

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer Bahn, die den Beobachtungen, so viele man ihrer hat, sich möglichst genau anschliesst.

172.

Wenn die astronomischen Beobachtungen und die übrigen Zahlen, auf welche die Bahnberechnung sich stützt, einer absoluten Genauigkeit sich erfreuten, so würden auch die Elemente, mag man sie nun aus drei oder aus vier Beobachtungen herleiten, sogleich absolut genau herauskommen (wenigstens so lange man voraussetzt, dass die Bewegung genau nach den Kepler'schen Gesetzen vor sich geht) und sie könnten daher durch Hinzunahme anderer und wieder anderer Beobachtungen nur bestätigt, nicht verbessert werden. Da aber alle unsere Messungen und Beobachtungen nichts als Annäherungen an die Wahrheit sind, und dasselbe von allen darauf gestützten Rechnungen gelten muss, so muss das höchste Ziel aller über concrete Erscheinungen angestellter Rechnungen darin gefunden werden, der Wahrheit so nahe als möglich zu kommen. Dies kann aber in keiner anderen Weise geschehen, als durch eine geeignete Combination von mehr Beobachtungen, als absolut zur Bestimmung der unbekannten Grössen erforderlich sind. Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine genäherte Kenntniss der Bahn besitzt, welche dann so zu verbessern ist, dass sie allen Beobachtungen so nahe als möglich entspricht. Scheint nun auch dieser Ausdruck etwas Unbestimmtes zu enthalten, so werde ich doch unten die Grundsätze abhandeln, durch welche das Problem einer gesetzmässigen und methodischen Lösung unterworfen wird.

Die höchste Genauigkeit zu erstreben, kann nur dann der Mühe werth erscheinen, wenn gleichsam die letzte Hand an die Bahnbestimmung zu legen ist. So lange dagegen Hoffnung vorhanden ist, dass bald neue Beobachtungen zu neuen Verbesserungen Gelegenheit geben werden, so empfiehlt es sich, nach

Lage der Sache mehr oder weniger von der äussersten Genauigkeit abzulassen, wenn solchergestalt die Weitläufigkeit der Operationen erheblich vermindert werden mag. Ich will mich bemühen, beide Fälle zu berücksichtigen.

173.

Es ist ausserordentlich wichtig, dass die einzelnen geocentrischen Positionen des Himmelskörpers, auf welche man sich entschlossen hat, die Bahnbestimmung zu gründen, nicht aus vereinzeltten Beobachtungen genommen werden, sondern, wenn es geschehen kann, aus mehreren so combinirten, dass die etwa begangenen Irrthümer, so viel es angeht, sich gegenseitig aufheben. Man muss nämlich solche Beobachtungen, welche um den Zwischenraum weniger Tage von einander abstehen — oder selbst, wie es die Sache gerade mit sich bringt, um einen Zwischenraum von 15 oder 20 Tagen — bei der (206) Berechnung nicht so anwenden, als ob es ebensoviele verschiedene Positionen wären, sondern es wird vielmehr daraus eine einzige Position abgeleitet, welche unter allen gleichsam die mittlere ist, und welche deshalb eine viel grössere Schärfe zulässt, als die einzelnen, getrennt von einander betrachteten Beobachtungen. Dies Verfahren stützt sich auf folgende Grundsätze.

Die aus den genäherten Elementen berechneten geocentrischen Orte des Himmelskörpers müssen nur wenig von den wahren Orten verschieden sein, und die Unterschiede der letzteren und der ersteren müssen nur sehr langsamen Aenderungen unterworfen sein, so dass man sie innerhalb des Verlaufs weniger Tage nahezu als constant annehmen kann, oder dass jene Veränderungen sich wenigstens als den Zeiten proportionale ansehen lassen. Wenn daher die Beobachtungen gänzlich fehlerfrei wären, so würden die den Zeiten t, t', t'', t''' u. s. w. entsprechenden Verschiedenheiten unter den beobachteten Orten, und unter denen, die aus den Elementen berechnet sind, d. h. die Verschiedenheiten der beobachteten von den berechneten Längen und Breiten (oder Rectascensionen und Declinationen) entweder merklich gleiche Grössen sein, oder wenigstens gleichförmig und sehr langsam zunehmende oder abnehmende. Es mögen z. B. jenen Zeiten die beobachteten Rectascensionen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ u. s. w. entsprechen, die berechneten aber sollen sein: $\alpha + \delta, \alpha' + \delta', \alpha'' + \delta'', \alpha''' + \delta'''$ u. s. w.; dann werden die Differenzen

$\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ u. s. w. von den wahren Abweichungen der Elemente nur um so viel verschieden sein, als die Beobachtungen selbst fehlerhaft sind. Wenn es daher gestattet ist, jene Abweichungen für alle fraglichen Beobachtungen als constante zu betrachten, so werden die Grössen $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ u. s. w. eben so viele verschiedene Bestimmungen der nämlichen Grösse darstellen, für deren verbesserten Werth man daher das arithmetische Mittel unter jenen Bestimmungen wählen wird, so lange kein Grund da ist, weshalb man der einen oder der anderen Bestimmung einen Vorzug geben wollte. Lässt sich aber den einzelnen Beobachtungen nicht derselbe Genauigkeitsgrad beimesen, so wollen wir annehmen, dass bei den einzelnen der Genauigkeitsgrad resp. proportional zu schätzen sein sollte den Zahlen e, e', e'', e''' u. s. w., d. h. die diesen Zahlen gegenseitig proportionalen Irrthümer haben bei den Beobachtungen gleich leicht begangen werden können. Dann wird nach den weiter unten abzuhandelnden Grundsätzen der mittlere wahrscheinlichste Werth nicht mehr das einfache arithmetische Mittel sein, sondern

$$= \frac{e\delta + e'\delta' + e''\delta'' + e'''\delta''' + \text{etc.}}{e + e' + e'' + e''' + \text{etc.}}.$$

Setzt man nun diesen mittleren Werth $= A$, so wird man für die wahren Rectascensionen annehmen dürfen, resp. $\alpha + \delta - A, \alpha' + \delta' - A, \alpha'' + \delta'' - A, \alpha''' + \delta''' - A$, und dann wird es willkürlich sein, welche man zur Rechnung benutzt. Wenn aber entweder die Beobachtungszeiten einen zu grossen Abstand von einander haben, oder wenn man noch keine hinreichend genäherte Bahnelemente kennt, so dass es nicht gestattet ist, deren Abweichungen als constante für alle Beobachtungen anzusehen, so kann hieraus offenbar keine andere Differenz hervorgehen, als dass man die so gefundene mittlere Abweichung nicht sowohl als eine allen Beobachtungen gemeinsame ansehen (207) darf, als vielmehr als eine auf eine gewisse mittlere Zeit zu beziehende (welche letztere ebenso aus den einzelnen Zeitmomenten abgeleitet werden muss, wie A aus den einzelnen Abweichungen) und daher im allgemeinen auf die Zeit:

$$= \frac{eet + e'e't' + e''e''t'' + e'''e'''t''' + \text{etc.}}{e + e' + e'' + e''' + \text{etc.}}.$$

