Anhang.

I.

Schreiben des Herrn Hofraths Gauss, Directors der Göttinger Sternwarte, an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten. (Nr. 474.) Göttingen 1843. April 1.

Um aus Elementen für eine gegebene Zeit einen Ort zu berechnen, brauche ich zur Berechnung der Anomalie gern die Burckhardt'sche Tafel, die aber nur bis $163^0 45'$ geht, und daher für den gegenwärtigen Stand des Cometen nach Herrn Galle's Elementen unzureichend wird. Barker's Tafel reicht zwar überall aus, wird aber bei grossen Anomalien wegen des beschwerlichen Interpolirens sehr unbequem. In solchen Fällen pflege ich ein besonderes Verfahren anzuwenden, dessen Mittheilung Ihnen vielleicht angenehm sein wird. Ist M die Zahl mit der (oder für grössere Werthe mit deren Logarithmen) man in die Barker'sche Tafel eingehen müsste, also $M = \frac{\text{Zwischenzeit}}{nq^{\frac{3}{2}}}$, wo $\log n = 0{,}039\,8723$, so setze ich $\log \frac{MM}{16875} = 3P$, und suche in meiner kleinen Logarithmentafel, A und B in der dortigen Bedeutung genommen, der Gleichung $3A + 2B = 3P$ Genüge zu leisten, was immer, wenn P gross ist, sehr schnell bewirkt wird. Ist dann a die zum Logarithmen A gehörige Zahl, so wird, die Anomalie $= v$ gesetzt,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{(3a)} \quad \text{oder} \quad \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2}(A + \log 3).$$

Auch der Logarithme des radius vector wird dann äusserst bequem berechnet, indem man mit $A + \log 3$ wieder in die erste Columne eingeht, oder $A + \log 3 = A^*$ und die dazu gehörige Grösse in der zweiten Columne $= B^*$ folgt, wodurch sogleich der Logarithme des radius vector $= A^* + B^* + \log q$ wird.

Die indirecte Auflösung jener Gleichung geschieht, wenigstens für die ersten Versuche, etwas bequemer und fast à vue in der Form $C = P + \frac{1}{3}B$; man kann zuerst P in der dritten Columne aufsuchen, oder $P = C'$ und die dazu gehörige Grösse in der zweiten Columne $= B'$ setzen, dann $P + \frac{1}{3}B' = C''$ und dazu aus der Tafel die Grösse der zweiten Columne $= B''$, dann (wo nöthig) $P + \frac{1}{3}B'' = C'''$ und dazu gehörig B''' nehmen u. s. w., welche Rechnung sehr schnell zum Stillstand kommt. Will man sich mit der Genauigkeit, welche fünfziffrige Logarithmen geben, nicht begnügen, so kann man die Matthiessen'sche Tafel (welche ich sonst wegen der unzeitigen Oekonomie, womit sie ganz unnöthigerweise gedruckt ist, nicht gern gebrauche) hier mit Vortheil zu Hülfe nehmen, was ich aber lieber erst dann thue, wenn ich durch die kleinere Tafel die beiden Stellen, zwischen welchen der Definitivwerth von A fällt, schon bestimmt habe, und dann wende ich lieber die Gleichung in ihrer ursprünglichen Form $3A + 2B = 3P$ an.

Soll z. B. die Anomalie für Februar 48,333 33, oder für die Zeit nach der Sonnennähe $20^{\mathrm{T}}876\,63$ bestimmt werden, so ist nach Galle's Elementen

$q^{\frac{3}{2}}$ 7,080 9490
$n\sqrt{}$ 16875 .... 2,153 4942
Const. Logarithme = 9,234 4432

20,876 63 .... 1,319 6604
9,234 4432
2,085 2172
Also $3P$ = 4,170 4344
P = 1,390 1448

Mit den kleinen Tafeln findet sich daraus

$B' = 0{,}018\,06$ $C'' = 1{,}396\,16$
$B'' = 0{,}017\,81$ $C''' = 1{,}396\,08$

womit die Rechnung schon steht, und $A = 1{,}378\,27$ wird. Matthiessen's Tafel giebt genauer $A = 1{,}378\,2739$. Die weitere Rechnung wird dann

A = 1,378 2739
3 .... 0,477 1213
1,855 3952
0,927 6976 = log tang 83° 15′ 49″53
und die wahre Anomalie = 166 31 39, 06
Ferner gehört zu A^* = 1,855 3952
B^* = 0,006 0170
q 8,053 9660
Logarithme des radius vector = 9,915 3782

Man sieht übrigens, dass diese Methode nichts weiter ist, als eine indirecte Auflösung der bekannten cubischen Gleichung zwischen der Tangente der halben Anomalie und der Sectorfläche und zugleich, dass meine, oder für schärfere Rechnung die Matthiessen'sche Logarithmentafel auf ganz ähnliche Weise zu einer sehr bequemen Auffindung aller reellen Wurzeln jeder algebraischen Gleichung, die nicht mehr als drei effective Glieder hat, benutzt werden kann, wie ich in Beziehung auf die quadratische Gleichung unlängst bei der letzten Ausgabe der Vega'schen Logarithmentafel schon gezeigt habe.

II.

Tafel aus dem ersten Bande der Pariser Annalen.

Statt der sehr umfangreichen Barker'schen Tafel und der dazu erforderlichen Hülfstafel, wenn v sich 180° nähert, ist hier die im ersten Bande der Annalen der kaiserlichen Sternwarte zu Paris befindliche Tafel zum Abdrucke gebracht.

Bezeichnet $q = \frac{1}{2}p$ = den Perihelabstand in der Parabel, v = die wahre Anomalie, t = die Zeit vor oder seit dem Periheldurchgange, μ = die (in der Regel = 0 zu setzende) Masse des in der Parabel sich bewegenden Himmelskörpers, $\log k = 8{,}085\,0664\,436$, so ist $T = t\sqrt{\frac{1+\mu}{q^3}}$, und man hat $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^3 = kT$; $T = \frac{1}{3k}(3\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \operatorname{tang}\frac{1}{2}v^3)$. Setzt man den Werth für k in diese letzte Gleichung, so wird

$$T = 27{,}403\,89544\,(3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3) = 1{,}0961\,55816\,(75\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v + 25\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3),$$

und daher, wenn man $k' = 0{,}9122\,79061$ setzt, $75\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + 25\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^3 = k'T$; wobei $\log k' = 9{,}9601\,277069$.

Die Barker'sche Tafel giebt $k'T$ für das Argument v. Die mittlere tägliche Bewegung oder die in der Barker'schen Tafel mit M bezeichnete Grösse wird durch die Pariser Tafel für einen beliebigen Werth von v erhalten, wenn man den entsprechenden Werth von T mit k'

multiplicirt. Die Tafel*) giebt v, indem die Werthe für T als Argument dienen, und die wahre Anomalie, welche diesem Argumente entspricht, wird gefunden durch die Formel

$$v = v_0 + A_1 (T-T_0) + A_2 (T-T_0)^2 + A_3 (T-T_0)^3 + \text{etc.}$$

Hier ist T_0 ein specieller Werth, welcher sich unter den Argumenten der Tafel findet, und welchen man so wählt, dass die Differenz $T-T_0$ möglichst klein wird. Die für A_1, A_2, A_3 geltenden Vorzeichen sind den Logarithmen dieser Grössen beigefügt.

Zur Erläuterung wählen wir dasselbe Beispiel, welches Herr Professor Encke in seiner Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung „Ueber die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen" pag. 241 gegeben hat. Für den grossen Cometen von 1843 hat man nach Santini's Parabel $\log q = 7{,}902\,7200$, woraus $\log m = 3{,}106\,0477$. Man sucht die wahre Anomalie für März 20. 8^h mittlere Berliner Zeit oder $7^h\,15^m\,46^s$ Pariser Zeit. Hier ist also, da die Zeit des Perihels auf Februar 27. $6^h\,19^m\,59^s$ mittlere Pariser Zeit fällt,

$$t = 21{,}038\,74, \quad \text{folglich } \log M = \log mt = 4{,}429\,0674.$$

Geht man hiermit in die Barker'sche Tafel ein, so findet man mit Rücksicht auf zweite Differenzen $\qquad v = 168^0\,44'\,24''\,23$

Benutzt man die Hülfstafel, so wird

$$\log \sin w = \tfrac{1}{3}(\log 200 - \log M) = 2{,}290\,6542$$

$$\begin{aligned} \text{woraus } w &= 168^0\,44'\,20''\,44 \\ +\delta &= \qquad\quad 3{,}\,78 \\ \hline v &= 168\;\;44\;\;24{,}\,22 \end{aligned}$$

Nach der hier mitgetheilten Tafel wird mit $t = 21{,}038\,74$ und $\log q = 7{,}902\,7200$, $T = 29440{,}13$; die Differenz von $T_0 = 30000$ ist also $T-T_0 = -559{,}87$

$$\begin{aligned} \text{mithin } v_0 &= 168^0\,48'\,41''\,17 \\ A_1 (T-T_0) &= \quad -\;4\;\;13\;\;71 \\ A_2 (T-T_0)^2 &= \quad -\qquad 3\;\;19 \\ A_3 (T-T_0)^3 &= \quad -\qquad 0\;\;05 \\ \hline v &= 168^0\,44'\,24''\,22 \end{aligned}$$

Wenn T über die Grenze der Tafel ($T_0 = 40000$) hinausgeht, so kann man die Formel brauchen $v = 180^0 - [6{,}094\,7259]\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{3}} - [6{,}877\,18]\left(\frac{1}{T}\right) - [7{,}313]\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{5}{3}}$ etc.

wobei die in Klammern stehenden Ziffern Logarithmen sind.

Ist v gegeben, und man verlangt T zu finden, so hat man

$$T - T_0 = \frac{v - v_0}{A_1} - \frac{A_2}{A_1}(T-T_0)^2 - \frac{A^3}{A_1}(T-T_0)^3$$

Behuf einer ersten Annäherung kann man die von dem Quadrate und dem Cubus von $T-T_0$ abhängenden Glieder vernachlässigen, und der so für $T-T_0$ gefundene Werth wird so lange verbessert, bis er der Gleichung genau Genüge thut. Wenn v über 169^0 herausgeht, so nimmt man statt der Tafel die Formel:

$$T = [1{,}914\,9336]\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + [1{,}437\,8123]\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3.$$

Aber auch bei einem kleineren v kann man, falls man es bequemer hält, sich dieser Formel bedienen.

Wählt man bei dem im Art. 39 der Theoria motus gelehrten Verfahren, die hier abgedruckte Tafel statt der Barker'schen, so bezeichnet w den Werth für v, welcher dem Argumente $T = \frac{\alpha t}{k'B}$ entspricht. Will man in dem, im Art. 41 abgehandelten Falle diese Tafel zur Bestimmung von t statt der Barker'schen Tafel anwenden, so geschieht dies dadurch, dass man den, dem w entsprechenden Werth für T mit $\frac{k'B}{\alpha}$ multiplicirt.

---

*) „Die Burckhardt'sche Tafel, in Bowditch's Anhang zum dritten Bande der „Mécanique Céleste" ist ähnlich, nur dass dort $\log T$, statt T zum Argumente dient.

T_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
0	0° 0′ 0″,00	+ 3,700 5216	— 0,00000	— 9,695
2	2 47 11,83	3,700 0079	0,47160	9,691
4	5 34 0,00	3,698 4710	0,76930	9,681
6	8 20 1,19	3,695 9236	0,93987	9,664
8	11 4 52,82	3,692 3863	1,05702	9,641
10	13 48 13,31	+ 3,687 8872	— 1,14430	— 9,610
12	16 29 42,39	3,682 4613	1,21171	9,571
14	19 9 1,36	3,676 1493	1,26497	9,525
16	21 45 53,23	3,668 9972	1,30744	9,470
18	24 20 2,89	3,661 0547	1,34135	9,405
20	26 51 17,15	+ 3,652 3748	— 1,36825	— 9,329
22	29 19 24,78	3,643 0121	1,39829	9,239
24	31 44 16,52	3,633 0224	1,40535	9,130
26	34 5 44,97	3,622 4621	1,41714	8,994
28	36 23 44,51	3,611 3863	1,42520	8,814
30	38 38 11,23	+ 3,599 8496	— 1,43003	— 8,538
32	40 49 2,74	3,587 9044	1,43201	— 7,847
34	42 56 18,02	3,575 6011	1,43149	+ 8,237
36	44 59 57,33	3,562 9877	1,42877	8,585
38	47 0 2,00	3,550 1091	1,42410	8,753
40	48 56 34,33	+ 3,537 0077	— 1,41772	+ 8,857
42	50 49 37,39	3,523 7227	1,40983	8,928
44	52 39 14,95	3,510 2905	1,40060	8,978
46	54 25 31,32	3,496 7444	1,39020	9,013
48	56 8 31,24	3,483 1149	1,37878	9,038
50	57 48 19,82	+ 3,469 4297	— 1,36645	+ 9,056
52	59 25 2,41	3,455 7140	1,35333	9,067
54	60 58 44,53	3,441 9903	1,33952	9,073
56	62 29 31,82	3,428 2790	1,32512	9,076
58	63 57 29,99	3,414 5981	1,31021	9,075
60	65 22 44,74	+ 3,400 9637	— 1,29486	+ 9,071
64	68 5 26,60	3,373 8900	1,26308	9,056
68	70 38 21,86	3,347 1520	1,23025	9,035
72	73 2 13,17	3,320 8214	1,19672	9,008
76	75 17 40,91	3,294 9510	1,16277	8,978
80	77 25 22,94	+ 3,269 5785	— 1,12863	+ 8,945
84	79 25 54,44	3,244 7291	1,09447	8,910
88	81 19 47,97	3,220 4185	1,06044	8,874
92	83 7 33,52	3,196 6546	1,02665	8,837
96	84 49 38,62	3,173 4393	0,99319	8,798

T_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
100	86° 26′ 28″52	+ 3,150 7694	— 0,96012	+ 8,760
104	87 58 26,32	3,128 6388	0,92749	8,721
108	89 25 53,18	3,107 0382	0,89534	8,682
112	90 49 8,43	3,085 9565	0,86370	8,643
116	92 8 29,76	3,065 3811	0,83257	8,605
120	93 24 13,33	+ 3,045 2984	— 0,80199	+ 8,567
124	94 36 33,98	3,025 6943	0,77194	8,529
128	95 45 45,25	3,006 5544	0,74244	8,491
132	96 51 59,60	2,987 8638	0,71347	8,454
136	97 55 28,43	+ 2,969 6079	— 0,68505	+ 8,418
140	98 56 22,24	2,951 7723	0,65716	8,382
144	99 54 50,68	2,934 3427	0,62979	8,346
148	100 51 2,62	2,917 3052	0,60293	8,311
152	101 45 6,25	2,900 6462	0,57658	8,276
156	102 37 9,12	+ 2,884 3526	— 0,55071	+ 8,242
160	103 27 18,23	2,868 4116	0,52534	8,209
164	104 15 40,03	2,852 8110	0,50043	8,176
168	105 2 20,49	2,837 5388	0,47598	8,143
172	105 47 25,18	2,822 5838	0,45198	8,111
176	106 30 59,23	+ 2,807 9349	— 0,42841	+ 8,080
180	107 13 7,45	2,793 5817	0,40526	8,049
184	107 53 54,28	2,779 5141	0,38253	8,018
188	108 33 23,87	2,765 7223	0,36020	7,988
192	109 11 40,10	2,752 1971	0,33826	7,959
196	109 48 46,58	+ 2,738 9297	— 0,31670	+ 7,930
200	110 24 46,69	2,725 9114	0,29551	7,901
210	111 50 16,87	2,694 4032	0,24407	7,831
220	113 9 55,67	2,664 2838	0,19472	7,764
230	114 24 20,89	2,635 4467	0,14732	7,700
240	115 34 4,97	+ 2,607 7961	— 0,10174	+ 7,637
250	116 39 35,94	2,581 2455	0,05786	7,577
260	117 41 18,16	2,555 7170	0,01556	7,519
270	118 39 32,86	2,531 1401	9,97476	7,463
280	119 34 38,67	2,507 4507	9,93535	7,409
290	120 26 51,98	+ 2,484 5910	— 9,89725	+ 7,356
300	121 16 27,30	2,462 5078	9,86038	7,305
310	122 3 37,49	2,441 1532	9,82467	7,256
320	122 48 34,01	2,420 4831	9,79006	7,208
330	123 31 27,11	2,400 4569	9,75648	7,161

T_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
340	124° 12′ 25″97	+ 2,381 0379	— 9,72387	+ 7,116
350	124 51 38,87	2,362 1918	9,69219	7,072
360	125 29 13,25	2,343 8873	9,66139	7,029
370	126 5 15,87	2,326 0956	9,63142	6,987
380	126 39 52,85	2,308 7898	9,60224	6,947
390	127 13 9,75	+ 2,291 9450	— 9,57381	+ 6,907
400	127 45 11,66	2,275 5384	9,54610	6,868
420	128 45 48,63	2,243 9555	9,49269	6,794
440	129 42 16,43	2,213 8871	9,44176	6,723
460	130 35 2,66	2,185 1991	9,39310	6,655
480	131 24 30,82	+ 2,157 7741	— 9,34654	+ 6,589
500	132 11 1,09	2,131 5086	9,30188	6,527
520	132 54 50,84	2,106 3114	9,25901	6,467
540	133 36 15,19	2,082 1011	9,21777	6,409
560	134 15 27,33	+ 2,058 8051	— 9,17805	+ 6,353
580	134 52 38,80	2,036 3588	9,13976	6,299
600	135 27 59,81	2,014 7037	9,10278	6,247
640	136 33 45,52	2,973 5615	9,03246	6,148
680	137 33 45,39	1,935 0140	8,96649	6,055
720	138 28 48,27	+ 1,898 7593	— 8,90438	+ 5,968
760	139 19 33,81	1,864 5446	8,84571	5,885
800	140 6 34,57	1,832 1564	8,79012	5,807
850	141 0 45,22	1,793 9648	8,72451	5,714
900	141 50 30,05	1,758 0440	8,66275	5,627
950	142 36 24,37	+ 1,724 1428	— 8,60441	+ 5,544
1000	143 18 57,20	1,692 0492	8,54915	5,466
1050	143 58 32,66	1,661 5826	8,49665	5,392
1100	144 35 30,95	1,632 5881	8,44666	5,321
1150	145 10 9,20	1,604 9315	8,39896	5,254
1200	145 42 41,98	+ 1,578 4963	— 8,35333	+ 5,189
1250	146 13 21,82	1,553 1804	8,30962	5,127
1300	146 42 19,55	1,528 8937	8,26767	5,068
1350	147 9 44,57	1,505 5568	8,22735	5,011
1400	147 35 45,11	1,483 0989	8,18853	4,956
1450	148 0 28,40	+ 1,461 4567	— 8,15110	+ 4,903
1500	148 24 0,83	1,440 5738	8,11498	4,851
1600	149 7 55,10	1,400 8865	8,04631	4,754
1700	149 48 6,25	1,363 6849	7,98190	4,663
1800	150 25 5,10	1,328 6785	7,92126	4,576

T_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
1900	150° 59′ 16″75	+ 1,295 6243	— 7,86398	+ 4,495
2000	151 31 1,89	1,264 3177	7,80971	4,418
2100	152 0 37,76	1,234 5845	7,75814	4,345
2200	152 28 18,85	1,206 2750	7,70903	4,275
2300	152 54 17,45	1,179 2601	7,66216	4,208
2400	153 18 44,05	+ 1,153 4272	— 7,61732	+ 4,145
2500	153 41 47,70	1,128 6779	7,57435	4,084
2600	154 3 36,21	1,104 9254	7,53310	4,025
2700	154 24 16,39	1,082 0930	7,49344	3,969
2800	154 43 54,21	1,060 1125	7,45526	3,914
2900	155 2 34,93	+ 1,038 9230	— 7,41844	+ 3,862
3000	155 20 23,19	1,018 4698	7,38289	3,811
3200	155 53 38,39	0,979 5803	7,31529	3,715
3400	156 24 7,80	0,943 1040	7,25186	3,625
3600	156 52 14,00	0,908 7603	7,19213	3,540
3800	157 18 15,42	+ 0,876 3145	— 7,13568	+ 3,459
4000	157 42 27,29	0,845 5688	7,08218	3,383
4200	158 5 2,33	0,816 3545	7,03133	3,311
4400	158 26 11,25	0,788 5269	6,98289	3,242
4600	158 46 3,15	+ 0,761 9607	— 6,93664	+ 3,176
4800	159 4 45,83	0,736 5469	6,89238	3,113
5000	159 22 25,99	0,712 1902	6,84996	3,053
5200	159 39 9,45	0,688 8063	6,80923	2,995
5600	160 10 6,00	0,644 6674	6,73234	2,885
6000	160 38 9,17	+ 0,603 6264	— 6,66082	+ 2,783
6400	161 3 45,36	0,565 2780	6,59398	2,688
6800	161 27 15,57	0,529 2915	6,53125	2,599
7200	161 48 56,78	0,495 3934	6,47215	2,514
7600	162 9 2,89	0,463 3554	6,41629	2,435
8000	162 27 45,39	+ 0,432 9843	— 6,36332	+ 2,359
8400	162 45 13,90	0,404 1157	6,31297	2,287
8800	163 1 36,52	0,376 6081	6,26499	2,219
9200	163 17 0,16	0,350 3393	6,21916	2,154
9600	163 31 30,72	0,325 2029	6,17531	2,091
10000	163 45 13,32	+ 0,301 1054	— 6,13326	+ 2,031
10500	164 1 20,80	0,272 3199	6,08303	1,959
11000	164 16 27,66	0,244 8894	6,03516	1,891
11500	164 30 40,23	0,218 6921	5,98944	1,826
12000	164 44 3,94	0,193 6223	5,94568	1,764

T_0	v_0	log A_1	log A_2	log A_3
13000	165° 8′ 42″90	+ 0,146 5042	— 5,86343	+ 1,646
14000	165 30 55,26	0,102 9147	5,78733	1,538
15000	165 51 4,63	0,062 3627	5,71652	1,437
16000	166 9 29,58	0,024 4528	5,65032	1,342
17000	166 26 24,88	9,988 8624	5,58817	1,254
18000	166 42 2,53	+ 9,955 3241	— 5,52959	+ 1,170
19200	166 59 18,90	9,917 4751	5,46348	1,076
20400	167 15 11,32	9,881 9393	5,40141	0,987
21600	167 29 51,00	9,848 4507	5,34290	0,904
22800	167 43 27,11	9,816 7866	5,28758	0,825
24000	167 56 7,28	+ 9,786 7585	— 5,23512	+ 0,750
26000	168 15 26,77	9,739 9215	5,15328	0,633
28000	168 32 51,95	9,696 5794	5,07755	0,525
30000	168 48 41,17	9,656 2474	5,00706	0,424
32000	169 3 8,84	9,618 5347	4,94116	0,330
34000	169 16 26,46	+ 9,583 1221	— 4,87926	+ 0,242
36000	169 28 43,36	9,549 7452	4,82093	0,159
38000	169 40 7,19	9,518 1828	4,76573	0,080
40000	169 50 44,28	9,488 2481	4,71346	0,005

III.

Schreiben des Herrn Marth, Observators an der Sternwarte zu Durham, an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten (Nr. 1016).

