VII.

Einige Bemerkungen zur Vereinfachung der Rechnung für die geocentrischen Oerter der Planeten. Von Dr. Gauss in Braunschweig.

(Vergl. Art 53—57 der Theoria motus.)

Seit der Erfindung der Pendeluhren beziehen sich alle unsere Beobachtungen der Fixsterne, Planeten und Cometen nicht auf ihre Lage gegen die Ecliptik, sondern unmittelbar auf ihre Lage gegen den Aequator. In unsern neuesten und besten Sternverzeichnissen und Sternkarten sind gleichfalls nicht Länge und Breite, sondern Rectascension und Declination zum Grunde gelegt. Man hat daher sehr häufig Veranlassung, für Planeten und Cometen ihre geocentrischen Oerter in Beziehung auf den Aequator aus ihren heliocentrischen Oertern in ihrer Bahn zu berechnen; und man würde diese Veranlassung noch häufiger haben, wenn man sich entschlösse, in den astronomischen Ephemeriden anstatt der wenig nutzenden Längen und Breiten der Planeten durchgängig die in jeder praktischen Hinsicht viel brauchbarern geraden Aufsteigungen und Abweichungen anzusetzen. Dies hat der vortreffliche Römer (in einem Briefe an Leibnitz. Horrebowii Opera T. II, p. 142) bereits vor hundert Jahren angerathen und besonders wird es ganz unentbehrlich für die beiden neuesten Planeten, die so schwer zu beobachten, und nur vermittelst sehr detaillirter Himmelskarten aus den sie umgebenden kleinen Fixsternen herauszufinden sind. Eben so häufig würde die allgemeinere Befolgung eines andern Vorschlages zu jener Rechnung Gelegenheit geben, nämlich bei Vergleichung des beobachteten Orts eines Planeten oder Cometen mit dem berechneten unmittelbar die beobachtete gerade Aufsteigung und Abweichung zum Grunde zu legen, und nicht erst, wie gewöhnlich geschieht, aus diesen eine sogenannte beobachtete Länge und Breite abzuleiten. Die mit diesem Verfahren verbundenen Vortheile sind bereits von einem competenten Richter im V. Bande der M. C. S. 594 erwähnt worden.

Aus diesem Gesichtspunkte hat man die geocentrische Länge und Breite des Planeten nur als Mittelgrössen anzusehen, um seine Lage gegen den Aequator zu finden. Es wird daher obigen Vorschlägen vielleicht zu einer Empfehlung mehr dienen, dass man dieser Zwischenrechnung, ja selbst der Reduction des heliocentrischen Orts in der Bahn auf den heliocentrischen Ort in Beziehung auf die Ecliptik ganz überhoben sein, und durch sehr einfache und geschmeidige Formeln, welche in gegenwärtigem Aufsatze entwickelt werden sollen, aus jenem die geocentrische Rectascension und Declination unmittelbar ableiten kann. Zu diesen Vortheilen kann man noch die grosse Leichtigkeit hinzufügen, womit sich bei diesem Verfahren die Parallaxe auch in dem Falle mit in Rechnung bringen lässt, wenn der Planet sich ausser dem Meridiane des Beobachtungsorts befindet, welches zwar seltener nöthig, dann aber auch bei andern Methoden ungleich beschwerlicher ist.

Durch den Mittelpunkt der Sonne lege man drei auf einander senkrechte Ebenen, die eine parallel mit dem Erdaequator, die zweite durch die Punkte der Nachtgleichen, also die dritte durch die Punkte der Sonnenwenden. Es heissen die senkrechten Abstände des Mittelpunkts der Erde von diesen drei Ebenen respective Z, Y, X, und die Abstände eines Planeten von eben denselben z, y, x. Diese Abstände sollen als positiv angenommen werden bei der ersten Ebene auf der Seite, wo der Nordpol liegt, bei der zweiten auf der Seite der Sommersonnenwende, bei der dritten auf der Seite der Frühlings-Nachtgleiche. Es werden demnach $z - Z$, $y - Y$, $x - X$ die auf ähnliche Art genommenen senkrechten Abstände des Planeten von dreien, den obigen parallel durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebenen sein. Bezeichnet man also die geocentrische gerade Aufsteigung des Planeten durch α, seine Abweichung durch δ, den Abstand von der Erde durch Δ, so wird

$$x - X = \varDelta \cos\delta \cos\alpha; \qquad y - Y = \varDelta \cos\delta \sin\alpha; \qquad z - Z = \varDelta \sin\delta.$$

