Zweiter Abschnitt. (192)

Bestimmung der Bahn aus vier Beobachtungen, wovon nur zwei vollständig sind.

164.

Bereits im Eingange des zweiten Buchs (Art. 115) habe ich erklärt, dass sich die Benutzung des im vorhergehenden Abschnitte behandelten Problems auf diejenigen Bahnen beschränke, deren Neigung weder verschwindet, noch gar zu klein ist, und dass man die Bestimmung der wenig geneigten Bahnen nothwendig auf vier Beobachtungen stützen müsse. Vier vollständige Beobachtungen aber, da sie mit acht Gleichungen äquivaliren, die Zahl der Unbekannten inzwischen nur sechs beträgt, würden die Aufgabe zu einer mehr als bestimmten machen; weshalb man von zwei Beobachtungen die Breiten (oder die Declinationen) bei Seite lassen muss, um den übrigen Daten genau Genüge zu thun. So entsteht die Aufgabe, welcher der gegenwärtige Abschnitt gewidmet ist. Die hier gegebene Auflösung beschränkt sich aber nicht allein auf die nur wenig geneigten Bahnen, sondern lässt sich auch auf solche von beliebig grosser Neigung mit gleichem Erfolge anwenden. Auch hier muss man, ganz wie im vorigen Abschnitte, die Fälle von einander trennen, wo man bereits im Besitze genäherter Bahndimensionen sich befindet, und wo es sich um erste Bestimmung einer noch ganz unbekannten Bahn handelt. Ich mache mit dem ersten Falle den Anfang.

165.

Die einfachste Methode, um eine schon recht nahe bekannte Bahn den vier Beobachtungen anzupassen, scheint folgende. Es seien x, y die genäherten Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde in den beiden vollständigen Beobachtungen. Mit Hülfe derselben berechne man die entsprechenden heliocentrischen Orte, und hieraus die Elemente selbst; aus letzteren Elementen sodann

30*

die geocentrischen Längen oder Rectascensionen für die beiden übrigen Beobachtungen. Stimmen diese zufällig mit den beobachteten Orten überein, so bedürfen die Elemente keiner weiteren Verbesserung; wenn nicht, so werden die Differenzen X, Y bezeichnet, und man wiederholt wiederum zweimal dieselbe Rechnung, indem man die Werthe von x, y ein klein wenig ändert. So erhält man drei Systeme der Werthe für die Grössen x, y und für die Differenzen X, Y, woraus man nach Vorschrift des Art. 120 verbesserte Werthe der Grössen x, y ermittelt, denen die Werthe $X = 0$, $Y = 0$ entsprechen. Mittelst einer ähnlichen, auf dies vierte System gestützten Berechnung wird man diejenigen Elemente erhalten, durch welche alle vier Beobachtungen gehörig dargestellt werden. Uebrigens empfiehlt es sich, wenn man die Auswahl in der Gewalt hat, diejenigen vollständigen Beobachtungen beizubehalten, aus welchen sich die Lage der Bahn mit der grössten Schärfe bestimmen lässt,
(193) also die beiden äussersten Beobachtungen, falls sie eine heliocentrische Bewegung von 90^{0} oder eine kleinere umfassen. Sind die Beobachtungen aber nicht von gleicher Güte, so lässt man die Breiten oder Declinationen derjenigen weg, welche man als die weniger genauen im Verdacht hat.

166.

Zur ersten Bestimmung einer noch ganz unbekannten Bahn aus vier Beobachtungen müssen nothwendiger Weise solche Positionen angewandt werden, die eine nicht zu grosse heliocentrische Bewegung umfassen; widrigenfalls man die zur bequemen Bildung der ersten Annäherung erforderlichen Hülfsmittel entbehren würde. Die sogleich zu erörternde Methode aber erfreut sich einer so weiten Ausdehnung, dass sich dazu unbedenklich Beobachtungen benutzen lassen, die eine heliocentrische Bewegung von 30 oder 40 Graden umfassen, wenn nur die Abstände von der Sonne nicht gar zu ungleich sind. Falls man reichliches Material zur Auswahl besitzt, wird man wohlthun, die Zeitintervalle zwischen der ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und vierten Beobachtung möglichst gleich zu nehmen. Aber auch in dieser Beziehung braucht man nicht zu ängstlich zu sein, wie das nachfolgende Beispiel zeigen wird, wo die Zwischenzeiten 48, 55, 59 Tage sind, und die heliocentrische Bewegung über 50 Grade beträgt.

Ferner erfordert unsere Auflösung, dass die zweite und dritte Beobachtung vollständig sind, und mithin die Breiten oder Declinationen bei den äussersten Beobachtungen bei Seite gelassen werden. Ich habe zwar oben bemerkt, wie es sich der grösseren Genauigkeit wegen gemeiniglich empfiehlt, die Elemente den beiden äussersten vollständigen Beobachtungen und den in der Mitte liegenden Längen oder Rectascensionen anzupassen. Man wird es jedoch bei einer ersten Bahnbestimmung nicht bereuen, auf diesen Gewinn Verzicht geleistet zu haben, indem eine recht rasche Annäherung von viel grösserem Gewicht ist, und indem jener Verlust, der hauptsächlich nur die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn trifft, der aber die übrigen Elemente kaum merklich afficirt, sich nachher leicht ausgleichen lässt.