Das Gauss'sche Verfahren, die Ortscoordinaten in einer Ellipse von starker Excentricität zu bestimmen, lässt bekanntlich nichts zu wünschen übrig. Indessen ist die damit verbundene Rechnung nicht ganz angenehm und in Folge davon wird sie, wenn ich mich nicht irre, von einigen Astronomen selbst in solchen Fällen vermieden, in welchen die gewöhnlicheren Methoden Resultate von zweifelhafter Zuverlässigkeit ergeben. Die Rechnung lässt sich aber nicht unwesentlich erleichtern, wenn man die Mühe, die darin vorkommenden Grössen $(1 - \frac{4}{5}A + C)^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{1 - \frac{4}{5}A + C}{1 - \frac{1}{5}A + C}$ (in den Zeichen der Theor. mot.) in diesen Formen jedesmal speciell zu berechnen, durch eine einfache Hülfstafel beseitigt. Denn so unbedeutend diese Mühe in einem einzelnen Falle ist, so wird sie, wenn man eine Reihe von Werthen zu bestimmen hat, wegen der von B abhängigen, wiederholten Näherungen und der damit wiederkehrenden Interpolationen, doch etwas lästig, verursacht zum wenigsten völlig vermeidbaren Zeitverlust. Nicolai hat vor langen Jahren eine kleine specielle Hülfstafel bei Gelegenheit seiner Rechnungen über den Olbers'schen Cometen bekannt gemacht*) und zugleich die Berechnung einer allgemeinen Tafel in Aussicht gestellt; da indessen dies Vorhaben weder von seiner Seite, noch in einer der neuern Cometenmonographieen meines Wissens zur Ausführung gekommen ist, so habe ich gelegentlich Veranlassung genommen, eine solche allgemeine Tafel in gehöriger Vollständigkeit zu entwerfen und erlaube mir, dieselbe hier mitzutheilen, in der Meinung, dass sie vielleicht auch Anderen mitunter bei Cometenrechnungen von Nutzen sein kann. Sie giebt zum Argument $2A$ die Werthe der Grössen $\log\sigma = \log(1 + C - \frac{4}{5}A)^{-\frac{1}{2}}$ und $\log\nu = \log\sqrt{\frac{1 + C + \frac{4}{5}A}{1 + C - \frac{4}{5}A}}$; auch ist, um alles Nöthige beisammen zu haben, $\log B$ aus der Theor. mot. hinzugefügt. Man hat damit also

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \gamma\sigma\operatorname{tang}\frac{w}{2} \text{ und}$$

$$r = \frac{q}{\left(\nu\cos\frac{v}{2}\right)^2}$$

oder allgemeiner, um r nicht durch Hülfe von $\cos\frac{v}{2}$ zu finden, falls v im zweiten Quadranten liegt,

$$\sqrt{\frac{r}{q}}\,.\,\nu\sin\frac{v}{2} = \gamma\sigma\operatorname{tang}\frac{w}{2}$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}}\,.\,\nu\cos\frac{v}{2} = 1.$$

Die cubische Gleichung, aus welcher w zu bestimmen ist, schreibt Gauss in der Form $75\operatorname{tang}\frac{1}{2}w + 25\operatorname{tang}\frac{1}{2}w^3 = \frac{at}{B}$, um sie mit Hülfe der Barker'schen Tafel auflösen zu können. Da man indessen den Winkel w selbst nicht nöthig hat, sondern nur $\operatorname{tang}\frac{w}{2}$ zu kennen braucht, so scheint es mir vortheilhafter, die Gleichung indirect aufzulösen und dazu dasselbe Verfahren allgemein anzuwenden, welches Gauss bei Gelegenheit des März-Cometen von 1843 für grosse Anomalien als zweckmässig empfiehlt.**) Bei der bequemen Einrichtung der Zech'schen Tafel macht sich die Rechnung sehr einfach, wenn man der Mühe der ersten Versuche durch eine kleine Hülfstafel überhoben wird.

Die Gleichung $x^3 + ax - b = 0$, in welcher a und auch b positiv sind, indem man bei negativem b, als Unbekannte $-x$ statt x einführen und dann die Vorzeichen umkehren kann, lässt sich nämlich schreiben

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x^2}}\right)\left(\frac{a}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \text{ oder auch}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{a}}\right)\left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$$

oder, wenn man statt $1 + \frac{1}{z}$ das Zeichen $\{z\}$ einführt, so dass also $\log\{z\}$ den in der Tafel der Additionslogarithmen zum Argument $\log z$ gehörenden Tafelwerth bedeutet,

$$\left\{\frac{a}{x^2}\right\}\left(\frac{a}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \text{ oder}$$

$$\left\{\frac{x^2}{a}\right\}\left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$$

woraus $\log\frac{a}{x^2}$ und $\log\frac{x^2}{a}$ und somit auch x leicht gefunden wird.

---

*) Lindenau und Bohnenberger, Zeitschrift für Astronomie, Bd. 1, Seite 317.

**) Astronomische Nachrichten, Nr. 474 (siehe oben Anhang Seite 21).

Man hat die erste oder zweite Form der Gleichung anzuwenden, je nachdem $\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$ kleiner oder grösser als 2 ist.

Die zweite Hülfstafel, die ich beilege, erspart alles überflüssige Suchen, indem man daraus den Werth von $\log z$ (auf 4 oder am Schluss auf 3 Stellen) entnehmen kann, der zum Argument $\log \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$ in der ersten oder dritten Spalte gehört. Zu diesem $\log z$ und ebenso zu dem nächsten Tafelargument der Additionslogarithmen berechnet man dann die genauen Werthe von $\log (\{z\}\, z^{-\frac{1}{2}})$ oder resp. $\log (\{z\}\, z^{\frac{3}{2}})$ und erhält damit durch eine einfache Interpolation den scharfen, zu $\log \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$ gehörigen Werth von $\log z$.

Das altbekannte directe Verfahren, die cubische Gleichung goniometrisch aufzulösen (welches Herr Professor Grunert, wie ich beiläufig anmerke, zum Gegenstand eines besonderen Aufsatzes in den Astr. Nachr. gemacht hat*), ist wohl nur in solchen Fällen nicht unvortheilhaft, in welchen die Benutzung der Barker'schen Tafel weitläuftig wird und in welchen man es somit in einer Form anwenden darf, die das sonst nöthige neue Aufschlagen der trigonometrischen Tafeln erspart, nämlich in der Form $x^3 + ax - b = 0$

$$\frac{2}{b}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{tang} \varphi$$

$$\sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}} = \sin \psi$$

$$x = \frac{\cos \psi^2}{\sin \psi} \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Verliert bei kleinem $\frac{b}{a}$ der Uebergang von $\sin \psi$ auf $\cos \psi^2$ zu sehr an Sicherheit, so ist die Anwendung der Barker'schen Tafel offenbar wieder zweckmässiger. Das indirecte Verfahren vereinigt bei grosser Bequemlichkeit, mit dem Vorzuge immer mit Leichtigkeit anwendbar zu sein, auch den, immer möglichst scharfe Resultate zu geben und ich halte es daher, wenigstens für den gegenwärtigen Zweck für das vortheilhafteste.

Die vollständigen Rechnungsvorschriften, denen ich folge, um in dem der Sonne näheren Theile einer elliptischen Cometenbahn die Ortscoordinaten mit Genauigkeit zu bestimmen, gestalten sich nun folgendermaassen:

Es sei a die halbe grosse Axe der Bahn, q die Periheldistanz, e die Excentricität, ε die Abweichung der Excentricität von der Einheit, also $\frac{q}{a} = 1 - e = \varepsilon$; es sei ferner v die wahre Anomalie, r der radius vector, τ die in mittleren Sonnentagen ausgedrückte, seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit — so hat man zunächst die Constanten α', β' γ' zu berechnen, nach den Formeln

$$\beta' = \frac{3\varepsilon}{1 - \frac{9}{10}\varepsilon}$$

$$\alpha' = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q\sqrt{\alpha\beta'}} = \frac{k}{\sqrt{60}} \cdot \sqrt{\frac{1+9e}{q^3}}$$

$$\gamma' = \sqrt{\frac{\beta'}{\varepsilon \dfrac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}}} = \sqrt{15 \cdot \frac{1+e}{1+9e}}$$

$$\log \frac{k}{\sqrt{2}} = 8{,}085\,0664.5$$

$$\log \frac{k}{\sqrt{60}} = 7{,}346\,5058.3$$

*) Astronomische Nachrichten Nr. 805.

$\log \frac{1}{1 - \frac{9}{10}\varepsilon}$ kann man mit dem Argument $\log \frac{10}{9\varepsilon}$ und

$\log \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$ mit $\log \frac{2}{\varepsilon}$ unmittelbar aus der Tafel der Subtractions-logarithmen nehmen. — Ich benutze die doppelten Formen, um bei dem Mangel einer strengen Controlle mehr gesichert zu sein. — Bezeichnet nun B_0 einen Näherungswerth von B ($B_0 = 1$, wenn ganz unbekannt), so sucht man, wenn

1) $\frac{\alpha' \tau}{B_0} < 2$

$\log z$ auf indirectem Wege aus der Gleichung

$\{z\}\, z^{-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha' \tau}{B_0}$ oder

$\log\{z\} - \frac{1}{2}\log z = \log \frac{\alpha' \tau}{B_0}$, wobei man die vorläufigen Versuche erspart, indem man mit $\log \frac{\alpha' \tau}{B_0}$ in die erste Spalte der kleinen Hülfstafel eingeht und den zugehörigen Werth von $\log z$ aus der zweiten Spalte nimmt. Ist mit Hülfe der Zech'schen Tafel $\log z$ genauer gefunden, so nimmt man mit

$$2A = \frac{\beta'}{z}$$

aus der Ellipsentafel $\log B$, berechnet $\log z$ von Neuem aus der Gleichung $\log\{z\} - \frac{1}{2}\log z = \log \frac{\alpha' \tau}{B}$ und wiederholt die Operation, bis zwei successive Werthe übereinstimmen. Ist $\log z$ in aller Schärfe gefunden, so nimmt man mit dem Argument

$$2A = \frac{\beta'}{z}$$

aus der Ellipsentafel $\log \sigma$ und $\log \nu$ und hat dann

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \sin \frac{v}{2} = \frac{\gamma' \sigma}{\sqrt{z}}$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \cos \frac{v}{2} = 1,$$

wodurch also $\frac{v}{2}$ und $\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu$, mithin auch r, bekannt werden. Ist

2) $\frac{\alpha' \tau}{B_0} > 2$, so behandelt man in ganz analoger Weise die Gleichungen

$$\log\{z\} + \log z + \tfrac{1}{2}\log z = \log \frac{\alpha' \tau}{B}$$

$$2A = \beta' z$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \sin \frac{v}{2} = \gamma' \sigma \sqrt{z}$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \cos \frac{v}{2} = 1.$$

Hat man eine Reihe von Oertern in hinlänglich kleinen Intervallen zu bestimmen, so fallen natürlich alle Weitläufigkeiten in den Näherungen weg und die Rechnung wird ganz leicht und angenehm.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass ich zu grösserer Sicherung der eingeschalteten Werthe, für einen Theil der Tafel, C und $\log B$ neu berechnet, übrigens aber nur 8 Decimalen angewandt habe, so dass die letzte Ziffer der Tafelwerthe hin und wieder um eine Einheit unsicherer sein wird. Der daraus entspringende Fehler kommt natürlich nicht in Betracht. Aus diesem Grunde und zugleich der leichteren Interpolation halber habe ich auch $\log \nu$ und nicht sein Doppeltes angesetzt.

2 *A*	log σ		log ν		log *B*	2 *A*	log σ		log ν		log *B*
0,000	000 0000	869	000 0000	1086	0000	0,040	003 4984	881	004 3692	1099	0030
001	0 0869	869	0 1086	1086	00	041	3 5865	881	4 4791	1100	31
002	0 1738	869	0 2172	1087	00	042	3 6746	881	4 5891	1100	33
003	0 2607	870	0 3259	1087	00	043	3 7627	882	4 6991	1100	35
004	0 3477	870	0 4346	1087	00	044	3 8509	882	4 8091	1100	36
005	0 4347	870	0 5433	1087	01	045	3 9391	882	4 9191	1101	38
006	0 5217	871	0 6520	1088	01	046	4 0273	883	5 0292	1101	40
007	0 6088	870	0 7608	1088	01	047	4 1156	883	5 1393	1102	41
008	0 6958	871	0 8696	1089	01	048	4 2039	883	5 2495	1101	43
009	0 7829	872	0 9785	1089	02	049	4 2922	884	5 3396	1102	45
0,010	000 8701	872	001 0874	1089	0002	0,050	004 3806	884	005 4698	1103	0047
011	0 9573	872	1 1963	1089	02	051	4 4690	884	5 5801	1103	49
012	1 0445	872	1 3052	1090	03	052	4 5574	884	5 6904	1103	51
013	1 1317	873	1 4142	1090	03	053	4 6458	885	5 8007	1103	53
014	1 2190	873	1 5232	1091	04	054	4 7343	885	5 9110	1104	55
015	1 3063	873	1 6323	1091	04	055	4 8228	886	6 0214	1104	57
016	1 3936	873	1 7414	1091	05	056	4 9114	886	6 1318	1105	59
017	1 4809	874	1 8505	1091	05	057	5 0000	886	6 2423	1105	61
018	1 5683	874	1 9596	1092	06	058	5 0886	886	6 3528	1105	63
019	1 6557	874	2 0688	1092	07	059	5 1772	886	6 4633	1105	65
0,020	001 7431	875	002 1780	1092	0007	0,060	005 2658	887	006 5738	1106	0067
021	1 8306	875	2 2872	1093	08	061	5 3545	887	6 6844	1106	69
022	1 9181	876	2 3965	1094	09	062	5 4432	888	6 7950	1106	72
023	2 0057	875	2 5059	1093	10	063	5 5320	888	6 9056	1107	74
024	2 0932	876	2 6152	1094	11	064	5 6208	888	7 0163	1107	77
025	2 1808	876	2 7246	1094	12	065	5 7096	889	7 1270	1108	79
026	2 2684	877	2 8340	1094	13	066	5 7985	889	7 2378	1108	82
027	2 3561	877	2 9434	1095	14	067	5 8874	889	7 3486	1108	84
028	2 4438	878	3 0529	1095	15	068	5 9763	889	7 4594	1109	87
029	2 5316	877	3 1624	1096	16	069	6 0652	890	7 5703	1108	89
0,030	002 6193	878	003 2720	1096	0017	0,070	006 1542	890	007 6811	1109	0092
031	2 7071	878	3 3816	1096	18	071	6 2432	890	7 7920	1110	0094
032	2 7949	878	3 4912	1096	19	072	6 3322	891	7 9030	1110	0097
033	2 8827	878	3 6008	1097	20	073	6 4213	891	8 0140	1111	0100
034	2 9705	879	3 7105	1097	22	074	6 5104	891	8 1251	1110	0103
035	3 0584	880	3 8202	1097	23	075	6 5995	892	8 2361	1111	0105
036	3 1464	879	3 9299	1098	24	076	6 6887	892	8 3472	1111	0108
037	3 2343	880	4 0397	1098	26	077	6 7779	892	8 4583	1112	0111
038	3 3223	880	4 1495	1098	27	078	6 8671	893	8 5695	1112	0114
039	3 4103	881	4 2593	1099	28	079	6 9564	893	8 6807	1112	0117
0,040	003 4984		004 3692		0030	0,080	007 0457		008 7919		0120

2 *A*	log σ		log ν		log *B*	2 *A*	log σ		log ν		log *B*
0,080	007 0457	893	008 7919	1113	0120	0,120	010 6432	906	013 2695	1127	0272
081	7 1350	894	8 9032	1113	0123	121	010 7338	906	013 3822	1127	0276
082	7 2244	894	9 0145	1113	0126	122	010 8244	907	013 4949	1127	0281
083	7 3138	894	9 1258	1114	0129	123	010 9151	907	013 6076	1127	0285
084	7 4032	894	9 2372	1114	0133	124	011 0058	907	013 7203	1128	0290
085	7 4926	895	9 3486	1114	0136	125	011 0965	908	013 8331	1129	0295
086	7 5821	895	9 4600	1115	0139	126	011 1873	908	013 9460	1129	0300
087	7 6716	895	9 5715	1115	0142	127	011 2781	908	014 0589	1129	0304
088	7 7611	896	9 6830	1115	0146	128	011 3689	908	014 1718	1129	0309
089	7 8507	896	9 7945	1116	0149	129	011 4597	909	014 2847	1130	0314
0,090	007 9403	896	009 9061	1116	0152	0,130	011 5506	909	014 3977	1130	0319
091	8 0299	897	010 0177	1117	0155	131	011 6415	910	014 5107	1130	0324
092	8 1196	897	010 1294	1117	0159	132	011 7325	910	014 6237	1131	0329
093	8 2093	897	010 2411	1117	0162	133	011 8235	910	014 7368	1131	0334
094	8 2990	898	010 3528	1117	0166	134	011 9145	910	014 8499	1132	0339
095	8 3888	898	010 4645	1118	0169	135	012 0055	911	014 9631	1132	0344
096	8 4786	898	010 5763	1118	0173	136	012 0966	911	015 0763	1132	0350
097	8 5684	899	010 6881	1119	0177	137	012 1877	912	015 1895	1132	0355
098	8 6583	899	010 8000	1119	0181	138	012 2789	912	015 3027	1133	0360
099	8 7482	899	010 9119	1119	0184	139	012 3701	912	015 4160	1133	0365
0,100	008 8381	900	011 0238	1119	0188	0,140	012 4613	912	015 5293	1134	0371
101	8 9281	900	011 1357	1120	0192	141	012 5525	913	015 6427	1134	0376
102	9 0181	900	011 2477	1120	0196	142	012 6438	913	015 7561	1134	0381
103	9 1081	900	011 3597	1121	0200	143	012 7351	913	015 8695	1135	0386
104	9 1981	901	011 4718	1121	0204	144	012 8264	914	015 9830	1135	0392
105	9 2882	901	011 5839	1121	0208	145	012 9178	914	016 0965	1136	0397
106	9 3783	901	011 6960	1122	0212	146	013 0092	915	016 2101	1136	0403
107	9 4684	902	011 8082	1122	0216	147	013 1007	915	016 3237	1136	0409
108	9 5586	902	011 9204	1122	0220	148	013 1922	915	016 4373	1137	0415
109	9 6488	903	012 0326	1123	0224	149	013 2837	915	016 5510	1137	0420
0,110	009 7391	902	012 1449	1123	0228	0,150	013 3752	916	016 6647	1137	0426
111	009 8293	903	012 2572	1123	0232	151	013 4668	916	016 7784	1137	0431
112	009 9196	904	012 3695	1124	0236	152	013 5584	916	016 8921	1138	0437
113	010 0100	903	012 4819	1124	0240	153	013 6500	916	017 0059	1138	0443
114	010 1003	904	012 5943	1125	0245	154	013 7416	917	017 1197	1139	0449
115	010 1907	905	012 7068	1124	0249	155	013 8333	918	017 2336	1139	0455
116	010 2812	904	012 8192	1125	0254	156	013 9251	918	017 3475	1139	0461
117	010 3716	905	012 9317	1126	0258	157	014 0169	918	017 4614	1140	0467
118	010 4621	906	013 0443	1126	0263	158	014 1087	918	017 5754	1140	0473
119	010 5527	905	013 1569	1126	0267	159	014 2005	919	017 6894	1140	0479
0,120	010 6432		013 2695		0272	0,160	014 2924		017 8034		0485

2 A	log σ		log ν		log B	2 A	log σ		log ν		log B
0,160	014 2924	919	017 8034	1141	0485	0,200	017 9945	932	022 3952	1156	0762
161	014 3843	919	017 9175	1142	0491	201	018 0877	933	022 5108	1156	0769
162	014 4762	920	018 0317	1141	0498	202	018 1810	933	022 6264	1156	0777
163	014 5682	920	018 1458	1142	0504	203	018 2743	934	022 7420	1157	0785
164	014 6602	920	018 2600	1142	0510	204	018 3677	934	022 8577	1157	0793
165	014 7522	921	018 3742	1143	0516	205	018 4611	934	022 9734	1157	0801
166	014 8443	921	018 4885	1143	0523	206	018 5545	934	023 0891	1158	0809
167	014 9364	921	018 6028	1143	0529	207	018 6479	935	023 2049	1158	0817
168	015 0285	922	018 7171	1144	0535	208	018 7414	935	023 3207	1158	0825
169	015 1207	922	018 8315	1144	0541	209	018 8349	936	023 4365	1159	0833
0,170	015 2129	922	018 9459	1145	0548	0,210	018 9285	936	023 5524	1159	0841
171	015 3051	923	019 0604	1145	0554	211	019 0221	936	023 6683	1160	0849
172	015 3974	923	019 1749	1145	0561	212	019 1157	936	023 7843	1160	0857
173	015 4897	923	019 2894	1145	0568	213	019 2093	937	023 9003	1160	0865
174	015 5820	924	019 4039	1146	0575	214	019 3030	937	024 0163	1161	0873
175	015 6744	924	019 5185	1146	0581	215	019 3967	938	024 1324	1161	0881
176	015 7668	924	019 6331	1147	0588	216	019 4905	938	024 2485	1161	0890
177	015 8592	925	019 7478	1147	0595	217	019 5843	938	024 3646	1162	0898
178	015 9517	925	019 8625	1147	0602	218	019 6781	939	024 4808	1163	0907
179	016 0442	925	019 9772	1148	0608	219	019 7720	939	024 5971	1162	0915
0,180	016 1367	925	020 0920	1148	0615	0,220	019 8659	939	024 7133	1163	0924
181	016 2293	926	020 2068	1149	0622	221	019 9598	940	024 8296	1164	0932
182	016 3219	926	020 3217	1149	0629	222	020 0538	940	024 9460	1163	0941
183	016 4145	927	020 4366	1149	0636	223	020 1478	940	025 0623	1164	0949
184	016 5072	927	020 5515	1149	0643	224	020 2418	941	025 1787	1165	0958
185	016 5999	927	020 6664	1150	0650	225	020 3359	941	025 2952	1165	0968
186	016 6926	928	020 7814	1151	0658	226	020 4300	941	025 4117	1165	0975
187	016 7854	928	020 8965	1150	0665	227	020 5241	942	025 5282	1166	0984
188	016 8782	928	021 0115	1151	0672	228	020 6183	942	025 6448	1166	0993
189	016 9710	929	021 1266	1152	0679	229	020 7125	943	025 7614	1166	1002
0,190	017 0639	929	021 2418	1152	0687	0,230	020 8068	942	025 8780	1167	1011
191	017 1568	929	021 3570	1152	0694	231	020 9010	943	025 9947	1167	1020
192	017 2497	930	021 4722	1152	0701	232	020 9953	944	026 1114	1167	1029
193	017 3427	930	021 5874	1153	0708	233	021 0897	944	026 2281	1168	1038
194	017 4357	931	021 7027	1153	0716	234	021 1841	944	026 3449	1169	1047
195	017 5288	931	021 8180	1154	0723	235	021 2785	944	026 4618	1168	1056
196	017 6219	931	021 9334	1154	0731	236	021 3729	945	026 5786	1169	1065
197	017 7150	931	022 0488	1154	0738	237	021 4674	945	026 6955	1170	1074
198	017 8081	932	022 1642	1155	0746	238	021 5619	946	026 8125	1170	1083
199	017 9013	932	022 2797	1155	0754	239	021 6565	946	026 9295	1170	1092
0,200	017 9945		022 3952		0762	2,240	021 7511		027 0465		1102

2 A	log σ		log ν		log B	2 A	log σ		log ν		log B
0,240	021 7511	946	027 0465	1170	1102	0,280	025 5638	960	031 7588	1186	1507
241	021 8457	947	027 1635	1171	1111	281	025 6598	961	031 8774	1187	1518
242	021 9404	947	027 2806	1172	1121	282	025 7559	961	031 9961	1187	1529
243	022 0351	947	027 3978	1171	1130	283	025 8520	962	032 1148	1187	1540
244	022 1298	948	027 5149	1172	1139	284	025 9482	962	032 2335	1187	1551
245	022 2246	948	027 6321	1173	1148	285	026 0444	962	032 3522	1188	1562
246	022 3194	948	027 7494	1173	1158	286	026 1406	962	032 4710	1189	1573
247	022 4142	949	027 8667	1173	1168	287	026 2368	963	032 5899	1189	1584
248	022 5091	949	027 9840	1174	1178	288	026 3331	964	032 7088	1189	1596
249	022 6040		028 1014		1187	289	026 4295		032 8277		1607
		950		1174				964		1189	
0,250	022 6990	949	028 2188	1174	1197	0,290	026 5259	964	032 9466	1190	1618
251	022 7939	950	028 3362	1175	1207	291	026 6223	964	033 0656	1191	1629
252	022 8889	951	028 4537	1175	1217	292	026 7187	965	033 1847	1191	1641
253	022 9840	951	028 5712	1175	1226	293	026 8152	965	033 3038	1191	1652
254	023 0791	951	028 6887	1176	1236	294	026 9117	966	033 4229	1191	1664
255	023 1742	952	028 8063	1177	1246	295	027 0083	966	033 5420	1192	1675
256	023 2694	952	028 9240	1177	1256	296	027 1049	966	033 6612	1193	1687
257	023 3646	952	029 0417	1177	1266	297	027 1915	966	033 7805	1192	1698
258	023 4598	952	029 1594	1177	1276	298	027 2981	967	033 8997	1193	1710
259	023 5550		029 2771		1286	299	027 3948		034 0190		1722
		953		1178				968		1194	
0,260	023 6503	954	029 3949	1178	1296	0,300	027 4916	968	034 1384	1194	1734
261	023 7457	953	029 5127	1179	1306	301	027 5884	968	034 2578	1194	1745
262	023 8410	954	029 6306	1179	1317	302	027 6852	968	034 3772	1195	1757
263	023 9364	955	029 7485	1179	1327	303	027 7820	969	034 4967	1195	1769
264	024 0319	955	029 8664	1180	1337	304	027 8789	969	034 6162	1196	1781
265	024 1274	955	029 9844	1180	1347	305	027 9758	970	034 7358	1196	1793
266	024 2229	955	030 1024	1181	1358	306	028 0728	970	034 8554	1196	1805
267	024 3184	956	030 2205	1181	1368	307	028 1698	970	034 9750	1197	1817
268	024 4140	956	030 3386	1181	1378	308	028 2668	971	035 0947	1197	1829
269	024 5096		030 4567		1388	309	028 3639		035 2144		1841
		957		1182				971		1198	
0,270	024 6053	957	030 5749	1182	1399	0,310	028 4610	971	035 3342	1198	1854
271	024 7010	957	030 6931	1183	1410	311	028 5581	972	035 4540	1198	1866
272	024 7967	957	030 8114	1183	1421	312	028 6553	972	035 5738	1199	1878
273	024 8924	958	030 9297	1183	1431	213	028 7525	973	035 6937	1199	1890
274	024 9882	958	031 0480	1184	1442	314	028 8498	972	035 8136	1200	1903
275	025 0840	959	031 1664	1184	1452	315	028 9470	973	035 9336	1200	1915
276	025 1799	959	031 2848	1184	1463	316	029 0443	974	036 0536	1200	1927
277	025 2758	960	031 4032	1185	1474	317	029 1417	974	036 1736	1201	1939
278	025 3718	960	031 5217	1185	1485	318	029 2391	975	036 2937	1201	1952
279	025 4678		031 6402		1496	319	029 3366		036 4138		1964
		960		1186				974		1201	
0,280	025 5638		031 7588		1507	0,320	029 4340		036 5339		1977