Will man daher den höchsten Grad von Genauigkeit erstreben, so muss man für dieselbe Zeit den geocentrischen Ort aus den Elementen berechnen, der

dann von dem mittleren Fehler Δ befreit wird, um die Position so genau als möglich herauszubringen. Gemeiniglich jedoch wird es völlig ausreichen, den mittleren Fehler auf die der mittleren Zeit nächste Beobachtung zu beziehen. Was hier über Rectascensionen gesagt ist, gilt ebenso für die Declinationen, oder, wenn man lieber will, für Längen und Breiten. Es ist jedoch stets empfehlenswerth, unmittelbar die aus den Elementen gerechneten Rectascensionen und Declinationen mit den beobachteten zu vergleichen. Auf diese Weise hat man nämlich nicht nur den Vortheil einer rascheren Rechnung, vorzüglich bei Benutzung der Methoden in den Artt. 53—60, sondern es empfiehlt sich dies auch in dem Betracht noch überher, weil man dabei auch die unvollständigen Beobachtungen benutzen kann, und weil ausserdem, falls Alles auf Längen und Breiten bezogen würde, zu besorgen stände, dass eine Beobachtung, die in Beziehung auf Rectascension richtig, auf Declination aber schlecht angestellt ist (oder umgekehrt) von beider Seite verschlechtert und so gänzlich unbrauchbar würde. Im Uebrigen wird der Genauigkeitsgrad, der dem so gefundenen Mittel nach den gleich zu erörternden Grundsätzen beizulegen ist, gleich sein $= \sqrt{(ee + e'e' + e''e'' + e'''e''' + \text{etc.})}$, so dass vier oder neun gleich genaue Beobachtungen erforderlich sind, wenn sich das Mittel der doppelten oder dreifachen Schärfe erfreuen soll u. s. w.

174.

Wenn die Bahn eines Himmelskörpers nach den Methoden der vorhergehenden Abschnitte aus drei oder vier solchen geocentrischen Orten bestimmt ist, von denen jeder einzelne nach Anleitung des vorhergehenden Artikels aus mehreren Beobachtungen gebildet worden, so wird eine solche Bahn unter allen diesen Beobachtungen gleichsam das Mittel halten, und es wird bei den Unterschieden zwischen den beobachteten und berechneten Orten kein Anzeichen einer Gesetzmässigkeit zurückbleiben, welches sich durch Verbesserung der Elemente beseitigen oder merklich vermindern liesse. Wenn der ganze vorhandene Vorrath an Beobachtungen keinen zu grossen Zeitraum umfasst, so lässt sich auf diese Weise die erwünschteste Uebereinstimmung der Elemente mit sämtlichen Beobachtungen erreichen, wenn anders die drei oder vier Normalorte geschickt ausgewählt sind. Bei Bestimmung der Bahn von Cometen und

neuen Planeten, deren Beobachtungen über ein Jahr noch nicht hinausgehen, lässt sich von diesem Umstande gemeiniglich so viel Vortheil ziehen, als die Natur der Sache erlaubt. Falls daher die zu bestimmende Bahn im beträchtlichen Winkel gegen die Ecliptik geneigt ist, so stütze man sie in der Regel (208) auf drei Beobachtungen, welche man so entfernt wie möglich von einander auswählt. Sollte man aber auf diese Weise zufällig auf einen der oben (Art. 160—162) ausgeschlossenen Fälle gerathen, oder die Neigung der Bahn zu klein erscheinen, so ist die Bestimmung aus vier Positionen vorzuziehen, die man ebenfalls so entfernt wie möglich von einander nimmt.

Sobald aber bereits eine längere, mehrere Jahre umfassende Reihe von Beobachtungen vorhanden, so lassen sich daraus mehr Normalorte herleiten, und man würde daher nicht die grösste Genauigkeit erreichen, wenn man davon zur Bahnbestimmung nur drei oder vier Orte herausnähme und alle übrigen vernachlässigte. Man wird sich vielmehr in einem solchen Falle, wenn die höchste Schärfe erreicht werden soll, die Mühe geben, so viel ausgesuchte Positionen als möglich zu sammeln und nutzbar zu machen. Es werden daher dann mehr Daten vorhanden sein, als zur Bestimmung der Unbekannten erforderlich sind. Alle die fraglichen Daten aber werden Irrthümern, wenn auch nur kleinen, unterworfen sein, so dass es im Allgemeinen unmöglich ist, allen ganz vollständig zu genügen. Da nun kein Grund vorliegt, weshalb man von diesen Daten diese oder jene sechs als absolut genau betrachten sollte, sondern man vielmehr nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeit annehmen muss, dass bei allen ununterschiedlich grössere oder kleinere Irrthümer gleich möglich seien, und da, im Allgemeinen gesprochen, kleinere Irrthümer häufiger begangen werden als grössere, so ist es offenbar, dass eine solche Bahn, die zwar sechs Daten vollständig genau entspricht, von den übrigen aber mehr oder weniger abweicht, für eine mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung weniger übereinstimmende zu halten sei, als eine andere, die, während sie auch mit jenen sechs Daten um eine Kleinigkeit disharmonirt, eine desto bessere Uebereinstimmung mit den übrigen Daten gewährt. Die Erforschung einer Bahn, die im strengen Sinne die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, wird von der Kenntniss des Gesetzes abhängen, nach welchem die Wahrscheinlichkeit der wachsenden Fehler abnimmt. Dieses hängt aber von so viel unbestimmten und zweifelhaften — auch physiologischen —

Betrachtungen ab, die sich der Rechnung entziehen, dass man das desfallsige Gesetz wohl kaum je in irgend einem Falle der praktischen Astronomie gehörig anzugeben vermag. Nichtsdestoweniger ist die Erforschung des Zusammenhanges zwischen diesem Gesetze und der wahrscheinlichsten Bahn, welche wir jetzt in grösster Allgemeinheit unternehmen wollen, keineswegs als eine unfruchtbare Speculation zu erachten.

175.

Zu diesem Zwecke will ich von unserer besondern Aufgabe zu einer ganz allgemeinen und bei jeder Anwendung der Rechnung auf Natur-Philosophie höchst fruchtbaren Untersuchung übergehen. Es seien V, V', V'' u. s. w. Functionen der Unbekannten p, q, r, s u. s. w., μ die Anzahl dieser Functionen, ν die Anzahl der Unbekannten, und ich setze voraus, dass durch unmittelbare Beobachtungen die Werthe der Functionen gefunden seien $V=M, V'=M', V''=M''$ u. s. w. Allgemein gesprochen wird daher die Entwicklung der Werthe der Unbekannten ein unbestimmtes, ein bestimmtes, (209) oder ein mehr als bestimmtes Problem bilden, je nachdem $\mu < \nu, \mu = \nu, \mu > \nu^*$). Hier wird allein von dem letzten Falle die Rede sein, in welchem offenbar eine genaue Darstellung sämmtlicher Beobachtungen nur dann möglich wäre, wenn letztere alle absolut fehlerfrei wären. Da das nun aber in der Natur der Dinge nicht Statt findet, so wird jedes System von Werthen für die Unbekannten p, q, r, s als möglich zu halten sein, aus welchem Werthe der Functionen $V=M, V'=M', V''=M''$ entstehen, die nicht grösser sind, als die Grenzen der Fehler, welche bei jenen Beobachtungen begangen werden konnten. Dies ist jedoch keineswegs so zu verstehen, als ob diese einzelnen möglichen Systeme sich eines gleichen Grades der Wahrscheinlichkeit erfreuten.

*) Wenn im dritten Falle die Functionen V, V', V'' etc. so angethan wären, dass man davon $\mu + 1 - \nu$ oder mehr als Functionen der übrigen ansehen könnte, so würde das Problem in Beziehung auf diese Functionen ebenfalls ein mehr als bestimmtes, in Beziehung auf die Grössen p, q, r, s etc. aber ein unbestimmtes sein, deren Werthe sich auch dann nicht einmal bestimmen liessen, wenn die Werthe der Functionen V, V', V'' etc. absolut genau gegeben wären; aber diesen Fall schliesse ich von der Untersuchung aus.