Man findet folglich α durch die Formel $\tang\alpha = \frac{y-Y}{x-Z}$, wo das positive oder negative Zeichen des Zählers entscheiden muss, ob α in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen ist. Sodann wird $\varDelta \cos\delta = \frac{x-X}{\cos\alpha} = \frac{y-Y}{\sin\alpha}$, und $\tang\delta = \frac{z-Z}{\varDelta\cos\delta}$.

Auf diese Weise erhält man also die Rectascension und Declination des Planeten aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen. Verlangt man dieselben, wie sie aus einem Punkte auf der Oberfläche der Erde erscheinen, so ist in obigen Formeln weiter keine Aenderung nöthig, als dass man statt der Coordinaten des Mittelpunkts X, Y, Z, die Abstände des Beobachtungsortes von den drei Fundamentalebenen gebrauchen muss. Ist der Halbmesser der Erde $= \varrho$*), die Polhöhe des Beobachtungsorts $= \varphi$, und die Sternzeit, die derselbe im Augenblicke der Beobachtung zählt, im Bogen, oder die gerade Aufsteigung des culminirenden Punkts des Aequators $= \vartheta$: so werden jene Abstände, wie man leicht übersehen wird:

$$X + \varrho\cos\varphi\cos\vartheta; \qquad Y + \varrho\cos\varphi\sin\vartheta; \qquad Z + \varrho\sin\varphi.$$

Hierbei ist die Erde als eine Kugel angenommen. Fände man es nöthig, auch auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen (welcher Fall bei Cometen eintreten könnte, die der Erde sehr nahe kämen), so dürfte man nur für ϱ die Entfernung des Beobachtungsorts vom Mittelpunkte der Erde, und für φ seine sogenannte verbesserte Polhöhe setzen, die nach bekannten Regeln bestimmt werden.

Man sieht jetzt also, dass es lediglich darauf ankommt, eine bequeme Methode zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z, x, y, z aufzusuchen. In dieser Absicht sei um die Sonne eine Kugelfläche mit unbestimmtem Halbmesser beschrieben; auf derselben bezeichne P den Nordpol der Ecliptik, p den Nordpol der Ebene der Planetenbahn; K den Ort der Erde, k den heliocentrischen Ort des Planeten; endlich $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ diejenigen Pole der drei Fundamentalebenen, die auf der Seite liegen, wo die Abstände x, y, z positiv genommen werden: also $\mathfrak{Z}$ den Nordpol des Aequators, $\mathfrak{X}$ den Punkt der Frühlings-Nachtgleiche, $\mathfrak{Y}$ den Punkt des Aequators, der 90^0 Rectascension hat (eine Figur wird sich hiernach jeder, der es nöthig findet, leicht selbst entwerfen können). Setzen wir nun den Abstand der Erde von der Sonne $= R$, so wird offenbar

$$X = R\cos\mathfrak{X}K; \qquad Y = R\cos\mathfrak{Y}K; \qquad Z = R\cos\mathfrak{Z}K.$$

Folglich, da in dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{X}PK$ die Seite $PK = 90^0$, also $\cos\mathfrak{X}K = \sin\mathfrak{X}P\cos\mathfrak{X}PK$ ist,

$$X = R\sin\mathfrak{X}P\cos\mathfrak{X}PK, \text{ und ebenso } Y = R\sin\mathfrak{Y}P\cos\mathfrak{Y}PK \text{ und}$$
$$Z = R\sin\mathfrak{Z}P\cos\mathfrak{Z}PK$$

