VIII.

Auszug aus einer Abhandlung des Herrn Professors Dr. Klinkerfues über Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen (aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pag. 196 bis 205). *Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei Beobachtungen, von denen eine unvollständig ist. Mit Tafeln.*

Es ist bekannt, dass die Astronomen bei Beobachtung der Cometen sich vorzugsweise des Kreismikrometers bedienen müssen, und dass die Declinationsbestimmungen mit diesem Instrumente gewisse Vorsichtsmaassregeln erfordern, wenn dieselben gelingen sollen. Die Rectascension wird, wie den Beobachtern bekannt ist, immer viel leichter erhalten. Besonders sind meist in der Nacht der Entdeckung die Umstände für die sichere Beobachtung in Declination ungünstig, weil dieselbe das Aufsuchen eines guten Vergleichsterns, kurz Vorbereitungen erfordert, zu welchen keine Zeit bleibt. Ueberhaupt findet in den ersten Tagen nach der Entdeckung und vor Berechnung einer Ephemeride eine grössere Schwierigkeit in dieser Beziehung Statt, wenn auch in geringerem Grade als bei der Entdeckung selbst. So häufig deshalb der Fall, dass eine der drei Declinationen unsicher, oder überhaupt nicht erhalten ist, vorkommt, so hat doch meines Wissens, noch Niemand bis jetzt die erste Bahnbestimmung auf solche fünf Daten gestützt, sondern man hat eine dritte vollständige Beobachtung abgewartet. Ich weiss keinen andern Grund dafür zu finden, als den, dass hier die Olbers'sche Methode nicht passt. Zur Noth kann man allerdings damit eine Bahn drei Längen und zwei Breiten anschliessen, aber diese Combination hat keine praktische Bedeutung, abgesehen davon, dass die Rechnung doch recht mühsam ausfallen würde.

Die folgende Methode, aus drei geocentrischen Beobachtungen, von denen eine die Declination gar nicht oder nur geschätzt enthält, eine parabolische Bahn zu berechnen, bleibt, wie ein Beispiel unten zeigen wird, auch in ungünstigen Fällen noch sehr bequem. Als günstigster Fall nämlich ist zu betrachten, wenn die unvollständige Beobachtung, deren Rectascension im Folgenden immer mit α' bezeichnet ist, die zweite ist, und wenn ausserdem das Zeitintervall zwischen der ersten und dritten Beobachtung $t''-t$ durch t' nahe halbirt wird; alsdann gelangt man am Leichtesten zu dem beliebig scharfen Resultate, welches sich durch die Methode erzielen lässt. Die ungünstigeren Fälle, für welche übrigens die Form dieselbe bleibt, (indem eben stets α' die Rectascension der unvollständigen Beobachtung vorstellt) sind die, wobei dieser unvollständige Ort der erste oder der dritte ist.

Die Parallaxe und Aberration wird, soweit ich den Gebrauch der Rechner kenne, meist bei der ersten Bahnbestimmung vernachlässigt; es kann dies nur in seltenen Fällen erhebliche Folgen haben und erscheint wegen der Mühe, die die Berücksichtigung bei der Olbers'schen Methode verursachen würde, ganz gerechtfertigt. Da aber, wie eben bemerkt, diese Vernachlässigung von bedeutenderem Einfluss werden kann, so ist es nicht gleichgültig, dass bei der vorliegenden Methode der obige Grund für die Vernachlässigung wegfällt. Uebrigens ist schon weiter oben von der Art, Parallaxe und Aberration zu berücksichtigen, auch von der für die Bahnberechnung (und zugleich für die Beobachter) bequemsten Form, die Beobachtungen mitzutheilen, die Rede gewesen, wobei ich also, da es hier ungeändert Anwendung findet, nicht verweile.

Der Methode selbst schicke ich eine Reihenentwickelung für das Verhältniss des parabolischen Sectors zum Dreieck voraus, welche sich in dem *Gauss'schen Nachlasse* findet. Wenn nämlich r und r' die den Sector begrenzenden und zwei Zeiten t und t' entsprechenden Radien Vectoren sind, $\varkappa$ die beide verbindende Sehne, so setzt Gauss

$$\frac{\varkappa}{r+r'} = \sin\varphi$$

und kann alsdann die Lambert'sche Gleichung in folgender Form schreiben

$$2k(t'-t) = \varkappa\sqrt{r+r'}\,\frac{2+\cos\varphi}{3\cos\frac{1}{2}\varphi} = \varkappa\sqrt{r+r'}\left\{1-\tfrac{1}{24}\alpha-\tfrac{1}{128}\alpha^2-\tfrac{3}{1024}\alpha^3-\ldots\text{etc.}\right\}$$

wobei $\alpha = \dfrac{\varkappa^2}{(r'+r)^2}$. Ausserdem wird aber noch

$$\frac{\text{Ausschnitt}}{\text{Dreieck}} = \frac{2+\cos\varphi}{3\cos\varphi} = 1+\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{4}\alpha^2+\tfrac{5}{24}\alpha^3+\tfrac{35}{192}\alpha^4+\ldots\ \text{etc.}$$

Setzt man daher

$$\frac{4k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3} = \beta$$

so wird

$$\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}} = 1-\tfrac{1}{3}\beta-\tfrac{1}{6}\beta^2-\tfrac{1}{9}\beta^3-\frac{499}{5184}\beta^4-\ldots\ \text{etc.*)}$$

Nach dieser Reihenentwickelung habe ich eine kleine Tafel berechnet, welche für $\dfrac{k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3}$ als Argument $\log\dfrac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$ giebt.