Ich nehme zuerst an, dass nach dem Stande der Dinge bei allen Beobachtungen kein Grund vorliegt, die eine für minder genau als die andere zu halten, und dass mithin gleich grosse Fehler bei den einzelnen gleich wahrscheinlich sind. Die irgend einem Irrthume $\mathcal{A}$ beizulegende Wahrscheinlichkeit wird durch eine Function von $\mathcal{A}$ ausgedrückt, die ich mit $\varphi \mathcal{A}$ bezeichne. Wenn man nun auch diese Function nicht genau anzugeben vermag, so lässt sich doch wenigstens das behaupten, dass ihr Werth ein Grösstes sein müsse, wenn $\mathcal{A} = 0$, dass er gemeiniglich ein gleicher sei für gleiche entgegengesetzte Werthe von $\mathcal{A}$, und dass er endlich verschwinde, wenn für $\mathcal{A}$ der grösste Irrthum oder ein grösserer Werth angenommen wird. Eigentlich muss daher $\varphi \mathcal{A}$ zu der Gattung der discontinuirlichen Functionen gezählt werden, und wenn man es sich erlaubt, an ihrer Statt zum praktischen Gebrauche eine analytische Function zu substituiren, so muss diese so angethan sein, dass sie beiderseits von $\mathcal{A} = 0$ gleichsam asymptotisch zu Null convergirt, so dass sie über jene Grenze hinaus als wahrhaft verschwindend angesehen werden kann. Es wird ferner die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler innerhalb der Grenzen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} + d\mathcal{A}$ (welche um den unendlich kleinen Unterschied $d\mathcal{A}$ von einander entfernt sind) liege, ausgedrückt durch $\varphi \mathcal{A} \cdot d\mathcal{A}$; und daher wird im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler innerhalb D und D' liege, dargestellt durch das Integral $\int \varphi \mathcal{A} \cdot d\mathcal{A}$ (in der Ausdehnung von $\mathcal{A} = D$ bis zu $\mathcal{A} = D'$). Dies Integral muss von dem grössten negativen Werthe von $\mathcal{A}$ bis zum grössten positiven Werthe, oder allgemeiner von $\mathcal{A} = -\infty$ bis zu $\mathcal{A} = +\infty$ genommen, nothwendig gleich Eins werden.

Nimmt man daher an, dass irgend ein bestimmtes Werthsystem für die Grössen p, q, r, s Statt habe, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass für V aus der Beobachtung der Werth M sich ergeben werde, ausgedrückt durch $\varphi(M-V)$, indem man in V für p, q, r, s ihre Werthe substituirt; ganz
 (210) ebenso werden durch $\varphi(M'-V')$, $\varphi(M''-V'')$ etc. die Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, dass aus den Beobachtungen die Werthe M', M'' etc. für die Functionen V', V'' sich ergeben werden. Da man nun allerdings alle Beobachtungen als von einander unabhängige Begebenheiten betrachten kann, so drückt das Product

$$\varphi(M-V) \cdot \varphi(M'-V') \cdot \varphi(M''-V'') \text{ etc.} = \Omega$$

die Erwartung oder Wahrscheinlichkeit aus, dass alle diese Werthe aus den Beobachtungen sich zugleich ergeben werden.

176.

So wie nun bei Annahme irgend welcher bestimmter Werthe für die Unbekannten jedem Systeme der Functionenwerthe V , V' , V'' etc. eine vor Anstellung der Beobachtungen bestimmte Wahrscheinlichkeit zukommt, so wird ebenso umgekehrt, nachdem man aus den Beobachtungen bestimmte Functionenwerthe ermittelt hat, sich eine, nach den einzelnen Systemen der Werthe der Unbekannten, woraus jene hervorgehen konnten, bestimmte Wahrscheinlichkeit ergeben; denn offenbar werden diejenigen Systeme für die wahrscheinlicheren zu halten sein, bei welchen dem daraus hervorgehenden Erfolge die grössere Erwartung zur Seite steht. Die Schätzung dieser Wahrscheinlichkeit stützt sich auf das nachfolgende Theorem:

Wenn bei Annahme irgend einer Hypothese H , die Wahrscheinlichkeit irgend eines bestimmten Erfolges E gleich h ist, wenn aber bei Annahme einer anderen, die erstere ausschliessenden und an und für sich gleich wahrscheinlichen Hypothese H' , die Wahrscheinlichkeit desselben Erfolges $= h'$ ist; dann wird, sage ich, falls der Erfolg E in der That zum Vorschein kommt, die Wahrscheinlichkeit, dass H die richtige Hypothese gewesen ist, zu der Wahrscheinlichkeit, dass die richtige Hypothese H' gewesen, sich verhalten wie h zu h' .

Um dies zu beweisen, setze ich voraus, man habe durch Unterscheidung aller Umstände, von welchen es abhängt, ob H oder H' oder eine andere Hypothese Statt hat, um den Erfolg E oder einen andern hervorzubringen, ein gewisses System der verschiedenen Fälle gebildet, welche einzeln an und für sich (d. h. so lange es ungewiss ist, ob der Erfolg E oder ein anderer sich ergeben wird) als gleich wahrscheinliche zu betrachten sind, und man habe diese Fälle in folgender Weise vertheilt:

damit darunter gefunden wird	wo als Hypothese Statt haben muss	mit solchen Modificationen, dass daraus als Erfolg sich ergeben muss
m	H	E
n	H	von E verschieden
m'	H'	E
n'	H'	von E verschieden
m''	von H und H' verschieden	E
n''	von H und H' verschieden	von E verschieden

(211) Dann wird $h = \frac{m}{m+n}$, $h' = \frac{m'}{m'+n'}$; ferner war vor Bekanntwerden des Erfolges die Wahrscheinlichkeit der Hypothese $H = \frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}$; nachdem aber der Erfolg bekannt geworden (wobei die Fälle n , n' , n'' aus der Zahl der Möglichkeiten ausscheiden), wird die Wahrscheinlichkeit derselben Hypothese sein $= \frac{m}{m+m'+m''}$. Ebenso wird die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H' , vor und nach dem Erfolge, resp. auszudrücken sein durch: $\frac{m'+n'}{m+n+m'+n'+m''+n''}$ und $\frac{m'}{m+m'+m''}$. Weil daher bei den Hypothesen H und H' vor Bekanntwerden des Erfolges dieselbe Wahrscheinlichkeit vorausgesetzt ist, so wird $m+n = m'+n'$, woraus die Wahrheit des Theorems von selbst folgt.

Insoweit man nun voraussetzt, dass ausser den Beobachtungen $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. keine andere Daten zur Bestimmung der Unbekannten vorhanden seien, und dass daher vor jenen Beobachtungen alle Systeme der Werthe dieser Unbekannten gleich wahrscheinlich gewesen seien, so wird offenbar die Wahrscheinlichkeit irgend eines nach Anstellung jener Beobachtungen bestimmten Systems dem Ω proportional sein. Dies ist so zu verstehen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Werthe der Unbekannten resp. zwischen den unendlich nahen Grenzen p und $p+dp$, q und $q+dq$, r und $r+dr$, s und $s+ds$ etc. liegen, ausgedrückt sei durch $\lambda \Omega dp dq dr ds$ etc., wobei λ eine constante, von p, q, r, s etc. unabhängige Grösse ist; und zwar wird offenbar $\frac{1}{\lambda}$ der Werth des Integrals der ν^{ten} Ordnung $\int^{\nu} \Omega dp dq dr ds \dots$,

wobei die einzelnen Variabeln p, q, r, s etc. in der Ausdehnung von einem Werthe $-\infty$ bis zum Werthe $+\infty$ zu nehmen sind.

177.