Der Kürze wegen will ich die Auseinandersetzung der Methode so anordnen, dass alle Orte sich auf die Ecliptik beziehen, und setze ich deshalb voraus, dass vier Längen mit zwei Breiten gegeben seien. Da inzwischen bei unseren Formeln auch Rücksicht auf die Breite der Erde genommen werden soll, so lassen sie sich leicht auf den Fall übertragen, wo der Aequator zur Grundebene genommen wird, wenn nur die Rectascensionen und Declinationen an Stelle der Längen und Breiten substituirt werden.

Uebrigens gilt Alles, was in Beziehung auf Nutation, Präcession und Parallaxe, sowie auf Aberration im vorigen Abschnitte gesagt ist, auch hier. Wenn daher nicht genäherte Entfernungen von der Erde bereits anderswoher bekannt sind, so dass sich in Beziehung auf Aberration die Methode I des Art. 118 brauchen lässt, so befreit man Anfangs die beobachteten Orte nur von der Fixstern-Aberration, und verbessert die Zeiten erst dann, sobald man im (194)
Laufe der Rechnung über eine genäherte Bestimmung der Entfernungen disponirt, wie weiter unten noch deutlicher erhellen wird.

167.

Ich stelle der Auseinandersetzung der Auflösung einen Index der vorzüglichsten Bezeichnungen voran. Es sollen bedeuten:

t, t', t'', t''' die vier Beobachtungszeiten,

$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ die vier geocentrischen Längen des Himmelskörpers,

$\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ dessen Breiten,

r, r', r'', r''' dessen Entfernungen von der Sonne,

ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' dessen Entfernungen von der Erde,

l, l', l'', l''' die heliocentrischen Längen der Erde,

B, B', B'', B''' die heliocentrischen Breiten der Erde,

R, R', R'', R''' die Entfernungen der Erde von der Sonne,

$(n01)$, $(n12)$, $(n23)$, $(n02)$, $(n13)$ die doppelten Flächen der Dreiecke, welche enthalten sind resp. zwischen der Sonne sowie des Himmelskörpers erstem und zweitem Orte, zweitem und drittem, drittem und viertem, erstem und drittem, zweitem und viertem,

$(\eta01)$, $(\eta12)$, $(\eta23)$ die Quotienten, welche entstehen aus der Division der Flächen $\frac{1}{2}(n01)$, $\frac{1}{2}(n12)$, $\frac{1}{2}(n23)$ durch die Flächen der entsprechenden Sectoren,

$$P' = \frac{(n12)}{(n01)}, \quad P'' = \frac{(n12)}{(n23)},$$

$$Q' = \left(\frac{(n01)+(n12)}{(n02)} - 1\right) r'^3, \quad Q'' = \left(\frac{(n12)+(n23)}{(n13)} - 1\right) r''^3,$$

v, v', v'', v''' des Himmelskörpers Längen in der Bahn von einem willkürlichen Punkte an gezählt.

Endlich bezeichne ich für die zweite und dritte Beobachtung die heliocentrischen Orte der Erde an der Himmelskugel mit A', A'', die geocentrischen Orte des Himmelskörpers mit B', B'' und dessen heliocentrischen Orte mit C', C''.

Unser erstes Geschäft wird nun ganz wie bei der Aufgabe des vorhergehenden Abschnitts (Art. 136) in der Bestimmung der Lage der grössten Kreise $A'C'B'$ und $A''C''B''$ bestehen, deren Neigungen gegen die Ecliptik ich mit γ', γ'' bezeichne. Mit dieser Rechnung verbindet man zugleich die Bestimmung der Bögen $A'B' = \delta'$, $A''B'' = \delta''$. Dann ist offenbar:

$$r' = \sqrt{(\varrho'\varrho' + 2\varrho' R' \cos\delta' + R'R')}$$
$$r'' = \sqrt{(\varrho''\varrho'' + 2\varrho'' R'' \cos\delta'' + R''R'')},$$

oder wenn man setzt: $\varrho' + R'\cos\delta' = x'$; $\varrho'' + R''\cos\delta'' = x''$; $R'\sin\delta' = a'$; $R''\sin\delta'' = a''$, so ist

(195)
$$r' = \sqrt{(x'x' + a'a')}$$
$$r'' = \sqrt{(x''x'' + a''a'')}.$$

168.