Da, wie man sehen wird, die drei bei der Bahnbestimmung in Betracht kommenden Radien Vectoren leicht erhalten werden können, so fällt der Nutzen dieser Tafel in die Augen. Von derselben habe ich bei der folgenden Rechnung Gebrauch gemacht, bevor ich eine andere Hülfstafel construirt hatte, die für die scharfe Bestimmung einer parabolischen Bahn möglichst compendiös ist. Nach dem Vorhergehenden wird $\sin\frac{1}{2}\varphi$ die kleinste positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$x^3-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}\,\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Setzt man daher $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\zeta = \sin 3\psi$, so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin\psi\cdot\sqrt{2}$$

Man könnte nun die Lambert'sche Gleichung durch die Relation

$$\varkappa = (r+r')\sin\varphi$$

ersetzen, aber diese Form ist für Construction einer Tafel nicht bequem wegen der grossen Ausdehnung, die man einer solchen geben müsste; es wird aber auch

$$\varkappa = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}}\cdot\frac{3\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\varphi} = 6\cdot\zeta(r+r')\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\varphi}$$

Ich habe in einer der beifolgenden Tafeln für alle Tausendtel des Arguments ζ zwischen 0 und 0,4 $\log\left(\dfrac{6\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\varphi}\right)$ berechnet. Ausserdem enthält diese Tafel aber noch eine Columne für $\log\dfrac{\text{Dreieck}}{\text{Sector}} = \log\left(\dfrac{3\cos\varphi}{2+\cos\varphi}\right)$. Die folgenden Vorschriften für die Berechnung der parabolischen Bahn aus fünf Daten werden erhalten, wenn man, wie oben, die Gleichungen

$$x' = cx + c''x''$$
$$y' = cy + c''y''$$
$$z' = cz + c''z''$$

---

*) Gütiger Mittheilung des Herrn Professors Klinkerfues verdanken wir die Bemerkung, dass das letzte Glied dieser Reihe, Inhalts einer Dissertation des Herrn Doctors Tietjen, nicht völlig richtig sei, indem statt $-\dfrac{499}{5184}\beta^4$ gelesen werden müsse $-\dfrac{55}{648}\beta^4$. Dieser Unterschied sei jedoch für die Tafel unmerklich.

mit derjenigen*) verbindet, welche die unvollständige Beobachtung liefert, nämlich mit

$$\frac{y'-Y'}{x'-X'} = \operatorname{tang} \alpha'$$

Man kommt hierbei auf die folgende Relation zwischen den Distanzen von der Erde ϱ und ϱ''

$$(4) \; . \; . \; . \; c''\varrho'' = M' - Mc - M''c'' - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \cdot \frac{\cos\delta}{\cos\delta''} \cdot c\varrho$$

worin

$$M = (Y \cos\alpha' - X \sin\alpha') \sec\delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha')$$
$$M' = (Y' \cos\alpha' - X' \sin\alpha') \sec\delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha')$$
$$M'' = (Y'' \cos\alpha' - X'' \sin\alpha') \sec\delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha')$$

c und c'' haben mit consequenter Berücksichtigung der Vorzeichen die Bedeutung, wie im Vorhergehenden, d. h.

$$c = \frac{r'r''\sin(v''-v')}{r\,r''\sin(v''-v)}; \qquad c'' = \frac{rr'\sin(v'-v)}{rr''\sin(v''-v)},$$

Wenn man die Verhältnisse $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$, und zwar η dem Intervalle $t''-t'$, η'' dem Intervalle $t'-t$ und η' dem Intervalle $t''-t$ entsprechend einführt, so wird man haben

$$c = \frac{t''-t'}{t''-t} \cdot \frac{\eta}{\eta'}, \qquad c'' = \frac{t'-t}{t''-t} \cdot \frac{\eta''}{\eta'}$$

Einstweilen c und c'' als bekannt angenommen, findet man auf folgende Weise die heliocentrischen Coordinaten x, y, z, x'', y'', z''. Man bringt r^2 und r''^2 auf die Form

$$r^2 = A + B\varrho + \varrho^2; \quad r''^2 = A'' + B''\varrho'' + \varrho''^2$$

und ebenso sei

$$\varkappa^2 = C + D\varrho + E\varrho^2$$

wenn $\varkappa$ die Sehne bedeutet, welche r und r'' verbindet. Um diese Form zu erhalten, hat man

$$A = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad A'' = X''^2 + Y''^2 + Z''^2$$

$$B = 2(X\cos\delta\cos\alpha + Y\cos\delta\sin\alpha + Z\sin\delta); \; B'' = 2(X''\cos\delta''\cos\alpha'' + Y''\cos\delta''\sin\alpha'' + Z''\sin\delta'')$$