$2A$	$\log \sigma$		$\log \nu$		$\log B$	$2A$	$\log \sigma$		$\log \nu$		$\log B$
0,320	029 4340	975	036 5339	1202	1977	0,360	033 3636	990	041 3736	1219	2515
321	029 5315	976	036 6541	1203	1990	361	033 4626	991	041 4955	1219	2529
322	029 6291	976	036 7744	1203	2003	362	033 5617	991	041 6174	1219	2543
323	029 7267	976	036 8947	1203	2015	363	033 6608	991	041 7393	1219	2557
324	029 8243	977	037 0150	1203	2028	364	033 7599	992	041 8612	1220	2572
325	029 9220	977	037 1353	1204	2041	365	033 8591	992	041 9832	1221	2586
326	030 0197	977	037 2557	1205	2054	366	033 9583	992	042 1053	1221	2601
327	030 1174	977	037 3762	1205	2067	367	034 0575	993	042 2274	1221	2615
328	030 2151	978	037 4967	1205	2080	368	034 1568	993	042 3495	1222	2630
329	030 3129	979	037 6172	1205	2093	369	034 2561	994	042 4717	1222	2645
0,330	030 4108	979	037 7377	1206	2106	0,370	034 3555	994	042 5939	1222	2660
331	030 5087	979	037 8583	1207	2119	371	034 4549	994	042 7161	1223	2674
332	030 6066	979	037 9790	1207	2132	372	034 5543	995	042 8384	1224	2689
333	030 7045	980	038 0997	1207	2145	373	034 6538	995	042 9608	1223	2704
334	030 8025	981	038 2204	1208	2158	374	034 7533	995	043 0831	1224	2719
335	030 9006	980	038 3412	1208	2171	375	034 8528	996	043 2055	1225	2734
336	030 9986	981	038 4620	1208	2184	376	034 9524	996	043 3280	1225	2749
337	031 0967	982	038 5828	1209	2197	377	035 0520	997	043 4505	1226	2764
338	031 1949	982	038 7037	1209	2211	378	035 1517	997	043 5731	1226	2779
339	031 2931	982	038 8246	1210	2224	379	035 2514	998	043 6957	1226	2794
0,340	031 3913	983	038 9456	1210	2238	0,380	035 3512	997	043 8183	1227	2809
341	031 4896	983	039 0666	1211	2251	381	035 4509	998	043 9410	1227	2824
342	031 5879	983	039 1877	1211	2265	382	035 5507	999	044 0637	1227	2839
343	031 6862	984	039 3088	1211	2278	383	035 6506	999	044 1864	1228	2854
344	031 7846	984	039 4299	1212	2292	384	035 7505	1000	044 3092	1229	2870
345	031 8830	984	039 5511	1212	2305	385	035 8505	1000	044 4321	1229	2885
346	031 9814	985	039 6723	1212	2319	386	035 9505	1000	044 5550	1229	2900
347	032 0799	985	039 7935	1213	2333	387	036 0505	1000	044 6779	1230	2915
348	032 1784	986	039 9148	1214	2347	388	036 1505	1001	044 8009	1230	2931
349	032 2770	986	040 0362	1214	2360	389	036 2506	1001	044 9239	1230	2946
0,350	032 3756	986	040 1576	1214	2374	0,390	036 3507	1002	045 0469	1231	2962
351	032 4742	987	040 2790	1214	2388	391	036 4509	1002	045 1700	1231	2977
352	032 5729	987	040 4004	1215	2402	392	036 5511	1003	045 2931	1232	2993
353	032 6716	987	040 5219	1216	2416	393	036 6514	1003	045 4163	1233	3009
354	032 7703	988	040 6435	1216	2430	394	036 7517	1003	045 5396	1232	3025
355	032 8691	988	040 7651	1216	2444	395	036 8520	1004	045 6628	1233	3040
356	032 9679	989	040 8867	1217	2458	396	036 9524	1004	045 7861	1234	3056
357	033 0668	989	041 0084	1217	2472	397	037 0528	1004	045 9095	1234	3072
358	033 1657	989	041 1301	1218	2486	398	037 1532	1005	046 0329	1234	3088
359	033 2646	990	041 2519	1217	2500	399	037 2537	1005	046 1563	1235	3104
0,360	033 3636		041 3736		2515	0,400	037 3542		046 2798		3120

$2A$	$\log \sigma$		$\log \nu$		$\log B$		$2A$	$\log \sigma$		$\log \nu$		$\log B$	
0,400	037 3542	1006	046 2798	1235	3120	16	0,440	041 4077	1021	051 2543	1253	3793	18
401	037 4548	1006	046 4033	1236	3136	16	441	041 5098	1022	051 3796	1253	3811	18
402	037 5554	1006	046 5269	1236	3152	16	442	041 6120	1023	051 5049	1253	3829	18
403	037 6560	1007	046 6505	1236	3168	16	443	041 7143	1023	051 6302	1254	3847	18
404	037 7567	1007	046 7741	1237	3184	16	444	041 8166	1023	051 7556	1254	3865	17
405	037 8574	1008	046 8978	1237	3200	16	445	041 9189	1023	051 8810	1255	3882	18
406	037 9582	1008	047 0215	1238	3216	16	446	042 0212	1024	052 0065	1255	3900	18
407	038 0590	1008	047 1453	1239	3232	17	447	042 1236	1025	052 1320	1256	3918	18
408	038 1598	1009	047 2692	1238	3249	16	448	042 2261	1025	052 2576	1256	3936	18
409	038 2607	1009	047 3930	1239	3215	17	449	042 3286	1025	052 3832	1257	3954	19
0,410	038 3616	1010	047 5169	1240	3282	16	0,450	042 4311	1025	052 5089	1257	3973	18
411	038 4626	1010	047 6409	1240	3298	17	451	042 5336	1026	052 6346	1257	3991	18
412	038 5636	1010	047 7649	1240	3315	16	452	042 6362	1027	052 7603	1258	4009	18
413	038 6646	1011	047 8889	1241	3331	17	453	042 7389	1027	052 8861	1258	4027	19
414	038 7657	1011	048 0130	1241	3348	16	454	042 8416	1027	053 0119	1259	4046	18
415	038 8668	1011	048 1371	1242	3364	17	455	042 9443	1028	053 1378	1259	4064	18
416	038 9679	1012	048 2613	1242	3381	16	456	043 0471	1028	053 2637	1260	4082	18
417	039 0591	1013	048 3855	1242	3397	17	457	043 1499	1028	053 3897	1260	4100	19
418	039 1704	1013	048 5097	1243	3414	17	458	043 2527	1029	053 5157	1260	4119	18
419	039 2717	1013	048 6340	1244	3431	17	459	043 3556	1029	053 6417	1261	4137	19
0,420	039 3730	1013	048 7584	1244	3448	17	0,460	043 4585	1030	053 7678	1262	4156	19
421	039 4743	1014	048 8828	1244	3465	17	461	043 5615	1031	053 8940	1262	4175	19
422	039 5757	1014	049 0072	1245	3482	17	462	043 6646	1030	054 0202	1262	4194	18
423	039 6771	1015	049 1317	1245	3499	17	463	043 7676	1031	054 1464	1263	4212	19
424	039 7786	1015	049 2562	1245	3516	17	464	043 8707	1031	054 2727	1263	4231	19
425	039 8801	1016	049 3807	1246	3533	17	465	043 9738	1032	054 3990	1264	4250	19
426	039 9817	1016	049 5053	1247	3550	17	466	044 0770	1033	054 5254	1264	4269	18
427	040 0833	1016	049 6300	1247	3567	17	467	044 1803	1032	054 6518	1264	4287	19
428	040 1849	1017	049 7547	1247	3584	17	468	044 2835	1033	054 7782	1265	4306	19
429	040 2866	1017	049 8794	1248	3601	17	469	044 3868	1034	054 9047	1266	4325	19
0,430	040 3883	1018	050 0042	1248	3618	17	0,470	044 4902	1034	055 0313	1266	4344	19
431	040 4901	1018	050 1290	1248	3635	18	471	044 5936	1034	055 1579	1266	4363	19
432	040 5919	1018	050 2538	1249	3653	17	472	044 6970	1035	055 2845	1267	4382	19
433	040 6937	1019	050 3787	1250	3670	18	473	044 8005	1035	055 4112	1267	4401	20
434	040 7956	1019	050 5037	1250	3688	17	474	044 9040	1035	055 5379	1268	4421	19
435	040 8975	1019	050 6287	1250	3705	18	475	045 0075	1036	055 6647	1268	4440	19
436	040 9994	1020	050 7537	1251	3723	17	476	045 1111	1036	055 7915	1269	4459	19
437	041 1014	1021	050 8788	1251	3740	18	477	045 2147	1037	055 9184	1269	4478	20
438	041 2035	1021	051 0039	1252	3758	17	478	045 3184	1037	056 0453	1269	4498	19
439	041 3056	1021	051 1291	1252	3775	18	479	045 4221	1038	056 1722	1270	4517	20
0,440	041 4077		051 2543		3793		0,480	045 5259		056 2992		4537	

2 A	log σ		log ν		log B	
0,480	045 5259	1038	056 2992	1271	4537	19
481	045 6297	1038	056 4263	1271	4556	20
482	045 7335	1039	056 5534	1271	4576	19
483	045 8374	1039	056 6805	1272	4595	20
484	045 9413	1040	056 8077	1272	4615	19
485	046 0453	1040	056 9349	1273	4634	20
486	046 1493	1041	057 0622	1273	4654	20
487	046 2534	1041	057 1895	1273	4674	20
488	046 3575	1041	057 3168	1274	4694	20
489	046 4616	1042	057 4442	1275	4714	20
0,490	046 5658	1042	057 5717	1275	4734	20
491	046 6700	1043	057 6992	1275	4754	20
492	046 7743	1043	057 8267	1276	4774	20
493	046 8786	1043	057 9543	1276	4794	20
494	046 9829	1044	058 0819	1277	4814	20
495	047 0873	1044	058 2096	1278	4834	20
496	047 1917	1045	058 3374	1278	4854	20
497	047 2962	1045	058 4652	1278	4874	20
498	047 4007	1046	058 5930	1279	4894	20
499	047 5053	1046	058 7209	1279	4914	21
0,500	047 6099	1046	058 8488	1279	4935	20
501	047 7145	1047	058 9767	1280	4955	21
502	047 8192	1047	059 1047	1280	4976	20
503	047 9239	1048	059 2327	1281	4996	21
504	048 0287	1048	059 3608	1282	5017	20
505	048 1335	1049	059 4890	1282	5037	21
506	048 2384	1049	059 6172	1282	5058	20
507	048 3433	1049	059 7454	1283	5078	21
508	048 4482	1050	059 8737	1283	5099	21
509	048 5532	1050	060 0020	1284	5120	21
0,510	048 6582	1051	060 1304	1284	5141	20
511	048 7633	1051	060 2588	1285	5161	21
512	048 8684	1052	060 3873	1285	5182	21
513	048 9736	1052	060 5158	1286	5203	21
514	049 0788	1052	060 6444	1286	5224	21
515	049 1840	1053	060 7730	1286	5245	21
516	049 2893	1053	060 9016	2287	5266	21
517	049 3946	1054	061 0303	1287	5287	22
518	049 5000	1054	061 1590	1288	5309	21
519	049 6054	1054	061 2878	1288	5330	21
0,520	049 7108		061 4116		5351	

2 A	log σ		log ν		log B	
0,520	049 7108	1055	061 4116	1289	5351	21
521	049 8163	1056	061 5455	1290	5372	22
522	049 9219	1056	061 6745	1290	5394	21
523	050 0275	1056	061 8035	1290	5415	21
524	050 1331	1057	061 9325	1291	5436	21
525	050 2388	1057	062 0616	1291	5457	22
526	050 3445	1057	062 1907	1291	5479	21
527	050 4502	1058	062 3198	1292	5500	22
528	050 5560	1058	062 4490	1293	5522	22
529	050 6618	1059	062 5783	1293	5544	22
0,530	050 7677	1060	062 7076	1293	5566	21
531	050 8737	1059	062 8369	1294	5587	22
532	050 9796	1060	062 9663	1295	5609	22
533	051 0856	1061	063 0958	1295	5631	22
534	051 1917	1061	063 2253	1295	5653	22
535	051 2978	1062	063 3548	1296	5675	22
536	051 4040	1062	063 4844	1296	5697	22
537	051 5102	1062	063 6140	1297	5719	22
538	051 6164	1063	063 7437	1298	5741	22
539	051 7207	1063	063 8735	1297	5763	22
0,540	051 8290	1064	064 0032	1298	5785	22
541	051 9354	1064	064 1330	1299	5807	22
542	052 0418	1064	064 2629	1299	5829	22
543	052 1482	1065	064 3928	1300	5851	23
544	052 2547	1065	064 5228	1300	5874	22
545	052 3612	1066	064 6528	1301	5896	23
546	052 4678	1066	064 7829	1301	5919	22
547	052 5744	1067	064 9130	1302	5941	23
548	052 6811	1067	065 0432	1302	5964	22
549	052 7878	1068	065 1734	1302	5986	23
0,550	052 8946	1068	065 3036	1303	6009	22
551	053 0014	1068	065 4339	1304	6031	23
552	053 1082	1069	065 5643	1304	6054	23
553	053 2151	1070	065 6947	1304	6077	23
554	053 3221	1069	065 8251	1305	6100	22
555	053 4290	1070	065 9556	1305	6122	23
556	053 5360	1071	066 0861	1306	6145	23
557	053 6431	1071	066 2167	1307	6168	23
558	053 7502	1072	066 3474	1307	6191	23
559	053 8574	1072	066 4781	1307	6214	23
0,560	053 9646		066 6088		6237	

2 A	log σ		log ν		log B		2 A	log σ		log ν		log B	
0,560	053 9646	1072	066 6088	1308	6237	23	0,580	056 1179	1081	069 2336	1317	6708	24
561	054 0718	1073	066 7396	1308	6260	23	581	056 2260	1082	069 3653	1318	6732	24
562	054 1791	1073	066 8704	1309	6283	23	582	056 3342	1083	069 4971	1319	6756	24
563	054 2864	1074	067 0013	1309	6306	24	583	056 4425	1083	069 6290	1319	6780	24
564	054 3938	1074	067 1322	1310	6330	23	584	056 5508	1083	069 7609	1319	6804	24
565	054 5012	1075	067 2632	1310	6353	23	585	056 6691	1083	069 8928	1320	6828	24
566	054 6087	1075	067 3942	1311	6376	23	586	056 7674	1084	070 0248	1320	6852	24
567	054 7162	1076	067 5253	1311	6399	24	587	056 8758	1085	070 1568	1321	6876	25
568	054 8238	1076	067 6564	1311	6423	23	588	056 9843	1085	070 2889	1322	6901	24
569	054 9314	1076	067 7875	1312	6446	24	589	057 0928	1085	070 4211	1322	6925	25
0,570	055 0390	1077	067 9187	1313	6470	23	0,590	057 2013	1086	070 5533	1322	6950	24
571	055 1467	1077	068 0500	1313	6493	24	591	057 3099	1087	070 6855	1323	6974	25
572	055 2544	1078	068 1813	1314	6517	23	592	057 4186	1086	070 8178	1323	6999	24
573	055 3622	1078	068 3127	1314	6540	24	593	057 5272	1087	070 9501	1324	7023	25
574	055 4700	1079	068 4441	1315	6564	24	594	057 6359	1088	071 0825	1325	7048	24
575	055 5779	1079	068 5756	1315	6588	24	595	057 7447	1088	071 2150	1325	7072	25
576	055 6858	1080	068 7071	1315	6612	24	596	057 8535	1089	071 3475	1325	7097	25
577	055 7938	1080	068 8386	1316	6636	24	597	057 9624	1089	071 4800	1326	7122	25
578	055 9018	1080	068 9702	1317	6660	24	598	058 0713	1090	071 6126	1326	7147	24
579	056 0098	1081	069 1019	1317	6684	24	599	058 1803	1090	071 7452	1327	7171	25
0,580	056 1179		069 2336		6708		0,600	058 2893		071 8779		7196	

$\log(\{z\}z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^{\frac{3}{2}})$		$\log(\{z\}z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^{\frac{3}{2}})$	
0,3010	99	0,00	0,3010	101	0,1124	88	0,20	0,5124	112
2911	100	0,01	3111	100	1036	88	0,21	5236	112
2811	98	0,02	3211	102	0948	87	0,22	5348	113
2713	98	0,03	3313	102	0861	87	0,23	5461	113
2615	98	0,04	3415	102	0774	86	0,24	5574	114
2517	96	0,05	3517	104	0688	86	0,25	5688	114
2421	97	0,06	3621	103	0602	85	0,26	5802	114
2324	95	0,07	3724	105	0517	85	0,27	5916	116
2229	95	0,08	3829	105	0432	84	0,28	6032	116
2134	95	0,09	3934	105	0348	84	0,29	6148	116
0,2039	94	0,10	0,4039	106	0,0264	83	0,30	0,6264	117
1945	93	0,11	4145	107	0,0181	82	0,31	6381	118
1852	93	0,12	4252	107	0,0099	83	0,32	6499	117
1759	93	0,13	4359	107	0,0016	81	0,33	6616	119
1666	91	0,14	4466	109	9,9935	81	0,34	6735	119
1575	91	0,15	4575	109	9,9854	81	0,35	6854	119
1484	91	0,16	4684	109	9,9773	80	0,36	6973	120
1393	90	0,17	4793	110	9,9693	80	0,37	7093	120
1303	90	0,18	4903	110	9,9613	79	0,38	7213	121
1213	89	0,19	5013	111	9,9534	79	0,39	7334	121
0,1124		0,20	0,5124		9,9455		0,40	0,7455	

$\log(\{z\}z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^{\frac{3}{2}})$		$\log(\{z\}z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^{\frac{3}{2}})$	
9,9455	78	0,40	0,7455	122	9,6639	64	0,80	1,2639	136
9377	78	0,41	7577	122	6575	63	0,81	2775	137
9299	77	0,42	7699	123	6512	63	0,82	2912	137
9222	77	0,43	7822	123	6449	63	0,83	3049	137
9145	76	0,44	7945	124	6386	62	0,84	3186	138
9069	76	0,45	8069	124	6324	62	0,85	3324	138
8993	76	0,46	8193	124	6262	62	0,86	3462	138
8917	75	0,47	8317	125	6200	62	0,87	3600	138
8842	74	0,48	8442	124	6138	62	0,88	3738	138
8768	75	0,49	8568	125	6076	61	0,89	3876	139
9,8693	74	0,50	0,8693	126	9,6015	61	0,90	1,4015	139
8619	73	0,51	8819	127	5954	61	0,91	4154	139
8546	73	0,52	8946	127	5893	61	0,92	4293	139
8473	72	0,53	9073	128	5832	60	0,93	4432	140
8401	73	0,54	9201	127	5772	60	0,94	4572	140
8328	71	0,55	9328	129	5712	60	0,95	4712	140
8257	72	0,56	9457	128	5652	60	0,96	4852	140
8185	71	0,57	9585	129	5592	60	0,97	4992	140
8114	71	0,58	9714	129	5532	59	0,98	5132	141
8043	70	0,59	9843	130	5473	59	0,99	5273	141
9,7973	70	0,60	0,9973	130	9,5414	59	1,00	1,5414	141
7903	69	0,61	1,0103	131	5355	59	1,01	5555	141
7834	69	0,62	1,0234	131	5296	59	1,02	5696	141
7765	69	0,63	1,0365	131	5237	58	1,03	5837	142
7696	69	0,64	1,0496	131	5179	58	1,04	5979	142
7627	68	0,65	1,0627	132	5121	58	1,05	6121	142
7559	68	0,66	1,0759	132	5063	58	1,06	6263	142
7491	67	0,67	1,0891	133	5005	58	1,07	6405	142
7424	67	0,68	1,1024	133	4947	58	1,08	6547	142
7357	67	0,69	1,1157	133	4889	57	1,09	6689	143
9,7290	66	0,70	1,1290	134	9,4832	57	1,10	1,6832	143
7224	67	0,71	1424	133	4775	57	1,11	6975	143
7157	65	0,72	1557	135	4718	57	1,12	7118	143
7092	66	0,73	1692	134	4661	57	1,13	7261	143
7026	65	0,74	1826	135	4604	57	1,14	7404	143
6961	65	0,75	1961	135	4547	56	1,15	7547	144
6896	65	0,76	2096	135	4491	57	1,16	7691	143
6831	64	0,77	2231	136	4434	56	1,17	7834	144
6767	64	0,78	2367	136	4378	56	1,18	7978	144
6703	64	0,79	2503	136	4322	56	1,19	8122	144
9,6639		0,80	1,2639		9,4266		1,20	1,8266	

$\log(\{z\} z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\} z^{\frac{3}{2}})$		$\log(\{z\} z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\} z^{\frac{3}{2}})$	
9,4266	56	1,20	1,8266	144	9,2108	53	1,60	2,4108	147
4210	56	1,21	8410	144	2055	52	1,61	2,4255	148
4154	56	1,22	8554	144	2003	52	1,62	2,4403	148
4098	55	1,23	8698	145	1951	53	1,63	2,4551	147
4043	55	1,24	8843	145	1898	52	1,64	2,4698	148
3988	56	1,25	8988	144	1846	52	1,65	2,4846	148
3932	55	1,26	9132	145	1794	52	1,66	2,4994	148
3877	55	1,27	9277	145	1742	52	1,67	2,5142	148
3822	55	1,28	9422	145	1690	52	1,68	2,5290	148
3767	55	1,29	9567	145	1638	52	1,69	2,5438	148
9,3712	54	1,30	1,9712	146	9,1586	52	1,70	2,5586	148
3658	55	1,31	1,9858	145	1534	52	1,71	2,5734	148
3603	54	1,32	2,0003	146	1482	52	1,72	2,5882	148
3549	55	1,33	2,0149	145	1430	52	1,73	2,6030	148
3494	54	1,34	2,0294	146	1378	51	1,74	2,6178	149
3440	54	1,35	2,0440	146	1327	52	1,75	2,6327	148
3386	55	1,36	2,0586	145	1275	52	1,76	2,6475	148
3331	54	1,37	2,0731	146	1223	52	1,77	2,6623	148
3277	54	1,38	2,0877	146	1171	51	1,78	2,6771	149
3223	53	1,39	2,1023	147	1120	52	1,79	2,6920	148
9,3170	54	1,40	2,1170	146	9,1068	103	1,80	2,7068	297
3116	54	1,41	2,1316	146	0965	103	1,82	2,7365	297
3062	54	1,42	2,1462	146	0862	102	1,84	2,7662	298
3008	53	1,43	2,1608	147	0760	103	1,86	2,7960	297
2955	54	1,44	2,1755	146	0657	103	1,88	2,8257	297
2901	53	1,45	2,1901	147	0554	102	1,90	2,8554	298
2848	53	1,46	2,2048	147	0452	102	1,92	2,8852	298
2795	54	1,47	2,2195	146	0350	103	1,94	2,9150	297
2741	53	1,48	2,2341	147	0247	102	1,96	2,9447	298
2688	53	1,49	2,2488	147	0145	102	1,98	2,9745	298
9,2635	53	1,50	2,2635	147	9,0043	101	2,00	3,0043	299
2582	53	1,51	2,2782	147	8,903	101	2,20	3,303	299
2529	53	1,52	2,2929	147	8,802	101	2,40	3,602	299
2476	53	1,53	2,3076	147	8,701	100	2,60	3,901	300
2423	52	1,54	2,3223	148	8,601	101	2,80	4,201	299
2371	53	1,55	2,3371	147	8,500	100	3,00	4,500	300
2318	53	1,56	2,3518	147	8,400		3,20	4,800	
2265	52	1,57	2,3665	148	8,300		3,40	5,100	
2213	53	1,58	2,3813	147	8,200		3,60	5,400	
2160	52	1,59	2,3960	148	8,100		3,80	5,700	
9,2108		1,60	2,4108		8,000		4,00	6,000	

IV.

Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstande von der Erde abzuleiten: des Himmelskörpers *heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne* und *wahren Abstand von der Erde.* Von Dr. Gauss in Braunschweig.

(Vergl. Art. 74 der Theoria motus.)

Bedeutung der Zeichen.

Gegeben:

☊ Länge des aufsteigenden Knotens.
V Länge der Sonne.
α Geocentrische Länge des Himmelskörpers.
β Geocentrische Breite.
i Neigung der Bahn.
R Abstand der Sonne von der Erde.

Gesucht:

v heliocentrische Länge des Himmelskörpers in der Bahn.
r Wahrer Abstand von der Sonne.
Δ Wahrer Abstand von der Erde.
A, B, C etc. } Hülfswinkel.

I.

$$1^0 \quad \frac{\cos(V-\text{☊})\tang\beta}{\sin(V-\alpha)} = \tang A; \qquad \frac{\sin A \tang(V-\text{☊})}{\sin(A+i)} = \tang(v-\text{☊})$$

$$2^0 \quad \frac{\sin(V-\alpha)\tang i}{\cos(V-\text{☊})} = \tang B; \qquad \frac{\cos B \sin\beta \tang(V-\text{☊})}{\sin(B+\beta)\cos i} = \tang(v-\text{☊})$$

$$3^0 \quad \frac{\sin(V-\text{☊})\tang\beta}{\sin(V-\alpha)\tang i} = \tang C; \qquad \frac{\sin C \sin(V-\text{☊})}{\sin(C+V-\text{☊})\cos i} = \tang(v-\text{☊})$$

$$4^0 \quad \frac{\cos(V-\text{☊})\tang\beta}{\cos(V-\alpha)\tang i} = \tang D; \qquad \frac{\sin D \tang(V-\text{☊})\cos(V-\alpha)}{\sin(D+V-\alpha)\cos i} = \tang(v-\text{☊})$$

Anmerkung. Da Winkel, die um 180^0 verschieden sind, einerlei Tangenten haben, so ist hier noch eine Vorschrift nöthig, wie die durch ihre Tangenten bestimmten Winkel A, B, C etc. und $v-\text{☊}$ angesetzt werden müssen. Den Winkel $v-\text{☊}$ hat man allezeit zwischen 0 und 180^0 anzunehmen, wenn β positiv (nördlich) ist; ist hingegen die Breite südlich, so muss $v-\text{☊}$ zwischen 180^0 und 360^0, oder, welches einerlei ist, zwischen -180^0 und 0 fallen. Ist $\beta = 0$, so ist der Himmelskörper in einem Knoten, und man wird nie zweifelhaft sein, ob es ☊ oder ☋ ist. Der analytischen Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass in diesem Falle der Himmelskörper in $\left\{\begin{matrix}\text{☊}\\ \text{☋}\end{matrix}\right\}$ ist, nachdem $\sin(V-\alpha)$ und $\sin(\alpha-\text{☊})$ $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben. Die Hülfswinkel A, B, C, D aber, so wie die folgenden E, F etc. kann man in dieser Hinsicht ganz nach Belieben ansetzen; wobei es sich jedoch von selbst versteht, dass man auf die Zeichen $\pm$ gehörige Rücksicht nehme; ich habe sie in folgendem Beispiele immer zwischen -90^0 und $+90^0$ genommen.

II.

$$5^0 \quad \frac{\tang\beta}{\sin(\alpha-\text{☊})} = \tang E; \qquad \frac{\sin E \sin(V-\text{☊})}{\sin(i-E)\sin(v-\text{☊})} = \frac{r}{R}$$

$$6^0 \quad \tang i \sin(\alpha-\text{☊}) = \tang F; \qquad \frac{\cos F \sin(V-\text{☊})\sin\beta}{\sin(F-\beta)\sin(v-\text{☊})\cos i} = \frac{r}{R}$$

$$7^0 \quad \cos i \tang(v-\text{☊}) = \tang G; \qquad \frac{\cos G \sin(V-\alpha)}{\sin(\alpha-\text{☊}-G)\cos(v-\text{☊})} = \frac{r}{R}$$

$$8^0\quad \frac{\operatorname{tang}(\alpha-\Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang} H;\qquad \frac{\sin H \sin(V-\alpha)}{\sin(H-(v-\Omega)\sin(\alpha-\Omega)} = \frac{r}{R}$$

$$9^0\quad \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin i \cos(\alpha-\Omega)} = \operatorname{tang} I;\qquad \frac{\sin I \cos(V-\Omega)}{\sin(v-\Omega-I)} = \frac{r}{R}$$

$$10^0\quad \sin i \cos(\alpha-\Omega)\operatorname{tang}(v-\Omega) = \operatorname{tang} K;\qquad \frac{\cos K \sin\beta \cos(V-\Omega)}{\sin(K-\beta)\cos(v-\Omega)} = \frac{r}{R}$$

$$11^0\quad \frac{\sin C \sin(V-\alpha)}{\cos(C+V-\alpha)\operatorname{tang}(V-\Omega)\cos i} = \operatorname{tang} L;\qquad \frac{\sin L}{\sin(v-\Omega-L)\cos(V-\Omega)} = \frac{r}{R}$$

$$12^0\quad \frac{\sin D \cos(V-\Omega)}{\cos(D+V-\Omega)\cos i} = \operatorname{tang} M;\qquad \frac{\sin M}{\sin(v-\Omega-M)\cos(V-\Omega)} = \frac{r}{R}$$

III.

$$13^0\quad \frac{r \sin(v-\Omega)\sin i}{\sin\beta} = \Delta$$

$$14^0\quad \frac{R \sin E \sin(V-\Omega)\sin i}{\sin(i-E)\sin\beta} = \frac{R\cos E \sin(V-\Omega)\sin i}{\sin(i-E)\sin(\alpha-\Omega)\cos\beta} = \Delta$$

$$15^0\quad \frac{R\cos F \sin(V-\Omega)\operatorname{tang} i}{\sin(F-\beta)} = \frac{R \sin F \sin(V-\Omega)\sin(\alpha-\Omega)}{\sin(F-\beta)} = \Delta$$

Und so lassen sich noch mehrere Ausdrücke für Δ aus der Verbindung von 13^0 mit allen Formeln II ableiten.

Beispiel.

$\Omega = 80^0\ 59'\ 12''07$
$V = 281\ \ 1\ \ 34,99$
$\alpha = 53\ \ 23\ \ 2,46$
$i = 10\ \ 37\ \ 9,55$
$\log\operatorname{tang}\beta = 8{,}734\,9698\,n$
$\log R = 9{,}992\,6158$
$\beta = -3^0\ 6'\ 33''561$
negativ oder südlich

Folglich $V-\Omega = 200^0\ 2'\ 22''92$
$V-\alpha = 227\ \ 38\ \ 32,53$
$\alpha-\Omega = -27\ \ 36\ \ 9,61$

1^0.

$\log\operatorname{tang}\beta$	$8{,}734\,9698\,n$
$\log\cos(V-\Omega)$	$9{,}972\,8762\,n$
Compl. $\log\sin(V-\alpha)$	$0{,}131\,3827\,n$
$\log\operatorname{tang} A$	$8{,}839\,2287\,n$
$\log\sin A$	$8{,}838\,1955\,n$
$\log\operatorname{tang}(V-\Omega)$	$9{,}562\,0014$
Compl. $\log\sin(A+i)$	$0{,}935\,0608$
$\log\operatorname{tang}(v-\Omega)$	$9{,}335\,2577$

Folglich
$A = -3^0\ 57'\ 2''\ 136$
$A+i = 6\ \ 40\ \ 7,414$
Ferner
$v-\Omega = -12^0\ 12'\ 37''\ 942$
also $v = 68^0\ 46'\ 34''\ 128$

2^0.

$\log\sin(V-\alpha)$	$9{,}868\,6173\,n$
$\log\operatorname{tang} i$	$9{,}272\,9872$
Compl. $\log\cos(V-\Omega)$.	$0{,}027\,1238\,n$
$\log\operatorname{tang} B$.	$9{,}168\,7283$
$\log\cos B$	$9{,}995\,3277$
$\log\sin\beta$.	$8{,}734\,3300\,n$
$\log\operatorname{tang}(V-\Omega)$. . . .	$9{,}562\,0014$
Compl. $\log\sin(B+\beta)$.	$1{,}036\,0961$
Compl. $\log\cos i$	$0{,}007\,5025$
$\log\operatorname{tang} v(-\Omega)$	$9{,}335\,2577\,n$ wie oben.

Folglich
$B = 8^0\ 23'\ 21''\ 888$
$B+\beta = 5\ \ 16\ \ 48,\ 327$

3^0.

$\log\sin(V-\Omega)$	$9{,}534\,8776\,n$
$\log\operatorname{tang}\beta$.	$8{,}734\,9698\,n$
Compl. $\log\sin(V-\alpha)$.	$0{,}131\,3827\,n$
Compl. $\log\operatorname{tang} i$	$0{,}727\,0128$
$\log\operatorname{tang} C$	$9{,}128\,2429\,n$
$\log\sin C$	$9{,}124\,3583\,n$
$\log\sin(V-\Omega)$	$9{,}534\,8776\,n$
Cpl. $\log\sin(C+V-\Omega)$	$0{,}668\,5194\,n$
Compl. $\log\cos i$	$0{,}007\,5025$
$\log\operatorname{tang}(v-\Omega)$	$9{,}335\,2578\,n$ wie vorhin.

Also
$C = -7^0\ 39'\ 7''\ 056$
$C+V-\Omega = 192\ \ 23\ \ 15,\ 864$

4°.

log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
log tang β	8,734 9698 n
Compl. log cos (V — α) .	0,171 4973 n
Compl. log tang i	0,727 0128
log tang D	9,606 3561 n
log sin D	9,573 5295 n
log tang (V — ☊)	9,562 0014
log cos (V — α)	9,828 5027 n
Cpl. log sin ($D + V - \alpha$)	0,363 7217 n
Compl. log cos i	0,007 5025
log tang (v — ☊)	9,335 2578 n wie oben.

Also

$D = -\ 21^0\ 59'\ 51''\ 182$

$D + V - \alpha = \ 205\ \ 38\ \ 41,348$

5°.

log tang β	8,734 9698 n
log sin (α — ☊)	9,665 8973 n
log tang E	9,069 0725
log sin E	9,066 1081 n
log sin (V — ☊)	9,534 8776 n
Compl. log sin ($i - E$) .	1,163 7907
Compl. log sin (v — ☊) .	0,674 6802 n
log $\frac{r}{R}$	0,439 4566

Also

$E = 6^0\ 41'\ 12''\ 412$

$i - E = 3\ \ 55\ \ 57,138$

Ferner

$\log r = \log R + \log \frac{r}{R} = 0{,}432\ 0724$

6°.

log tang i	9,272 9872
log sin (α — ☊)	9,665 8973 n
log tang F	8,938 8845 n
log cos F	9,998 3674
log sin β	8,734 3300 n
log sin (V — ☊)	9,534 8776 n
Compl. log sin ($F - \beta$) .	1,489 6990 n
Compl. log sin (v — ☊) .	0,674 6802 n
Compl. log cos i	0,007 5025 n
log $\frac{r}{R}$	0,439 4567 { Nahe wie vorher.

Daher

$F = -4^0\ 57'\ 53''\ 955$

$F - \beta = -1\ \ 51'\ 20{,}394$

7°.

log cos i	9,992 4975
log tang (v — ☊)	9,335 2577 n
log tang G	9,327 7552 n
log cos G	9,990 3922
log sin (V — α)	9,868 6173 n
Cpl. log sin (α — ☊ — G)	0,570 5092 n
Compl. log cos (v — ☊) .	0,009 9379
log $\frac{r}{R}$	0,439 4566 wie oben.

Also

$G = -12^0\ \ 0'\ 27''\ 118$

α — ☊ — $G = -15\ \ 35\ \ 42,492$

8°.

log tang (α — ☊)	9,718 3744 n
log cos i	9,992 4975
log tang H	9,725 8769 n
log sin H	9,671 7672 n
log sin (V — α)	9,868 6173 n
Cpl. log sin (H — (v — ☊))	0,564 9695 n
Compl. log sin (α — ☊) .	0,334 1027 n
log $\frac{r}{R}$	0,439 4567 wie vorher.

Folglich

$H = -28^0\ \ 0'\ 39''\ 879$

H — (v — ☊) $= -15\ \ 48'\ \ 1,937$

9°.

log tang β	8,734 9698 n
Compl. log sin i	0,734 5153
Compl. log cos (α — ☊) .	0,052 4771
log tang I	9,521 9622 n
log sin I	9,499 1749 n
log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
Cpl. log sin (v — ☊ — I)	0,967 4054
log $\frac{r}{R}$	0,439 4565 wie vorhin.

Hieraus

$I = -18^0\ 23'\ 55''\ 334$

v — ☊ — $I = \ \ 6\ \ 11\ \ 17,392$

10°.

In der Nähe des Knotens weniger scharf.

log sin i	9,265 4847
log cos (α — ☊)	9,947 5229
log tang (v — ☊)	9,335 2577 n
log tang K	8,548 2653 n
log cos K	9,999 7290
log sin β	8,734 3300 n
log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
Compl. log sin (K — β) .	1,722 5836
Compl. log cos (v — ☊) .	0,009 9379
log $\frac{r}{R}$	0,439 4567 wie vorhin.

Also

$$K = -2^{0}\,1'\,26''344$$
$$K - \beta = \quad 1\;\;5\;\;7,217$$

11°.

$$C + V - \alpha = 219^{0}\,59'\,25''474$$

log sin C	9,124 3583 n
log sin (V — α)	9,868 6173 n
Cpl. log cos ($C + V$ — α)	0,115 6850 n
Compl. log tang (V — ☊)	0,437 9986
Compl. log cos i	0,007 5025
log tang L	9,554 1617 n
log sin L	9,527 9439 n
Comp. log sin (v — ☊ — L)	0,884 3888
Compl. log cos (V — ☊)	0,027 1238 n
log $\frac{r}{R}$	0,439 4565 wie zuvor.

Also

$$L = -19^{0}\,42'\,32''533$$
$$v - ☊ - L = \quad 7\;\;29\;\;54,591$$

12°.

$$D + V - ☊ = 178^{0}\,2'\,31''738$$

log sin D	9,573 5295 n
log cos (V — ☊)	9,972 8762 n
Cpl. log cos ($D + V$ — ☊)	0,000 2536 n
Compl. log cos i	0,007 5025
log tang ($M = L$) . . .	9,554 1618 n

Wie oben in 11°.

Der übrige Theil der Rechnung eben so wie dort.

13°.

log r	0,432 0724
log sin (v — ☊)	9,325 3198 n
log sin i	9,265 4847
Compl. log sin β	1,265 6700 n
log Δ = ...	0,288 5469

V.

Zusatz zu Art. 90 und 100 der Theoria motus corporum coelestium.

(Vergleiche Berliner Jahrbuch für 1814).

Zur Auflösung der wichtigen Aufgabe, aus zweien radiis vectoribus und dem eingeschlossenen Winkel die elliptischen oder hyperbolischen Elemente zu bestimmen, habe ich mich mit grossem Vortheil einer Hülfsgrösse ξ bei der Ellipse, ζ bei der Hyperbel bedient, für welche ich jenem Werke eine Tafel angehängt habe. Berechnet ist diese Tafel nach einem dort angeführten continuirten Bruche, dessen vollständige Ableitung aber dort nicht gegeben ist, und zu dessen theoretischer Entwickelung, die mit andern Untersuchungen zusammenhängt, ich bisher noch nicht Gelegenheit gefunden habe. Es wird daher Manchem lieb sein, hier einen andern Weg angezeigt zu finden, auf welchem man jene Hülfsgrösse ebenso bequem hätte berechnen können.

Wir haben (Art. 90)

$$\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X} = \frac{xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9}}{X}$$

Der Zähler des Bruchs verwandelt sich leicht, wenn man für x die dort gegebene Reihe substituirt, in

$$\frac{8}{105}xx(1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3 + \frac{5.8.10.12.14}{9.11.13.15}x^4 + \text{etc.})$$

Setzt man also die Reihe

$$1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \text{etc.} = A,$$

so wird

$$xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105}Axx$$

$$X = \frac{\frac{4}{3}(1 - \frac{12}{175}Axx)}{1 - \frac{6}{5}x}$$

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}Axx(1 - \frac{6}{5}x)}{1 - \frac{12}{175}Axx},$$

nach welcher Formel man ξ immer bequem und sicher berechnen kann. Für ζ (Art. 100) braucht man nur z statt x zu setzen.

Ich bemerke nur noch, dass man A noch bequemer nach folgender Formel berechnen kann

$$A = (1 - x)^{-\frac{3}{2}}(1 + \frac{1.5}{2.9}x + \frac{1.3.5.7}{2.4.9.11}xx + \frac{1.3.5.5.7.9}{2.4.6.9.11.13}x^3 + \text{etc.})$$

allein die Ableitung dieser Reihe aus der vorigen beruht auf Gründen, die hier nicht angeführt werden können.

VI.

Auszug aus Zach's Monatlicher Correspondenz, Band 28, p. 501 folgende.

Beobachtungen des zweiten Cometen vom Jahre 1813, angestellt auf der Sternwarte zu Göttingen, nebst einigen Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen, von Carl Friedrich Gauss (vorgelegt der königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 10. September 1813). Aus dem Lateinischen übersetzt.

Den Cometen, welchen mein würdiger und geliebter College, Herr Professor Harding, am dritten April dieses Jahres im Sternbilde des Poniatowskyschen Stieres entdeckte, beobachtete ich selbst seit dem 7ten April auf hiesiger Sternwarte. Folgendes sind die Bestimmungen, welche ich mit dem Kreis-Mikrometer des zehnfüssigen Teleskops erhielt:

1813	Mittlere Zeit in Göttingen.	Scheinbare gerade Aufsteigung.	Scheinbare Abweichung.
April 7	$13^h\ 12^m\ 2^s$	$271^0\ 7'\ 19''3$	$5^0\ 34'\ 36''7$ N.
9	13 35 40	270 10 33,5	4 11 3,4
11	13 17 43	269 1 19,9	2 33 0,7
14	13 7 36	266 44 5,5	0 33 0,8 S.
21	14 23 0	256 39 19,3	12 57 56,0

Folgendes sind die corrigirten Elemente, welche Herr Doctor Gerling herausgebracht hat, und welche sich sowohl an die hiesigen Beobachtungen, als auch an die des Herrn Doctor Olbers, so genau als möglich anschliessen:

Zeit des Durchganges durchs Perihelium, im Meridian von Göttingen . . .	1813 Mai 19,44507
Logarithmus des Abstandes im Perihel	0,0849212
Länge des Periheliums	197° 43′ 7″7
Länge des aufsteigenden Knotens	42 40 15, 2
Neigung der Bahn	81 2 11, 8

Bewegung *rückläufig*.

Es sei mir erlaubt, hier noch einige Rechnungsabkürzungen auseinander zu setzen, deren ich mich öfter, bei der ersten Bestimmung der parabolischen Bahn eines Cometen nach der Methode des Herrn Doctor Olbers, mit Vortheil bedient habe, und wodurch diese an sich schon so einfache Methode noch mehr zusammengezogen und zur numerischen Rechnung noch bequemer gemacht werden kann. Sie beziehen sich auf die Berechnung der radii vectores, und besonders der Chorde zwischen dem ersten und dritten Orte. Zu dem Ende wendet Herr Doctor Olbers Ausdrücke von der Form $\sqrt{(f+g\varrho+h\varrho\varrho)}$ an, und bestimmt die Coefficienten f, g, h durch Formeln, die an sich zwar einfach genug sind, deren Zusammensetzung aber in den meisten Fällen keine hinreichende Genauigkeit verstattet, wenn man nicht etwa grössere Logarithmentafeln mit sechs oder sieben Decimalstellen anwenden will. Statt dieser Ausdrücke nun habe ich andere substituirt, die theils zur numerischen Rechnung geeigneter zu sein scheinen, theils den Vortheil gewähren, dass man bei allen Operationen nur Tafeln mit fünf Decimalen anzuwenden nöthig hat. Das ganze Verfahren besteht in Folgendem:

Man bezeichne durch

L, L', L'' die Längen der Sonne in der ersten, zweiten und dritten Beobachtung,

R, R', R'' die Distanzen der Sonne von der Erde,

α, α', α'' die geocentrischen Längen und

β, β', β'' die geocentrischen Breiten des Cometen,

r, r', r'' seine Entfernungen von der Sonne,

ϱ, ϱ', ϱ'' seine curtirten Abstände von der Erde,

t, t', t'' die Beobachtungszeiten,

k die Chorde zwischen dem ersten und dritten Orte des Cometen, und es sei

$$M = \frac{\varrho''}{\varrho},$$

so hat man

[1] $r = \sqrt{[(\varrho\cos\alpha - R\cos L)^2 + (\varrho\sin\alpha - R\sin L)^2 + \varrho\varrho\operatorname{tang}\beta^2]}$

[2] $r'' = \sqrt{[(M\varrho\cos\alpha'' - R''\cos L'')^2 + (M\varrho\sin\alpha'' - R''\sin L'')^2 + MM\varrho\varrho\operatorname{tang}\beta''^2]}$

[3] $k = \sqrt{[(M\varrho\cos\alpha'' - \varrho\cos\alpha - R''\cos L'' + R\cos L)^2 + (M\varrho\sin\alpha'' - \varrho\sin\alpha - R''\sin L'' + R\sin L)^2 + (M\varrho\operatorname{tang}\beta'' - \varrho\operatorname{tang}\beta)^2]}$.

Die Gleichungen 1, 2 verwandeln sich in folgende:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\varrho\varrho}{\cos\beta^2} - 2\varrho R\cos(\alpha - L) + RR\right)}$$

$$r'' = \sqrt{\left(\frac{MM\varrho\varrho}{\cos\beta''^2} - 2M\varrho R''\cos(\alpha'' - L'') + R''R''\right)}$$

Setzt man also

$$\cos\beta\cos(\alpha - L) = \cos\psi,\quad R\sin\psi = B$$
$$\cos\beta''\cos(\alpha'' - L'') = \cos\psi'',\quad R''\sin\psi'' = B''$$

so folgt

$$r = \sqrt{\left[\left(\frac{\varrho}{\cos\beta} - R\cos\psi\right)^2 + BB\right]}$$

$$r'' = \sqrt{\left[\left(\frac{M\varrho}{\cos\beta''} - R''\cos\psi''\right)^2 + B''B''\right]}$$

Bestimmt man ferner fünf*) Hülfsgrössen g, G, h, H, ζ so, dass man habe

$$R''\cos L'' - R\cos L = g\cos G$$
$$R''\sin L'' - R\sin L = g\sin G$$
$$M\cos\alpha'' - \cos\alpha = h\cos\zeta\cos H$$
$$M\sin\alpha'' - \sin\alpha = h\cos\zeta\sin H$$
$$M\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta = h\sin\zeta$$

so verwandelt sich die Formel 3 in folgende:

$$k = \sqrt{[(\varrho h\cos\zeta\cos H - g\cos G)^2 + (\varrho h\cos\zeta\sin H - g\sin G)^2 + \varrho\varrho hh\sin\zeta^2]}$$
$$= \sqrt{(\varrho\varrho hh - 2\varrho hg\cos\zeta\cos(G-H) + gg)}$$

Macht man also

$$\cos\zeta\cos(G-H) = \cos\varphi,\quad g\sin\varphi = A$$

so wird

$$k = \sqrt{[(\varrho h - g\cos\varphi)^2 + AA]}$$

oder, wenn man überdies noch $\varrho h - g\cos\varphi = u$ setzt,

$$k = \sqrt{(uu + AA)}.$$

Es wird mehreren Lesern nicht unangenehm sein, hier nicht nur alle zu diesen Umwandlungen erforderlichen Operationen noch einmal neben einander gestellt, sondern auch alle übrigen Operationen beigefügt zu sehen, um alles, was zur ersten Berechnung einer parabolischen Bahn gehört, hier beisammen zu haben. Zugleich werde ich dieses Verfahren durch ein von unserm Cometen hergenommenes Beispiel erläutern. Zu dem Ende wähle ich meine Beobachtungen vom 7., 14. und 21. April, aus denen man nach gehöriger Reduction folgende Data erhält:

t	$= 7{,}55002$		
t'	$= 14{,}54694$		
t''	$= 21{,}59931$		
α	$= 271^0\ 16'\ 38''$	β	$= +29^0\ 2'\ 0''$
α'	$= 266\ 27\ 22$	β'	$= +22\ 52\ 18$
α''	$= 256\ 48\ 8$	β''	$= +9\ 53\ 12$
L	$= 17\ 47\ 41$	$\log R$	$= 0{,}00091$
L'	$= 24\ 38\ 45$	$\log R'$	$= 0{,}00175$
L''	$= 31\ 31\ 25$	$\log R''$	$= 0{,}00260$

I. Die erste Operation besteht in der genäherten Bestimmung der Grösse M, wofür man folgenden Ausdruck hat

$$M = \frac{t''-t'}{t'-t}\cdot\frac{\operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha-L') - \operatorname{tang}\beta\sin(\alpha'-L')}{\operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha'-L') - \operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha''-L')}$$

Im gegenwärtigen Falle findet man $\log M = 9{,}75799$.

