 47	102 3	207 21	207 48		
31	9,9857	9,9019	37 1	45 4	45 4	75 56	75 56	98 37	208 14	208 36		
32	9,9565	9,8940	39 9	47 1	47 1	74 59	74 59	95 0	209 6	209 24		
33	9,9292	9,8856	41 33	49 6	49 6	73 54	73 54	91 6	209 58	210 11		
34	9,9040	9,8765	44 21	51 22	51 22	72 38	72 38	86 49	210 50	210 58		
35	9,8808	9,8665	47 47	53 58	53 58	71 2	71 2	81 53	211 41	211 46		
36	9,8600	9,8555	52 31	57 13	57 13	68 47	68 47	75 40	212 32	212 33		
$q'$	9,8443	9,8443	63 26	63 26	63 26	63 26	63 26	63 26	213 15	213 15		

$$q' = 36^{\circ} 52' 11'', 64.$$

$$\sin q' = 0,6 = \frac{3}{5}.$$

$m \sin z^4 = \sin(z + q).$										
$m$ und $q$ positiv.										
$q$	$\log m'$	$\log m''$	$z'$		$z''$		$z'''$		$z^{IV}$	
			$m'$	$m''$	$m''$	$m'$	$m'$	$m''$	$m''$	$m'$
1 <sup>0</sup>	4,2976	9,9999	2 <sup>0</sup> 23'	90 <sup>0</sup> 20'	90 <sup>0</sup> 20'	178 <sup>0</sup> 40'	178 <sup>0</sup> 40'	179 <sup>0</sup> 0'	359 <sup>0</sup> 0'	359 <sup>0</sup> 5'
2	3,3950	9,9996	4 46	90 40	90 40	177 20	177 20	178 0	358 0	358 9
3	2,8675	9,9992	7 8	91 0	91 0	175 0	175 0	177 0	357 0	357 14
4	2,4938	9,9986	9 32	91 20	91 20	174 40	174 40	176 0	356 0	356 18
5	2,2044	9,9978	11 55	91 41	91 41	173 19	173 19	175 0	355 0	355 23
6	1,9686	9,9968	14 19	92 1	92 1	171 59	171 59	174 0	354 0	354 28
7	1,7698	9,9957	16 42	92 22	92 22	170 38	170 38	172 59	353 1	353 32
8	1,5981	9,9943	19 7	92 42	92 42	169 18	169 18	171 59	352 1	352 37
9	1,4473	9,9928	21 32	93 3	93 3	167 57	167 57	170 58	351 2	351 42
10	1,3130	9,9911	23 57	93 25	93 25	166 35	166 35	169 57	350 3	350 47
11	1,1922	9,9892	26 23	93 46	93 46	165 14	165 14	168 55	349 4	349 51
12	1,0824	9,9871	28 50	94 8	94 8	163 52	163 52	167 54	348 6	348 56
13	0,9821	9,9848	31 17	94 31	94 31	162 29	162 29	166 51	347 8	348 1
14	0,8898	9,9823	33 46	94 53	94 53	161 7	161 7	165 48	346 11	347 6
15	0,8045	9,9796	36 15	95 17	95 17	159 43	159 43	164 44	345 14	346 11
16	0,7254	9,9767	38 46	95 40	95 40	158 20	158 20	163 40	344 18	345 16
17	0,6518	9,9736	41 18	96 5	96 5	156 55	156 55	162 34	343 22	344 21
18	0,5830	9,9702	43 51	96 30	96 30	155 30	155 30	161 27	342 27	343 27
19	0,5185	9,9667	46 26	96 56	96 56	154 4	154 4	160 19	341 32	342 32
20	0,4581	9,9629	49 2	97 23	97 23	152 37	152 37	159 9	340 38	341 37
21	0,4013	9,9588	51 41	97 50	97 50	151 10	151 10	157 58	339 45	340 43
22	0,3479	9,9545	54 22	98 19	98 19	149 41	149 41	156 45	338 52	339 49
23	0,2976	9,9499	57 5	98 49	98 49	148 11	148 11	155 29	338 0	338 54
24	0,2501	9,9451	59 51	99 20	99 20	146 40	146 40	154 11	337 9	338 0
25	0,2053	9,9400	62 40	99 53	99 53	145 7	145 7	152 50	336 18	337 6
26	0,1631	9,9345	65 33	100 28	100 28	143 32	143 32	151 25	335 28	336 13
27	0,1232	9,9287	68 30	101 5	101 5	141 55	141 55	149 56	334 38	335 19
28	0,0857	9,9226	71 33	101 45	101 45	140 15	140 15	148 22	333 49	334 25
29	0,0503	9,9161	74 41	102 27	102 27	138 33	138 33	146 42	333 0	333 32
30	0,0170	9,9092	77 57	103 13	103 13	136 46	136 46	144 55	332 12	332 39
31	9,9857	9,9019	81 23	104 4	104 4	134 56	134 56	142 59	331 24	331 46
32	9,9565	9,8940	85 0	105 1	105 1	132 59	132 59	140 51	330 36	330 54
33	9,9292	9,8856	88 54	106 6	106 6	130 54	130 54	138 27	329 49	330 2
34	9,9040	9,8765	93 11	107 22	107 22	128 38	128 38	135 38	329 2	329 10
35	9,8808	9,8665	98 7	108 58	108 58	126 2	126 2	132 13	328 14	328 19
36	9,8600	9,8555	104 20	111 13	111 13	122 47	122 47	127 29	327 27	327 28
$q'$	9,8443	9,8443	116 34	116 34	116 34	116 34	116 34	116 34	326 45	326 45