Um die Aufstellung des Ausdrucks für $\varkappa$ übersichtlicher zu machen, sei nach (4) der Zusammenhang zwischen ϱ und ϱ'' bei einer Annahme für c und c''

$$\varrho'' = F + f\varrho$$

dann wird

$$C = (X'' - X + F\cos\delta''\cos\alpha'')^2 + (Y'' - Y + F\cos\delta''\sin\alpha'')^2 + (Z'' - Z + F\sin\delta'')^2$$

$$\frac{D}{2} = (X'' - X + F\cos\delta''\cos\alpha'')(f\,.\cos\delta''\cos\alpha'' - \cos\delta\cos\alpha)$$
$$+ (Y'' - Y + F\cos\delta''\sin\alpha'')(f\,.\cos\delta''\sin\alpha'' - \cos\delta\sin\alpha) + (Z'' - Z + F\sin\delta'')(f\sin\delta'' - \sin\delta)$$

$$E = (f\cos\delta''\cos\alpha'' - \cos\delta\cos\alpha)^2 + (f\cos\delta''\sin\alpha'' - \cos\delta\sin\alpha)^2 + (f\sin\delta'' - \sin\delta)^2$$

Wenn man die Logarithmen der hier vorkommenden Factoren in einer gewissen Ordnung neben oder unter einander schreibt, ist die Berechnung von C, D und E nichts weniger als beschwerlich. A, B, A'', B'' sind ganz constant, ihre Berechnung gehört daher zur Vorbereitung.

Sobald diese Ausdrücke aufgestellt sind, wird ϱ so zu bestimmen sein, dass der Lambert'schen Gleichung

$$(r'' + r + \varkappa)^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - \varkappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t'' - t)$$

Genüge geschieht; denn die Gleichung (4) giebt zu jedem Werthe von ϱ ein bei der Hypothese

---

*) In der vorhergehenden Abhandlung des Herrn Professors Klinkerfues bezeichnen x, y, z, x' y' z', x'', y'', z'' die heliocentrischen Coordinaten zu den Zeiten t, t' t''; X, Y, Z u. s w. die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsorts zu den drei Zeiten; v, v', v'' die wahren Anomalien des Gestirns.

zugehöriges ϱ''. Diese Auflösung der Lambert'schen Gleichung gestattet offenbar dieselben Hülfsmittel, deren man sich sonst dabei bedient, z. B. die Benutzung der bekannten Tafel von Encke oder der im Anfange mitgetheilten Tafel. Aus ϱ und ϱ'', welche sich so ergeben haben, findet man dann x, y, z, x'', y'', z'' auf hinlänglich bekannte Weise, und r' aus der Gleichung

$$r'^2 = (cx + c''x'')^2 + (cy + c''y'')^2 + (cz + c''z'')^2$$

Es ist hiermit Alles bekannt, was nöthig ist, η, η', η'' zu bestimmen, da diese Grössen von $r + r'$, $r + r''$ und $r' + r''$ abhängen. Wenn die neuen Werthe von c und c'' mit denjenigen, welche man angenommen hat, übereinstimmen, werden alle gefundenen Werthe in Schärfe einer Parabel entsprechen; im andern Falle legt man die neuen Werthe, welche sehr viel angenäherter sein werden, bei der Wiederholung der Rechnung zu Grunde.

Die erste Hypothese für c, c'' kann auf verschiedene Weise gebildet werden; am Meisten möchte sich aber wohl empfehlen,

$$r = r' = r'' = 1$$

zu setzen, und hiernach η, η', η'' mit Hülfe der Tafel zu bestimmen. Hält man den Cometen noch für sehr entfernt von der Sonne, oder ihr viel näher als die Erde, so kann man danach leicht die erste Hypothese modificiren.

Ein Beispiel, die Anwendung auf den Cometen 1857 III, wird hinreichen, die Bequemlichkeit der Methode zu zeigen, zumal der Fall so ungünstig gewählt ist. Die Berliner Beobachtungen, von Herrn Dr. Förster in Nr. 1124 der Astronomischen Nachrichten mitgetheilt, sind zwar alle vollständig; ich ignorire aber die Declinationsbestimmung vom 23. Juni und lege folgende Data zu Grunde:

	Mittl. Zeit Berlin	Rectascension	Decl.
1857. Juni 23.	$12^h\ 56^m\ 53^s$	$53^0\ 6'\ 53''4$	
27.	12 56 37	61 20 51,1	$+44^0\ 43'\ 50''1$
Juli 2.	13 27 37	77 2 50,6	+48 47 8,8

Die Unvollständigkeit einer Beobachtung legt, wenigstens in der Praxis, der Reduction vom scheinbaren Ort auf den mittleren kein Hinderniss in den Weg; die Beobachtungen können also auf das mittlere Aequinoctium von 1857 bezogen und von der Aberration der Fixsterne befreiet werden. Die Erdcoordinaten, auf dasselbe Aequinoctium bezogen, sind dem Nautical Almanac entnommen, da dieses Jahrbuch die Reduction vollständig enthält; endlich sind zur Berücksichtigung der Parallaxe, weil sie mit so leichter Mühe zu haben, die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes selbst abgeleitet. Die corrigirte Grundlage der Rechnung wird danach durch folgende Grössen gebildet:

t, t', t'' ...	Juni 27,53932	Juni 23,53950,	Juli 2,56085
α, α', α''	$61^0\ 20'\ 48''$	$53^0\ 6'\ 51''$	$77^0\ 2'\ 44''$
δ δ''	+44 43 46		+48 47 4
X, X', X''	0,10953	0,04203	0,19350
Y, Y', Y''	−0,92730	−0,93183	−0,91569
Z, Z', Z''	−0,40235	−0,40432	−0,39731