II. Alsdann müssen die Grössen g, G, h, H, ζ nach folgenden Formeln bestimmt werden, welche offenbar den obigen gleichgeltend, und für die Rechnung noch bequemer sind:

$$R''\cos(L''-L) - R = g\cos(G-L)$$
$$R''\sin(L''-L) = g\sin(G-L)$$
$$M - \cos(\alpha''-\alpha) = h\cos\zeta\cos(H-\alpha'')$$
$$\sin(\alpha''-\alpha) = h\cos\zeta\sin(H-\alpha'')$$
$$M\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta = h\sin\zeta$$

---

*) Ueber die Bedeutung der Hülfsgrössen g, G, h, H, ζ cf. Encke, p. 246 und 247 in seiner Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung.

g ist die Chorde der Erdbahn zwischen dem ersten und dritten Orte der Erde.

G die Länge des ersten Erdorts vom dritten aus gesehen.

Wenn N ein Punkt dessen Coordinaten bezogen auf den dritten Erdort sind:

$$\varrho\cos\alpha,\quad \varrho\sin\alpha,\quad \varrho\operatorname{tang}\beta$$

so sind $h\varrho$, H, ζ die Polarcoordinaten des dritten Cometenorts, bezogen auf N als Anfangspunkt, nämlich Abstand, Länge und Breite; h wird immer positiv genommen.

In unserm Beispiele erhält man

$$\begin{aligned} G &= 113^0\,43'\,57'' \\ \log g &= 9{,}38029 \\ H &= 109^0\;\;5'\,49'' \\ \zeta &= 44^0\,13'\;\;9'' \\ \log h &= 9{,}81477. \end{aligned}$$

III. Ferner setzt man

$$\begin{aligned} \cos\zeta\cos(G-H) &= \cos\varphi \\ \cos\beta\cos(\alpha-L) &= \cos\psi \\ \cos\beta''\cos(\alpha''-L'') &= \cos\psi'' \\ g\;\sin\varphi &= A \\ R\;\sin\psi &= B \\ R''\sin\psi'' &= B''. \end{aligned}$$

Sollte es sich hier zufällig treffen, dass die Cosinus der Winkel φ, ψ, ψ'' nur wenig von der Einheit verschieden wären, so wird es gut sein, bei dieser Rechnung Logarithmen mit sechs oder sieben Decimalen zu gebrauchen. Es ist übrigens nicht nöthig, die Winkel φ, ψ, ψ'' in Graden, Minuten und Secunden zu berechnen, sondern man kann sogleich in den Tafeln von den Logarithmen der Cosinus dieser Winkel zu denen der Sinus übergehen.

In unserm Beispiele wird

$$\begin{aligned} \log A &= 9{,}22527 \\ \log B &= 9{,}98706 \\ \log B'' &= 9{,}86038 \end{aligned}$$

IV. Endlich setze man

$$\begin{aligned} h\cos\beta &= b \\ \frac{h\cos\beta''}{M} &= b'' \\ g\cos\varphi - b\,R\cos\psi &= c \\ g\cos\varphi - b''\,R''\cos\psi'' &= c'' \end{aligned}$$

In unserm Beispiele ist

$$\begin{aligned} \log b &= 9{,}75645 \\ \log b'' &= 0{,}05028 \\ c &= +0{,}31365 \\ c'' &= +0{,}95443 \end{aligned}$$

V. Nach diesen Transformationen hängen die radii vectores r, r'' und die Chorde k von der unbekannten Grösse u auf folgende Art ab:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left[\left(\frac{u+c}{b}\right)^2 + BB\right]} \\ r'' &= \sqrt{\left[\left(\frac{u+c''}{b''}\right)^2 + B''B''\right]} \\ k &= \sqrt{(uu+AA)} \end{aligned}$$

Hieraus muss u durch Versuche so bestimmt werden, dass dadurch der Gleichung

$$(r+r''+k)^{\frac{3}{2}} - (r+r''-k)^{\frac{3}{2}} = \frac{t''-t}{m}$$

ein Genüge geschehe, in welcher m die Zeit von 9,6887401 Tagen bedeutet, wovon der Logarithmus = 0,9862673. Der Grösse $(r+r''-k)^{\frac{3}{2}}$ müsste das Zeichen + vorgesetzt werden, wenn der vom Cometen in der Zeit $t''-t$ durchlaufene heliocentrische Bogen grösser als 180° wäre. Dieser Fall kann indess bei den Voraussetzungen, worauf diese erste Bahnbestimmung sich gründet, nicht statt finden. Uebrigens wird es kaum nöthig sein zu bemerken, dass man bei der numerischen Berechnung von r einen Hülfswinkel ϑ einführt, so dass

$$\frac{bB}{u+c} = \operatorname{tang} \vartheta$$

wodurch $r = \frac{B}{\cos\vartheta}$ wird, und eben so bei r'' und k. Auch sieht man leicht ein, dass bei allen diesen Operationen meine Hülfstafel zur unmittelbaren Auffindung der Logarithmen der Summen und Differenzen sehr gute Dienste leisten werde.

In unserm Beispiele ist $\log \frac{t''-t}{m} = 0{,}16139$, und nach wenigen Versuchen findet man $u = 0{,}24388$.*)

VI. Ist u bekannt, so hat man

$$\varrho = \frac{u + g\cos\varphi}{h}, \quad \varrho'' = M\varrho$$

(in unserm Beispiele $\log\varrho = 9{,}80364$, $\log\varrho'' = 9{,}56163$).

Die nun folgenden Operationen sind zwar hinlänglich bekannt; damit indess hier alles beisammen sei, so will ich auch die übrigen Formeln, deren ich mich gewöhnlich bediene, hersetzen. Es seien demnach

λ, λ'' die heliocentrischen Längen des Cometen bei der ersten und dritten Beobachtung,
δ, δ'' die heliocentrischen Breiten,
v, v'' die Längen in der Bahn,
☊ die Länge des aufsteigenden Knotens,
i die Neigung der Bahn, die zwischen 0^0 und 90^0 angenommen werden muss, wenn man, wie gewöhnlich, rechtläufige und rückläufige Bewegung unterscheidet,
ω die Länge des Periheliums,
T die Zeit des Durchganges durchs Perihelium,
q der Abstand im Perihelio.

VII. Die heliocentrischen Positionen findet man durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\varrho\cos(\alpha - L) - R &= r\cos\delta\cos(\lambda - L) \\
\varrho\sin(\alpha - L) &= r\cos\delta\sin(\lambda - L) \\
\varrho\operatorname{tang}\beta &= r\sin\delta \\
\varrho''\cos(\alpha'' - L'') - R'' &= r''\cos\delta''\cos(\lambda'' - L'') \\
\varrho''\sin(\alpha'' - L'') &= r''\cos\delta''\sin(\lambda'' - L'') \\
\varrho''\operatorname{tang}\beta'' &= r''\sin\delta''.
\end{aligned}$$

Stimmen die aus diesen Ausdrücken erhaltenen Werthe für r, r'' mit denen überein, die vorhin aus der Grösse u abgeleitet waren, so wird dieses die Richtigkeit der Rechnung bestätigen. Die Bewegung des Cometen wird rechtläufig oder rückläufig sein, je nachdem λ'' grösser oder kleiner ist als λ.

---

*) cf. Encke, p. 248. Kennt man sonst keine Näherung für ϱ, oder r und r'', wodurch u genähert bekannt würde, so kann man ausgehen von

$$u = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{t''-t}{41}\right)^2 - AA\right]}$$

Diese Versuche werden durch die unten Seite 52 folgende Tafel erleichtert, welche für

$$\eta = \frac{\varkappa(t''-t')}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}$$

den Werth von μ giebt, durch welchen strenge den Werthen von r, r'' und $t''-t$ entsprechend wird:

$$k = \frac{\varkappa(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{1}{2}}}\mu$$

wo $\log\varkappa = 8{,}5366114$.

Man kann dabei den Gang so nehmen, dass man für einen Werth von u aus V. berechnet k, r', r'', dann vermittelst der Tafel aus r, r'' das zugehörige η berechnet, hiermit μ aus der Tafel nimmt, und so einen Werth für k erhält, der den Werthen von r, r'', $t''-t$ entspricht. Es wird u so lange variirt, bis dieser zweite Werth von k völlig übereinstimmt mit dem aus der obigen Formel sub V. berechneten.

In unserm Beispiele findet sich

$$\lambda = 225^0\,4'\,22'', \quad \delta = +14^0\,51'\,39'', \quad \log r = 0{,}13896$$
$$\lambda'' = 223\;\;6\;\;55\;, \quad \delta'' = +\;\;2\;\;49\;\;28\;, \quad \log r'' = 0{,}11068$$

Die Bewegung des Cometen ist also *rückläufig.*

VIII. Zur Bestimmung der Länge des aufsteigenden Knotens und der Neigung bediene ich mich folgender Formeln:

$$\pm \operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega)$$
$$\pm \frac{\operatorname{tang}\delta'' - \operatorname{tang}\delta \cos(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} = \operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega),$$

wo die obern Zeichen sich auf rechtläufige, die untern auf rückläufige Bewegung beziehen. Die Längen in der Bahn erhält man dann durch die Ausdrücke

$$\frac{\operatorname{tang}(\lambda - \Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang}(v - \Omega)$$
$$\frac{\operatorname{tang}(\lambda'' - \Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang}(v'' - \Omega),$$

wo $v - \Omega$, $v'' - \Omega$ resp. in denselben Quadranten genommen werden müssen, in denen $\lambda - \Omega$, $\lambda'' - \Omega$ sind.*)

Für unsern Cometen erhält man

$$\Omega = \;\;42^0\,40'\;\;8''$$
$$i = \;\;81\;\;\;1\;\;\;3$$
$$v = 237\;\;43\;\;\;7$$
$$v'' = 225\;\;31\;\;32.$$

IX. Die Länge des Periheliums und die Distanz im Perihelio geben folgende Formeln:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{q}} \cos\tfrac{1}{2}(v - \omega)$$
$$\frac{\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(v'' - v)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(v'' - v)\,.\,\sqrt{r''}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin\tfrac{1}{2}(v - \omega)$$

Bei unserm Cometen wird $\omega = 197^0\,37'\,51''$, $\log q = 0{,}08469$.

X. Endlich nimmt man aus der Barker'schen Tafel die mittleren Bewegungen, welche den wahren Anomalien $v - \omega$, $v'' - \omega$ oder $\omega - v$, $\omega - v''$ entsprechen. Bezeichnet man sie durch M, M'', so erhält man

$$T = t \mp M n q^{\frac{3}{2}} = t'' \mp M'' n q^{\frac{3}{2}}$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn bei rechtläufiger Bewegung $v > \omega$, $v'' > \omega$, oder bei rückläufiger $v < \omega$, $v'' < \omega$; die untern in entgegengesetzten Fällen. Die Grösse n ist eine Constante, und ihr Logarithmus $= 0{,}0398723$. Die Uebereinstimmung der beiden Werthe für T ist eine zweite Bestätigung der Richtigkeit des Calculs.

In unserm Beispiele findet man

$$T = 49{,}518$$
$$T = 49{,}517$$

so dass man für die Zeit des Durchganges durchs Perihelium annehmen kann Mai 19,5175.

Berechnet man nach diesen Elementen den geocentrischen Ort des Cometen für die Zeit der mittlern Beobachtung, so findet sich die Länge $= 266^0\,27'\,15''$, die nördliche Breite $= 22^0\,52'\,18''$, jene bis auf $7''$, diese genau mit der Beobachtung übereinstimmend.

---

*) Auch hat man hier (cf. Encke, p. 249) noch die Prüfung, dass der früher für die Chorde k berechnete Werth übereinstimmen muss mit:

$$\sqrt{(r^2 + r''^2 - 2\,r\,r''\cos(v'' - v))}$$

TAFEL

zur Auflösung der Lambert'schen Gleichung.

η	lg μ	Diff.	η	log μ	Diff.	η	log μ	Diff.
0,00	0,000 0000		0,30	0,001 6733		0,60	0,007 3526	
		018			1168			2835
0,01	0018		0,31	1 7901		0,61	7 6361	
		054			1211			2913
0,02	0072		0,32	1 9112		0,62	7 9274	
		090			1255			2994
0,03	0162		0,33	2 0367		0,63	8 2268	
		127			1299			3077
0,04	0289		0,34	2 1666		0,64	8 5345	
		163			1344			3163
0,05	0452		0,35	2 3010		0,65	8 8508	
		200			1389			3251
0,06	0652		0,36	2 4399		0,66	9 1759	
		236			1435			3344
0,07	0888		0,37	2 5834		0,67	9 5103	
		273			1481			3439
0,08	1161		0,38	2 7315		0,68	9 8542	
		309			1528			3539
0,09	1470		0,39	2 8843		0,69	10 2081	
		346			1577			3642
0,10	0,000 1816		0,40	0,003 0420		0,70	0,010 5723	
		383			1625			3750
0,11	2199		0,41	3 2045		0,71	10 9473	
		419			1675			3862
0,12	2618		0,42	3 3720		0,72	11 3335	
		456			1725			3980
0,13	3074		0,43	3 5445		0,73	11 7315	
		494			1777			4104
0,14	3568		0,44	3 7222		0,74	12 1419	
		531			1828			4233
0,15	4099		0,45	3 9050		0,75	12 5652	
		569			1881			4370
0,16	4668		0,46	4 0931		0,76	13 0022	
		607			1936			4514
0,17	5275		0,47	4 2867		0,77	13 4536	
		645			1991			4666
0,18	5920		0,48	4 4858		0,78	13 9202	
		683			2048			4829
0,19	6603		0,49	4 6906		0,79	14 4031	
		722			1205			5001
0,20	0,000 7325		0,50	0,004 9011		0,80	0,014 9032	
		761			1264			5186
0,21	0 8086		0,51	5 1175		0,81	15 4218	
		800			2223			5385
0,22	0 8886		0,52	5 3398		0,82	15 9603	
		839			2285			5599
0,23	0 9725		0,53	5 5683		0,83	16 5202	
		879			2347			5831
0,24	1 0604		0,54	5 8030		0,84	17 1033	
		919			2411			6086
0,25	1 1523		0,55	6 0441		0,85	17 7119	
		960			2478			6367
0,26	1 2483		0,56	6 2919		0,86	18 3486	
		1001			2546			6679
0,27	1 3484		0,57	6 5465		0,87	19 0165	
		1041			2615			7030
0,28	1 4525		0,58	6 8080		0,88	19 7195	
		1083			2686			7434
0,29	1 5608		0,59	7 0766		0,89	20 4629	
		1125			2760			7900
0,30	0,001 6733		0,60	0,007 3526		0,90	0,021 2529	
		1168			2835			8463
0,31	1 7901		0,61	7 6361		0,91	22 0992	
		1211			2913			9168
0,32	1 9112		0,62	7 9274		0,92	23 0160	

VII.

Einige Bemerkungen zur Vereinfachung der Rechnung für die geocentrischen Oerter der Planeten. Von Dr. Gauss in Braunschweig.

(Vergl. Art 53—57 der Theoria motus.)

Seit der Erfindung der Pendeluhren beziehen sich alle unsere Beobachtungen der Fixsterne, Planeten und Cometen nicht auf ihre Lage gegen die Ecliptik, sondern unmittelbar auf ihre Lage gegen den Aequator. In unsern neuesten und besten Sternverzeichnissen und Sternkarten sind gleichfalls nicht Länge und Breite, sondern Rectascension und Declination zum Grunde gelegt. Man hat daher sehr häufig Veranlassung, für Planeten und Cometen ihre geocentrischen Oerter in Beziehung auf den Aequator aus ihren heliocentrischen Oertern in ihrer Bahn zu berechnen; und man würde diese Veranlassung noch häufiger haben, wenn man sich entschlösse, in den astronomischen Ephemeriden anstatt der wenig nutzenden Längen und Breiten der Planeten durchgängig die in jeder praktischen Hinsicht viel brauchbarern geraden Aufsteigungen und Abweichungen anzusetzen. Dies hat der vortreffliche Römer (in einem Briefe an Leibnitz. Horrebowii Opera T. II, p. 142) bereits vor hundert Jahren angerathen und besonders wird es ganz unentbehrlich für die beiden neuesten Planeten, die so schwer zu beobachten, und nur vermittelst sehr detaillirter Himmelskarten aus den sie umgebenden kleinen Fixsternen herauszufinden sind. Eben so häufig würde die allgemeinere Befolgung eines andern Vorschlages zu jener Rechnung Gelegenheit geben, nämlich bei Vergleichung des beobachteten Orts eines Planeten oder Cometen mit dem berechneten unmittelbar die beobachtete gerade Aufsteigung und Abweichung zum Grunde zu legen, und nicht erst, wie gewöhnlich geschieht, aus diesen eine sogenannte beobachtete Länge und Breite abzuleiten. Die mit diesem Verfahren verbundenen Vortheile sind bereits von einem competenten Richter im V. Bande der M. C. S. 594 erwähnt worden.

Aus diesem Gesichtspunkte hat man die geocentrische Länge und Breite des Planeten nur als Mittelgrössen anzusehen, um seine Lage gegen den Aequator zu finden. Es wird daher obigen Vorschlägen vielleicht zu einer Empfehlung mehr dienen, dass man dieser Zwischenrechnung, ja selbst der Reduction des heliocentrischen Orts in der Bahn auf den heliocentrischen Ort in Beziehung auf die Ecliptik ganz überhoben sein, und durch sehr einfache und geschmeidige Formeln, welche in gegenwärtigem Aufsatze entwickelt werden sollen, aus jenem die geocentrische Rectascension und Declination unmittelbar ableiten kann. Zu diesen Vortheilen kann man noch die grosse Leichtigkeit hinzufügen, womit sich bei diesem Verfahren die Parallaxe auch in dem Falle mit in Rechnung bringen lässt, wenn der Planet sich ausser dem Meridiane des Beobachtungsorts befindet, welches zwar seltener nöthig, dann aber auch bei andern Methoden ungleich beschwerlicher ist.

Durch den Mittelpunkt der Sonne lege man drei auf einander senkrechte Ebenen, die eine parallel mit dem Erdaequator, die zweite durch die Punkte der Nachtgleichen, also die dritte durch die Punkte der Sonnenwenden. Es heissen die senkrechten Abstände des Mittelpunkts der Erde von diesen drei Ebenen respective Z, Y, X, und die Abstände eines Planeten von eben denselben z, y, x. Diese Abstände sollen als positiv angenommen werden bei der ersten Ebene auf der Seite, wo der Nordpol liegt, bei der zweiten auf der Seite der Sommersonnenwende, bei der dritten auf der Seite der Frühlings-Nachtgleiche. Es werden demnach $z - Z$, $y - Y$, $x - X$ die auf ähnliche Art genommenen senkrechten Abstände des Planeten von dreien, den obigen parallel durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebenen sein. Bezeichnet man also die geocentrische gerade Aufsteigung des Planeten durch α, seine Abweichung durch δ, den Abstand von der Erde durch Δ, so wird

$$x - X = \Delta \cos\delta \cos\alpha; \qquad y - Y = \Delta \cos\delta \sin\alpha; \qquad z - Z = \Delta \sin\delta.$$

Man findet folglich α durch die Formel $\operatorname{tang}\alpha = \frac{y-Y}{x-Z}$, wo das positive oder negative Zeichen des Zählers entscheiden muss, ob α in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen ist. Sodann wird $\Delta \cos\delta = \frac{x-X}{\cos\alpha} = \frac{y-Y}{\sin\alpha}$, und $\operatorname{tang}\delta = \frac{z-Z}{\Delta\cos\delta}$.

Auf diese Weise erhält man also die Rectascension und Declination des Planeten aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen. Verlangt man dieselben, wie sie aus einem Punkte auf der Oberfläche der Erde erscheinen, so ist in obigen Formeln weiter keine Aenderung nöthig, als dass man statt der Coordinaten des Mittelpunkts X, Y, Z, die Abstände des Beobachtungsortes von den drei Fundamentalebenen gebrauchen muss. Ist der Halbmesser der Erde $= \varrho$ *), die Polhöhe des Beobachtungsorts $= \varphi$, und die Sternzeit, die derselbe im Augenblicke der Beobachtung zählt, im Bogen, oder die gerade Aufsteigung des culminirenden Punkts des Aequators $= \vartheta$: so werden jene Abstände, wie man leicht übersehen wird:

$$X + \varrho \cos\varphi \cos\vartheta; \qquad Y + \varrho \cos\varphi \sin\vartheta; \qquad Z + \varrho \sin\varphi.$$

Hierbei ist die Erde als eine Kugel angenommen. Fände man es nöthig, auch auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen (welcher Fall bei Cometen eintreten könnte, die der Erde sehr nahe kämen), so dürfte man nur für ϱ die Entfernung des Beobachtungsorts vom Mittelpunkte der Erde, und für φ seine sogenannte verbesserte Polhöhe setzen, die nach bekannten Regeln bestimmt werden.

Man sieht jetzt also, dass es lediglich darauf ankommt, eine bequeme Methode zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z, x, y, z aufzusuchen. In dieser Absicht sei um die Sonne eine Kugelfläche mit unbestimmtem Halbmesser beschrieben; auf derselben bezeichne P den Nordpol der Ecliptik, p den Nordpol der Ebene der Planetenbahn; K den Ort der Erde, k den heliocentrischen Ort des Planeten; endlich $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ diejenigen Pole der drei Fundamentalebenen, die auf der Seite liegen, wo die Abstände x, y, z positiv genommen werden: also $\mathfrak{Z}$ den Nordpol des Aequators, $\mathfrak{X}$ den Punkt der Frühlings-Nachtgleiche, $\mathfrak{Y}$ den Punkt des Aequators, der 90^0 Rectascension hat (eine Figur wird sich hiernach jeder, der es nöthig findet, leicht selbst entwerfen können). Setzen wir nun den Abstand der Erde von der Sonne $= R$, so wird offenbar

$$X = R\cos\mathfrak{X}K; \qquad Y = R\cos\mathfrak{Y}K; \qquad Z = R\cos\mathfrak{Z}K.$$

Folglich, da in dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{X}PK$ die Seite $PK = 90^0$, also $\cos\mathfrak{X}K = \sin\mathfrak{X}P\cos\mathfrak{X}PK$ ist,

$$X = R\sin\mathfrak{X}P\cos\mathfrak{X}PK, \text{ und ebenso } Y = R\sin\mathfrak{Y}P\cos\mathfrak{Y}PK \text{ und}$$
$$Z = R\sin\mathfrak{Z}P\cos\mathfrak{Z}PK$$

Ganz auf ähnliche Weise werden die Coordinaten des Planeten, wenn wir dessen Abstand von der Sonne durch r bezeichnen

$$x = r\sin\mathfrak{X}p\cos\mathfrak{X}pk; \qquad y = r\sin\mathfrak{Y}p\cos\mathfrak{Y}pk; \qquad z = r\sin\mathfrak{Z}p\cos\mathfrak{Z}pk.$$

Wir bemerken hier ein für allemal, dass wir den sphärischen Winkel $\mathfrak{X}PK$ so verstanden wissen wollen, wie der Schenkel PK auf den Schenkel $P\mathfrak{X}$ nach der Ordnung der Zeichen folgt, so dass also derselbe mit $KP\mathfrak{X}$ nicht gleichbedeutend sein soll, sondern beide einander zu 360^0 ergänzen. Eben so soll jeder andere sphärische Winkel zu verstehen sein. Durch eine solche nähere Bestimmung gewinnen wir den Vortheil, dass die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sich ohne weiteres auch auf Dreiecke mit Winkeln über 180^0 ausdehnen lassen, und weichen so der sonst Statt findenden Nothwendigkeit aus, mehre einzelne Fälle unterscheiden zu müssen. Uebrigens werden Winkel, deren Unterschied 360^0 oder ein Vielfaches davon beträgt, jederzeit als gleichbedeutend angesehen werden.