Ganz auf ähnliche Weise werden die Coordinaten des Planeten, wenn wir dessen Abstand von der Sonne durch r bezeichnen

$$x = r\sin\mathfrak{X}p\cos\mathfrak{X}pk; \qquad y = r\sin\mathfrak{Y}p\cos\mathfrak{Y}pk; \qquad z = r\sin\mathfrak{Z}p\cos\mathfrak{Z}pk.$$

Wir bemerken hier ein für allemal, dass wir den sphärischen Winkel $\mathfrak{X}PK$ so verstanden wissen wollen, wie der Schenkel PK auf den Schenkel $P\mathfrak{X}$ nach der Ordnung der Zeichen folgt, so dass also derselbe mit $KP\mathfrak{X}$ nicht gleichbedeutend sein soll, sondern beide einander zu 360^0 ergänzen. Eben so soll jeder andere sphärische Winkel zu verstehen sein. Durch eine solche nähere Bestimmung gewinnen wir den Vortheil, dass die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sich ohne weiteres auch auf Dreiecke mit Winkeln über 180^0 ausdehnen lassen, und weichen so der sonst Statt findenden Nothwendigkeit aus, mehre einzelne Fälle unterscheiden zu müssen. Uebrigens werden Winkel, deren Unterschied 360^0 oder ein Vielfaches davon beträgt, jederzeit als gleichbedeutend angesehen werden.

*) Dieser ist also dem Sinus der mittlern Horizontalparallaxe der Sonne gleich, wenn die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit angenommen wird.

Wir nehmen nun zuvörderst die Coordinaten X, Y, Z vor, und setzen die Schiefe der Ecliptik $= \varepsilon$, die heliocentrische Länge der Erde $= \lambda$ ($=$ geocentrische Länge der Sonne $+ 180^0$). In obigen Formeln wird also $\mathfrak{X}P = 90^0$, $\mathfrak{Y}P = 90^0 + \varepsilon$, $\mathfrak{Z}P = \varepsilon$, $\mathfrak{X}PK = \lambda$, $\mathfrak{Y}PK = \mathfrak{Z}PK = \lambda - 90^0$, folglich

$$X = R\cos\lambda; \qquad Y = R\sin\lambda\cos\varepsilon; \qquad Z = R\sin\lambda\sin\varepsilon.$$

Für den Planeten setzen wir Kürze halber $\mathfrak{X}p = a$, $\mathfrak{Y}p = b$, $\mathfrak{Z}p = c$, seine Entfernung in der Bahn vom aufsteigenden Knoten auf der Ecliptik $= t$, und die Winkel $\mathfrak{X}pP$, $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ respective $= A$, B, C. Man wird leicht übersehen, dass $Ppk = t - 90^0$ (oder nach obiger Anmerkung $= t + 270^0$), also $\mathfrak{X}pk = A + t - 90^0$, $\mathfrak{Y}pk = B + t - 90^0$, $\mathfrak{Z}pk = C + t - 90^0$. Es wird demnach

$$x = r\sin a\sin(A + t); \qquad y = r\sin b\sin(B + t); \qquad z = r\sin c\sin(C + t).$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Grössen a, A u. s. w., die nur von der Lage der Bahn des Planeten, nicht von seinem jedesmaligen Orte in derselben abhängig sind, aus der Neigung der Ebene dieser Bahn und der Länge des aufsteigenden Knotens abzuleiten; wir bezeichnen jene mit i, diese mit n. Die Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{X}pP$ giebt uns folgende drei Gleichungen:

$$\operatorname{cotang}\mathfrak{X}pP = \frac{\sin pP\operatorname{cotang}\mathfrak{X}P - \cos pP\cos pP\mathfrak{X}}{\sin pP\mathfrak{X}}$$

$$\cos\mathfrak{X}p = \cos p\mathrm{P}\cos\mathfrak{X}P + \sin pP\sin\mathfrak{X}P\cos pP\mathfrak{X}$$

$$\sin\mathfrak{X}p = \frac{\sin\mathfrak{X}P\sin pP\mathfrak{X}}{\sin\mathfrak{X}pP}$$

