

(225)

## Vierter Abschnitt.

### Ueber die Bestimmung der Bahnen mit Rücksicht auf Störungen.

#### 190.

Die Störungen, welche die Bewegungen der Planeten durch Einwirkung der übrigen Planeten erleiden, sind so klein und gehen so langsam vor sich, dass sie erst nach einem längeren Zeitablaufe merklich werden. Innerhalb kürzerer Zeit — und mithin (je nach Beschaffenheit der Umstände) während einer oder mehrerer ganzen Revolutionen — weicht die Bewegung so wenig von derjenigen ab, die in einer vollkommenen, genau nach den Kepler'schen Gesetzen beschriebenen Ellipse Statt findet, dass die Beobachtungen diese Abweichung nicht anzeigen können. So lange dies sich so verhält, würde es nicht der Mühe werth sein, eine verfrühete Berechnung der Störungen zu unternehmen; vielmehr genügt es, einen gleichsam osculirenden Kegelschnitt den Beobachtungen anzupassen. Später aber, nachdem der Planet längere Zeit hindurch genau beobachtet ist, wird der Einfluss der Störungen sich endlich so zeigen, dass es nicht ferner möglich ist, alle Beobachtungen durch eine rein elliptische Bewegung genau zu vereinigen und es lässt sich sodann eine vollständige und stabile Harmonie nicht herstellen, ohne die Störungen mit der elliptischen Bewegung gehörig zu verbinden.

Da die Bestimmung elliptischer Elemente, mit welchen die Störungen behuf genauer Darstellung der Beobachtungen zu verbinden sind, eine Kenntniss der Störungen voraussetzt, umgekehrt aber die Theorie der Störungen nicht genau festgestellt werden kann, ohne eine bereits sehr genaue Kenntniss der Elemente, so gestattet die Natur der Sache nicht, dies schwierige Geschäft sofort im ersten Angriffe vollständig zu erledigen, sondern es können Störungen und Elemente erst durch mehrfach abwechselnd wiederholte Verbesserungen zur grössten Höhe der Schärfe emporgehoben werden.

Die erste Theorie der Störungen wird daher auf rein elliptische Elemente gestützt, welche man den Beobachtungen so genau als möglich angepasst hatte. — Dann wird eine neue Bahn erforscht, welche, mit diesen Störungen verbunden, den Beobachtungen so nahe als möglich Genüge thut. Ist diese von den früheren beträchtlich verschieden, so wird auf dieselbe eine wiederholte Entwicklung der Störungen gestützt, und diese Verbesserungen werden abwechselnd so oft wiederholt, bis Beobachtungen, Elemente und Störungen so genau wie möglich übereinstimmen.

### 191.

Da die Entwicklung der Theorie der Störungen aus gegebenen Elementen meinem Vorhaben fremd ist, so braucht hier nur gezeigt zu werden, wie eine genäherte Bahn so verbessert werden kann, dass sie, mit den gegebenen Störungen verbunden, der Beobachtung so nahe als möglich Genüge thut. Dies Geschäft lässt sich sehr einfach durch eine den Artikeln 124, 165, (226) 188 analoge Methode erledigen.

Für die Zeiten aller derjenigen Beobachtungen, welche man zu diesem Zwecke benutzen will, und deren, je nach Belegenheit der Sache es drei, vier oder mehr geben kann, werden aus den Gleichungen die numerischen Werthe dieser Störungen berechnet, sowohl für die Längen in der Bahn, als für die Radien Vectoren, als für die heliocentrischen Breiten. Für diese Rechnung nimmt man die Argumente aus den genäherten elliptischen Elementen, auf welche man die Störungstheorie gestützt hatte. Dann werden aus allen Beobachtungen zwei ausgewählt, für welche man die Abstände von der Erde aus denselben genäherten Elementen berechnet. Diese constituiren die erste Hypothese. Die zweite und dritte Hypothese werden gebildet, indem man jene Abstände ein klein wenig ändert. Dann werden in den einzelnen Hypothesen aus den beiden geocentrischen Orten die heliocentrischen Positionen und die Entfernungen von der Sonne bestimmt. Aus diesen leitet man, nachdem die Breiten von den Störungen befreit sind, die Länge des aufsteigenden Knotens, die Neigung der Bahn und die Längen in der Bahn ab. Bei dieser Berechnung bedarf die Methode des Art. 110 einer Modification, wenn es anders der Mühe werth erscheint, auf die säculare Aenderung der