Combinirt man die Gleichungen 1 und 2 des Art. 112, so geben sie mit Anwendung der Bezeichnung in gegenwärtiger Untersuchung folgende Gleichungen:

$$0 = (n12) R \cos B \sin(l - \alpha) - (n02)\big(\varrho' \cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha) + R' \cos B' \sin(l' - \alpha)\big)$$
$$+ (n01)\big(\varrho'' \cos\beta'' \sin(\alpha'' - \alpha) + R'' \cos B'' \sin(l'' - \alpha)\big);$$

$$0 = (n23)\big(\varrho' \cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha') + R' \cos B' \sin(\alpha''' - l')\big) - (n13)\big(\varrho'' \cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')$$
$$+ R'' \cos B'' \sin(\alpha''' - l'')\big) + (n12) R''' \cos B''' \sin(\alpha''' - l''').$$

Diese Gleichungen gehen nun, wenn man setzt:

$$\frac{R' \cos B' \sin(l' - \alpha)}{\cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha)} - R' \cos\delta' = b'$$

$$\frac{R'' \cos B'' \sin(\alpha''' - l'')}{\cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')} - R'' \cos\delta'' = b''$$

$$\frac{R' \cos B' \sin(\alpha''' - l')}{\cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha')} - R' \cos\delta' = \varkappa'$$

$$\frac{R'' \cos B'' \sin(l'' - \alpha)}{\cos\beta'' \sin(\alpha'' - \alpha)} - R'' \cos\delta'' = \varkappa''$$

$$\frac{R \cos B \sin(l - \alpha)}{\cos\beta'' \sin(\alpha'' - \alpha)} = \lambda$$

$$\frac{R''' \cos B''' \sin(\alpha''' - l''')}{\cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha')} = \lambda'''$$

$$\frac{\cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha)}{\cos\beta'' \sin(\alpha'' - \alpha)} = \mu'$$

$$\frac{\cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')}{\cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha')} = \mu''$$

nach gehöriger Reduction über, in folgende:

$$\frac{\mu'(1 + P')(x' + b')}{1 + \dfrac{Q'}{(x'x' + a'a')^{\frac{3}{2}}}} = x'' + \varkappa'' + \lambda P'$$

$$\frac{\mu''(1 + P'')(x'' + b'')}{1 + \dfrac{Q''}{(x''x'' + a''a'')^{\frac{3}{2}}}} = x' + \varkappa' + \lambda''' P'',$$

(196) oder wenn man noch überher setzt:

$$-\varkappa''-\lambda P' = c'; \quad \mu'(1+P') = d'$$
$$-\varkappa'-\lambda''' P'' = c''; \quad \mu''(1+P'') = d''$$

in folgende:

$$\text{I.} \quad x'' = c' + \frac{d'(x'+b')}{1+\dfrac{Q'}{(x'x'+a'a')^{\frac{3}{2}}}}.$$

$$\text{II.} \quad x' = c'' + \frac{d''(x''+b'')}{1+\dfrac{Q''}{(x''x''+a''a'')^{\frac{3}{2}}}}$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen lassen sich x' und x'' aus a', b', c', d', Q', a'', b'', c'', d'', Q'' bestimmen. Man würde zwar, wenn x' oder x'' hieraus eliminirt werden sollte, auf eine Gleichung sehr hohen Grades kommen; dennoch aber würden durch indirecte Methoden die Werthe der Unbekannten x', x'' aus jenen Gleichungen bei ungeänderter Gestalt sich hinreichend rasch bestimmen lassen. Gemeiniglich erhält man schon genäherte Werthe der Unbekannten, wenn man zuerst Q' und Q'' vernachlässigt, nemlich

$$x' = \frac{c''+d''(b''+c')+d'd''b'}{1-d'd''}$$
$$x'' = \frac{c'+d'(b'+c'')+d'd''b''}{1-d'd''}.$$

Hat man aber nur erst einen genäherten Werth einer der beiden Unbekannten, so bekommt man die genauen, den Gleichungen streng genügenden Werthe sehr leicht. Es sei nämlich ξ' ein genäherter Werth von x', der, wenn er in Gleichung (I) substituirt, geben soll $x'' = \xi''$; ebenso sollen, wenn $x'' = \xi''$ in die Gleichung (II) substituirt wird, daraus $x' = X'$ herauskommen. Man wiederhole nun das nämliche Verfahren, indem man für x' in (I) einen andern Werth: $\xi'+\nu'$ einsetzt, woraus $x'' = \xi''+\nu''$ herauskommen mag, und dieser Werth soll in (II) substituirt geben: $x' = X'+N'$. Dann wird der verbesserte Werth für x' sein $= \xi' + \frac{(\xi'-X')\nu'}{N'-\nu'} = \frac{\xi' N' - X'\nu'}{N'-\nu'}$, und der verbesserte Werth für $x'' = \xi'' + \frac{(\xi'-X')\nu''}{N'-\nu'}$. Erscheint es der Mühe werth, so mag man mit dem verbesserten Werthe für x' und einem andern wenig geänderten dasselbe Verfahren wiederholen, bis man für x' und x'' Werthe erhält, die den Gleichungen I, II genau Genüge leisten. Uebrigens werden selbst einem nur mässig bewanderten Analysten die Hülfsmittel zur Abkürzung der Rechnung nicht fehlen.