Ebenso geben die Dreiecke $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ jedes drei ähnliche Gleichungen, welche hier herzusetzen unnöthig ist, da man, um sie zu erhalten, in den drei obigen nur $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ zu vertauschen hat. Nun ist $pP = i$, $pP\mathfrak{X} = 90^0 - n$, $pP\mathfrak{Y} = pP\mathfrak{Z} = 180^0 - n$. Mit diesen und den übrigen Substitutionen werden unsere neun Gleichungen diese:

$$\operatorname{cotang} A = -\cos i\operatorname{tang} n$$

$$\cos a = \sin i\sin n; \qquad \sin a = \frac{\cos n}{\sin A}$$

$$\operatorname{cotang} B = \frac{-\sin i\operatorname{tang}\varepsilon + \cos i\cos n}{\sin n}$$

$$\cos b = -\cos i\sin\varepsilon - \sin i\cos\varepsilon\cos n; \qquad \sin b = \frac{\cos\varepsilon\sin n}{\sin B}$$

$$\operatorname{cotang} C = \frac{\sin i\operatorname{cotang}\varepsilon + \cos i\cos n}{\sin n}$$

$$\cos c = \cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon\cos n; \qquad \sin c = \frac{\sin\varepsilon\sin n}{\sin C}$$

Die Unbestimmtheit, ob man A, B und C in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen habe, wird man so entscheiden, dass die Sinus von a, b und c positiv werden. Man nimmt also A in den beiden ersten Quadranten, wenn $\cos n$ positiv, B und C in eben denselben, wenn $\sin n$ positiv ist; in den entgegengesetzten Fällen aber in den beiden letzten Quadranten.

Die vierte, fünfte, siebente und achte dieser Gleichungen lassen sich durch die Einführung von Hülfswinkeln noch bequemer einrichten. Dies kann auf eine doppelte Weise geschehen:

Erstlich wenn man $\frac{\operatorname{tang} i}{\cos n} = \operatorname{tang} E$ und $\operatorname{tang} i \cos n = \operatorname{tang} F$ setzt, so wird

$$\operatorname{cotang} B = \frac{\sin i \cos(E+\varepsilon)}{\sin n \cos\varepsilon \sin E} = \frac{\cos i \cos(E+\varepsilon)}{\operatorname{tang} n \cos\varepsilon \cos E}$$

$$\cos b = -\frac{\cos i \sin(F+\varepsilon)}{\cos F} = -\frac{\sin i \cos n \sin(F+\varepsilon)}{\sin F}$$

$$\operatorname{cotang} C = \frac{\sin i \sin(E+\varepsilon)}{\sin n \sin\varepsilon \sin E} = \frac{\cos i \sin(E+\varepsilon)}{\operatorname{tang} n \sin\varepsilon \cos E}$$

$$\cos c = \frac{\cos i \cos(F+\varepsilon)}{\cos F} = \frac{\sin i \cos n \cos(F+\varepsilon)}{\sin F}$$

Zweitens, macht man $\frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{\cos n} = \operatorname{tang} G$, und $\operatorname{tang}\varepsilon \cos n = \operatorname{tang} H$, so wird:

$$\operatorname{cotang} B = \frac{\cos(G+i)}{\operatorname{tang} n \cos G} = \frac{\operatorname{tang}\varepsilon \cos(G+i)}{\sin i \sin G}$$

$$\cos b = -\frac{\sin\varepsilon \sin(G+i)}{\sin G} = -\frac{\cos n \cos\varepsilon \sin(G+i)}{\cos G}$$

$$\operatorname{cotang} C = \frac{\sin(H+i)}{\sin n \operatorname{tang}\varepsilon \cos H} = \frac{\sin(H+i)}{\operatorname{tang} n \sin H}$$

$$\cos c = \frac{\cos\varepsilon \cos(H+i)}{\cos H} = \frac{\sin\varepsilon \cos n \cos(H+i)}{\sin H}$$