---

*) Dieser ist also dem Sinus der mittlern Horizontalparallaxe der Sonne gleich, wenn die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit angenommen wird.

Wir nehmen nun zuvörderst die Coordinaten X, Y, Z vor, und setzen die Schiefe der Ecliptik $= \varepsilon$, die heliocentrische Länge der Erde $= \lambda$ ($=$ geocentrische Länge der Sonne $+ 180^0$). In obigen Formeln wird also $\mathfrak{X}P = 90^0$, $\mathfrak{Y}P = 90^0 + \varepsilon$, $\mathfrak{Z}P = \varepsilon$, $\mathfrak{X}PK = \lambda$, $\mathfrak{Y}PK = \mathfrak{Z}PK = \lambda - 90^0$, folglich

$$X = R\cos\lambda; \qquad Y = R\sin\lambda\cos\varepsilon; \qquad Z = R\sin\lambda\sin\varepsilon.$$

Für den Planeten setzen wir Kürze halber $\mathfrak{X}p = a$, $\mathfrak{Y}p = b$, $\mathfrak{Z}p = c$, seine Entfernung in der Bahn vom aufsteigenden Knoten auf der Ecliptik $= t$, und die Winkel $\mathfrak{X}pP$, $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ respective $= A$, B, C. Man wird leicht übersehen, dass $Ppk = t - 90^0$ (oder nach obiger Anmerkung $= t + 270^0$), also $\mathfrak{X}pk = A + t - 90^0$, $\mathfrak{Y}pk = B + t - 90^0$, $\mathfrak{Z}pk = C + t - 90^0$. Es wird demnach

$$x = r\sin a\sin(A + t); \qquad y = r\sin b\sin(B + t); \qquad z = r\sin c\sin(C + t).$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Grössen a, A u. s. w., die nur von der Lage der Bahn des Planeten, nicht von seinem jedesmaligen Orte in derselben abhängig sind, aus der Neigung der Ebene dieser Bahn und der Länge des aufsteigenden Knotens abzuleiten; wir bezeichnen jene mit i, diese mit n. Die Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{X}pP$ giebt uns folgende drei Gleichungen:

$$\operatorname{cotang}\mathfrak{X}pP = \frac{\sin pP\operatorname{cotang}\mathfrak{X}P - \cos pP\cos pP\mathfrak{X}}{\sin pP\mathfrak{X}}$$

$$\cos\mathfrak{X}p = \cos pP\cos\mathfrak{X}P + \sin pP\sin\mathfrak{X}P\cos pP\mathfrak{X}$$

$$\sin\mathfrak{X}p = \frac{\sin\mathfrak{X}P\sin pP\mathfrak{X}}{\sin\mathfrak{X}pP}$$

Ebenso geben die Dreiecke $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ jedes drei ähnliche Gleichungen, welche hier herzusetzen unnöthig ist, da man, um sie zu erhalten, in den drei obigen nur $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ zu vertauschen hat. Nun ist $pP = i$, $pP\mathfrak{X} = 90^0 - n$, $pP\mathfrak{Y} = pP\mathfrak{Z} = 180^0 - n$. Mit diesen und den übrigen Substitutionen werden unsere neun Gleichungen diese:

$$\operatorname{cotang} A = -\cos i\operatorname{tang} n$$

$$\cos a = \sin i\sin n; \qquad \sin a = \frac{\cos n}{\sin A}$$

$$\operatorname{cotang} B = \frac{-\sin i\operatorname{tang}\varepsilon + \cos i\cos n}{\sin n}$$

$$\cos b = -\cos i\sin\varepsilon - \sin i\cos\varepsilon\cos n; \qquad \sin b = \frac{\cos\varepsilon\sin n}{\sin B}$$

$$\operatorname{cotang} C = \frac{\sin i\operatorname{cotang}\varepsilon + \cos i\cos n}{\sin n}$$

$$\cos c = \cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon\cos n; \qquad \sin c = \frac{\sin\varepsilon\sin n}{\sin C}$$

Die Unbestimmtheit, ob man A, B und C in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen habe, wird man so entscheiden, dass die Sinus von a, b und c positiv werden. Man nimmt also A in den beiden ersten Quadranten, wenn $\cos n$ positiv, B und C in eben denselben, wenn $\sin n$ positiv ist; in den entgegengesetzten Fällen aber in den beiden letzten Quadranten.

Die vierte, fünfte, siebente und achte dieser Gleichungen lassen sich durch die Einführung von Hülfswinkeln noch bequemer einrichten. Dies kann auf eine doppelte Weise geschehen:

Erstlich wenn man $\frac{\text{tang}\, i}{\cos n} = \text{tang}\, E$ und $\text{tang}\, i \cos n = \text{tang}\, F$ setzt, so wird

$$\text{cotang}\, B = \frac{\sin i \cos (E+\varepsilon)}{\sin n \cos \varepsilon \sin E} = \frac{\cos i \cos (E+\varepsilon)}{\text{tang}\, n \cos \varepsilon \cos E}$$
$$\cos b = -\frac{\cos i \sin (F+\varepsilon)}{\cos F} = -\frac{\sin i \cos n \sin (F+\varepsilon)}{\sin F}$$
$$\text{cotang}\, C = \frac{\sin i \sin (E+\varepsilon)}{\sin n \sin \varepsilon \sin E} = \frac{\cos i \sin (E+\varepsilon)}{\text{tang}\, n \sin \varepsilon \cos E}$$
$$\cos c = \frac{\cos i \cos (F+\varepsilon)}{\cos F} = \frac{\sin i \cos n \cos (F+\varepsilon)}{\sin F}$$

Zweitens, macht man $\frac{\text{tang}\, \varepsilon}{\cos n} = \text{tang}\, G$, und $\text{tang}\, \varepsilon \cos n = \text{tang}\, H$, so wird:

$$\text{cotang}\, B = \frac{\cos (G+i)}{\text{tang}\, n \cos G} = \frac{\text{tang}\, \varepsilon \cos (G+i)}{\sin i \sin G}$$
$$\cos b = -\frac{\sin \varepsilon \sin (G+i)}{\sin G} = -\frac{\cos n \cos \varepsilon \sin (G+i)}{\cos G}$$
$$\text{cotang}\, C = \frac{\sin (H+i)}{\sin n\, \text{tang}\, \varepsilon \cos H} = \frac{\sin (H+i)}{\text{tang}\, n \sin H}$$
$$\cos c = \frac{\cos \varepsilon \cos (H+i)}{\cos H} = \frac{\sin \varepsilon \cos n \cos (H+i)}{\sin H}$$

Es wird wohl der Mühe werth sein, noch einige Relationen zwischen den Grössen A, a u. s. w. zu entwickeln. Das sphärische Dreieck $\mathfrak{X} p \mathfrak{Y}$ giebt $\cos \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \cos \mathfrak{X} p \cos \mathfrak{Y} p + \sin \mathfrak{X} p \sin \mathfrak{Y} p \cos \mathfrak{X} p \mathfrak{Y}$. Allein $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = 90^0$ und $\mathfrak{X} p \mathfrak{Y} = \mathfrak{X} p P - \mathfrak{Y} p P = A - B$. Also $\cos (A - B) = -\text{cotang}\, a\, \text{cotang}\, b$.

Ebenso geben die Dreiecke $\mathfrak{Y} p \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} p \mathfrak{X}$

$$\cos (B - C) = -\text{cotang}\, b\, \text{cotang}\, c$$
$$\cos (C - A) = -\text{cotang}\, c\, \text{cotang}\, a$$

Ferner wird in dem Dreiecke $\mathfrak{X} p \mathfrak{Y}$, $\cos a = \cos p \mathfrak{Y} \mathfrak{X} \sin b$, und in dem Dreiecke $\mathfrak{Y} p \mathfrak{Z}$, $\sin \mathfrak{Z} \mathfrak{Y} p = \sin \mathfrak{Y} p \mathfrak{Z} \sin c$. Da nun $\mathfrak{Z} \mathfrak{Y} p + p \mathfrak{Y} \mathfrak{X} = \mathfrak{Z} \mathfrak{Y} \mathfrak{X} = 90^0$, so hat man $\cos a = \sin b \sin c \sin \mathfrak{Y} p \mathfrak{Z}$, oder da $\mathfrak{Y} p \mathfrak{Z} = B - C$ ist

$$\sin (B - C) = \frac{\cos a}{\sin b \sin c}$$

Ganz auf ähnliche Art findet man

$$\sin (C - A) = \frac{\cos b}{\sin c \sin a}; \qquad \sin (A - B) = \frac{\cos c}{\sin a \sin b}$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den vorigen giebt noch

$$\text{cotang}\, (A - B) = -\frac{\cos a \cos b}{\cos c}; \qquad \text{cotang}\, (B - C) = -\frac{\cos b \cos c}{\cos a}$$
$$\text{cotang}\, (C - A) = -\frac{\cos c \cos a}{\cos b}$$
$$\cos a^2 = \text{cotang}\, (A - B)\, \text{cotang}\, (C - A)$$
$$\cos b^2 = \text{cotang}\, (B - C)\, \text{cotang}\, (A - B)$$
$$\cos c^2 = \text{cotang}\, (C - A)\, \text{cotang}\, (B - C)$$

und auf ähnliche Art lassen sich die Quadrate der Sinus und Tangenten der Seiten a, b, c durch die Winkel $A - B$, $B - C$, $C - A$ darstellen.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, wollen wir einige derselben auf die Pallas anwenden, und dabei die neuesten Elemente dieses Planeten für 1803 zum Grunde legen. Wir setzen also

$$i = 34^0\, 38'\, 1''1; \qquad n = 172^0\, 28'\, 13''7$$
$$\varepsilon = 23^0\, 27'\, 55''8 \text{ (mittlere Schiefe nach Maskelyne für 1803).}$$

Mit diesen Elementen steht die Rechnung folgendermaassen:

$\log\cos i$	=	9,915 2958
$\log\text{tang}\, n$	=	9,121 1553 n
$\log\text{cotang}\, A$	=	9,036 4511
Also A	=	$263^\circ 47' 35''4$
$\log\cos n$	=	9,996 2390 n
$\log\sin A$	=	9,997 4467 n
$\log\sin a$	=	9,998 7923
$\log\sin i$	=	9,754 5982
$\log\sin n$	=	9,117 3944
$\log\cos a$	=	8,871 9926
Hieraus a	=	$85^\circ 43' 44''8$
$\log\text{tang}\, i$	=	9,839 3024
$\log\cos n$	=	9,996 2390 n
$\log\text{tang}\, E$	=	9,843 0634 n
$\log\text{tang}\, F$	=	9,835 5414 n
Also E	=	$145^\circ\ 8'\ 2''4$
F	=	$145^\circ 35' 52''9$
$E+\varepsilon$	=	$168^\circ 35' 58''2$
$F+\varepsilon$	=	$169^\circ\ 3' 48''7$
$\log\cos i$	=	9,915 2958
Compl. $\log\text{tang}\, n$	=	0,878 8447 n
Compl. $\log\cos E$	=	0,085 9260 n
log const.	=	0,880 0665
$\log\cos(E+\varepsilon)$	=	9,991 3455 n
Compl. $\log\cos\varepsilon$	=	0,837 4886
$\log\text{cotang}\, B$	=	0,908 9009 n
Hieraus B	=	$172^\circ 58' 7''4$

log const.	=	0,880 0665
$\log\sin(E+\varepsilon)$	=	9,295 9318
Compl. $\log\sin\varepsilon$	=	0,399 9023
$\log\text{cotang}\, C$	=	0,575 9006
C	=	$14^\circ 52' 12''5$
$\log\cos\varepsilon$	=	9,962 5114
$\log\sin n$	=	9,117 3944
Compl. $\log\sin B$	=	0,912 1791
$\log\sin b$	=	9,992 0849
$\log\sin\varepsilon$	=	9,600 0977
$\log\sin n$	=	9,117 3944
Compl. $\log\sin C$	=	0,590 6942
$\log\sin c$	=	9,308 1863
$\log\cos i$	=	9,915 2958
$\log\cos F$	=	9,916 5035 n
		9,998 7923 n
$\log\sin(F+\varepsilon)$	=	9,278 1142
$\log\cos(F+\varepsilon)$	=	9,992 0399 n
$\log\cos b$	=	9,276 9065
$\log\cos C$	=	9,990 8322
Also b	=	$79^\circ\ 5' 39''4$
c	=	$11^\circ 43' 52''8$

Wenn man nur die Sinus von a, b, c verlangt, so ist die Rechnung für ihre Cosinus nicht nöthig, und man kann also auch den Hülfswinkel F entbehren. Will man aber auch a, b, c selbst kennen, so dienen die Cosinus (wovon nachher noch ein Gebrauch vorkommt) dazu, die Zweideutigkeiten, welche die Sinus allein dabei übrig lassen, zu entscheiden. Auch geben sie dann, wenn die Sinus näher bei 1 sind, eine schärfere Bestimmung, und zugleich eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung. Zu dieser letzten Absicht ist auch noch der Umstand brauchbar, dass $\frac{\cos i}{\cos F} = \pm \sin a$ ist, wo das obere Zeichen gilt, wenn F mit A zugleich in den beiden ersten oder letzten Quadranten liegt; das untere, wenn F in einer andern Hälfte des Umfanges angenommen ist als A. (Zur Entwickelung des Grundes davon dient die Bemerkung, dass F im ersten Falle mit dem Winkel $P\mathfrak{X}p$ einerlei, im zweiten 180° davon verschieden ist).

Die Grössen ε, n, i sind Secularänderungen unterworfen: dasselbe wird also auch der Fall mit den davon abhängigen A, $a\,B$, $b\,C$, c sein. Sind die jährlichen Aenderungen von jenen bekannt, so können die Aenderungen von A, a u. s. w. durch leicht zu entwickelnde Differentialformeln berechnet werden, bei welchen wir uns hier nicht aufhalten wollen. Man kann auch die Werthe von A, a u. s. w. für eine entferntere Epoche von neuem berechnen, und daraus ihre jährlichen Aenderungen ableiten.

Ausserdem leiden diese Grössen wegen der Nutation noch periodische Aenderungen, die mit jedem Umlaufe der Mondsknoten wiederkehren. Da man nämlich die geocentrische Lage des Planeten gegen den wahren Aequator verlangt, so muss eigentlich für ε nicht die mittlere, sondern die wahre Schiefe der Ekliptik, und für n die Entfernung des aufsteigenden

8

Knotens vom wahren, nicht vom mittlern Aequinoctialpunkte genommen werden. Die hieraus entspringenden periodischen Aenderungen können nach eben den Differentialformeln wie die Seculaiänderungen berechnet, und in eine Tafel, deren Argument die Länge des Mondsknotens ist, gebracht werden. Wenn man eine zahlreiche Menge geocentrischer Oerter für einen nicht zu grossen Zeitraum zu berechnen hat, wird man es in Ermangelung einer solchen Tafel am bequemsten finden, für zwei Epochen zu Anfang und Ende desselben die wahren Werthe von A, a u. s. w. sogleich unmittelbar aus den wahren Werthen von ε, i, n zu berechnen, und für dazwischen liegende Zeiten sie daraus durch einfache Interpolation abzuleiten. Ein Jahr hindurch kann man ohne Bedenken diese Aenderungen als gleichförmig ansehen.

Man könnte auch die von der Nutation abhängigen periodischen Aenderungen ganz übergehen, und sich der mittlern Werthe von A, a u. s. w. bedienen: dann müsste man aber auch bei der Erde für ε die mittlere Schiefe der Ecliptik gebrauchen, und von der Länge λ die Nutation weglassen, um den Abstand vom mittlern Aequinoctium zu haben. Der Erfolg davon ist sodann, dass man die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten in Beziehung auf den mittlern Aequator erhält, woraus man dann seine Lage gegen den wahren Aequator eben so ableitet, wie man den mittlern Ort eines Fixsterns durch Anbringung der Nutation auf den scheinbaren reducirt.

Wir haben jetzt nur noch einiges über die Perturbationen hinzuzufügen. Die Störungen der Breite, von denen allein natürlich hier die Rede ist, sind bei allen ältern Planeten so unbeträchtlich, dass man sie mit Recht ganz vernachlässigen kann; bloss bei der Ceres und Pallas wird es wegen der starken Neigung der Bahnen dieser Planeten gegen die Jupitersbahn nothwendig, sie mit in Rechnung zu nehmen. Es giebt dazu einen doppelten Weg. Man kann nämlich entweder diejenigen Elemente, welche die Lage der Bahn bestimmen, die Neigung und die Länge des Knotens, als veränderlich ansehen und ihre mittlern Werthe durch periodische Gleichungen verbessern, oder auch geradezu untersuchen, wie viel der Planet aus der mittlern Ebene seiner Bahn herauszuweichen durch fremde Kräfte genöthigt sein wird. Im ersten Falle wird man jene Aenderungen auch auf die Grössen A, a u. s. w. übertragen, also diesen ausser den von der Nutation abhängenden noch andere periodische Gleichungen beifügen, deren Argumente mit denen für die Gleichungen der Neigung und der Länge des Knotens übereinkommen werden. Dieses Verfahren ist jedoch bisher nicht üblich gewesen. Bei der zweiten Methode hingegen werden die Störungstafeln die Perturbation der heliocentrischen Breite angeben, welche aber eigentlich nichts anders ist, als die heliocentrische Breite des Planeten über der mittlern Ebene seiner Bahn. Es sei dieselbe $= \beta$, gegen den Nordpol zu als positiv, gegen den Südpol zu als negativ angesehen. In dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{X}pk$ ist also die Seite pk nicht wie vorhin $= 90^0$ sondern $= 90^0 - \beta$ folglich

$$x = r\cos\mathfrak{X}k = r\big(\sin\beta\cos a + \cos\beta\sin a\sin(t + A)\big)$$

und ebenso

$$y = r\big(\sin\beta\cos b + \cos\beta\sin b\sin(t + B)\big)$$
$$z = r\big(\sin\beta\cos c + \cos\beta\sin c\sin(t + C)\big)$$

In so fern hier β höchstens nur einige Minuten betragen kann, wird man $\cos\beta = 1$ und $\sin\beta = \beta$ setzen dürfen. Hieraus erhellet, dass man wegen der Störungen zu den ohne sie gefundenen Werthen von x, y, z nur noch die Grössen $\beta r\cos a$, $\beta r\cos b$, $\beta r\cos c$ hinzuzusetzen habe, wo β in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden muss.

VIII.

Auszug aus einer Abhandlung des Herrn Professors Dr. Klinkerfues über Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen (aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pag. 196 bis 205). *Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei Beobachtungen, von denen eine unvollständig ist. Mit Tafeln.*

Es ist bekannt, dass die Astronomen bei Beobachtung der Cometen sich vorzugsweise des Kreismikrometers bedienen müssen, und dass die Declinationsbestimmungen mit diesem Instrumente gewisse Vorsichtsmaassregeln erfordern, wenn dieselben gelingen sollen. Die Rectascension wird, wie den Beobachtern bekannt ist, immer viel leichter erhalten. Besonders sind meist in der Nacht der Entdeckung die Umstände für die sichere Beobachtung in Declination ungünstig, weil dieselbe das Aufsuchen eines guten Vergleichsterns, kurz Vorbereitungen erfordert, zu welchen keine Zeit bleibt. Ueberhaupt findet in den ersten Tagen nach der Entdeckung und vor Berechnung einer Ephemeride eine grössere Schwierigkeit in dieser Beziehung Statt, wenn auch in geringerem Grade als bei der Entdeckung selbst. So häufig deshalb der Fall, dass eine der drei Declinationen unsicher, oder überhaupt nicht erhalten ist, vorkommt, so hat doch meines Wissens, noch Niemand bis jetzt die erste Bahnbestimmung auf solche fünf Daten gestützt, sondern man hat eine dritte vollständige Beobachtung abgewartet. Ich weiss keinen andern Grund dafür zu finden, als den, dass hier die Olbers'sche Methode nicht passt. Zur Noth kann man allerdings damit eine Bahn drei Längen und zwei Breiten anschliessen, aber diese Combination hat keine praktische Bedeutung, abgesehen davon, dass die Rechnung doch recht mühsam ausfallen würde.

Die folgende Methode, aus drei geocentrischen Beobachtungen, von denen eine die Declination gar nicht oder nur geschätzt enthält, eine parabolische Bahn zu berechnen, bleibt, wie ein Beispiel unten zeigen wird, auch in ungünstigen Fällen noch sehr bequem. Als günstigster Fall nämlich ist zu betrachten, wenn die unvollständige Beobachtung, deren Rectascension im Folgenden immer mit α' bezeichnet ist, die zweite ist, und wenn ausserdem das Zeitintervall zwischen der ersten und dritten Beobachtung $t''-t$ durch t' nahe halbirt wird; alsdann gelangt man am Leichtesten zu dem beliebig scharfen Resultate, welches sich durch die Methode erzielen lässt. Die ungünstigeren Fälle, für welche übrigens die Form dieselbe bleibt, (indem eben stets α' die Rectascension der unvollständigen Beobachtung vorstellt) sind die, wobei dieser unvollständige Ort der erste oder der dritte ist.

Die Parallaxe und Aberration wird, soweit ich den Gebrauch der Rechner kenne, meist bei der ersten Bahnbestimmung vernachlässigt; es kann dies nur in seltenen Fällen erhebliche Folgen haben und erscheint wegen der Mühe, die die Berücksichtigung bei der Olbers'schen Methode verursachen würde, ganz gerechtfertigt. Da aber, wie eben bemerkt, diese Vernachlässigung von bedeutenderem Einfluss werden kann, so ist es nicht gleichgültig, dass bei der vorliegenden Methode der obige Grund für die Vernachlässigung wegfällt. Uebrigens ist schon weiter oben von der Art, Parallaxe und Aberration zu berücksichtigen, auch von der für die Bahnberechnung (und zugleich für die Beobachter) bequemsten Form, die Beobachtungen mitzutheilen, die Rede gewesen, wobei ich also, da es hier ungeändert Anwendung findet, nicht verweile.

Der Methode selbst schicke ich eine Reihenentwickelung für das Verhältniss des parabolischen Sectors zum Dreieck voraus, welche sich in dem *Gauss'schen Nachlasse* findet. Wenn nämlich r und r' die den Sector begrenzenden und zwei Zeiten t und t' entsprechenden Radien Vectoren sind, $\varkappa$ die beide verbindende Sehne, so setzt Gauss

$$\frac{\varkappa}{r+r'} = \sin\varphi$$

und kann alsdann die Lambert'sche Gleichung in folgender Form schreiben

$$2k(t'-t) = \varkappa\sqrt{r+r'}\,\frac{2+\cos\varphi}{3\cos\frac{1}{2}\varphi} = \varkappa\sqrt{r+r'}\left\{1-\tfrac{1}{24}\alpha-\tfrac{1}{128}\alpha^2-\tfrac{3}{1024}\alpha^3-\ldots\text{ etc.}\right\}$$

wobei $\alpha = \frac{\varkappa^2}{(r'+r)^2}$. Ausserdem wird aber noch

$$\frac{\text{Ausschnitt}}{\text{Dreieck}} = \frac{2+\cos\varphi}{3\cos\varphi} = 1+\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{4}\alpha^2+\tfrac{5}{24}\alpha^3+\tfrac{35}{192}\alpha^4+\ldots\text{ etc.}$$

Setzt man daher

$$\frac{4k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3} = \beta$$

so wird

$$\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}} = 1-\tfrac{1}{3}\beta-\tfrac{1}{6}\beta^2-\tfrac{1}{9}\beta^3-\frac{499}{5184}\beta^4-\ldots\text{ etc.}^{*)}$$

Nach dieser Reihenentwickelung habe ich eine kleine Tafel berechnet, welche für $\frac{k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3}$ als Argument $\log\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$ giebt.