Bei diesen Operationen lassen sich die irrationalen Grössen $(x'x'+a'a')^{\frac{3}{2}}$ und $(x''x''+a''a'')^{\frac{3}{2}}$ leicht berechnen durch Einführung der Bögen z', z'', deren Tangenten resp. sind $\frac{a'}{x'}$, $\frac{a''}{x''}$, woraus wird: (197)

$$\sqrt{(x'x'+a'a')} = r' = \frac{a'}{\sin z'} = \frac{x'}{\cos z'}$$

$$\sqrt{(x''x''+a''a'')} = r'' = \frac{a''}{\sin z''} = \frac{x''}{\cos z''}.$$

Diese Hülfsbögen, welche man zwischen 0 und 180° nehmen muss, damit r und r'' positiv herauskommen, sind offenbar mit den Bögen $C'B'$, $C''B''$ identisch, woraus man sieht, dass auf diese Weise nicht nur r' und r'', sondern auch die Lage der Punkte C' und C'' bekannt wird.

Diese Bestimmung der Grössen x', x'' erfordert, dass a', a'', b', b'', c', c'', d', d'', Q', Q'' bekannt sind, und zwar erhält man die vier ersten durch die Daten des Problems, die vier folgenden aber hängen von P' und P'' ab. Nun lassen die Grössen P', P'', Q', Q'' sich zwar noch nicht genau bestimmen; da man aber hat:

$$\text{III.}\quad P' = \frac{t''-t'}{t'-t}\cdot\frac{(\eta 01)}{(\eta 12)}$$

$$\text{IV.}\quad P'' = \frac{t''-t'}{t'''-t''}\cdot\frac{(\eta 23)}{(\eta 12)}$$

$$\text{V.}\quad Q' = \tfrac{1}{2}kk(t'-t)(t''-t')\cdot\frac{r'r'}{rr''}\cdot\frac{1}{(\eta 01)(\eta 12)\cos\frac{1}{2}(v'-v)\cos\frac{1}{2}(v''-v)\cos\frac{1}{2}(v''-v')}$$

$$\text{VI.}\quad Q'' = \tfrac{1}{2}kk(t''-t')(t'''-t')\cdot\frac{r''r''}{r'r'''}\cdot\frac{1}{(\eta 12)(\eta 23)\cos\frac{1}{2}(v''-v')\cos\frac{1}{2}(v'''-v')\cos\frac{1}{2}(v'''-v'')},$$

so hat man als genäherte Werthe gleich zur Hand

$$P' = \frac{t''-t'}{t'-t},\quad P'' = \frac{t''-t'}{t'''-t''}$$

$$Q' = \tfrac{1}{2}kk(t'-t)(t''-t'),\quad Q'' = \tfrac{1}{2}kk(t''-t')(t'''-t''),$$

auf welche man die erste Rechnung baut.

169.

Nach Beendigung der Berechnung im vorigen Artikel muss man vor Allem den Bogen $C'C''$ bestimmen. Dies geschieht am bequemsten, wenn man ganz wie im Art. 137 den Einschnitt D der grössten Kreise $A'C'B'$, $A''C''B''$ und ihre gegenseitige Neigung ε ermittelt. Man findet sodann aus ε, $C'D = z' + B'D$ und $C''D = z'' + B''D$, durch die Formeln in Art. 144, nicht nur $C'C'' = v'' - v'$, sondern auch die Winkel (u', u''), unter welchen die grössten Kreise $A'B'$, $A''B''$ den grössten Kreis $C'C''$ schneiden.

(198) Nach Auffindung des Bogens $v'' - v'$ erhält man $v' - v$ und r aus Combination der Gleichungen

$$r \sin(v' - v) = \frac{r'' \sin(v'' - v')}{P'}$$

$$r \sin(v' - v + v'' - v') = \frac{1 + P'}{P'} \cdot \frac{r' \sin(v'' - v')}{1 + \frac{Q'}{r'^3}}$$

und ebenso r''' und $v''' - v''$ aus folgender Combination:

$$r''' \sin(v''' - v'') = \frac{r' \sin(v'' - v')}{P''}$$

$$r''' \sin(v''' - v'' + v'' - v') = \frac{1 + P''}{P''} \cdot \frac{r'' \sin(v'' - v')}{1 + \frac{Q''}{r''^3}}.$$

Alle solchergestalt gefundenen Zahlen würden genau sein, wenn man gleich im Anfange von den wahren Werthen für P', P'', Q', Q'' hätte ausgehen können, wo man dann die Lage der Bahnebene ebenso wie im Art. 149 entweder aus $A'C'$, u' und γ', oder aus $A''C''$, u'' und γ'' bestimmen würde, und die Bahndimensionen entweder aus r', r'', t', t'' und $v'' - v'$, oder (was genauer ist) aus r, r''', t, t''' und $v''' - v$. Bei erster Rechnung aber übergehe ich alles Dieses und strebe vorzüglich darnach, mehr genäherte Werthe für die Grössen P', P'', Q', Q'' zu erlangen. Dieses Ziel verfolge ich, wenn ich mittelst der Methode, die von Art. 88 an auseinandergesetzt ist,

aus	r,	r',	$v' - v$,	$t' - t$	bestimme:	$(\eta 01)$
„	r',	r'',	$v'' - v'$,	$t'' - t'$	„	$(\eta 12)$
„	r'',	r''',	$v''' - v''$,	$t''' - t''$	„	$(\eta 23)$.