Daraus folgt schon von selbst, dass das wahrscheinlichste System für die Werthe der Grössen p, q, r, s etc. dasjenige sein werde, in welchem Ω den grössten Werth erhält, und daher aus den ν Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} = 0 \quad \text{etc.}$$

ermittelt werden muss. Diese Gleichungen nehmen, wenn man setzt $V - M = v$, $V' - M' = v'$, $V'' - M'' = v''$ etc. und $\frac{d\varphi A}{\varphi A \cdot dA} = \varphi' A$, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dp} \varphi' v + \frac{dv'}{dp} \varphi' v' + \frac{dv''}{dp} \varphi' v'' + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{dv}{dq} \varphi' v + \frac{dv'}{dq} \varphi' v' + \frac{dv''}{dq} \varphi' v'' + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{dv}{dr} \varphi' v + \frac{dv'}{dr} \varphi' v' + \frac{dv''}{dr} \varphi' v'' + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{dv}{ds} \varphi' v + \frac{dv'}{ds} \varphi' v' + \frac{dv''}{ds} \varphi' v'' + \text{etc.} &= 0. \end{aligned} \tag{212}$$

Hieraus lässt sich also vermittelst Elimination eine völlig bestimmte Auflösung des Problems ableiten, sobald nur erst die Natur der Function φ' bekannt geworden. Da diese sich nun a priori nicht definiren lässt, so frage ich, um die Sache von einer anderen Seite anzugreifen, auf welche, stillschweigend gleichsam zur Basis angenommene Function sich eigentlich ein allbekanntes Princip stützt, dessen Vortrefflichkeit allgemein anerkannt wird. Denn an Stelle eines Axioms pflegt die Hypothese angenommen zu werden, dass, wenn irgend eine Grösse durch mehrer unmittelbare, unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellte Beobachtungen bestimmt ist, dann das arithmetische Mittel unter allen beobachteten Werthen den am meisten wahrscheinlichen Werth darstelle und zwar, wenn auch nicht mit absoluter Strenge, doch wenigstens sehr nahe, so dass es stets das Sicherste ist, dabei stehen zu bleiben. Setzt man also $V = V' = V''$ etc. $= p$,

so wird allgemein sein müssen $\varphi'(M-p) + \varphi'(M'-p) + \varphi'(M''-p) + \text{etc.} = 0$, wenn für p der Werth $\frac{1}{\mu}(M+M'+M''+\text{etc.})$ substituirt wird, welches positive Ganzes nun auch durch μ ausdrückt sein mag. Setzt man daher voraus $M' = M'' = \text{etc.} = M - \mu N$, so wird allgemein, d. h. für jeden ganzen positiven Werth für μ , sein $\varphi'(\mu-1)N = (1-\mu)\varphi'(-N)$, woraus man leicht sieht, dass allgemein $\frac{\varphi'A}{A}$ eine constante Grösse sein müsse, welche ich mit k bezeichnen will. Hieraus wird $\log \varphi A = \frac{1}{2}kA^2 + \text{Const.}$, oder wenn man die Basis der hyperbolischen Logarithmen mit e bezeichnet und die Constante $= \log z$ setzt,

$$\varphi A = ze^{\frac{1}{2}kA^2}.$$

Ferner sieht man leicht ein, dass k nothwendig negativ sein müsse, damit Ω in der That ein Grösstes werden könne, weshalb wir setzen $\frac{1}{2}k = -hh$; und da vermittelst des eleganten, zuerst von Laplace*) gefundenen Theorems das Integral $\int e^{-hhA^2} dA$, von $A = -\infty$ bis zu $A = +\infty$, wird $= \frac{\sqrt{\pi}}{h}$ (wobei π den halben Kreisumfang für den Radius $= 1$ bezeichnet), so wird unsere Function werden:

$$\varphi A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhA^2}.$$

178.

Die so eben ermittelte Function kann zwar nicht in aller Strenge die Wahrscheinlichkeiten der Fehler ausdrücken; denn da die möglichen Fehler (213) stets in gewisse Grenzen eingezwängt sind, so müsste die Wahrscheinlichkeit grösserer Fehler immer $= 0$ herauskommen, während unsere Formel stets einen begrenzten Werth darstellt. Dennoch aber ist dieser Mangel, an welchem jede analytische Function ihrer Natur nach laboriren muss, für jeden praktischen

*) In v. Zach „Monatliche Correspondenz“ Band 21, S. 280 äussert Gauss: „Dass Euler schon das Theorem gefunden hat, woraus der schöne, von mir Laplace beigelegte Lehrsatz sehr leicht abgeleitet werden kann, fiel mir selbst schon früher ein, als aber die Stelle S. 212 schon abgedruckt war; ich wollte es aber nicht unter die Errata setzen, weil Laplace wenigstens das obige Theorem doch erst in der dort gebrauchten Form aufgestellt hat.“

Anmerkung des Uebersetzers.

Gebrauch von keiner Bedeutung, da der Werth unserer Function, sobald nur erst hA einen beträchtlichen Werth angenommen hat, so rapide abnimmt, dass man ihn sicher mit Null aequivalirend ansehen kann. Ausserdem wird es die Natur der Sache niemals gestatten, die Grenzen der Fehler mit absoluter Strenge hinzustellen.

Im Uebrigen kann die Constante h gleichsam als das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen angesehen werden. Denn wenn man die Wahrscheinlichkeit eines Irrthums A in irgend einem Systeme von Beobachtungen als vermitteltst $\frac{h}{V\pi} e^{-hhA^2}$, in einem anderen Systeme mehr oder minder genauer Beobachtungen aber als durch $\frac{h'}{V'\pi} e^{-h'h'A'^2}$ ausgedrückt ansieht, so wird die Erwartung, wonach bei irgend einer Beobachtung aus dem ersteren Systeme der Fehler innerhalb der Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten sein werde, ausgedrückt durch das Integral $\int \frac{h}{V\pi} e^{-hhA^2} dA$ (von $A = -\delta$ bis zu $A = +\delta$ genommen) und ganz ebenso wird die Erwartung, dass der Fehler irgend einer Beobachtung aus dem zweiten Systeme die Grenzen $-\delta'$ und $+\delta'$ nicht überschreite, durch das Integral $\int \frac{h'}{V'\pi} e^{-h'h'A'^2} dA'$ (wo A' in der Ausdehnung von $= -\delta'$ bis zu $+\delta'$ genommen) bezeichnet. — Beide Integrale werden aber offenbar gleich sein, sobald $h\delta = h'\delta'$. — Wenn daher z. B. $h' = 2h$ ist, so konnte ebenso leicht in dem ersteren Systeme ein doppelter Irrthum begangen werden, als ein einfacher in dem zweiten, in welchem Falle den Beobachtungen des zweiten Systems nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche eine doppelte Genauigkeit beigemessen wird.

179.

Nun will ich entwickeln, was aus diesem Gesetze folgt. Es ist von selbst klar, dass, damit das Product $\Omega = h^\mu \pi^{-\frac{1}{2}\mu} e^{-hh(vv + v'v' + v''v'' + \dots)}$ ein Grösstes werde, die Summe $vv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$ ein Kleinstes werden müsse. *Es wird daher das wahrscheinlichste System der Werthe der Unbekannten p, q, r, s etc. dasjenige sein, in welchem die Quadrate der Unterschiede zwischen den*

beobachteten und berechneten Functionenwerthen V , V' , V'' etc. die kleinste Summe geben, wenn nämlich bei allen Beobachtungen derselbe Grad der Genauigkeit zu präsumiren ist.

Dieser Grundsatz, welcher bei allen Anwendungen der Mathematik auf die Natur-Philosophie ausserordentlich häufig benutzt wird, muss allenthalben an Stelle eines Axioms mit demselben Rechte gelten, mit welchem das arithmetische Mittel unter mehreren beobachteten Werthen derselben Grösse als der wahrscheinlichste Werth angenommen wird.