Die folgende Rechnung ist, wie in ähnlichen Fällen dem Zweck entsprechend geschieht, auf fünf Decimalstellen geführt. Wenn man auf mehr Stellen rechnet, so kann doch der bedeutendste Theil der Arbeit mit fünf Stellen erledigt werden, da nur die Vorbereitungsrechnung und die letzte Hypothese über die Genauigkeit entscheiden. Aus demselben Grunde würde es auch Zeitverlust sein, auf die provisorischen Lösungen der Lambert'schen Gleichung die grösste Sorgfalt zu verwenden.

Im gegenwärtigen Falle findet man

$$\log M = 0{,}38205_n,\ \log M' = 0{,}34604_n,\ \log M'' = 0{,}42085_n,\ \log\left(\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')}\right)\cdot\frac{\cos\delta}{\cos\delta''} = 9{,}58047$$

also

$$c''\varrho'' = -2{,}21840 + (0{,}38205)\,c + (0{,}42085)\,c'' - (9{,}58047)\,c\varrho$$

als die für alle Hypothesen gültige Relation zwischen ϱ und ϱ'', in welcher die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten. Auch wird für die ganze Rechnung

$$r^2 = 1{,}03376 - 1{,}64791\,\varrho + \varrho^2$$
$$r''^2 = 1{,}03400 - 1{,}71656\,\varrho'' + \varrho''^2$$

Bildet man auf die obige Art die erste Hypothese, so wird

$\log\eta = 9{,}99818$, $\log\eta'' = 9{,}99966$, $\log\eta' = 9{,}99947$, also $\log c = 0{,}25315$, $\log c'' = 9{,}90139_n$

$$\varrho'' = 0{,}00163 + (9{,}93223)\,\varrho$$

Für das Quadrat der Sehne erhält man

$$\varkappa^2 = 0{,}0072908 - 0{,}038719\,\varrho + 0{,}055033\,\varrho^2$$

Es genügt der Lambert'schen Gleichung $\log\varrho = 0{,}01088$ wozu $\log\varrho'' = 9{,}94392$ gehört. Für die drei Radien Vectoren erhält man $\log r = 9{,}79854$, $\log r' = 9{,}85160$, $\log r'' = 9{,}73679$. Mit diesen Werthen wird als Grundlage für die zweite Hypothese gefunden

$\log\eta = 9{,}99273$, $\log\eta'' = 9{,}99886$, $\log\eta' = 9{,}99730$
$\log c = 0{,}24987$, $\log c'' = 9{,}90276_n$

Als Lösung ergiebt sich jetzt

$$\log\varrho = 0{,}04359$$
$$\log\varrho'' = 9{,}99404$$

ausserdem

$$\log r = 9{,}81883$$
$$\log r' = 9{,}86810$$
$$\log r'' = 9{,}74816$$

Man kann schon hinreichend sicher an die Zeiten die Correction wegen der Aberration anbringen. Da nämlich $\log\varrho' = 0{,}08478$ gefunden wird, sind die reductiones temporum bei t, t', t''

$$-0{,}00631$$
$$-0{,}00694$$
$$-0{,}00563$$

demnach die corrigirten Zeiten

Juni 27. 53301
Juni 23. 53256
Juli 2. 55522

Der dritten Hypothese wird $\log c = 0{,}25029$, $\log c'' = 9{,}90260_n$ zu Grunde zu legen sein; sie führt auf folgende Zahlen

$$\log\varrho = 0{,}04014$$
$$\log\varrho'' = 9{,}98845$$
$$\log r = 9{,}81639$$
$$\log r' = 9{,}86651$$
$$\log r'' = 9{,}74602$$

Für die vierte Hypothese würde folgen $\log c = 0{,}25016$, $\log c'' = 9{,}90259_n$. Man kann nun aber gleich aus dem Gange der Verbesserungen schliessen, dass die Annahme

0,25021 für $\log c$

etwas genauer sein wird. Es ergiebt sich dann schliesslich

$$\log\varrho = 0{,}04087$$
$$\log\varrho'' = 9{,}98963$$

$(v''-v)$ folgt aus der Formel

$$4rr''\sin\tfrac{1}{2}(v''-v)^2 = \varkappa^2 - (r''-r)^2$$

es wird hier $\frac{1}{2}(v''-v) = 5^\circ\,48'\,22''$.