Diese Grössen, sowie die Werthe für r, r', r'', r''', $\cos.\frac{1}{2}(v'-v)$ u. s. w. schalte ich in die Formeln III bis VI ein, woraus dann für P', Q', P'', Q'' viel genauere Werthe als diejenigen resultiren, auf welche die erste Hypothese sich stützte. Mit diesen genaueren Werthen bilde man also die zweite Hypothese, welche, wenn sie ganz auf dieselbe Weise wie die erste durchgeführt wird, noch genauere Werthe für P', Q', P'', Q'' liefern und so zur dritten Hypothese führen wird. — Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis die Werthe für P', Q', P'', Q'' keiner Verbesserung mehr zu bedürfen scheinen, und eine häufige Uebung wird bald lehren, dies richtig zu beurtheilen.

Wenn die heliocentrische Bewegung klein ist, so wird gemeiniglich die erste Hypothese jene Werthe bereits genau genug ergeben; falls sie aber einen grösseren Bogen umfasst, und wenn überdies die Zwischenzeiten merklich von der Gleichheit abweichen, so wird es mehrfach wiederholter Hypothesen
bedürfen; jedoch erfordern in einem solchen Falle die ersten Hypothesen (199)
keine grosse Schärfe der Rechnung. In letzter Hypothese endlich bestimmt man die Elemente selbst so, wie bereits gezeigt ist.

170.

In erster Hypothese wird man freilich von den unverbesserten Zeiten t, t', t'', t''' Gebrauch machen müssen, da man die Entfernungen von der Erde noch nicht berechnen kann. Sobald aber erst genäherte Werthe für die Grössen x', x'' bekannt sind, so lassen sich auch jene Entfernungen näherungsweise bestimmen. Da aber die Formeln für ϱ und ϱ''' hier etwas verwickelter ausfallen, so empfiehlt es sich, die Berechnung der Zeiten-Verbesserung bis dahin aufzuschieben, wo man die Werthe für die Entfernungen genau genug besitzt, dass keine Wiederholung der Rechnung nöthig ist.

Es wird deshalb vortheilhaft sein, dies Verfahren auf diejenigen Werthe für x', x'' zu stützen, zu welchen die vorletzte Hypothese geführt hat, so dass erst die letzte Hypothese von dem verbesserten Werthe der Zeiten und der Grössen P', P'', Q', Q'' ausgeht. Hier folgen die zu diesem Zwecke zu benutzenden Formeln:

VII. $\varrho' = x' - R' \cos\delta'$

VIII. $\varrho'' = x'' - R'' \cos\delta''$

$$\text{IX.}\quad \varrho\cos\beta = -R\cos B\cos(\alpha-l) + \frac{1+P'}{P'(1+\frac{Q'}{r'^3})}\left(\varrho'\cos\beta'\cos(\alpha'-\alpha) + R'\cos B'\cos(l'-\alpha)\right)$$
$$-\frac{1}{P'}\left(\varrho''\cos\beta''\cos(\alpha''-\alpha) + R''\cos B''\cos(l''-\alpha)\right)$$

$$\text{X.}\quad \varrho\sin\beta = -R\sin B + \frac{1+P'}{P'(1+\frac{Q'}{r'^3})}(\varrho'\sin\beta' + R'\sin B') - \frac{1}{P'}(\varrho''\sin\beta'' + R''\sin B'')$$

$$\text{XI.}\quad \varrho'''\cos\beta''' = -R'''\cos B'''\cos(\alpha'''-l''') + \frac{1+P''}{P''(1+\frac{Q''}{r''^3})}\left(\varrho''\cos\beta''\cos(\alpha'''-\alpha'') + \right.$$
$$\left. R''\cos B''\cos(\alpha'''-l'')\right) - \frac{1}{P''}\left(\varrho'\cos\beta'\cos(\alpha'''-\alpha') + R'\cos B'\cos(\alpha'''-l')\right)$$

$$\text{XII.}\quad \varrho'''\sin\beta''' = -R'''\sin B''' + \frac{1+P''}{P''(1+\frac{Q''}{r''^3})}(\varrho''\sin\beta'' + R''\sin B'')$$
$$-\frac{1}{P''}(\varrho'\sin\beta' + R'\sin B').$$

Die Formeln IX—XII lassen sich ohne Weiteres aus den Gleichungen 1, 2, 3 des Art. 112 ableiten, wenn man nur die dort angewandten Bezeichnungen
(200) mit den hier gebrauchten gehörig vertauscht. Offenbar werden die Formeln viel einfacher, wenn B, B', B'' verschwinden. Aus Combination der Formeln IX und X erhält man ϱ und β, und ebenso aus XI und XII ϱ''' und β'''. Vergleicht man die Werthe dieser Breiten mit den beobachteten (die nicht in die Rechnung eingehen), wenn letztere gegeben sind, so wird sich zeigen, mit welchem Grade der Genauigkeit man die äussersten Breiten durch die Elemente darstellen kann, welche den übrigen sechs Daten angepasst sind.