Knotenlänge und der Neigung Rücksicht zu nehmen. Bezeichnet man nämlich mit  $\beta$ ,  $\beta'$  die heliocentrischen, von den periodischen Störungen befreiten Breiten, mit  $\lambda$ ,  $\lambda'$  die heliocentrischen Längen, mit  $\Omega$ ,  $\Omega + A$  die Längen des aufsteigenden Knotens, mit  $i$  und  $i + \delta$  die Neigungen der Bahn, so empfiehlt es sich, die Gleichungen in folgender Gestalt darzustellen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \beta &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega) \\ \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(i + \delta)} \operatorname{tang} \beta' &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda' - A - \Omega). \end{aligned}$$

Der Werth für  $\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(i + \delta)}$  wird mit aller nöthigen Schärfe erhalten, wenn man für  $i$  den genäherten Werth setzt; sodann lassen sich  $i$  und  $\Omega$  durch die gewöhnlichen Methoden ermitteln.

Von den beiden Längen in der Bahn ferner, sowie von den beiden Radien Vektoren werden die Summen der Störungen abgezogen, um rein elliptische Werthe zu erhalten. Hier aber kann auch diejenige Einwirkung, welche die säcularen Veränderungen der Position des Perihels und der Excentricität auf die Länge in der Bahn und den Radius Vector äussern — welche Einwirkung durch die Differentialformeln des ersten Abschnitts im ersten Buche zu bestimmen ist —, sofort mit den periodischen Störungen verbunden werden, wenn anders die Beobachtungen genügend von einander entfernt sind, dass es der Mühe werth erscheint, hierauf Rücksicht zu nehmen. Aus diesen verbesserten Längen in der Bahn und verbesserten Radien Vektoren werden zugleich mit den entsprechenden Zeiten die übrigen Elemente bestimmt. Endlich werden aus diesen Elementen die geocentrischen Positionen für alle (227) beobachteten wird auf die in Art. 188 entwickelte Art dasjenige System der Abstände hergeleitet, aus welchem Elemente erfließen, die allen übrigen Beobachtungen bestmöglichst genügen.

## 192.

Die im vorangehenden Artikel erklärte Methode ist vorzugsweise der Bestimmung der ersten, die Störungen mit enthaltenden Bahn angepasst. Sobald aber nur erst sowohl die mittleren elliptischen Elemente, als die

Störungsgleichungen schon recht nahe bekannt sind, so wird die genaueste Bestimmung mit Hilfe so vieler Beobachtungen als möglich am bequemsten durch Anwendung der Methode des Art. 187 erledigt, welche hier einer besondern Erläuterung nicht bedürfen wird. Wenn nun ein hinreichend grosser Vorrath an vorzüglichen Beobachtungen vorhanden ist, der einen grossen Zeitraum umfasst, so kann diese Methode in mehren Fällen zugleich zur genaueren Bestimmung der Massen der störenden Planeten (wenigstens der grössern) dienen. Erscheint nämlich die bei der Störungsrechnung vorausgesetzte Masse eines störenden Planeten noch nicht hinreichend sicher, so mag man ausser den sechs, von den Verbesserungen der Elemente abhängenden Unbekannten, noch eine andere  $\mu$  einführen, indem man das Verhältniss der verbesserten Masse zu der vorausgesetzten Masse wie  $1 + \mu$  zu 1 setzt. Man darf dann annehmen, dass die Störungen selbst in eben diesem Verhältnisse geändert werden, woraus offenbar bei den einzelnen berechneten Positionen ein neuer lineärer, das  $\mu$  enthaltender Ausdruck erzeugt wird, dessen Entwicklung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Die Vergleichung der berechneten Positionen mit den beobachteten nach den oben auseinandergesetzten Principien, wird zugleich mit den Verbesserungen der Elemente auch die Verbesserung für  $\mu$  geben. Es lassen sich daraus also auch die Massen mehrer Planeten genauer bestimmen, wenn sie Störungen von genügender Beträchtlichkeit ausüben. Zweifelsohne werden die Bewegungen der neuen Planeten, hauptsächlich der Pallas und der Juno, welche so beträchtliche Störungen von dem Jupiter erleiden, solchergestalt nach einigen Jahrzehnden zu einer sehr genauen Bestimmung der Masse des Jupiter führen. Ja es wird sogar vielleicht dereinst möglich sein, die Masse eines oder des anderen dieser neuen Planeten aus den Störungen zu erkennen, welche er auf die übrigen ausübt.

---