Es wird wohl der Mühe werth sein, noch einige Relationen zwischen den Grössen A, a u. s. w. zu entwickeln. Das sphärische Dreieck $\mathfrak{X}p\mathfrak{Y}$ giebt $\cos\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \cos\mathfrak{X}p \cos\mathfrak{Y}p + \sin\mathfrak{X}p \sin\mathfrak{Y}p \cos\mathfrak{X}p\mathfrak{Y}$. Allein $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = 90^0$ und $\mathfrak{X}p\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}pP - \mathfrak{Y}pP = A - B$. Also $\cos(A-B) = -\operatorname{cotang} a \operatorname{cotang} b$.

Ebenso geben die Dreiecke $\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}p\mathfrak{X}$

$$\cos(B-C) = -\operatorname{cotang} b \operatorname{cotang} c$$
$$\cos(C-A) = -\operatorname{cotang} c \operatorname{cotang} a$$

Ferner wird in dem Dreiecke $\mathfrak{X}p\mathfrak{Y}$, $\cos a = \cos p\mathfrak{Y}\mathfrak{X} \sin b$, und in dem Dreiecke $\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}$, $\sin\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}p = \sin\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z} \sin c$. Da nun $\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}p + p\mathfrak{Y}\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}\mathfrak{X} = 90^0$, so hat man $\cos a = \sin b \sin c \sin\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}$, oder da $\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z} = B - C$ ist

$$\sin(B-C) = \frac{\cos a}{\sin b \sin c}$$

Ganz auf ähnliche Art findet man

$$\sin(C-A) = \frac{\cos b}{\sin c \sin a}; \qquad \sin(A-B) = \frac{\cos c}{\sin a \sin b}$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den vorigen giebt noch

$$\operatorname{cotang}(A-B) = -\frac{\cos a \cos b}{\cos c}; \qquad \operatorname{cotang}(B-C) = -\frac{\cos b \cos c}{\cos a}$$

$$\operatorname{cotang}(C-A) = -\frac{\cos c \cos a}{\cos b}$$

$$\cos a^2 = \operatorname{cotang}(A-B) \operatorname{cotang}(C-A)$$
$$\cos b^2 = \operatorname{cotang}(B-C) \operatorname{cotang}(A-B)$$
$$\cos c^2 = \operatorname{cotang}(C-A) \operatorname{cotang}(B-C)$$

und auf ähnliche Art lassen sich die Quadrate der Sinus und Tangenten der Seiten a, b, c durch die Winkel $A-B$, $B-C$, $C-A$ darstellen.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, wollen wir einige derselben auf die Pallas anwenden, und dabei die neuesten Elemente dieses Planeten für 1803 zum Grunde legen. Wir setzen also

$$i = 34^0\,38'\,1''1; \qquad n = 172^0\,28'\,13''7$$
$$\varepsilon = 23^0\,27'\,55''8 \text{ (mittlere Schiefe nach Maskelyne für 1803).}$$

Mit diesen Elementen steht die Rechnung folgendermaassen:

log cos i	=	9,915 2958
log tang n	=	9,121 1553 n
log cotang A	=	9,036 4511
Also A	=	$263^0\ 47'\ 35''4$
log cos n	=	9,996 2390 n
log sin A	=	9,997 4467 n
log sin a	=	9,998 7923
log sin i	=	9,754 5982
log sin n	=	9,117 3944
log cos a	=	8,871 9926
Hieraus a	=	$85^0\ 43'\ 44''8$
log tang i	=	9,839 3024
log cos n	=	9,996 2390 n
log tang E	=	9,843 0634 n
log tang F	=	9,835 5414 n
Also E	=	$145^0\ 8'\ 2''4$
F	=	$145^0\ 35'\ 52''9$
$E+\varepsilon$	=	$168^0\ 35'\ 58''2$
$F+\varepsilon$	=	$169^0\ 3'\ 48''7$
log cos i	=	9,915 2958
Compl. log tang n	=	0,878 8447 n
Compl. log cos E	=	0,085 9260 n
log const.	=	0,880 0665
log cos $(E+\varepsilon)$	=	9,991 3455 n
Compl. log cos ε	=	0,837 4886
log cotang B	=	0,908 9009 n
Hieraus B	=	$172^0\ 58'\ 7''4$

log const.	=	0,880 0665
log sin $(E+\varepsilon)$	=	9,295 9318
Compl. log sin ε	=	0,399 9023
log cotang C	=	0,575 9006
C	=	$14^0\ 52'\ 12''5$
log cos ε	=	9,962 5114
log sin n	=	9,117 3944
Compl. log sin B	=	0,912 1791
log sin b	=	9,992 0849
log sin ε	=	9,600 0977
log sin n	=	9,117 3944
Compl. log sin C	=	0,590 6942
log sin c	=	9,308 1863
log cos i	=	9,915 2958
log cos F	=	9,916 5035 n
		9,998 7923 n
log sin $(F+\varepsilon)$	=	9,278 1142
log cos $(F+\varepsilon)$	=	9,992 0399 n
log cos b	=	9,276 9065
log cos C	=	9,990 8322
Also b	=	$79^0\ 5'\ 39''4$
c	=	$11^0\ 43'\ 52''8$

Wenn man nur die Sinus von a, b, c verlangt, so ist die Rechnung für ihre Cosinus nicht nöthig, und man kann also auch den Hülfswinkel F entbehren. Will man aber auch a, b, c selbst kennen, so dienen die Cosinus (wovon nachher noch ein Gebrauch vorkommt) dazu, die Zweideutigkeiten, welche die Sinus allein dabei übrig lassen, zu entscheiden. Auch geben sie dann, wenn die Sinus näher bei 1 sind, eine schärfere Bestimmung, und zugleich eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung. Zu dieser letzten Absicht ist auch noch der Umstand brauchbar, dass $\frac{\cos i}{\cos F} = \pm \sin a$ ist, wo das obere Zeichen gilt, wenn F mit A zugleich in den beiden ersten oder letzten Quadranten liegt; das untere, wenn F in einer andern Hälfte des Umfanges angenommen ist als A. (Zur Entwickelung des Grundes davon dient die Bemerkung, dass F im ersten Falle mit dem Winkel $P\mathfrak{X}p$ einerlei, im zweiten 180^0 davon verschieden ist).

Die Grössen ε, n, i sind Secularänderungen unterworfen: dasselbe wird also auch der Fall mit den davon abhängigen A, a B, b C, c sein. Sind die jährlichen Aenderungen von jenen bekannt, so können die Aenderungen von A, a u. s. w. durch leicht zu entwickelnde Differentialformeln berechnet werden, bei welchen wir uns hier nicht aufhalten wollen. Man kann auch die Werthe von A, a u. s. w. für eine entferntere Epoche von neuem berechnen, und daraus ihre jährlichen Aenderungen ableiten.

Ausserdem leiden diese Grössen wegen der Nutation noch periodische Aenderungen, die mit jedem Umlaufe der Mondsknoten wiederkehren. Da man nämlich die geocentrische Lage des Planeten gegen den wahren Aequator verlangt, so muss eigentlich für ε nicht die mittlere, sondern die wahre Schiefe der Ekliptik, und für n die Entfernung des aufsteigenden