Da, wie man sehen wird, die drei bei der Bahnbestimmung in Betracht kommenden Radien Vectoren leicht erhalten werden können, so fällt der Nutzen dieser Tafel in die Augen. Von derselben habe ich bei der folgenden Rechnung Gebrauch gemacht, bevor ich eine andere Hülfstafel construirt hatte, die für die scharfe Bestimmung einer parabolischen Bahn möglichst compendiös ist. Nach dem Vorhergehenden wird $\sin\frac{1}{2}\varphi$ die kleinste positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$x^3-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}\,\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Setzt man daher $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\zeta = \sin 3\psi$, so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin\psi\,.\sqrt{2}$$

Man könnte nun die Lambert'sche Gleichung durch die Relation

$$\varkappa = (r+r')\sin\varphi$$

ersetzen, aber diese Form ist für Construction einer Tafel nicht bequem wegen der grossen Ausdehnung, die man einer solchen geben müsste; es wird aber auch

$$\varkappa = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}}\cdot\frac{3\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\varphi} = 6\,.\,\zeta(r+r')\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\varphi}$$

Ich habe in einer der beifolgenden Tafeln für alle Tausendtel des Arguments ζ zwischen 0 und 0,4 $\log\left(\frac{6\cos\frac{1}{2}\varphi}{2+\cos\varphi}\right)$ berechnet. Ausserdem enthält diese Tafel aber noch eine Columne für $\log\frac{\text{Dreieck}}{\text{Sector}} = \log\left(\frac{3\cos\varphi}{2+\cos\varphi}\right)$. Die folgenden Vorschriften für die Berechnung der parabolischen Bahn aus fünf Daten werden erhalten, wenn man, wie oben, die Gleichungen

$$x' = cx + c''x''$$
$$y' = cy + c''y''$$
$$z' = cz + c''z''$$

---

*) Gütiger Mittheilung des Herrn Professors Klinkerfues verdanken wir die Bemerkung, dass das letzte Glied dieser Reihe, Inhalts einer Dissertation des Herrn Doctors Tietjen, nicht völlig richtig sei, indem statt $-\frac{499}{5184}\beta^4$ gelesen werden müsse $-\frac{55}{648}\beta^4$. Dieser Unterschied sei jedoch für die Tafel unmerklich.

mit derjenigen*) verbindet, welche die unvollständige Beobachtung liefert, nämlich mit

$$\frac{y' - Y'}{x' - X'} = \operatorname{tang} \alpha'$$

Man kommt hierbei auf die folgende Relation zwischen den Distanzen von der Erde ϱ und ϱ''

$$(4) \quad \ldots \quad c'' \varrho'' = M' - Mc - M''c'' - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \cdot \frac{\cos\delta}{\cos\delta''} \cdot c\varrho$$

worin

$$M = (Y \cos\alpha' - X \sin\alpha') \sec\delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha')$$
$$M' = (Y' \cos\alpha' - X' \sin\alpha') \sec\delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha')$$
$$M'' = (Y'' \cos\alpha' - X'' \sin\alpha') \sec\delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha')$$

c und c'' haben mit consequenter Berücksichtigung der Vorzeichen die Bedeutung, wie im Vorhergehenden, d. h.

$$c = \frac{r'r'' \sin(v'' - v')}{r r'' \sin(v'' - v)}; \qquad c'' = \frac{rr' \sin(v' - v)}{rr'' \sin(v'' - v)},$$

Wenn man die Verhältnisse $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$, und zwar η dem Intervalle $t'' - t'$, η'' dem Intervalle $t' - t$ und η' dem Intervalle $t'' - t$ entsprechend einführt, so wird man haben

$$c = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{\eta}{\eta'}, \qquad c'' = \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \frac{\eta''}{\eta'}$$

Einstweilen c und c'' als bekannt angenommen, findet man auf folgende Weise die heliocentrischen Coordinaten x, y, z, x'', y'', z''. Man bringt r^2 und r''^2 auf die Form

$$r^2 = A + B\varrho + \varrho^2; \quad r''^2 = A'' + B''\varrho'' + \varrho''^2$$

und ebenso sei

$$\varkappa^2 = C + D\varrho + E\varrho^2$$

wenn $\varkappa$ die Sehne bedeutet, welche r und r'' verbindet. Um diese Form zu erhalten, hat man

$$A = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad A'' = X''^2 + Y''^2 + Z''^2$$

$$B = 2(X\cos\delta\cos\alpha + Y\cos\delta\sin\alpha + Z\sin\delta); \; B'' = 2(X''\cos\delta''\cos\alpha'' + Y''\cos\delta''\sin\alpha'' + Z''\sin\delta'')$$

Um die Aufstellung des Ausdrucks für $\varkappa$ übersichtlicher zu machen, sei nach (4) der Zusammenhang zwischen ϱ und ϱ'' bei einer Annahme für c und c''

$$\varrho'' = F + f\varrho$$

dann wird

$$C = (X'' - X + F\cos\delta''\cos\alpha'')^2 + (Y'' - Y + F\cos\delta''\sin\alpha'')^2 + (Z'' - Z + F\sin\delta'')^2$$

$$\frac{D}{2} = (X'' - X + F\cos\delta''\cos\alpha'')(f \cdot \cos\delta''\cos\alpha'' - \cos\delta\cos\alpha)$$
$$+ (Y'' - Y + F\cos\delta''\sin\alpha'')(f \cdot \cos\delta''\sin\alpha'' - \cos\delta\sin\alpha) + (Z'' - Z + F\sin\delta'')(f\sin\delta'' - \sin\delta)$$

$$E = (f\cos\delta''\cos\alpha'' - \cos\delta\cos\alpha)^2 + (f\cos\delta''\sin\alpha'' - \cos\delta\sin\alpha)^2 + (f\sin\delta'' - \sin\delta)^2$$

Wenn man die Logarithmen der hier vorkommenden Factoren in einer gewissen Ordnung neben oder unter einander schreibt, ist die Berechnung von C, D und E nichts weniger als beschwerlich. A, B, A'', B'' sind ganz constant, ihre Berechnung gehört daher zur Vorbereitung.

Sobald diese Ausdrücke aufgestellt sind, wird ϱ so zu bestimmen sein, dass der Lambert'schen Gleichung

$$(r'' + r + \varkappa)^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - \varkappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t'' - t)$$

Genüge geschieht; denn die Gleichung (4) giebt zu jedem Werthe von ϱ ein bei der Hypothese

*) In der vorhergehenden Abhandlung des Herrn Professors Klinkerfues bezeichnen $x, y, z, x' \; y' \; z', x'', y'', z''$ die heliocentrischen Coordinaten zu den Zeiten $t, t' \; t''$; X, Y, Z u. s w. die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsorts zu den drei Zeiten; v, v', v'' die wahren Anomalien des Gestirns.

zugehöriges ϱ''. Diese Auflösung der Lambert'schen Gleichung gestattet offenbar dieselben Hülfsmittel, deren man sich sonst dabei bedient, z. B. die Benutzung der bekannten Tafel von Encke oder der im Anfange mitgetheilten Tafel. Aus ϱ und ϱ'', welche sich so ergeben haben, findet man dann x, y, z, x'', y'', z'' auf hinlänglich bekannte Weise, und r' aus der Gleichung

$$r'^2 = (cx + c''x'')^2 + (cy + c''y'')^2 + (cz + c''z'')^2$$

Es ist hiermit Alles bekannt, was nöthig ist, η, η', η'' zu bestimmen, da diese Grössen von $r+r'$, $r+r''$ und $r'+r''$ abhängen. Wenn die neuen Werthe von c und c'' mit denjenigen, welche man angenommen hat, übereinstimmen, werden alle gefundenen Werthe in Schärfe einer Parabel entsprechen; im andern Falle legt man die neuen Werthe, welche sehr viel angenäherter sein werden, bei der Wiederholung der Rechnung zu Grunde.

Die erste Hypothese für c, c'' kann auf verschiedene Weise gebildet werden; am Meisten möchte sich aber wohl empfehlen,

$$r = r' = r'' = 1$$

zu setzen, und hiernach η, η', η'' mit Hülfe der Tafel zu bestimmen. Hält man den Cometen noch für sehr entfernt von der Sonne, oder ihr viel näher als die Erde, so kann man danach leicht die erste Hypothese modificiren.

Ein Beispiel, die Anwendung auf den Cometen 1857 III, wird hinreichen, die Bequemlichkeit der Methode zu zeigen, zumal der Fall so ungünstig gewählt ist. Die Berliner Beobachtungen, von Herrn Dr. Förster in Nr. 1124 der Astronomischen Nachrichten mitgetheilt, sind zwar alle vollständig; ich ignorire aber die Declinationsbestimmung vom 23. Juni und lege folgende Data zu Grunde:

	Mittl. Zeit Berlin	Rectascension	Decl.
1857. Juni 23.	$12^h\,56^m\,53^s$	$53^0\;6'\;53''4$	
27.	12 56 37	61 20 51,1	$+44^0\;43'\;50''1$
Juli 2.	13 27 37	77 2 50,6	+48 47 8,8

Die Unvollständigkeit einer Beobachtung legt, wenigstens in der Praxis, der Reduction vom scheinbaren Ort auf den mittleren kein Hinderniss in den Weg; die Beobachtungen können also auf das mittlere Aequinoctium von 1857 bezogen und von der Aberration der Fixsterne befreiet werden. Die Erdcoordinaten, auf dasselbe Aequinoctium bezogen, sind dem Nautical Almanac entnommen, da dieses Jahrbuch die Reduction vollständig enthält; endlich sind zur Berücksichtigung der Parallaxe, weil sie mit so leichter Mühe zu haben, die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes selbst abgeleitet. Die corrigirte Grundlage der Rechnung wird danach durch folgende Grössen gebildet:

t, t', t'' ...	Juni 27,53932	Juni 23,53950,	Juli 2,56085
α, α', α''	$61^0\;20'\;48''$	$53^0\;6'\;51''$	$77^0\;2'\;44''$
δ δ''	+44 43 46		+48 47 4
X, X', X''	0,10953	0,04203	0,19350
Y, Y', Y''	−0,92730	−0,93183	−0,91569
Z, Z', Z''	−0,40235	−0,40432	−0,39731

Die folgende Rechnung ist, wie in ähnlichen Fällen dem Zweck entsprechend geschieht, auf fünf Decimalstellen geführt. Wenn man auf mehr Stellen rechnet, so kann doch der bedeutendste Theil der Arbeit mit fünf Stellen erledigt werden, da nur die Vorbereitungsrechnung und die letzte Hypothese über die Genauigkeit entscheiden. Aus demselben Grunde würde es auch Zeitverlust sein, auf die provisorischen Lösungen der Lambert'schen Gleichung die grösste Sorgfalt zu verwenden.

Im gegenwärtigen Falle findet man

$$\log M = 0{,}38205_n,\quad \log M' = 0{,}34604_n,\quad \log M'' = 0{,}42085_n,\quad \log\left(\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha''-\alpha')}\right)\cdot\frac{\cos\delta}{\cos\delta''} = 9{,}58047$$

also

$$c''\varrho'' = -2{,}21840 + (0{,}38205)\,c + (0{,}42085)\,c'' - (9{,}58047)\,c\varrho$$

als die für alle Hypothesen gültige Relation zwischen ϱ und ϱ'', in welcher die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten. Auch wird für die ganze Rechnung

$$r^2 = 1{,}033\,76 - 1{,}647\,91\,\varrho + \varrho^2$$
$$r''^2 = 1{,}034\,00 - 1{,}716\,56\,\varrho'' + \varrho''^2$$

Bildet man auf die obige Art die erste Hypothese, so wird

$\log\eta = 9{,}998\,18$, $\log\eta'' = 9{,}999\,66$, $\log\eta' = 9{,}999\,47$, also $\log c = 0{,}253\,15$, $\log c'' = 9{,}901\,39_n$

$$\varrho'' = 0{,}001\,63 + (9{,}932\,23)\,\varrho$$

Für das Quadrat der Sehne erhält man

$$\varkappa^2 = 0{,}007\,2908 - 0{,}038\,719\,\varrho + 0{,}055\,033\,\varrho^2$$

Es genügt der Lambert'schen Gleichung $\log\varrho = 0{,}010\,88$ wozu $\log\varrho'' = 9{,}943\,92$ gehört. Für die drei Radien Vectoren erhält man $\log r = 9{,}798\,54$, $\log r' = 9{,}851\,60$, $\log r'' = 9{,}736\,79$. Mit diesen Werthen wird als Grundlage für die zweite Hypothese gefunden

$\log\eta = 9{,}992\,73$, $\log\eta'' = 9{,}998\,86$, $\log\eta' = 9{,}997\,30$
$\log c = 0{,}249\,87$, $\log c'' = 9{,}902\,76_n$

Als Lösung ergiebt sich jetzt

$$\log\varrho = 0{,}043\,59$$
$$\log\varrho'' = 9{,}994\,04$$

ausserdem

$$\log r = 9{,}818\,83$$
$$\log r' = 9{,}868\,10$$
$$\log r'' = 9{,}748\,16$$

Man kann schon hinreichend sicher an die Zeiten die Correction wegen der Aberration anbringen. Da nämlich $\log\varrho' = 0{,}084\,78$ gefunden wird, sind die reductiones temporum bei t, t', t''

$-0{,}006\,31$
$-0{,}006\,94$
$-0{,}005\,63$

demnach die corrigirten Zeiten

Juni 27. 53301
Juni 23. 53256
Juli 2. 55522

Der dritten Hypothese wird $\log c = 0{,}250\,29$, $\log c'' = 9{,}902\,60_n$ zu Grunde zu legen sein; sie führt auf folgende Zahlen

$$\log\varrho = 0{,}040\,14$$
$$\log\varrho'' = 9{,}988\,45$$
$$\log r = 9{,}816\,39$$
$$\log r' = 9{,}866\,51$$
$$\log r'' = 9{,}746\,02$$

Für die vierte Hypothese würde folgen $\log c = 0{,}250\,16$, $\log c'' = 9{,}902\,59_n$. Man kann nun aber gleich aus dem Gange der Verbesserungen schliessen, dass die Annahme

$0{,}250\,21$ für $\log c$

etwas genauer sein wird. Es ergiebt sich dann schliesslich

$$\log\varrho = 0{,}040\,87$$
$$\log\varrho'' = 9{,}989\,63$$

$(v'' - v)$ folgt aus der Formel

$$4\,r\,r''\sin\tfrac{1}{2}(v'' - v)^2 = \varkappa^2 - (r'' - r)^2$$

es wird hier $\frac{1}{2}(v'' - v) = 5^\circ\,48'\,22''$.

Bekanntlich bestehen die Gleichungen

$$\frac{\frac{\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(v''-v)}{\sqrt{r}}-\frac{\operatorname{cosec.}\frac{1}{2}(v''-v)}{\sqrt{r''}}}{\frac{1}{\sqrt{r}}}=\frac{\frac{\sin\frac{1}{2}v}{\sqrt{q}}}{\frac{\cos\frac{1}{2}v}{\sqrt{q}}}$$

wenn q der Perihelabstand des Cometen ist. Man findet hier

$$\log q = 9{,}565\,28$$

und die Zeit des Perihels

$$T = \text{Juli } 18{,}008\,17$$

Ohne die übrigen Elemente zu berechnen, erhält man

$$\begin{aligned} x &= (9{,}972\,58)\sin(211^0\,18'\,25''+v)r \\ y &= (9{,}933\,28)\sin(288^0\,35'\,41''+v)r \\ z &= (9{,}791\,71)\sin(149^0\,\;2'\,48''+v)r \end{aligned}$$

Hiermit ist die Rechnung beendigt; es kann aber von Interesse sein, zu sehen, wie genau wohl die nicht bei der Rechnung zugezogene Declination vom Juni 23 dargestellt wird. Auf das Aequinoctium von 1857, 0 bezogen, ist diese Declination nach der Beobachtung

$$+40^0\,59'\,34''3$$

Die Rechnung ergiebt $+40^0\,59'\,35''$.

Diese fast völlige Uebereinstimmung ist, zumal die Rechnung auf fünf Decimalstellen geführt wurde, theilweise dem Zufall zuzuschreiben; indessen zeigt sie doch die grösste Zuverlässigkeit der Methode, und dies um so augenfälliger, als ein so beträchtlicher Theil des geocentrischen Laufs, 24 Grade in Rectascension, 8 Grade in der Declination umfasst werden. Dieser Umstand nämlich erschwert es offenbar, sich an die Beobachtungen innerhalb gewisser Grenzen anzuschliessen, während er die Sicherheit der Bahnbestimmung an und für sich erhöht. Gewöhnlich werden zwei Hypothesen eine hinreichende Genauigkeit gewähren, ganz besonders aber dann, wenn die unvollständige Beobachtung die zweite ist. In Nr. 1103 der Astronomischen Nachrichten hat Dr. Pape aus den Beobachtungen Juni 23, Juli 3 zu Berlin und Juli 14 zu Altona ein Elementensystem berechnet, welches nahezu als definitiv gelten kann. Er findet

$$\begin{aligned} \log q &= 9{,}565\,259 \\ T &\quad \text{Juli } 18{,}011\,75 \end{aligned}$$

womit obiges Resultat höchst befriedigend übereinstimmt.

TAFEL

für die Auflösung der Lambert'schen Gleichung und das Verhältniss des Dreiecks zum parabolischen Sector.

ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η
0,000	0,301 030	0,000 000	0,038	0,301 135	9,999 160	0,076	0,301 451	9,996 603
0,001	0,301 030	0,000 000	0,039	0,301 140	9,999 115	0,077	0,301 463	9,996 512
0,002	0,301 030	9,999 998	0,040	0,301 146	9,999 069	0,078	0,301 474	9,996 419
0,003	0,301 031	9,999 995	0,041	0,301 152	9,999 022	0,079	0,301 485	9,996 325
0,004	0,301 031	9,999 991	0,042	0,301 158	9,998 974	0,080	0,301 497	9,996 230
0,005	0,301 032	9,999 986	0,043	0,301 164	9,998 924	0,081	0,301 509	9,996 133
0,006	0,301 033	9,999 980	0,044	0,301 171	9,998 873	0,082	0,301 521	9,996 036
0,007	0,301 034	9,999 972	0,045	0,301 177	9,998 821	0,083	0,301 533	9,995 936
0,008	0,301 035	9,999 963	0,046	0,301 184	9,998 768	0,084	0,301 545	9,995 836
0,009	0,301 036	9,999 953	0,047	0,301 191	9,998 713	0,085	0,301 558	9,995 734
0,010	0,301 037	9,999 942	0,048	0,301 198	9,998 658	0,086	0,301 570	9,995 631
0,011	0,301 039	9,999 930	0,049	0,301 205	9,998 601	0,087	0,301 583	9,995 526
0,012	0,301 040	9,999 917	0,050	0,301 212	9,998 543	0,088	0,301 596	9,995 421
0,013	0,301 042	9,999 902	0,051	0,301 219	9,998 484	0,089	0,301 609	9,995 313
0,014	0,301 044	9,999 887	0,052	0,301 227	9,998 423	0,090	0,301 622	9,995 205
0,015	0,301 046	9,999 870	0,053	0,301 235	9,998 361	0,091	0,301 636	9,995 096
0,016	0,301 049	9,999 852	0,054	0,301 242	9,998 298	0,092	0,301 649	9,994 985
0,017	0,301 051	9,999 833	0,055	0,301 250	9,998 234	0,093	0,301 663	9,994 873
0,018	0,301 054	9,999 812	0,056	0,301 258	9,998 169	0,094	0,301 677	9,994 759
0,019	0,301 056	9,999 791	0,057	0,301 267	9,998 102	0,095	0,301 691	9,994 645
0,020	0,301 059	9,999 768	0,058	0,301 275	9,998 034	0,096	0,301 705	9,994 528
0,021	0,301 062	9,999 744	0,059	0,301 283	9,997 965	0,097	0,301 719	9,994 411
0,022	0,301 065	9,999 719	0,060	0,301 292	9,997 895	0,098	0,301 734	9,994 292
0,023	0,301 068	9,999 693	0,061	0,301 301	9,997 823	0,099	0,301 748	9,994 172
0,024	0,301 072	9,999 666	0,062	0,301 310	9,997 751	0,100	0,301 763	9,994 050
0,025	0,301 075	9,999 637	0,063	0,301 319	9,997 677	0,101	0,301 778	9,993 928
0,026	0,301 079	9,999 608	0,064	0,301 328	9,997 601	0,102	0,301 793	9,993 804
0,027	0,301 083	9,999 577	0,065	0,301 338	9,997 525	0,103	0,301 808	9,993 677
0,028	0,301 087	9,999 545	0,066	0,301 347	9,997 447	0,104	0,301 823	9,993 551
0,029	0,301 091	9,999 512	0,067	0,301 357	9,997 368	0,105	0,301 839	9,993 423
0,030	0,301 095	9,999 477	0,068	0,301 367	9,997 288	0,106	0,301 854	9,993 293
0,031	0,301 099	9,999 442	0,069	0,301 376	9,997 207	0,107	0,301 870	9,993 161
0,032	0,301 104	9,999 405	0,070	0,301 387	9,997 124	0,108	0,301 886	9,993 028
0,033	0,301 109	9,999 367	0,071	0,301 397	9,997 041	0,109	0,301 902	9,992 894
0,034	0,301 114	9,999 328	0,072	0,301 408	9,996 956	0,110	0,301 918	9,992 758
0,035	0,301 119	9,999 288	0,073	0,301 419	9,996 869	0,111	0,301 934	9,992 622
0,036	0,301 124	9,999 247	0,074	0,301 429	9,996 782	0,112	0,301 951	9,992 484
0,037	0,301 129	9,999 204	0,075	0,301 440	9,996 693	0,113	0,301 968	9,992 344

ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η
0,114	0,301 985	9,992 204	0,162	0,303 991	9,983 641	0,210	0,304 402	9,970 964
0,115	0,302 002	9,992 061	0,163	0,303 016	9,983 422	0,211	0,304 436	9,970 646
0,116	0,302 019	9,991 917	0,164	0,303 041	9,983 202	0,212	0,304 470	9,970 326
0,117	0,302 037	9,991 772	0,165	0,303 066	9,982 980	0,213	0,304 505	9,970 004
0,118	0,302 054	9,991 625	0,166	0,303 092	9,982 756	0,214	0,304 539	9,969 678
0,119	0,302 072	9,991 477	0,167	0,303 118	9,982 530	0,215	0,304 574	9,969 351
0,120	0,302 090	9,991 327	0,168	0,303 144	9,982 302	0,216	0,304 609	9,969 021
0,121	0,302 108	9,991 176	0,169	0,303 171	9,982 072	0,217	0,304 645	9,968 688
0,122	0,302 126	9,991 023	0,170	0,303 197	9,981 841	0,218	0,304 680	9,968 353
0,123	0,302 144	9,990 868	0,171	0,303 223	9,981 608	0,219	0,304 716	9,968 015
0,124	0,302 163	9,990 713	0,172	0,303 250	9,981 374	0,220	0,304 752	9,967 675
0,125	0,302 181	9,990 556	0,173	0,303 276	9,981 137	0,221	0,304 788	9,967 333
0,126	0,302 200	9,990 397	0,174	0,303 303	9,980 899	0,222	0,304 825	9,966 990
0,127	0,302 219	9,990 237	0,175	0,303 330	9,980 658	0,223	0,304 861	9,966 643
0,128	0,302 238	9,990 075	0,176	0,303 358	9,980 416	0,224	0,304 898	9,966 293
0,129	0,302 258	9,989 911	0,177	0,303 385	9,980 171	0,225	0,304 935	9,965 940
0,130	0,302 277	9,989 746	0,178	0,303 413	9,979 925	0,226	0,304 971	9,965 585
0,131	0,302 297	9,989 580	0,179	0,303 441	9,979 676	0,227	0,305 009	9,965 227
0,132	0,302 317	9,989 413	0,180	0,303 469	9,979 426	0,228	0,305 047	9,964 866
0,133	0,302 337	9,989 244	0,181	0,303 497	9,979 175	0,229	0,305 085	9,964 502
0,134	0,302 357	9,989 074	0,182	0,303 526	9,978 923	0,230	0,305 123	9,964 136
0,135	0,302 377	9,988 902	0,183	0,303 554	9,978 668	0,231	0,305 161	9,963 768
0,136	0,302 398	9,988 728	0,184	0,303 583	9,978 411	0,232	0,305 200	9,963 399
0,137	0,302 419	9,988 553	0,185	0,303 612	9,978 152	0,233	0,305 239	9,963 026
0,138	0,302 440	9,988 376	0,186	0,303 642	9,977 891	0,234	0,305 278	9,962 649
0,139	0,302 460	9,988 197	0,187	0,303 671	9,977 627	0,235	0,305 317	9,962 270
0,140	0,302 482	9,988 017	0,188	0,303 701	9,977 362	0,236	0,305 356	9,961 888
0,141	0,302 503	9,987 836	0,189	0,303 731	9,977 095	0,237	0,305 396	9,961 502
0,142	0,302 525	9,987 653	0,190	0,303 761	9,976 825	0,238	0,305 436	9,961 113
0,143	0,302 546	9,987 468	0,191	0,303 791	9,976 553	0,239	0,305 476	9,960 722
0,144	0,302 568	9,987 281	0,192	0,303 821	9,976 279	0,240	0,305 516	9,960 327
0,145	0,302 590	9,987 093	0,193	0,303 852	9,976·003	0,241	0,305 557	9,959 930
0,146	0,302 612	9,986 903	0,194	0,303 882	9,975 725	0,242	0,305 598	9,959 531
0,147	0,302 635	9,986 712	0,195	0,303 913	9,975 444	0,243	0,305 639	9,959 128
0,148	0,302 657	9,986 519	0,196	0,303 944	9,975 162	0,244	0,305 680	9,958 722
0,149	0,302 680	9,986 324	0,197	0,303 976	9,974 877	0,245	0,305 721	9,958 312
0,150	0,302 703	9,986 127	0,198	0,304 007	9,974 589	0,246	0,305 763	9,957 899
0,151	0,302 726	9,985 929	0,199	0,304 039	9,974 300	0,247	0,305 805	9,957 483
0,152	0,302 749	9,985 730	0,200	0,304 071	9,974 008	0,248	0,305 847	9,957 063
0,153	0,302 772	9,985 529	0,201	0,304 103	9,973 714	0,249	0,305 889	9,956 639
0,154	0,302 795	9,985 326	0,202	0,304 135	9,973 418	0,250	0,305 931	9,956 213
0,155	0,302 819	9,985 122	0,203	0,304 168	9,973 120	0,251	0,305 973	9,955 784
0,156	0,302 843	9,984 915	0,204	0,304 201	9,972 819	0,252	0,306 016	9,955 353
0,157	0,302 868	9,984 707	0,205	0,304 234	9,972 515	0,253	0,306 059	9,954 920
0,158	0,302 892	9,984 497	0,206	0,304 267	9,972 210	0,254	0,306 102	9,954 482
0,159	0,302 916	9,984 285	0,207	0,304 300	9,971 902	0,255	0,306 146	9,954 039
0,160	0,302 941	9,984 072	0,208	0,304 334	9,971 592	0,256	0,306 190	9,953 593
0,161	0,302 966	9,983 857	0,209	0,304 368	9,971 279	0,257	0,306 234	9,953 145

ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η	ζ	log μ	log η
0,258	0,306 279	9,952 693	0,306	0,308 723	9,926 086	0,354	0,311 904	9,885 168
0,259	0,306 324	9,952 235	0,307	0,308 781	9,925 408	0,355	0,311 980	9,884 082
0,260	0,306 369	9,951 776	0,308	0,308 839	9,924 724	0,356	0,312 057	9,882 983
0,261	0,306 414	9,951 312	0,309	0,308 898	9,924 033	0,357	0,312 134	9,881 871
0,262	0,306 459	9,950 847	0,310	0,308 957	9,923 337	0,358	0,312 211	9,880 746
0,263	0,306 505	9.950 377	0,311	0,309 016	9,922 638	0,359	0,312 289	9,879 609
0,264	0,306 551	9,949 902	0,312	0,309 075	9,921 933	0,360	0,312 367	9,878 459
0,265	0,306 597	9,949 423	0,313	0,309 134	9,921 220	0,361	0,312 446	9,877 301
0,266	0,306 643	9,948 942	0,314	0,309 194	9,920 500	0,362	0,312 525	9,876 127
0,267	0,306 690	9,948 455	0,315	0,309 254	9,919 773	0,363	0,312 605	9,874 938
0,268	0,306 737	9,947 965	0,316	0,309 314	9,919 039	0,364	0,312 685	9,873 732
0,269	0,306 785	9,947 469	0,317	0,309 375	9,918 298	0,365	0,312 765	9,872 511
0,270	0,306 832	9,946 973	0,318	0,309 436	9,917 550	0,366	0,312 846	9,871 274
0,271	0,306 880	9,946 472	0,319	0,309 498	9,916 794	0,367	0,312 927	9,870 022
0,272	0,306 927	9,945 970	0,320	0,309 560	9,916 032	0,368	0,313 008	9,868 754
0,273	0,306 975	9,945 462	0,321	0,309 623	9,915 268	0,369	0,313 090	9,867 470
0,274	0,307 024	9,944 949	0,322	0,309 686	9,914 496	0,370	0,313 172	9,866 170
0,275	0,307 074	9,944 431	0,323	0,309 749	9,913 716	0,371	0,313 256	9,864 860
0,276	0,307 124	9,943 910	0,324	0,309 813	9,912 927	0,372	0,313 341	9,863 531
0,277	0,307 173	9,943 383	0,325	0,309 878	9,912 130	0,373	0,313 427	9,862 184
0,278	0,307 223	9,942 852	0,326	0,309 942	9,911 325	0,374	0,313 512	9,860 818
0,279	0,307 272	9,942 315	0,327	0,310 007	9,910 512	0,375	0,313 598	9,859 432
0,280	0,307 322	9,941 776	0,328	0,310 073	9,909 690	0,376	0,313 684	9,858 029
0,281	0,307 373	9,941 235	0,329	0,310 139	9,908 860	0,377	0,313 771	9,856 606
0,282	0,307 424	9,940 691	0,330	0,310 205	9,908 022	0,378	0,313 857	9,855 164
0,283	0,307 475	9,940 140	0,331	0,310 271	9,907 180	0,379	0,313 945	9,853 704
0,284	0,307 525	9,939 584	0,332	0,310 337	9,906 331	0,380	0,314 032	9,852 225
0,285	0,307 576	9,939 023	0,333	0,310 404	9,905 472	0,381	0,314 122	9,850 723
0,286	0,307 626	9,938 457	0,334	0,310 471	9,904 602	0,382	0,314 213	9,849 198
0,287	0,307 678	9,937 886	0,335	0,310 539	9,903 724	0,383	0,314 304	9,847 653
0,288	0,307 730	9,937 310	0,336	0,310 607	9,902 835	0,384	0,314 395	9,846 085
0,289	0,307 783	9,936 727	0,337	0,310 676	9,901 937	0,385	0,314 487	9,844 495
0,290	0,307 836	9,936 141	0,338	0,310 745	9,901 029	0,386	0,314 579	9,842 883
0,291	0,307 889	9,935 554	0,339	0,310 814	9,900 113	0,387	0,314 671	9,841 250
0,292	0,307 943	9,934 962	0,340	0,310 884	9,899 185	0,388	0,314 763	9,839 594
0,293	0,307 996	9,934 364	0,341	0,310 954	9,898 249	0,389	0,314 856	9,837 917
0,294	0,308 051	9,933 760	0,342	0,311 025	9,897 302	0,390	0,314 951	9,836 219
0,295	0,308 105	9,933 150	0,343	0,311 095	9,896 347	0,391	0,315 046	9,834 466
0,296	0,308 160	9,932 535	0,344	0,311 167	9,895 381	0,392	0,315 144	9,832 691
0,297	0,308 215	9,931 914	0,345	0.311 238	9,894 407	0,393	0,315 241	9,830 889
0,298	0,308 271	9,931 287	0,346	0,311 310	9,893 422	0,394	0,315 339	9,829 063
0,299	0,308 327	9,930 653	0,347	0,311 383	9.892 428	0,395	0,315 437	9,827 212
0,300	0,308 383	9,930 015	0,348	0,311 455	9,891 424	0,396	0,315 536	9,825 336
0,301	0,308 439	9,929 376	0,349	0,311 528	9,890 411	0,397	0,315 635	9,823 435
0,302	0,308 495	9,928 731	0,350	0,311 602	9,889 388	0,398	0,315 733	9,821 509
0,303	0,308 551	9,928 079	0,351	0,311 677	9,888 352	0,399	0,315 833	9,819 559
0,304	0,308 608	9,927 421	0,352	0,311 753	9,887 304	0,400	0,315 934	9,817 582
0,305	0,308 666	9,926 756	0,353	0,311 828	9,886 242			

Die vorstehende Tafel (in welcher die sechste Decimalstelle der Rechnung noch mit aufgeführt ist, um die fünfte mehr zu sichern, und welche, in Folge einer durch Herrn Professor Klinkerfues veranlassten Revision, hier in einem correcteren Abdrucke erscheint, als im zehnten Bande der Abhandlungen etc.), dient zur Bestimmung der Sehne $\varkappa$ vermittelst der Lambert'schen Gleichung in folgender Weise. Man setze

$$\frac{k(t'-t)}{(r'+r)^{\frac{3}{2}}} = \zeta,$$

so giebt die Tafel $\log\mu$ und es ist

$$\varkappa = (r+r')\,\mu\,\zeta.$$

Die zweite Columne enthält den $\log\frac{\triangle}{\text{Sector}}$.

TAFEL

für $\frac{\triangle}{\text{Sector}}$ in der Parabel nach der Gauss'schen Reihenentwicklung, Seite 60.

β	$\log\frac{\triangle}{\text{Sector}}$	β	$\log\frac{\triangle}{\text{Sector}}$	β	$\log\frac{\triangle}{\text{Sector}}$
0,000	0,000 00	0,010	9,994 05	0,020	9,987 76
0,001	9,999 42	0,011	9,993 44	0,021	9,987 11
0,002	9,998 84	0,012	9,992 82	0,022	9,986 46
0,003	9,998 25	0,013	9,992 20	0,023	9,985 80
0,004	9,997 66	0,014	9,991 58	0,024	9,985 14
0,005	9,997 07	0,015	9,990 95	0,025	9,984 47
0,006	9,996 47	0,016	9,990 32	0,026	9,983 80
0,007	9,995 87	0,017	9,989 68	0,027	9,983 13
0,008	9,995 26	0,018	9,989 05	0,028	9,982 45
0,009	9,994 66	0,019	9,988 40	0,029	9,981 77
0,010	9,994 05	0,020	9,987 76	0,030	9,981 09

Auch diese Tafel ist einer nochmaligen Revision unterzogen. Während bei der Reihenentwicklung $\beta = \frac{4k^2(t'-t)^2}{(r'+r)^3}$ ist, ist hier $\beta = \frac{k^2(t'-t)^2}{(r'+r)^3}$ also $= \zeta^2$ und man kann daher leicht diese kleine, nach der Reihenentwicklung berechnete Tafel mit der vorangehenden grösseren controliren.

IX.

Ueber den Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung aus denselben drei vollständigen Beobachtungen

hat Herr Professor Encke in den Nummern 640 und 641 der Astronomischen Nachrichten sich ausgesprochen. Auf diese Abhandlung muss daher hier verwiesen werden. Setzt man $m = cQ \sin\omega$; $q = (\omega + \sigma)$, so wird die Gleichung IV im Artikel 141 der Theoria motus, falls r' grösser als R'

$$m \sin z^4 = \sin(z - q),$$

und falls r' kleiner als R'

$$m \sin z^4 = \sin(z + q),$$

wobei m stets positiv.

Folgendes sind die Bedingungen, unter denen es möglich ist, eine von der Erdbahn verschiedene Planetenbahn zu finden, welche drei vollständigen Beobachtungen Genüge leisten soll.

Erstens. Die Gleichung

$$m \sin z^4 = \sin(z + q)$$

muss vier reelle Wurzeln haben. — Hiezu ist erforderlich, dass ohne Rücksicht auf das Zeichen $\sin q$ kleiner sein muss als $\frac{3}{5}$, und dass m zwischen den Grenzen m' und m'' liegen muss. (m' und m'' sind in der umstehenden Tafel angegeben.)

Zweitens. Von diesen vier reellen Wurzeln müssen drei positiv und eine negativ sein. Um diese Bedingung zu erfüllen, ist es nothwendig, dass $\cos q$ positiv bleiben muss für alle vier derjenigen Werthe, für welche $\sin q$ kleiner ist, als $\pm\frac{3}{5}$; die beiden im zweiten und dritten Quadranten sind ausgeschlossen, und nur Werthe zwischen $-36^0\,52'$ und $+36^0\,52'$ beizubehalten.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so muss stets eine der drei positiven reellen Wurzeln der Erdbahn entsprechen, und diese kann daher nicht in Frage kommen. Im Allgemeinen wird es nicht zweifelhaft sein, welche der beiden anderen Wurzeln zur Lösung der Aufgabe zu benutzen ist. Unter Anwendung der obigen Bezeichnung auf die Artikel 139 und 140 der Theoria motus hat man

$$\frac{\sin z}{R'} = \frac{\sin(\delta' - z)}{\varrho'} = \frac{\sin \delta'}{r'}.$$

Es müssen daher nicht nur z und δ' stets kleiner sein als 180^0, sondern es muss auch $\sin(\delta' - z)$ positiv sein, mithin δ' grösser als z.

Stellt man nun die drei reellen positiven Wurzeln nach Ordnung ihrer absoluten Grösse zusammen, so lassen sich drei Fälle unterscheiden. Entweder die kleinste Wurzel nähert sich dem Werthe für δ' am meisten und entspricht mithin der Erdbahn. In diesem Falle ist die Aufgabe unmöglich, weil die Bedingung, dass δ' grösser als z, nicht erfüllt werden kann. Oder die mittlere Wurzel coincidirt mit δ'; dann kann die Aufgabe nur mittelst der kleinsten Wurzel gelöst werden. Oder endlich die grösste der drei Wurzeln ist nur wenig verschieden von δ'. In diesem Falle hat man die Wahl zwischen beiden kleineren Wurzeln, von denen jede eine planetarische Bahn liefert, weil beide alle Bedingungen erfüllen, und es muss dann erst durch Zuziehung von anderen, als den drei gegebenen, der bisherigen Rechnung zum Grunde liegenden Beobachtungen bestimmt werden, welche Bahn die richtige ist.

Den von Herrn Professor Encke in Nr. 641 der Astronomischen Nachrichten gegebenen Rechnungsbeispielen fügen wir auf Seite 72 noch ein dem Astronomischen Journale von Gould, Band I, Nr. 19, entnommenes Exempel hinzu.

$m \sin z^4 = \sin (z - q)$. m und q positiv.

q	log m'	log m''	z' m''	z' m'	z'' m'	z'' m''	z''' m''	z''' m'	z^{IV} m'	z^{IV} m''
1°	4,2976	9,9999	1° 0'	1°20'	1°20'	89°40'	89°40'	177°37'	180°55'	181° 0'
2	3,3950	9,9996	2 0	2 40	2 40	89 20	89 20	175 14	181 51	182 0
3	2,8675	9,9992	3 0	4 0	4 0	89 0	89 0	172 52	182 46	183 0
4	2,4938	9,9986	4 0	5 20	5 20	88 40	88 40	170 28	183 42	184 0
5	2,2044	9,9978	5 0	6 41	6 41	88 19	88 19	168 5	184 37	185 0
6	1,9686	9,9968	6 0	8 1	8 1	87 59	87 59	165 41	185 32	186 0
7	1,7698	9,9957	7 1	9 22	9 22	87 38	87 38	163 18	186 28	186 59
8	1,5981	9,9943	8 1	10 42	10 42	87 18	87 18	160 52	187 23	187 59
9	1,4473	9,9928	9 2	12 3	12 3	86 57	86 57	158 28	188 18	188 58
10	1,3130	9,9911	10 3	13 25	13 25	86 35	86 35	156 3	189 13	189 57
11	1,1922	9,9892	11 5	14 46	14 46	86 14	86 14	153 37	190 9	190 56
12	1,0824	9,9871	12 7	16 8	16 8	85 52	85 52	151 10	191 4	191 54
13	0,9821	9,9848	13 9	17 31	17 31	85 29	85 29	148 43	191 59	192 52
14	0,8898	9,9823	14 12	18 53	18 53	85 7	85 7	146 14	192 54	193 49
15	0,8045	9,9796	15 16	20 17	20 17	84 43	84 43	143 45	193 49	194 46
16	0,7254	9,9767	16 20	21 40	21 40	84 20	84 20	141 14	194 44	195 42
17	0,6518	9,9736	17 26	23 5	23 5	83 55	83 55	138 42	195 39	196 38
18	0,5830	9,9702	18 33	24 30	24 30	83 30	83 30	136 9	196 33	197 33
19	0,5185	9,9667	19 41	25 56	25 56	83 4	83 4	133 34	197 28	198 28
20	0,4581	9,9629	20 51	27 23	27 23	82 37	82 37	130 58	198 23	199 22
21	0,4013	9,9588	22 2	28 50	28 50	82 10	82 10	128 19	199 17	200 15
22	0,3479	9,9545	23 15	30 19	30 19	81 41	81 41	125 38	200 11	201 8
23	0,2976	9,9499	24 31	31 49	31 49	81 11	81 11	122 55	201 6	202 0
24	0,2501	9,9451	25 49	33 20	33 20	80 40	80 40	120 9	202 0	202 51
25	0,2053	9,9400	27 10	34 53	34 53	80 7	80 7	117 20	202 54	203 42
26	0,1631	9,9345	28 35	36 28	36 28	79 32	79 32	114 27	203 47	204 32
27	0,1232	9,9287	30 4	38 5	38 5	78 55	78 55	111 30	204 41	205 22
28	0,0857	9,9226	31 38	39 45	39 45	78 15	78 15	108 27	205 35	206 11
29	0,0503	9,9161	33 18	41 27	41 27	77 33	77 33	105 19	206 28	207 0
30	0,0170	9,9092	35 5	43 13	43 13	76 47	76 47	102 3	207 21	207 48
31	9,9857	9,9019	37 1	45 4	45 4	75 56	75 56	98 37	208 14	208 36
32	9,9565	9,8940	39 9	47 1	47 1	74 59	74 59	95 0	209 6	209 24
33	9,9292	9,8856	41 33	49 6	49 6	73 54	73 54	91 6	209 58	210 11
34	9,9040	9,8765	44 21	51 22	51 22	72 38	72 38	86 49	210 50	210 58
35	9,8808	9,8665	47 47	53 58	53 58	71 2	71 2	81 53	211 41	211 46
36	9,8600	9,8555	52 31	57 13	57 13	68 47	68 47	75 40	212 32	212 33
q'	9,8443	9,8443	63 26	63 26	63 26	63 26	63 26	63 26	213 15	213 15

$q' = 36^0\ 52'\ 11'',64$. $\sin q' = 0,6 = \frac{3}{5}$.

$m \sin z^4 = \sin (z + q)$. m und q positiv.

q	log m'	log m''	z' m'	z' m''	z'' m''	z'' m'	z''' m'	z''' m''	z^{IV} m''	z^{IV} m'
1°	4,2976	9,9999	2°23′	90°20′	90°20′	178°40′	178°40′	179° 0′	359° 0′	359° 5′
2	3,3950	9,9996	4 46	90 40	90 40	177 20	177 20	178 0	358 0	358 9
3	2,8675	9,9992	7 8	91 0	91 0	175 0	175 0	177 0	357 0	357 14
4	2,4938	9,9986	9 32	91 20	91 20	174 40	174 40	176 0	356 0	356 18
5	2,2044	9,9978	11 55	91 41	91 41	173 19	173 19	175 0	355 0	355 23
6	1,9686	9,9968	14 19	92 1	92 1	171 59	171 59	174 0	354 0	354 28
7	1,7698	9,9957	16 42	92 22	92 22	170 38	170 38	172 59	353 1	353 32
8	1,5981	9,9943	19 7	92 42	92 42	169 18	169 18	171 59	352 1	352 37
9	1,4473	9,9928	21 32	93 3	93 3	167 57	167 57	170 58	351 2	351 42
10	1,3130	9,9911	23 57	93 25	93 25	166 35	166 35	169 57	350 3	350 47
11	1,1922	9,9892	26 23	93 46	93 46	165 14	165 14	168 55	349 4	349 51
12	1,0824	9,9871	28 50	94 8	94 8	163 52	163 52	167 54	348 6	348 56
13	0,9821	9,9848	31 17	94 31	94 31	162 29	162 29	166 51	347 8	348 1
14	0,8898	9,9823	33 46	94 53	94 53	161 7	161 7	165 48	346 11	347 6
15	0,8045	9,9796	36 15	95 17	95 17	159 43	159 43	164 44	345 14	346 11
16	0,7254	9,9767	38 46	95 40	95 40	158 20	158 20	163 40	344 18	345 16
17	0,6518	9,9736	41 18	96 5	96 5	156 55	156 55	162 34	343 22	344 21
18	9,5830	9,9702	43 51	96 30	96 30	155 30	155 30	161 27	342 27	343 27
19	0,5185	9,9667	46 26	96 56	96 56	154 4	154 4	160 19	341 32	342 32
20	0,4581	9,9629	49 2	97 23	97 23	152 37	152 37	159 9	340 38	341 37
21	0,4013	9,9588	51 41	97 50	97 50	151 10	151 10	157 58	339 45	340 43
22	0,3479	9,9545	54 22	98 19	98 19	149 41	149 41	156 45	338 52	339 49
23	0,2976	9,9499	57 5	98 49	98 49	148 11	148 11	155 29	338 0	338 54
24	0,2501	9,9451	59 51	99 20	99 20	146 40	146 40	154 11	337 9	338 0
25	0,2053	9,9400	62 40	99 53	99 53	145 7	145 7	152 50	336 18	337 6
26	0,1631	9,9345	65 33	100 28	100 28	143 32	143 32	151 25	335 28	336 13
27	0,1232	9,9287	68 30	101 5	101 5	141 55	141 55	149 56	334 38	335 19
28	0,0857	9,9226	71 33	101 45	101 45	140 15	140 15	148 22	333 49	334 25
29	0,0503	9,9161	74 41	102 27	102 27	138 33	138 33	146 42	333 0	333 32
30	0,0170	9,9092	77 57	103 13	103 13	136 46	136 46	144 55	332 12	332 39
31	9,9857	9,9019	81 23	104 4	104 4	134 56	134 56	142 59	331 24	331 46
32	9,9565	9,8940	85 0	105 1	105 1	132 59	132 59	140 51	330 36	330 54
33	9,9292	9,8856	88 54	106 6	106 6	130 54	130 54	138 27	329 49	330 2
34	9,9040	9,8765	93 11	107 22	107 22	128 38	128 38	135 38	329 2	329 10
35	9,8808	9,8665	98 7	108 58	108 58	126 2	126 2	132 13	328 14	328 19
36	9,8600	9,8555	104 20	111 13	111 13	122 47	122 47	127 29	327 27	327 28
q'	9,8443	9,8443	116 34	116 34	116 34	116 34	116 34	116 34	326 45	326 45

$q' = 36^0\ 52'\ 11'',64$. $\sin q' = 0,6 = \frac{3}{5}$.

Bei dem fünften Cometen des Jahres 1847 leitete Herr Dr. Gould aus der ersten Hypothese die Gleichung ab:

$$[9{,}902\,1264]\sin z^4 = \sin(z + 32^0\,53'\,28''5)$$

für δ' war gefunden: $\delta' = 133^0\,0'\,31''$.

Man hat also $\sin q$ kleiner als $\frac{3}{5}$ und ein Blick auf die Tafel zeigt, dass der (als Logarithmus gegebene) Factor in der Klammer zwischen m' und m'' liegt. Es sind folglich hier vier reelle Wurzeln vorhanden, von denen drei positiv sind. Hier nähert sich daher z''' so sehr dem gegebenen δ', dass darüber kein Zweifel bestehen kann. Es tritt mithin der Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung ein, wobei nach der Tafel die beiden möglichen Werthe für z liegen zwischen $88^0\,29'$ bis $105^0\,59'$ und zwischen $105^0\,59'$ bis $131^0\,7'$. Thatsächlich sind die vier Wurzeln:

$$\begin{aligned} z' &= 95^0\,31'\,43''5 \\ z'' &= 117\;\;31\;\;13{,}1 \\ z''' &= 137\;\;38\;\;16{,}7 \\ z^{\mathrm{IV}} &= 329\;\;58\;\;35{,}5. \end{aligned}$$

Die zweite Wurzel (117^0 u. s. w.) lieferte eine Ellipse von sehr kurzer Umlaufszeit, aber die anderen Beobachtungen zeigten, dass dies nicht die wahre Bahn war.

Dieser Ausnahmefall kann, wie ein Blick auf die Tafel ausweist, niemals eintreten, sobald δ' kleiner ist als $63^0\,26'$.

Die Wurzel z^{IV} ist nur der Vollständigkeit wegen in die Tafel mit aufgenommen, indem die Wurzel z^{IV}, da für dieselbe $\sin z$ negativ ausfällt, nie in Frage kommen kann.