171.

Ein Beispiel zur Erläuterung dieser Untersuchung will ich von der Vesta hernehmen, die unter allen neuerdings entdeckten Planeten die kleinste Neigung gegen die Ecliptik besitzt.*)

*) Inzwischen ist diese Neigung (7° 8′) noch bedeutend genug, um mit Sicherheit und Genauigkeit auch eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen zuzulassen. In der That waren die ersten Elemente solchergestalt aus Beobachtungen abgeleitet, die nur 19 Tage von einander abstanden, und nähern sich schon sehr denen, die hier aus vier, um 162 Tage von einander entfernten Beobachtungen bestimmt sind (vergl. v. Zach Monatliche Correspondenz, Band 15, S. 595).

Ich wähle die nachstehenden, zu Bremen, Paris, Lilienthal und Mailand, von Olbers, Bouvard, Bessel und Oriani angestellten Beobachtungen:

mittlere Zeit des Beobachtungsorts.	Rectascension.	Declination.
1807 März 30. $12^h 33^m 17^s$	$183° 52' 40''8$	$11° 54' 27''$ nördl.
„ Mai 17. 8 16 5	178 36 42,3	11 39 46,8 „
„ Juli 11. 10 30 19	189 49 7,7	3 9 10,1 „
„ Sept. 8. 7 22 16	212 50 3,4	8 38 17,0 südl.

Für dieselben Zeiten findet man aus den Sonnentafeln:

	Länge d. Sonne vom scheinbaren Aequin.	Nutation.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.	scheinbare Schiefe der Ecliptik.
März 30	$9° 21' 59''5$	+16,8	0,999 6448	$+0''23$	$23° 27' 50''82$
Mai 17	55 56 20,0	+16,2	1,011 9789	−0,63	49,83
Juli 11	108 34 53,3	+17,3	1,016 5795	−0,46	49,19
Sept. 8	165 8 57,1	+16,7	1,006 7421	+0,29	49,26

Nun werden die beobachteten Planetenorte, mit Anwendung der scheinbaren Schiefe der Ecliptik, in Längen und Breiten verwandelt, von der Nutation und Fixstern-Aberration befreit, und schliesslich durch Hinwegnahme der Präcession auf den Anfang des Jahres 1807 reducirt. Dann werden aus den Sonnenorten, nach Anleitung von Art. 72, die fingirten Orte der Erde abgeleitet (um auf die Parallaxe Rücksicht zu nehmen) und die Längen durch Hinwegnahme der Nutation und Praecession auf dieselbe Epoche übertragen. Endlich werden die Zeiten von Beginn des Jahres gezählt und auf Pariser Meridian reducirt. So sind folgende Zahlen entstanden: (201)

t, t', t'', t'''	89,505 162	137,344 502	192,419 502	251,288 102
$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$	$178° 43' 38''87$	$174° 1' 30''08$	$187° 45' 42''23$	$213° 34' 15''63$
$\beta, \beta', \beta'', \beta'''$	12 27 6,16	10 8 7,80	6 47 25,51	4 20 21,63
l, l', l'', l'''	189 21 33,71	235 56 0,63	288 35 20,32	345 9 18,69
$\log R, R', R'', R'''$	9,999 7990	0,005 1376	0,007 1739	0,003 0625.

Hieraus leitet man ab:

$\gamma' = 168^\circ\, 32'\, 41''34;\quad \delta' = 62^\circ\, 23'\, 4''88;\quad \log a' = 9{,}952\,6104$
$\gamma'' = 173\quad 5\; 15{,}68;\quad \delta'' = 100\;\; 45\;\; 1{,}40;\quad \log a'' = 9{,}999\,4839$
$b' = -11{,}009\,449;\; \varkappa' = -1{,}083\,306;\; \log \lambda \;= 0{,}072\,8800;\; \log \mu' = 9{,}713\,9702\,n$
$b'' = -\;\;2{,}082\,036;\; \varkappa'' = +6{,}322\,006;\; \log \lambda''' = 0{,}079\,8512\,n;\; \log \mu'' = 9{,}838\,7061$
$A'D = \;\;37^\circ\, 17'\, 51''50;\quad A''D = \;\;89^\circ\, 24'\, 11''84;\quad \varepsilon = 9^\circ\, 5'\, 5''48$
$B'D = -25\quad 5\; 13{,}38;\quad B''D = -11\;\; 20'\, 49''56.$