- (214) Auf Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit lässt sich dies Princip nun ohne Weiteres ausdehnen. Wenn nämlich das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen, wodurch $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. gefunden ist, respective ausgedrückt wird mit h , h' , h'' etc., d. h. wenn man voraussetzt, dass Fehler, die diesen Grössen gegenseitig proportional, bei den fraglichen Beobachtungen gleich leicht haben begangen werden können, so ist dies offenbar dasselbe, als wenn durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit (deren Maass = 1 ist) die Functionenwerthe hV , $h'V'$, $h''V''$ etc. unmittelbar gefunden wären = hM , $h'M'$, $h''M''$ etc.; weshalb das wahrscheinlichste Werthsystem für die Grössen p , q , r , s etc. dasjenige sein wird, wo die Summe $hhvv + h'h'v'v' + h''h''v''v'' + \text{etc.}$ d. h. *wo die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den thatsächlich beobachteten und den berechneten Werthen mit den Zahlen multiplicirt, die den Grad der Genauigkeit messen, ein Kleinstes wird.* Auf diese Weise ist es nicht einmal nöthig, dass die Functionen V , V' , V'' etc. auf homogene Grössen sich beziehen, sondern sie können auch heterogene (z. B. Bogen-Secunden und Zeit-Secunden) darstellen, wenn sich nur das Verhältniss der Fehler, die bei den einzelnen gleich leicht begangen werden konnten, schätzen lässt.

180.

Das im vorangehenden Artikel auseinandergesetzte Princip empfiehlt sich auch in dem Betracht, dass die numerische Bestimmung der Unbekannten auf eine sehr rasche Berechnung sich zurückführen lässt, wenn die Functionen V , V' , V'' etc. lineäre sind. Ich nehme an, es sei

$$V - M = v = -m + ap + bq + cr + ds + \text{etc.}$$

$$V' - M' = v' = -m' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.}$$

$$V'' - M'' = v'' = -m'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.}$$

etc.

und man setze

$$av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} = P$$

$$bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} = Q$$

$$cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} = R$$

$$dv + d'v' + d''v'' + \text{etc.} = S$$

etc.

Dann werden die ν Gleichungen des Art. 177, aus welchen man die Werthe der Unbekannten bestimmen muss, offenbar folgende sein:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0 \text{ etc.}$$

wenn nämlich die Beobachtungen als gleich gut angenommen werden, auf welchen Fall man die übrigen zurückführen kann, wie im vorhergehenden Artikel gezeigt ist. Es sind daher eben so viele lineäre Gleichungen vorhanden, als Unbekannte zu bestimmen sind, woraus man deren Werthe durch gewöhnliche Elimination herleitet.

Wir wollen nun sehen, ob diese Elimination immer möglich ist, oder ob jemals eine unbestimmte oder sogar unmögliche Lösung sich ergeben kann. Aus der Theorie der Elimination ist bekannt, dass der zweite oder dritte Fall (215) dann Statt finden werde, sobald aus den Gleichungen $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0$ etc., bei Auslassung von einer, eine Gleichung entstehen kann, die entweder identisch mit der ausgelassenen ist, oder ihr widerstreitend, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn sich eine lineäre Function $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.}$ angeben lässt, die entweder identischer Weise $= 0$ ist, oder wenigstens frei von allen Unbekannten p, q, r, s etc. Nehmen wir daher an, es werde $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.} = z$. Von selbst hat man die identische Gleichung

$$(v + m)v + (v' + m')v' + (v'' + m'')v'' + \text{etc.} = pP + qQ + rR + sS + \text{etc.}$$

Nimmt man also an, dass durch die Substitutionen $p = \alpha x, q = \beta x, r = \gamma x, s = \delta x$ etc. die Functionen v, v', v'' etc. respective übergehen in: $-m + \lambda x, -m' + \lambda' x, -m'' + \lambda'' x$ etc., so hat man offenbar die identische Gleichung

$$(\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.})xx - (\lambda m + \lambda'm' + \lambda''m'' + \text{etc.})x = zx,$$

d. h. es wird $\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.} = 0, z + \lambda m + \lambda'm' + \lambda''m'' + \text{etc.} = 0$; darnach wird aber nothwendig sein müssen $\lambda = 0, \lambda' = 0, \lambda'' = 0$ etc. und $z = 0$.

Daraus ist klar, dass alle Functionen V, V', V'' etc. so beschaffen sind, dass ihre Werthe sich nicht ändern, wenn die Grössen p, q, r, s etc. Vermehrungen oder Verminderungen erleiden, die den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. proportional sind. Ich habe aber schon oben erwähnt, dass derartige Fälle nicht hierher gehören, in welchen die Bestimmung der Unbekannten offenbar auch dann nicht einmal möglich ist, wenn auch die wahren Werthe der Functionen V, V', V'' etc. gegeben sein sollten.

Uebrigens kann man auf diesen hier betrachteten Fall alle übrigen, wo die Functionen V, V', V'' etc. keine lineären sind, leicht reduciren. Bezeichnet man nämlich mit $\pi, \chi, \varrho, \sigma$ etc. genäherte Werthe für die Unbekannten p, q, r, s etc. (welche man leicht ableiten kann, wenn aus μ Gleichungen $V = M, V' = M', V'' = M''$ etc. zuerst nur ν benutzt werden) und führt man dann an Stelle der Unbekannten andere ein: p', q', r', s' etc. und setzt $p = \pi + p', q = \chi + q', r = \varrho + r', s = \sigma + s'$ etc., so werden offenbar die Werthe dieser neuen Unbekannten so klein sein, dass man ihre Quadrate und Producte vernachlässigen kann, wodurch die Gleichungen von selbst als lineäre herauskommen. Sollten sich dann bei der absoluten Rechnung wider Erwarten so grosse Werthe für die Unbekannten p', q', r', s' etc. ergeben, dass man nicht mit voller Sicherheit deren Quadrate und Producte hätte vernachlässigen dürfen, so wird eine Wiederholung des Verfahrens (wobei man an Stelle von $\pi, \chi, \varrho, \sigma$ etc. die verbesserten Werthe für p, q, r, s etc. setzt) eine leichte Abhülfe gewähren.

181.

Falls daher nur eine Unbekannte p da ist, zu deren Bestimmung man die Functionenwerthe $ap + n, a'p + n', a''p + n''$ etc. respective gefunden hat (216) $= M, M', M''$ etc. und zwar durch gleich genaue Beobachtungen, so wird der wahrscheinlichste Werth für p sein

$$= \frac{am + a'm' + a''m'' + \text{etc.}}{aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}} = A,$$

wobei man m, m', m'' etc. schreibt resp. für $M - n, M' - n', M'' - n''$ etc.

Um nun den Grad der bei diesem Werthe zu präsumirenden Genauigkeit zu schätzen, so nehme ich an, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers A

bei den Beobachtungen ausgedrückt sein soll durch $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhAA}$. Demnach wird die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth für p sei $= A + p'$, proportional sein der Function

$$e^{-hh((ap-m)^2 + (a'p-m')^2 + (a''p-m'')^2 + \text{etc.})},$$

wenn für p substituirt wird $A + p'$. Der Exponent dieser Function lässt sich auf die Form bringen $-hh(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})(pp - 2pA + B)$, wo B von p unabhängig ist; es wird deshalb die Function selbst proportional sein:

$$e^{-hh(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})pp'}.$$

Man sieht daher, dass man dem Werthe A denselben Grad der Genauigkeit beimessen muss, als wenn er durch eine unmittelbare Beobachtung gefunden wäre, deren Genauigkeit sich zur Genauigkeit der primitiven Beobachtungen verhielte, wie $h\sqrt{(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})}$ zu h , oder wie $\sqrt{(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})}$ zu 1.