$q' = 36^{\circ} 52' 11'',64.$

$\sin q' = 0,6 = \frac{3}{5}.$

Bei dem fünften Cometen des Jahres 1847 leitete Herr Dr. Gould aus der ersten Hypothese die Gleichung ab:

$$[9,902\ 1264] \sin z^4 = \sin(z + 32^\circ 53' 28'' 5)$$

für  $\delta'$  war gefunden:  $\delta' = 133^\circ 0' 31''$ .

Man hat also  $\sin q$  kleiner als  $\frac{3}{5}$  und ein Blick auf die Tafel zeigt, dass der (als Logarithmus gegebene) Factor in der Klammer zwischen  $m'$  und  $m''$  liegt. Es sind folglich hier vier reelle Wurzeln vorhanden, von denen drei positiv sind. Hier nähert sich daher  $z'''$  so sehr dem gegebenen  $\delta'$ , dass darüber kein Zweifel bestehen kann. Es tritt mithin der Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung ein, wobei nach der Tafel die beiden möglichen Werthe für  $z$  liegen zwischen  $88^\circ 29'$  bis  $105^\circ 59'$  und zwischen  $105^\circ 59'$  bis  $131^\circ 7'$ . Thatsächlich sind die vier Wurzeln:

$$\begin{aligned} z' &= 95^\circ 31' 43'' 5 \\ z'' &= 117^\circ 31' 13,1 \\ z''' &= 137^\circ 38' 16,7 \\ z^{IV} &= 329^\circ 58' 35,5. \end{aligned}$$

Die zweite Wurzel ( $117^\circ$  u. s. w.) lieferte eine Ellipse von sehr kurzer Umlaufzeit, aber die anderen Beobachtungen zeigten, dass dies nicht die wahre Bahn war.

Dieser Ausnahmefall kann, wie ein Blick auf die Tafel ausweist, niemals eintreten, sobald  $\delta'$  kleiner ist als  $63^\circ 26'$ .

Die Wurzel  $z^{IV}$  ist nur der Vollständigkeit wegen in die Tafel mit aufgenommen, indem die Wurzel  $z^{IV}$ , da für dieselbe  $\sin z$  negativ ausfällt, nie in Frage kommen kann.