Nach Erledigung dieser vorläufigen Rechnungen, nehme ich die erste Hypothese in Angriff. Aus den Zwischenzeiten ergiebt sich

$$\log k\,(t'-t) = 9{,}915\,3666$$
$$\log k\,(t''-t') = 9{,}976\,5359$$
$$\log k\,(t'''-t'') = 0{,}005\,4651$$

und hieraus die ersten genäherten Werthe

$$\log P' = 0{,}061\,17;\quad \log(1+P') = 0{,}332\,69;\quad \log Q' = 9{,}590\,87$$
$$\log P'' = 9{,}971\,07;\quad \log(1+P'') = 0{,}286\,81;\quad \log Q'' = 9{,}680\,97$$

hieraus ferner:

$$c' = -7{,}683\,61;\quad \log d' = 0{,}046\,66\,n$$
$$c'' = +2{,}207\,71;\quad \log d'' = 0{,}125\,52.$$

Mit diesen Werthen ergiebt nach einigen wenigen Versuchen die nachfolgende Auflösung der Gleichungen I und II:

$$x' = 2{,}048\,56;\quad z' = 23^\circ\, 38'\, 17'';\quad \log r' = 0{,}349\,51$$
$$x'' = 1{,}957\,45;\quad z'' = 27\quad 2\quad 0;\quad \log r'' = 0{,}341\,94.$$

Aus z', z'' und ε erhält man $C'C'' = v''-v' = 17^\circ\, 7'\, 5''$; hieraus $v'-v$, r, $v'''-v''$, r''' mittelst folgender Gleichungen:

(202) $$\log r\;\sin(v'-v) = 9{,}749\,42;\quad \log r\;\sin(v'-v+17^\circ\, 7'\, 5'') = 0{,}075\,00$$
$$\log r'''\sin(v'''-v'') = 9{,}847\,29;\quad \log r'''\sin(v'''-v''+17\;\; 7\;\; 5) = 0{,}107\,33,$$

woraus man findet:

$$v'-v = 14^\circ\, 14'\, 32'';\quad \log r = 0{,}358\,65$$
$$v'''-v'' = 18\;\; 48\;\; 33;\quad \log r''' = 0{,}338\,87.$$

Endlich findet sich

$$\log(n01) = 0{,}004\,26,\; \log(n12) = 0{,}005\,99,\; \log(n23) = 0{,}007\,11,$$

und hieraus die verbesserten Werthe von P', P'', Q', Q''

$$\log P' = 0{,}059\,44,\quad \log Q' = 9{,}603\,74$$
$$\log P'' = 9{,}972\,19,\quad \log Q'' = 9{,}695\,81.$$

Hierauf stützt man die zweite Hypothese. Ihre Hauptmomente sind folgende:

$c' = -7{,}678\,20$; $\log d' = 0{,}045\,736\,n$

$c'' = +2{,}210\,61$; $\log d'' = 0{,}126\,054$

$x' = 2{,}033\,08$; $z' = 23^\circ\,47'\,54''$; $\log r' = 0{,}346\,747$

$x'' = 1{,}942\,90$; $z'' = 27\ \ 12\ \ 25$; $\log r'' = 0{,}339\,373$

$C'C'' = v'' - v' = 17^\circ\,8'\,0''$

$v' - v = 14^\circ\,21'\,36''$; $\log r = 0{,}354\,687$

$v''' - v'' = 18\ \ 50\ \ 43$; $\log r''' = 0{,}334\,564$

$\log(n01) = 0{,}004\,359$; $\log(n12) = 0{,}006\,102$; $\log(n23) = 0{,}007\,280$.

Hieraus erhält man die von Neuem verbesserten Werthe für P', P'', Q', Q'':

$$\log P' = 0{,}059\,426;\quad \log Q' = 9{,}604\,749$$
$$\log P'' = 9{,}972\,249;\quad \log Q'' = 9{,}697\,564,$$

aus welchen, wenn man zur dritten Hypothese übergeht, folgende Zahlen resultiren:

$c' = -7{,}678\,15$; $\log d' = 0{,}045\,729\,n$

$c'' = +2{,}210\,76$; $\log d'' = 0{,}126\,082$

$x' = 2{,}032\,55$; $z' = 23^\circ\,48'\,14''$; $\log r' = 0{,}346\,653$

$x'' = 1{,}942\,35$; $z'' = 27\ \ 12\ \ 49$; $\log r'' = 0{,}339\,276$

$C'C'' = v'' - v' = 17^\circ\,8'\,4''$

$v' - v = 14^\circ\,21'\,49''$; $\log r = 0{,}354\,522$

$v''' - v'' = 18\ \ 51\ \ \ 7$; $\log r''' = 0{,}334\,290$

$\log(n01) = 0{,}004\,363$; $\log(n12) = 0{,}006\,106$; $\log(n23) = 0{,}007\,290$.