182.

Der Untersuchung über den Genauigkeitsgrad, der den Werthen der Unbekannten, falls mehrere vorhanden sind, beizumessen ist, muss eine genauere Betrachtung der Function $vv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$, welche ich durch W bezeichne, voraufgeschickt werden.

I. Ich setze $\frac{1}{2} \frac{dW}{dp} = p' = \lambda + \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc.}$, und $W - \frac{p'p'}{\alpha} = W'$; so wird offenbar $p' = P$, und, da man hat $\frac{dW'}{dp} = \frac{dW}{dp} - \frac{2p'}{\alpha} \cdot \frac{dp'}{dp} = 0$, so ist die Function W' von p unabhängig. Der Coefficient $\alpha = aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}$ ist offenbar stets eine positive Grösse.

II. Ebenso setze ich $\frac{1}{2} \cdot \frac{dW'}{dq} = q' = \lambda' + \beta'q + \gamma'r + \delta's + \text{etc.}$, und $W' - \frac{q'q'}{\beta'} = W''$, und es wird sein $q' = \frac{1}{2} \frac{dW'}{dq} - \frac{p'}{\alpha} \cdot \frac{dp'}{dq} = Q - \frac{\beta}{\alpha} \cdot p'$, und $\frac{dW''}{dq} = 0$, woraus man sieht, dass die Function W'' sowohl von p als von q unabhängig ist. Dies würde nicht Statt finden, wenn $\beta' = 0$ werden

könnte. Aber es ist klar, dass W' aus $vv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$ entsteht, wenn
 (217) man die Grösse p aus v, v', v'' etc. mit Hülfe der Gleichung $p' = 0$ eliminirt; demnach wird β' die Summe der Coefficienten von qq in $vv, v'v', v''v''$ etc. nach jener Elimination sein; diese einzelnen Coefficienten selbst aber sind Quadrate und können nicht alle zugleich verschwinden, ausser in dem oben ausgeschlossenen Falle, wo die Unbekannten unbestimmt bleiben. Man sieht daher, dass β' eine positive Grösse sein muss.

III. Setze ich nun wiederum $\frac{1}{2} \cdot \frac{dW''}{dr} = r' = \lambda'' + \gamma''r + \delta''s + \text{etc.}$, und $W'' - \frac{r'r'}{\gamma''} = W'''$, so wird $r' = R - \frac{\gamma}{\alpha}p' - \frac{\gamma'}{\beta'}q'$, und W'' unabhängig sowohl von p , als von q , als von r . Uebrigens lässt sich auf ähnliche Weise wie in II zeigen, dass der Coefficient γ'' nothwendig eine positive Grösse ist. Man sieht nämlich leicht, dass γ'' die Summe der Coefficienten von rr in $vv, v'v', v''v''$ etc. ist, nachdem die Grössen p und q mit Hülfe der Gleichungen $p' = 0, q' = 0$ aus v, v', v'' etc. eliminirt sind.

IV. Setzt man auf dieselbe Weise $\frac{1}{2} \frac{dW'''}{ds} = s' = \lambda''' + \delta'''s + \text{etc.}$, $W^{IV} = W''' - \frac{s's'}{\delta'''}$, so wird $s' = S - \frac{\delta}{\alpha}p' - \frac{\delta'}{\beta'}q' - \frac{\delta''}{\gamma''}r'$; wo W^{IV} von p, q, r, s unabhängig und δ''' eine positive Grösse ist.

V. Wenn ausser p, q, r, s noch andere Unbekannte da sind, so kann man auf diese Weise noch weiter vorschreiten, so dass man schliesslich hat:

$$W = \frac{1}{\alpha}p'p' + \frac{1}{\beta'}q'q' + \frac{1}{\gamma''}r'r' + \frac{1}{\delta'''}s's' + \text{etc.} + \text{Const.}$$

wo alle Coefficienten $\alpha, \beta', \gamma'', \delta'''$ etc. positive Grössen sind.

VI. Nun ist die Wahrscheinlichkeit irgend eines Systemes bestimmter Werthe für die Grössen p, q, r, s etc. proportional der Function e^{-hhW} . Es wird deshalb, falls der Werth der Grösse p unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit eines Systems bestimmter Werthe für die übrigen proportional sein dem Integral $\int e^{-hhW} dp$ (in der Ausdehnung von $p = -\infty$ bis zu $p = +\infty$), welches nach dem Laplace'schen Theorem wird $= h^{-1} \alpha^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-hh(\frac{1}{\beta'}q'q' + \frac{1}{\gamma''}r'r' + \frac{1}{\delta'''}s's' + \text{etc.})}$; diese Wahrscheinlichkeit wird daher proportional sein der Function e^{-hhW} .

Ebenso ist, wenn überdies q als Unbestimmte behandelt wird, die Wahrscheinlichkeit eines Systems bestimmter Werthe für r, s etc. proportional dem Integrale $\int e^{-hhW'} dq$ (von $q = -\infty$ bis zu $q = +\infty$ genommen), welches wird $= h^{-1} \beta'^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-hh(\frac{1}{\gamma''} r'r' + \frac{1}{\delta''} s's' + \text{etc.})}$; oder proportional der Function $e^{-hhW''}$. Auf ähnliche Weise würde, falls auch r als Unbestimmte betrachtet wird, die Wahrscheinlichkeit bestimmter Werthe für die übrigen s etc. proportional sein der Function $e^{-hhW'''}$ u. s. w. Ich nehme an, dass die Zahl der Unbekannten bis auf vier steigen soll; denn derselbe Schluss wird gelten, sie mag (218) nun grösser oder kleiner sein. Der am meisten wahrscheinliche Werth für s wird hier sein $= -\frac{\lambda'''}{\delta'''}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass dieser von dem wahren um die Differenz σ verschieden ist, wird proportional der Function $e^{-hh\delta'''\sigma}$ sein; woraus zu schliessen, dass das Maass der der fraglichen Bestimmung beizulegenden relativen Genauigkeit ausgedrückt werde durch $\sqrt{\delta'''}$, wenn das Maass der den primitiven Beobachtungen beizulegenden Genauigkeit $= 1$ gesetzt wird.

183.

Durch die Methode des vorangehenden Artikels lässt sich das Maass der Genauigkeit bequem nur für diejenige Unbekannte ausdrücken, welcher bei dem Eliminirungs-Geschäfte der letzte Platz angewiesen ist. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, empfiehlt es sich den Coefficienten δ''' auf andere Weise auszudrücken. Aus den Gleichungen

$$P = p'$$

$$Q = q' + \frac{\beta}{\alpha} p'$$

$$R = r' + \frac{\gamma'}{\beta'} q' + \frac{\gamma}{\alpha} p'$$

$$S = s' + \frac{\delta''}{\gamma''} r'' + \frac{\delta'}{\beta'} q' + \frac{\delta}{\alpha} p'$$

folgt, dass $p' q' r' s'$ durch P, Q, R, S sich so ausdrücken lassen:

$$p' = P$$

$$q' = Q + \mathfrak{A}P$$

$$r' = R + \mathfrak{B}'Q + \mathfrak{A}'P$$

$$s' = S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P,$$

so dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ bestimmte Grössen sind. Es wird daher (wenn die Zahl der Unbekannten auf vier beschränkt ist):

$$s = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''} P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''} Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''} R + \frac{1}{\delta'''} S.$$

Hieraus leite ich folgenden Schluss ab: die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten p , q , r , s etc., die durch Elimination aus den Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ etc. abgeleitet werden sollen, lassen sich offenbar, wenn eine Zeitlang P , Q , R , S etc. als Unbestimmte angesehen werden, nach Anleitung desselben Eliminations-Verfahrens in lineärer Form durch P , Q , R , S etc. ausdrücken, so dass man hat:

$$\begin{aligned} (219) \quad p &= L + AP + BQ + CR + DS + \text{etc.} \\ q &= L' + A'P + B'Q + C'R + D'S + \text{etc.} \\ r &= L'' + A''P + B''Q + C''R + D''S + \text{etc.} \\ s &= L''' + A'''P + B'''Q + C'''R + D'''S + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc.