Bekanntlich bestehen die Gleichungen

$$\frac{\frac{\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(v''-v)}{\sqrt{r}}-\frac{\operatorname{cosec.}\frac{1}{2}(v''-v)}{\sqrt{r''}}}{\frac{1}{\sqrt{r}}}=\frac{\frac{\sin\frac{1}{2}v}{\sqrt{q}}}{\frac{\cos\frac{1}{2}v}{\sqrt{q}}}$$

wenn q der Perihelabstand des Cometen ist. Man findet hier

$$\log q = 9{,}565\,28$$

und die Zeit des Perihels

$$T = \text{Juli } 18{,}008\,17$$

Ohne die übrigen Elemente zu berechnen, erhält man

$$x = (9{,}972\,58)\sin(211^0\,18'\,25''+v)r$$
$$y = (9{,}933\,28)\sin(288^0\,35'\,41''+v)r$$
$$z = (9{,}791\,71)\sin(149^0\;\;2'\,48''+v)r$$

Hiermit ist die Rechnung beendigt; es kann aber von Interesse sein, zu sehen, wie genau wohl die nicht bei der Rechnung zugezogene Declination vom Juni 23 dargestellt wird. Auf das Aequinoctium von 1857, 0 bezogen, ist diese Declination nach der Beobachtung

$$+40^0\,59'\,34''3$$

Die Rechnung ergiebt $+40^0\,59'\,35''$.

Diese fast völlige Uebereinstimmung ist, zumal die Rechnung auf fünf Decimalstellen geführt wurde, theilweise dem Zufall zuzuschreiben; indessen zeigt sie doch die grösste Zuverlässigkeit der Methode, und dies um so augenfälliger, als ein so beträchtlicher Theil des geocentrischen Laufs, 24 Grade in Rectascension, 8 Grade in der Declination umfasst werden. Dieser Umstand nämlich erschwert es offenbar, sich an die Beobachtungen innerhalb gewisser Grenzen anzuschliessen, während er die Sicherheit der Bahnbestimmung an und für sich erhöht. Gewöhnlich werden zwei Hypothesen eine hinreichende Genauigkeit gewähren, ganz besonders aber dann, wenn die unvollständige Beobachtung die zweite ist. In Nr. 1103 der Astronomischen Nachrichten hat Dr. Pape aus den Beobachtungen Juni 23, Juli 3 zu Berlin und Juli 14 zu Altona ein Elementensystem berechnet, welches nahezu als definitiv gelten kann. Er findet

$$\log q = 9{,}565\,259$$
$$T \quad \text{Juli } 18{,}011\,75$$

womit obiges Resultat höchst befriedigend übereinstimmt.

TAFEL

für die Auflösung der Lambert'schen Gleichung und das Verhältniss des Dreiecks zum parabolischen Sector.

ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η
0,000	0,301 030	0,000 000	0,038	0,301 135	9,999 160	0,076	0,301 451	9,996 603
0,001	0,301 030	0,000 000	0,039	0,301 140	9,999 115	0,077	0,301 463	9,996 512
0,002	0,301 030	9,999 998	0,040	0,301 146	9,999 069	0,078	0,301 474	9,996 419
0,003	0,301 031	9,999 995	0,041	0,301 152	9,999 022	0,079	0,301 485	9,996 325
0,004	0,301 031	9,999 991	0,042	0,301 158	9,998 974	0,080	0,301 497	9,996 230
0,005	0,301 032	9,999 986	0,043	0,301 164	9,998 924	0,081	0,301 509	9,996 133
0,006	0,301 033	9,999 980	0,044	0,301 171	9,998 873	0,082	0,301 521	9,996 036
0,007	0,301 034	9,999 972	0,045	0,301 177	9,998 821	0,083	0,301 533	9,995 936
0,008	0,301 035	9,999 963	0,046	0,301 184	9,998 768	0,084	0,301 545	9,995 836
0,009	0,301 036	9,999 953	0,047	0,301 191	9,998 713	0,085	0,301 558	9,995 734
0,010	0,301 037	9,999 942	0,048	0,301 198	9,998 658	0,086	0,301 570	9,995 631
0,011	0,301 039	9,999 930	0,049	0,301 205	9,998 601	0,087	0,301 583	9,995 526
0,012	0,301 040	9,999 917	0,050	0,301 212	9,998 543	0,088	0,301 596	9,995 421
0,013	0,301 042	9,999 902	0,051	0,301 219	9,998 484	0,089	0,301 609	9,995 313
0,014	0,301 044	9,999 887	0,052	0,301 227	9,998 423	0,090	0,301 622	9,995 205
0,015	0,301 046	9,999 870	0,053	0,301 235	9,998 361	0,091	0,301 636	9,995 096
0,016	0,301 049	9,999 852	0,054	0,301 242	9,998 298	0,092	0,301 649	9,994 985
0,017	0,301 051	9,999 833	0,055	0,301 250	9,998 234	0,093	0,301 663	9,994 873
0,018	0,301 054	9,999 812	0,056	0,301 258	9,998 169	0,094	0,301 677	9,994 759
0,019	0,301 056	9,999 791	0,057	0,301 267	9,998 102	0,095	0,301 691	9,994 645
0,020	0,301 059	9,999 768	0,058	0,301 275	9,998 034	0,096	0,301 705	9,994 528
0,021	0,301 062	9,999 744	0,059	0,301 283	9,997 965	0,097	0,301 719	9,994 411
0,022	0,301 065	9,999 719	0,060	0,301 292	9,997 895	0,098	0,301 734	9,994 292
0,023	0,301 068	9,999 693	0,061	0,301 301	9,997 823	0,099	0,301 748	9,994 172
0,024	0,301 072	9,999 666	0,062	0,301 310	9,997 751	0,100	0,301 763	9,994 050
0,025	0,301 075	9,999 637	0,063	0,301 319	9,997 677	0,101	0,301 778	9,993 928
0,026	0,301 079	9,999 608	0,064	0,301 328	9,997 601	0,102	0,301 793	9,993 804
0,027	0,301 083	9,999 577	0,065	0,301 338	9,997 525	0,103	0,301 808	9,993 677
0,028	0,301 087	9,999 545	0,066	0,301 347	9,997 447	0,104	0,301 823	9,993 551
0,029	0,301 091	9,999 512	0,067	0,301 357	9,997 368	0,105	0,301 839	9,993 423
0,030	0,301 095	9,999 477	0,068	0,301 367	9,997 288	0,106	0,301 854	9,993 293
0,031	0,301 099	9,999 442	0,069	0,301 376	9,997 207	0,107	0,301 870	9,993 161
0,032	0,301 104	9,999 405	0,070	0,301 387	9,997 124	0,108	0,301 886	9,993 028
0,033	0,301 109	9,999 367	0,071	0,301 397	9,997 041	0,109	0,301 902	9,992 894
0,034	0,301 114	9,999 328	0,072	0,301 408	9,996 956	0,110	0,301 918	9,992 758
0,035	0,301 119	9,999 288	0,073	0,301 419	9,996 869	0,111	0,301 934	9,992 622
0,036	0,301 124	9,999 247	0,074	0,301 429	9,996 782	0,112	0,301 951	9,992 484
0,037	0,301 129	9,999 204	0,075	0,301 440	9,996 693	0,113	0,301 968	9,992 344

ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η
0,114	0,301 985	9,992 204	0,162	0,303 991	9,983 641	0,210	0,304 402	9,970 964
0,115	0,302 002	9,992 061	0,163	0,303 016	9,983 422	0,211	0,304 436	9,970 646
0,116	0,302 019	9,991 917	0,164	0,303 041	9,983 202	0,212	0,304 470	9,970 326
0,117	0,302 037	9,991 772	0,165	0,303 066	9,982 980	0,213	0,304 505	9,970 004
0,118	0,302 054	9,991 625	0,166	0,303 092	9,982 756	0,214	0,304 539	9,969 678
0,119	0,302 072	9,991 477	0,167	0,303 118	9,982 530	0,215	0,304 574	9,969 351
0,120	0,302 090	9,991 327	0,168	0,303 144	9,982 302	0,216	0,304 609	9,969 021
0,121	0,302 108	9,991 176	0,169	0,303 171	9,982 072	0,217	0,304 645	9,968 688
0,122	0,302 126	9,991 023	0,170	0,303 197	9,981 841	0,218	0,304 680	9,968 353
0,123	0,302 144	9,990 868	0,171	0,303 223	9,981 608	0,219	0,304 716	9,968 015
0,124	0,302 163	9,990 713	0,172	0,303 250	9,981 374	0,220	0,304 752	9,967 675
0,125	0,302 181	9,990 556	0,173	0,303 276	9,981 137	0,221	0,304 788	9,967 333
0,126	0,302 200	9,990 397	0,174	0,303 303	9,980 899	0,222	0,304 825	9,966 990
0,127	0,302 219	9,990 237	0,175	0,303 330	9,980 658	0,223	0,304 861	9,966 643
0,128	0,302 238	9,990 075	0,176	0,303 358	9,980 416	0,224	0,304 898	9,966 293
0,129	0,302 258	9,989 911	0,177	0,303 385	9,980 171	0,225	0,304 935	9,965 940
0,130	0,302 277	9,989 746	0,178	0,303 413	9,979 925	0,226	0,304 971	9,965 585
0,131	0,302 297	9,989 580	0,179	0,303 441	9,979 676	0,227	0,305 009	9,965 227
0,132	0,302 317	9,989 413	0,180	0,303 469	9,979 426	0,228	0,305 047	9,964 866
0,133	0,302 337	9,989 244	0,181	0,303 497	9,979 175	0,229	0,305 085	9,964 502
0,134	0,302 357	9,989 074	0,182	0,303 526	9,978 923	0,230	0,305 123	9,964 136
0,135	0,302 377	9,988 902	0,183	0,303 554	9,978 668	0,231	0,305 161	9,963 768
0,136	0,302 398	9,988 728	0,184	0,303 583	9,978 411	0,232	0,305 200	9,963 399
0,137	0,302 419	9,988 553	0,185	0,303 612	9,978 152	0,233	0,305 239	9,963 026
0,138	0,302 440	9,988 376	0,186	0,303 642	9,977 891	0,234	0,305 278	9,962 649
0,139	0,302 460	9,988 197	0,187	0,303 671	9,977 627	0,235	0,305 317	9,962 270
0,140	0,302 482	9,988 017	0,188	0,303 701	9,977 362	0,236	0,305 356	9,961 888
0,141	0,302 503	9,987 836	0,189	0,303 731	9,977 095	0,237	0,305 396	9,961 502
0,142	0,302 525	9,987 653	0,190	0,303 761	9,976 825	0,238	0,305 436	9,961 113
0,143	0,302 546	9,987 468	0,191	0,303 791	9,976 553	0,239	0,305 476	9,960 722
0,144	0,302 568	9,987 281	0,192	0,303 821	9,976 279	0,240	0,305 516	9,960 327
0,145	0,302 590	9,987 093	0,193	0,303 852	9,976 003	0,241	0,305 557	9,959 930
0,146	0,302 612	9,986 903	0,194	0,303 882	9,975 725	0,242	0,305 598	9,959 531
0,147	0,302 635	9,986 712	0,195	0,303 913	9,975 444	0,243	0,305 639	9,959 128
0,148	0,302 657	9,986 519	0,196	0,303 944	9,975 162	0,244	0,305 680	9,958 722
0,149	0,302 680	9,986 324	0,197	0,303 976	9,974 877	0,245	0,305 721	9,958 312
0,150	0,302 703	9,986 127	0,198	0,304 007	9,974 589	0,246	0,305 763	9,957 899
0,151	0,302 726	9,985 929	0,199	0,304 039	9,974 300	0,247	0,305 805	9,957 483
0,152	0,302 749	9,985 730	0,200	0,304 071	9,974 008	0,248	0,305 847	9,957 063
0,153	0,302 772	9,985 529	0,201	0,304 103	9,973 714	0,249	0,305 889	9,956 639
0,154	0,302 795	9,985 326	0,202	0,304 135	9,973 418	0,250	0,305 931	9,956 213
0,155	0,302 819	9,985 122	0,203	0,304 168	9,973 120	0,251	0,305 973	9,955 784
0,156	0,302 843	9,984 915	0,204	0,304 201	9,972 819	0,252	0,306 016	9,955 353
0,157	0,302 868	9,984 707	0,205	0,304 234	9,972 515	0,253	0,306 059	9,954 920
0,158	0,302 892	9,984 497	0,206	0,304 267	9,972 210	0,254	0,306 102	9,954 482
0,159	0,302 916	9,984 285	0,207	0,304 300	9,971 902	0,255	0,306 146	9,954 039
0,160	0,302 941	9,984 072	0,208	0,304 334	9,971 592	0,256	0,306 190	9,953 593
0,161	0,302 966	9,983 857	0,209	0,304 368	9,971 279	0,257	0,306 234	9,953 145

ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η
0,258	0,306 279	9,952 693	0,306	0,308 723	9,926 086	0,354	0,311 904	9,885 168
0,259	0,306 324	9,952 235	0,307	0,308 781	9,925 408	0,355	0,311 980	9,884 082
0,260	0,306 369	9,951 776	0,308	0,308 839	9,924 724	0,356	0,312 057	9,882 983
0,261	0,306 414	9,951 312	0,309	0,308 898	9,924 033	0,357	0,312 134	9,881 871
0,262	0,306 459	9,950 847	0,310	0,308 957	9,923 337	0,358	0,312 211	9,880 746
0,263	0,306 505	9.950 377	0,311	0,309 016	9,922 638	0,359	0,312 289	9,879 609
0,264	0,306 551	9,949 902	0,312	0,309 075	9,921 933	0,360	0,312 367	9,878 459
0,265	0,306 597	9,949 423	0,313	0,309 134	9,921 220	0,361	0,312 446	9,877 301
0,266	0,306 643	9,948 942	0,314	0,309 194	9,920 500	0,362	0,312 525	9,876 127
0,267	0,306 690	9,948 455	0,315	0,309 254	9,919 773	0,363	0,312 605	9,874 938
0,268	0,306 737	9,947 965	0,316	0,309 314	9,919 039	0,364	0,312 685	9,873 732
0,269	0,306 785	9,947 469	0,317	0,309 375	9,918 298	0,365	0,312 765	9,872 511
0,270	0,306 832	9,946 973	0,318	0,309 436	9,917 550	0,366	0,312 846	9,871 274
0,271	0,306 880	9,946 472	0,319	0,309 498	9,916 794	0,367	0,312 927	9,870 022
0,272	0,306 927	9,945 970	0,320	0,309 560	9,916 032	0,368	0,313 008	9,868 754
0,273	0,306 975	9,945 462	0,321	0,309 623	9,915 268	0,369	0,313 090	9,867 470
0,274	0,307 024	9,944 949	0,322	0,309 686	9,914 496	0,370	0,313 172	9,866 170
0,275	0,307 074	9,944 431	0,323	0,309 749	9,913 716	0,371	0,313 256	9,864 860
0,276	0,307 124	9,943 910	0,324	0,309 813	9,912 927	0,372	0,313 341	9,863 531
0,277	0,307 173	9,943 383	0,325	0,309 878	9,912 130	0,373	0,313 427	9,862 184
0,278	0,307 223	9,942 852	0,326	0,309 942	9,911 325	0,374	0,313 512	9,860 818
0,279	0,307 272	9,942 315	0,327	0,310 007	9,910 512	0,375	0,313 598	9,859 432
0,280	0,307 322	9,941 776	0,328	0,310 073	9,909 690	0,376	0,313 684	9,858 029
0,281	0,307 373	9,941 235	0,329	0,310 139	9,908 860	0,377	0,313 771	9,856 606
0,282	0,307 424	9,940 691	0,330	0,310 205	9,908 022	0,378	0,313 857	9,855 164
0,283	0,307 475	9,940 140	0,331	0,310 271	9,907 180	0,379	0,313 945	9,853 704
0,284	0,307 525	9,939 584	0,332	0,310 337	9,906 331	0,380	0,314 032	9,852 225
0,285	0,307 576	9,939 023	0,333	0,310 404	9,905 472	0,381	0,314 122	9,850 723
0,286	0,307 626	9,938 457	0,334	0,310 471	9,904 602	0,382	0,314 213	9,849 198
0,287	0,307 678	9,937 886	0,335	0,310 539	9,903 724	0,383	0,314 304	9,847 653
0,288	0,307 730	9,937 310	0,336	0,310 607	9,902 835	0,384	0,314 395	9,846 085
0,289	0,307 783	9,936 727	0,337	0,310 676	9,901 937	0,385	0,314 487	9,844 495
0,290	0,307 836	9,936 141	0,338	0,310 745	9,901 029	0,386	0,314 579	9,842 883
0,291	0,307 889	9,935 554	0,339	0,310 814	9,900 113	0,387	0,314 671	9,841 250
0,292	0,307 943	9,934 962	0,340	0,310 884	9,899 185	0,388	0,314 763	9,839 594
0,293	0,307 996	9,934 364	0,341	0,310 954	9,898 249	0,389	0,314 856	9,837 917
0,294	0,308 051	9,933 760	0,342	0,311 025	9,897 302	0,390	0,314 951	9,836 219
0,295	0,308 105	9,933 150	0,343	0,311 095	9,896 347	0,391	0,315 046	9,834 466
0,296	0,308 160	9,932 535	0,344	0,311 167	9,895 381	0,392	0,315 144	9,832 691
0,297	0,308 215	9,931 914	0,345	0.311 238	9,894 407	0,393	0,315 241	9,830 889
0,298	0,308 271	9,931 287	0,346	0,311 310	9,893 422	0,394	0,315 339	9,829 063
0,299	0,308 327	9,930 653	0,347	0,311 383	9.892 428	0,395	0,315 437	9,827 212
0,300	0,308 383	9,930 015	0,348	0,311 455	9,891 424	0,396	0,315 536	9,825 336
0,301	0,308 439	9,929 376	0,349	0,311 528	9,890 411	0,397	0,315 635	9,823 435
0,302	0,308 495	9,928 731	0,350	0,311 602	9,889 388	0,398	0,315 733	9,821 509
0,303	0,308 551	9,928 079	0,351	0,311 677	9,888 352	0,399	0,315 833	9,819 559
0,304	0,308 608	9,927 421	0,352	0,311 753	9,887 304	0,400	0,315 934	9,817 582
0,305	0,308 666	9,926 756	0,353	0,311 828	9,886 242			