Wenn man jetzt nach Anleitung des vorhergehenden Artikels die Entfernungen von der Erde berechnet, so erhält man:

$$\varrho' = 1{,}5635;\quad \varrho'' = 2{,}1319$$

$$\log \varrho \cos\beta = 0{,}098\,76;\quad \log \varrho''' \cos\beta''' = 0{,}428\,42 \qquad (203)$$
$$\log \varrho \sin\beta = 9{,}442\,52;\quad \log \varrho''' \sin\beta''' = 9{,}309\,05$$
$$\beta = 12^\circ\,26'\,40'';\quad \beta''' = 4^\circ\,20'\,39''$$
$$\log \varrho = 0{,}109\,09;\quad \log \varrho''' = 0{,}429\,67$$

Daraus findet man:

	Verbesserung der Zeiten.	verbesserte Zeiten.
I	0,007 335	89,497 827
II	0,008 921	135,335 581
III	0,012 165	192,407 337
IV	0,015 346	251,272 756

Hieraus erhält man folgende abermals verbesserte Werthe:

$$\log P' = 0{,}059\,415, \quad \log Q' = 9{,}604\,782$$
$$\log P'' = 9{,}972\,253, \quad \log Q'' = 9{,}697\,687.$$

Wenn man endlich auf diese neuen Werthe eine vierte Hypothese stützt, so ergeben sich folgende Zahlen:

$$c' = -7{,}678\,116; \quad \log d' = 0{,}045\,723\,n$$
$$c'' = +2{,}210\,773; \quad \log d'' = 0{,}126\,084$$
$$x' = 2{,}032\,473; \quad z' = 23^\circ\,48'\,16''7; \quad \log r' = 0{,}346\,638$$
$$x'' = 1{,}942\,281; \quad z'' = 27\ \ 12\ \ 51{,}7; \quad \log r'' = 0{,}339\,263$$
$$v''-v' = 17^\circ\ \ 8'\ \ 5''1; \quad \tfrac{1}{2}(u''+u') = 176^\circ\,7'\,50''5; \quad \tfrac{1}{2}(u''-u') = 4^\circ\,33'\,23''6$$
$$v'-v = 14\ \ 21\ \ 51{,}9; \quad \log r = 0{,}354\,503$$
$$v'''-v'' = 18\ \ 51\ \ \ 9{,}5; \quad \log r''' = 0{,}334\,263.$$

Diese Zahlen weichen von denen der dritten Hypothese so wenig ab, dass man bereits mit Sicherheit zur Bestimmung der Elemente selbst übergehen kann. Zuerst ermittelt man die Lage der Bahnebene. Nach Anleitung des Art. 149 findet sich aus γ', u' und $A'C' = \delta' - z'$, die Neigung der Bahn $= 7^\circ\,8'\,14''8$, $\Omega = 103^\circ\,16'\,37''2$, Argument der Breite in zweiter Beobachtung $= 94^\circ\,36'\,4''9$, daraus Länge in der Bahn $= 197^\circ\,52'\,42''1$. Ebenso aus γ'', u'' und $A''C'' = \delta'' - z''$ die Neigung der Bahn $= 7^\circ\,8'\,14''\,8$, $\Omega = 103^\circ\,16'\,37''5$, Argument der Breite in dritter Beobachtung $= 111^\circ\,44'\,9''7$, und daraus Länge in der Bahn $= 215^\circ\,0'\,47''2$. Darnach wird Länge in der Bahn für die erste Beobachtung $= 183^\circ\,30'\,50''2$, für die vierte Beobachtung $233^\circ\,51'\,56''7$. Bestimmt man nun aus $t'''-t$, r, r''' und $v'''-v = 50^\circ\,21'\,6''5$ die Dimensionen der Bahn, so erhält man:

wahre Anomalie für den ersten Ort	$293^\circ\,33'\,43''7$ (204)
wahre Anomalie für den vierten Ort	343 54 50,2
hieraus Länge des Perihels	249 57 6,5
mittlere Anomalie für den ersten Ort	302 33 32,6
mittlere Anomalie für den vierten Ort	346 32 25,2
mittlere tägliche siderische Bewegung	$978''7216$
mittlere Anomalie für den Anfang des Jahres 1807	278 13 39,1
mittlere Länge für dieselbe Epoche	168 10 45,6
Winkel φ	5 2 58,1
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,372 898

Berechnet man nach diesen Elementen für die verbesserten Zeiten t, t', t'', t''' die geocentrischen Orte des Planeten, so stimmen die vier Längen mit α, α', α'', α''', und die beiden intermediären Breiten mit β', β'' bis auf den zehnten Theil der Secunde überein. Die äussersten Breiten aber werden $12^\circ\,26'\,43''7$ und $4^\circ\,20'\,40'1$, erstere um $22''4$ zu klein, letztere um $18''5$ zu gross. Wenn man jedoch unter Beibehaltung der übrigen Elemente nur die Neigung der Bahn um $6''$ vermehrt und die Länge des Knotens um $4'\,40''$ vermindert, so lassen sich die auf alle Breiten vertheilten Fehler bis auf wenige Secunden herabbringen, und die Längen erscheinen mit nur sehr kleinen Fehlern behaftet, welche sich fast auf Nichts reduciren würden, wenn man überdies die Epoche der Länge um $2''$ vermindert.