Darnach werden offenbar die wahrscheinlichsten Werthe von p , q , r , s etc. sein resp. L , L' , L'' , L''' etc., und das Maass der diesen Bestimmungen beizulegenden Genauigkeit wird ausgedrückt resp. durch $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B'}}$, $\sqrt{\frac{1}{C''}}$, $\sqrt{\frac{1}{D'''}}$ etc., wenn man die Genauigkeit der primitiven Beobachtungen = 1 setzt. Denn dasjenige, was oben wegen Bestimmung der Unbekannten s gezeigt ist (für welche $\frac{1}{\delta'''}$ entspricht dem D'''), lässt sich durch blosse Vertauschung der Unbekannten auf alle Uebrigen übertragen.

184.

Um die vorangehenden Untersuchungen durch ein Beispiel zu erläutern, nehme ich an, dass durch Beobachtungen, bei welchen gleiche Genauigkeit zu präsumiren, gefunden sei:

$$\begin{aligned} p - q + 2r &= 3 \\ 3p + 2q - 5r &= 5 \\ 4p + q + 4r &= 21. \end{aligned}$$

Durch eine vierte Beobachtung, der aber nur die halbe Genauigkeit beizumessen, sei gefunden:

$$-2p + 6q + 6r = 28.$$

An Stelle der letzten Gleichung substituire ich daher:

$$-p + 3q + 3r = 14,$$

und nehme an, dass diese Gleichung aus einer den früheren an Genauigkeit gleichen Beobachtung herausgekommen sei. Hieraus wird

$$\begin{aligned} P &= 27p + 6q && -88 \\ Q &= 6p + 15q + r && -70 \\ R &= && q + 54r - 107 \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination

$$\begin{aligned} 19899p &= 49154 + 809P - 324Q + 6R \\ 737q &= 2617 - 12P + 54Q - R \\ 6633r &= 12707 + 2P - 9Q + 123R. \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten sind also

$$\begin{aligned} p &= 2,470 \\ q &= 3,551 \\ r &= 1,916, \end{aligned}$$

und die relative, diesen Bestimmungen beizumessende Genauigkeit (die Genauigkeit der primitiven Beobachtungen = 1 gesetzt) ist

$$\begin{aligned} \text{für } p &\dots \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4,96 \\ \text{für } q &\dots \sqrt{\frac{737}{54}} = 3,69 \\ \text{für } r &\dots \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7,34. \end{aligned}$$

185.

Der bislang behandelte Gegenstand könnte Gelegenheit zu mehreren eleganten analytischen Untersuchungen geben, bei denen ich jedoch hier nicht

verweile, um nicht zu weit von meinem Vorhaben abzugerathen. Aus demselben Grunde spare ich die Auseinandersetzung der Kunstgriffe, mittelst derer die numerische Rechnung auf eine raschere Zahlendarlegung zurückgeführt werden kann, auf eine andere Gelegenheit. Doch erlaube ich mir eine einzige Bemerkung. So oft die Anzahl der Functionen oder der angenommenen Gleichungen beträchtlich ist, so wird die Rechnung hauptsächlich deshalb ein wenig beschwerlicher, weil die Coefficienten, mit denen die primitiven Gleichungen multiplicirt werden müssen, um P, Q, R, S etc. zu erhalten, gemeiniglich wenig bequeme Decimalbrüche enthalten. — Wenn es in diesem Falle nicht der Mühe werth scheint, diese Multiplicationen mit Hülfe der logarithmischen Tafeln so genau als möglich durchzuführen, so wird es in sehr vielen Fällen genügen, an Stelle dieser Multiplicatoren andere zur Rechnung bequemere anzuwenden, die von ihnen wenig verschieden sind. Diese Lizenz kann keine merklichen Irrthümer, mit Ausnahme des Falles erzeugen, wo das Maass der Genauigkeit bei Bestimmung der Unbekannten viel kleiner sich ergibt, als die Genauigkeit der primitiven Beobachtungen war.

186.

Im Uebrigen kann das Princip, dass die Quadrate der Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Grössen eine möglichst kleine Summe erzeugen müssen, auch unabhängig von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf folgende Weise betrachtet werden. So oft die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der davon abhängigen beobachteten Grössen gleich ist, so lassen sich erstere so bestimmen, dass den letzteren genau genügt wird. Wenn aber die Anzahl der ersteren kleiner als die der letzteren ist, so lässt sich eine absolut genaue Uebereinstimmung nicht erreichen, indem die Beobachtungen nicht absolut genau sind. Man muss sich daher in diesem Falle bemühen, die Uebereinstimmung so gut als möglich festzustellen, oder die

(221) Unterschiede soviel als möglich zu verkleinern. Diese Bemerkung involvirt aber ihrer Natur nach etwas Vages. Denn wenn auch ein Werthsystem der Unbekannten, welches alle Unterschiede resp. kleiner giebt als ein anderes, diesem andern zweifelsohne vorzuziehen ist, so bleibt nichtsdestoweniger die Wahl zwischen zwei Systemen, von denen das eine bei diesen, das andere bei

jenen Beobachtungen eine bessere Uebereinstimmung darbietet, in gewisser Weise unserer Willkür überlassen, und es lassen sich offenbar zahllose verschiedene Principien annehmen, durch welche die erstere Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet man die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung mit $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ etc., so wird der ersteren Bedingung nicht nur Genüge geleistet, wenn $\mathcal{A}\mathcal{A} + \mathcal{A}'\mathcal{A}' + \mathcal{A}''\mathcal{A}'' + \text{etc.}$ ein Kleinstes wird (was mein Princip ist), sondern auch, wenn $\mathcal{A}^4 + \mathcal{A}'^4 + \mathcal{A}''^4 + \text{etc.}$ oder $\mathcal{A}^6 + \mathcal{A}'^6 + \mathcal{A}''^6 + \text{etc.}$, oder allgemein die Summe der Potenzen von irgend einem geraden Exponenten ein Kleinstes wird. Aber von allen diesen Principien ist meines das Einfachste, während man bei den übrigen in sehr verwickelte Rechnungen geräth. Uebrigens ist mein Princip, dessen ich mich seit dem Jahre 1795 bedient habe, neuerlich auch von Legendre in seinem Werke „Nouvelles methodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1806“ vorgetragen, wo mehre andere Eigenthümlichkeiten dieses Principis entwickelt sind, die ich hier der Kürze halber übergehe.

Würde man eine Potenz von einem geraden unendlich grossen Exponenten annehmen, so käme man auf dasjenige System, wobei die grössten Differenzen so klein als möglich würden.