Die vorstehende Tafel (in welcher die sechste Decimalstelle der Rechnung noch mit aufgeführt ist, um die fünfte mehr zu sichern, und welche, in Folge einer durch Herrn Professor Klinkerfues veranlassten Revision, hier in einem correcteren Abdrucke erscheint, als im zehnten Bande der Abhandlungen etc.), dient zur Bestimmung der Sehne $\varkappa$ vermittelst der Lambert'schen Gleichung in folgender Weise. Man setze

$$\frac{k(t'-t)}{(r'+r)^{\frac{3}{2}}} = \zeta,$$

so giebt die Tafel $\log \mu$ und es ist

$$\varkappa = (r+r')\,\mu\,\zeta.$$

Die zweite Columne enthält den $\log \frac{\triangle}{\text{Sector}}$.

TAFEL

für $\frac{\triangle}{\text{Sector}}$ in der Parabel nach der Gauss'schen Reihenentwicklung, Seite 60.

β	$\log \frac{\triangle}{\text{Sector}}$	β	$\log \frac{\triangle}{\text{Sector}}$	β	$\log \frac{\triangle}{\text{Sector}}$
0,000	0,000 00	0,010	9,994 05	0,020	9,987 76
0,001	9,999 42	0,011	9,993 44	0,021	9,987 11
0,002	9,998 84	0,012	9,992 82	0,022	9,986 46
0,003	9,998 25	0,013	9,992 20	0,023	9,985 80
0,004	9,997 66	0,014	9,991 58	0,024	9,985 14
0,005	9,997 07	0,015	9,990 95	0,025	9,984 47
0,006	9,996 47	0,016	9,990 32	0,026	9,983 80
0,007	9,995 87	0,017	9,989 68	0,027	9,983 13
0,008	9,995 26	0,018	9,989 05	0,028	9,982 45
0,009	9,994 66	0,019	9,988 40	0,029	9,981 77
0,010	9,994 05	0,020	9,987 76	0,030	9,981 09

Auch diese Tafel ist einer nochmaligen Revision unterzogen. Während bei der Reihenentwicklung $\beta = \frac{4k^2(t'-t)^2}{(r'+r)^3}$ ist, ist hier $\beta = \frac{k^2(t'-t)^2}{(r'+r)^3}$ also $= \zeta^2$ und man kann daher leicht diese kleine, nach der Reihenentwicklung berechnete Tafel mit der vorangehenden grösseren controliren.