Knotens vom wahren, nicht vom mittlern Aequinoctialpunkte genommen werden. Die hieraus entspringenden periodischen Aenderungen können nach eben den Differentialformeln wie die Secularänderungen berechnet, und in eine Tafel, deren Argument die Länge des Mondsknotens ist, gebracht werden. Wenn man eine zahlreiche Menge geocentrischer Oerter für einen nicht zu grossen Zeitraum zu berechnen hat, wird man es in Ermangelung einer solchen Tafel am bequemsten finden, für zwei Epochen zu Anfang und Ende desselben die wahren Werthe von A, a u. s. w. sogleich unmittelbar aus den wahren Werthen von ε, i, n zu berechnen, und für dazwischen liegende Zeiten sie daraus durch einfache Interpolation abzuleiten. Ein Jahr hindurch kann man ohne Bedenken diese Aenderungen als gleichförmig ansehen.

Man könnte auch die von der Nutation abhängigen periodischen Aenderungen ganz übergehen, und sich der mittlern Werthe von A, a u. s. w. bedienen: dann müsste man aber auch bei der Erde für ε die mittlere Schiefe der Ecliptik gebrauchen, und von der Länge λ die Nutation weglassen, um den Abstand vom mittlern Aequinoctium zu haben. Der Erfolg davon ist sodann, dass man die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten in Beziehung auf den mittlern Aequator erhält, woraus man dann seine Lage gegen den wahren Aequator eben so ableitet, wie man den mittlern Ort eines Fixsterns durch Anbringung der Nutation auf den scheinbaren reducirt.

Wir haben jetzt nur noch einiges über die Perturbationen hinzuzufügen. Die Störungen der Breite, von denen allein natürlich hier die Rede ist, sind bei allen ältern Planeten so unbeträchtlich, dass man sie mit Recht ganz vernachlässigen kann; bloss bei der Ceres und Pallas wird es wegen der starken Neigung der Bahnen dieser Planeten gegen die Jupitersbahn nothwendig, sie mit in Rechnung zu nehmen. Es giebt dazu einen doppelten Weg. Man kann nämlich entweder diejenigen Elemente, welche die Lage der Bahn bestimmen, die Neigung und die Länge des Knotens, als veränderlich ansehen und ihre mittlern Werthe durch periodische Gleichungen verbessern, oder auch geradezu untersuchen, wie viel der Planet aus der mittlern Ebene seiner Bahn herauszuweichen durch fremde Kräfte genöthigt sein wird. Im ersten Falle wird man jene Aenderungen auch auf die Grössen A, a u. s. w. übertragen, also diesen ausser den von der Nutation abhängenden noch andere periodische Gleichungen beifügen, deren Argumente mit denen für die Gleichungen der Neigung und der Länge des Knotens übereinkommen werden. Dieses Verfahren ist jedoch bisher nicht üblich gewesen. Bei der zweiten Methode hingegen werden die Störungstafeln die Perturbation der heliocentrischen Breite angeben, welche aber eigentlich nichts anders ist, als die heliocentrische Breite des Planeten über der mittlern Ebene seiner Bahn. Es sei dieselbe $= \beta$, gegen den Nordpol zu als positiv, gegen den Südpol zu als negativ angesehen. In dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{X}pk$ ist also die Seite pk nicht wie vorhin $= 90^0$ sondern $= 90^0 - \beta$ folglich

$$x = r\cos \mathfrak{X}k = r\big(\sin\beta\cos a + \cos\beta\sin a\sin(t + A)\big)$$

und ebenso

$$y = r\big(\sin\beta\cos b + \cos\beta\sin b\sin(t + B)\big)$$
$$z = r\big(\sin\beta\cos c + \cos\beta\sin c\sin(t + C)\big)$$

In so fern hier β höchstens nur einige Minuten betragen kann, wird man $\cos\beta = 1$ und $\sin\beta = \beta$ setzen dürfen. Hieraus erhellet, dass man wegen der Störungen zu den ohne sie gefundenen Werthen von x, y, z nur noch die Grössen $\beta r\cos a$, $\beta r\cos b$, $\beta r\cos c$ hinzuzusetzen habe, wo β in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden muss.