Laplace benutzt zur Auflösung der lineären Gleichungen, deren Anzahl grösser ist als die Anzahl der Unbekannten, ein anderes Princip, welches einst bereits von Boscovich vorgeschlagen war, nämlich das, dass die Differenzen selbst, aber alle positiv genommen, eine kleinste Summe bilden sollen. Es lässt sich leicht zeigen, dass ein Werthsystem für die Unbekannten, welches lediglich aus diesem Principe ermittelt ist, nothwendig [mit Ausnahme besonderer Fälle, in welchen die Auflösung gewissermaassen unbestimmt bleibt] ebensovielen Gleichungen aus der Zahl der angenommenen genau Genüge leisten muss, als Unbekannte da sind, so dass die übrigen Gleichungen nur insoweit in Betracht kommen, als sie zur Entscheidung für die Wahl beitragen. Wenn daher z. B. die Gleichung $V = M$ zu der Zahl derjenigen gehört, denen nicht Genüge geschieht, so würde das System der zufolge jenes Principis gefundenen Werthe sich in nichts ändern, wenn auch statt des Werthes M irgend ein anderer Werth N beobachtet wäre, falls nur, indem n den berechneten Werth bezeichnet, die Unterschiede $M - n$ und $N - n$ mit dem nämlichen Zeichen behaftet sind. Uebrigens

regulirt Laplace gewissermaassen das fragliche Princip durch Hinzufügung einer neuen Bedingung, denn er verlangt, dass der Differenzen Summe selbst, bei Nichtänderung der Zeichen, = Null werde. Hierdurch wird bewirkt, dass die Anzahl der genau dargestellten Gleichungen um eine Einheit kleiner wird, als die Anzahl der unbekannten Grössen; dennoch aber findet das von mir vorhin Bemerkte auch hier Statt, wenn nämlich wenigstens zwei Unbekannte da sind.

(222)

187.

Ich wende mich von diesen allgemeinen Untersuchungen zurück zu meinem eigentlichen Vorhaben, um dessentwillen ich die ersteren unternommen habe. Bevor man die möglichst genaue Bestimmung einer Bahn aus mehr Beobachtungen, als nothwendig erforderlich sind, unternimmt, muss bereits eine angenäherte Bestimmung vorhanden sein, die von allen gegebenen Beobachtungen nicht viel abweicht. Die an diese genäherten Elemente zur Erlangung der möglichst genauen Uebereinstimmung anzubringenden Verbesserungen sind als Quäsitate des Problems zu betrachten. — Da man voraussetzen kann, dass diese Verbesserungen so klein sich herausstellen werden, dass man ihre Quadrate und Producte vernachlässigen darf, so können die Veränderungen, welche die berechneten geocentrischen Orte des Himmelskörpers hierdurch erleiden, durch die im zweiten Abschnitt des ersten Buches gegebenen Differentialformeln berechnet werden. — Die nach den verbesserten Elementen, die ich suche, berechneten Orte werden also durch lineäre Functionen der Verbesserungen der Elemente dargestellt, und es wird deren Vergleichung mit den beobachteten Orten nach den oben entwickelten Grundsätzen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe führen. Diese Operationen sind so einfach, dass es einer weiteren Erläuterung derselben nicht bedarf, und es ist von selbst klar, dass man dabei Beobachtungen benutzen kann, so viele man ihrer hat, und die, so weit man will, von einander entfernt sind. Derselben Methode kann man sich auch zur Verbesserung der parabolischen Bahnen der Cometen bedienen, wenn zufällig eine längere Reihe von Beobachtungen vorhanden ist, und grösstmögliche Uebereinstimmung verlangt wird.

188.

Die vorhergehende Methode ist vorzugsweise denjenigen Fällen angepasst, wo die höchste Genauigkeit verlangt wird. Sehr häufig aber kommen Fälle vor, wo man unbedenklich von letzterer etwas nachlassen kann, wenn sich dadurch die Weitläufigkeit der Rechnung erheblich abkürzen lässt, namentlich wenn die Beobachtungen noch keinen grossen Zeitraum umfassen, und man daher so zu sagen an eine definitive Bahnbestimmung noch nicht denkt. In solchen Fällen lässt sich die nachfolgende Methode mit grossem Vortheile benutzen:

Man wähle aus dem ganzen Vorrathe der Beobachtungen zwei vollständige Orte L , und L' aus und berechne für die entsprechenden Zeiten aus den genäherten Elementen die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde. Man bilde sodann bezüglich dieser Abstände drei Hypothesen, indem man bei der ersten die berechneten Werthe beibehält, in der zweiten Hypothese aber die erste Distanz, und in der dritten Hypothese die zweite Distanz ändert. Beide Aenderungen lassen sich nach Verhältniss der Ungewissheit, welche man bei jenen Abständen als zurückbleibende vermuthet, nach Ermessen annehmen. Nach diesen drei Hypothesen, welche ich in folgendem Schema darstelle:

	Hyp. I.	Hyp. II.	Hyp. III.
der dem ersten Orte entsprechende Abstand*)	D	$D + \delta$	D
„ „ zweiten „ „ „	D'	D'	$D' + \delta'$

(223)

berechne man aus den beiden Orten L , L' nach den im ersten Buche entwickelten Methoden drei Elementen-Systeme, und aus jedem einzelnen der letzteren die geocentrischen Orte des Himmelskörpers, welche den Zeiten aller übrigen Beobachtungen entsprechen. Es seien diese (indem man

*) Noch bequemer ist es, statt der Abstände die Logarithmen der curtirten Abstände zu gebrauchen.

die einzelnen Längen und Breiten oder Rectascensionen und Declinationen gesondert bezeichnet)

im ersten Systeme M , M' , M'' etc.

im zweiten Systeme $M + \alpha$, $M' + \alpha'$, $M'' + \alpha''$ etc.

im dritten Systeme $M + \beta$, $M' + \beta'$, $M'' + \beta''$ etc.

und es seien ferner die

beobachteten Orte, resp. N , N' , N'' etc.

In soweit nun kleinen Aenderungen der Abstände D , D' proportionale Aenderungen sowohl der einzelnen Elemente, als der daraus berechneten geocentrischen Orte entsprechen, so darf man annehmen, das die geocentrischen Orte, welche aus einem vierten Elementen-Systeme berechnet sind, bei dem die Abstände von der Erde $D + x\delta$, $D' + y\delta'$ zu Grunde liegen, resp. sein werden $M + \alpha x + \beta y$, $M' + \alpha' x + \beta' y$, $M'' + \alpha'' x + \beta'' y$ etc. Hieraus werden dann nach den vorhergehenden Untersuchungen die Grössen x , y so bestimmt, dass jene Grössen bestmöglichst (mit Rücksicht auf die relative Genauigkeit der Beobachtungen) mit N , N' , N'' etc. übereinstimmen. Das verbesserte Elementen-System selbst wird entweder ebenso aus L , L' und den Abständen $D + x\delta$, $D' + y\delta'$ bestimmt, oder es lässt sich dasselbe nach bekannten Regeln aus den drei ersten Elementen-Systemen durch einfache Interpolation ableiten.

189.

Diese Methode ist von der vorhergehenden nur darin verschieden, dass sie den zwei geocentrischen Orten genau und den übrigen so genau wie möglich Genüge leistet, während nach der anderen Methode keine Beobachtung den übrigen vorgezogen wird, sondern die Fehler so viel wie möglich auf alle vertheilt werden. Die Methode des vorhergehenden Artikels ist daher der früheren nur in so fern nachzusetzen, als, wenn die Orte L , L' irgend einen Theil der Fehler in sich aufnehmen, die Fehler bei den übrigen Orten sich erheblich vermindern lassen. Inzwischen kann man meistens durch schick-

(224) liche Auswahl der Beobachtungen L , L' sich leicht davor hüten, dass dieser

Unterschied nicht von zu grosser Bedeutung wird. Man muss nämlich darnach trachten, für L und L' solche Beobachtungen zu nehmen, die nicht allein ausgesuchter Genauigkeit sich erfreuen, sondern die auch so beschaffen sind, dass die aus ihnen und aus den Distanzen abgeleiteten Elemente von kleinen Aenderungen der geocentrischen Positionen nicht allzusehr afficirt werden. Man würde daher nicht wohl thun, solche Beobachtungen auszuwählen, die um einen kleinen Zeitraum von einander abstehen, oder solche, denen nahe entgegengesetzte oder zusammenfallende heliocentrische Orte entsprechen.