(131)

Zweites Buch.

Erforschung der Bahnen der Himmelskörper aus geocentrischen Beobachtungen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen.

115.

Zur vollständigen Bestimmung der Bewegung eines Himmelskörpers in seiner Bahn sind sieben Elemente erforderlich, deren Zahl sich aber um ein Element verringern lässt, wenn die Masse des Körpers entweder bekannt ist, oder vernachlässigt wird. Diese Licenz lässt sich kaum vermeiden bei Bestimmung einer noch gänzlich unbekannten Bahn, wo man alle zur Ordnung der Störungen gehörenden Grössen so lange bei Seite lassen muss, bis die Massen, von welchen sie abhängen, anderswoher bekannt geworden sind. Da ich nun bei der gegenwärtigen Untersuchung die Masse des Körpers vernachlässige, so reducirt sich die Zahl der Elemente auf sechs, und es ist daher klar, dass zur Bestimmung einer unbekannten Bahn ebenso viele von den Elementen abhängige, von sich selbst aber gegenseitig unabhängige Grössen erfordert werden. Diese Grössen können keine andere, als von der Erde aus beobachtete Orte des Himmelskörpers sein, und da die einzelnen Orte je zwei Daten liefern, nämlich Länge und Breite, oder Rectascension und Declination, so ist es das Einfachste, drei geocentrische Orte anzunehmen, welche, im Allgemeinen gesprochen, zur Bestimmung der sechs unbekannten Elemente ausreichen. Diese Aufgabe ist als die wichtigste dieses Werkes zu betrachten, und soll daher mit der höchsten Sorgfalt in diesem Abschnitte abgehandelt werden.

In dem besondern Falle aber, wo die Ebene der Bahn mit der Ecliptik zusammenfällt, und deshalb der Natur der Sache nach alle heliocentrischen und geocentrischen Breiten verschwinden, können die drei verschwindenden geocentrischen Breiten nicht weiter als drei von einander unabhängige Daten betrachtet werden. Es würde daher dann diese Aufgabe unbestimmt bleiben, und den dreien geocentrischen Orten durch unendlich viele Bahnen genügt werden können. In einem solchen Falle müssen mithin nothwendig vier geocentrische Längen gegeben sein, um die vier übrigen unbekannten Elemente (mit Ausfall der Neigung der Bahn und der Länge des Knotens) zu finden. (132)
Obgleich nun „per principium indiscernibilium“ nicht zu erwarten ist, dass jemals in der Natur der Dinge ein solcher Fall sich zutragen werde, so ist doch leicht abzusehen, dass eine Aufgabe, welche beim vollständigen Zusammenfallen der Bahn mit der Ecliptik gänzlich unbestimmt wird, auch bei denjenigen Bahnen, die nur sehr wenig gegen die Ecliptik geneigt sind, wegen der beschränkten Genauigkeit der Beobachtungen beinahe ebenso unbestimmt bleiben müsse, wo selbst die kleinsten Beobachtungsfehler die Bestimmung der Unbekannten gänzlich zu stören vermögen. Um deshalb auch auf diesen Fall Rücksicht zu nehmen, wird man sechs andere Daten auswählen müssen, und ich will daher im zweiten Abschnitte zeigen, wie sich die unbekannte Bahn aus vier Beobachtungen bestimmen lässt, von denen zwar zwei vollständig sind, die beiden übrigen aber unvollständig, indem entweder die Breiten oder die Declinationen fehlen.

Da endlich alle unsere Beobachtungen wegen der Unvollkommenheit unserer Instrumente und Sinne nur Annäherungen zur Wahrheit sind, so wird eine Bahn, die lediglich auf die sechs absolut nothwendigen Daten sich stützt, noch beträchtlichen Irrthümern unterworfen sein können. Um nun die letzteren, so weit es angeht, zu verkleinern, und so die grösstmöglichste Genauigkeit zu erreichen, giebt es keinen andern Weg, als von den besten Beobachtungen so viele als möglich zu sammeln, und die Elemente so auszufeilen, dass sie nicht allein diesen oder jenen mit unbedingter Schärfe sich anschliessen, sondern mit allen so gut als möglich übereinstimmen. Durch welches Verfahren man nun eine solche Uebereinstimmung (wenn auch nirgends eine absolute, aber doch allenthalben eine so nahe als mögliche) nach den

Grundsätzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung erlangen kann, will ich im dritten Abschnitte zeigen.

Auf diese Weise wird sich also die Bestimmung der Bahnen, soweit sich in ihnen die Himmelskörper nach den Kepler'schen Gesetzen bewegen, zu aller wünschenswerthen Vollkommenheit erheben. Die letzte Ausfeilung lässt sich freilich erst dann unternehmen, wenn man auch den Störungen Rechnung trägt, mit welchen die übrigen Planeten auf die Bewegung einwirken. Diese Rechnung, soweit sie zu unserem Zwecke gehört, will ich in dem vierten Abschnitte kürzlich anzeigen.

116.

Bevor man die Bestimmung einer Bahn aus geocentrischen Beobachtungen unternimmt, muss man, wenn die grösste Schärfe erfordert wird, gewisse Reductionen wegen Nutation, Präcession, Parallaxe und Aberration anbringen. Bei einer mehr beiläufigen Rechnung kann man diese Kleinigkeiten vernachlässigen.

Die Beobachtungen der Planeten und Cometen werden gewöhnlich so gegeben, dass sie in scheinbaren Rectascensionen und Declinationen ausge-
(133) drückt sind, d. h. sie sind auf die scheinbare Lage des Aequators bezogen. Da diese Lage wegen der Nutation und Präcession veränderlich, und daher für verschiedene Beobachtungen verschieden ist, so muss man vor allen Dingen an Stelle der veränderlichen Ebene irgend eine fixe Ebene einführen, zu welchem Zwecke man entweder den Aequator nach seiner mittleren Lage für irgend eine Epoche, oder die Ecliptik wählen kann. Die letztere Ebene pflegt gemeiniglich angewendet zu werden, aber auch die erstere Ebene empfiehlt sich durch einige eigenthümliche, nicht zu verachtende Vortheile.

Falls es daher beliebt, die Ebene des Aequators zu wählen, so müssen vor Allem die Beobachtungen von der Nutation befreit werden, und sind solche alsdann mit Anbringung der Präcession auf irgend eine beliebige Epoche zu reduciren. Dieses Verfahren kommt ganz mit demjenigen überein, mittelst dessen man aus dem beobachteten Orte eines Fixsterns dessen mittlere Position für eine gegebene Epoche ableitet, und dasselbe bedarf daher hier keiner Erklärung. Hat man aber beschlossen, die Ebene der Ecliptik zu adoptiren, so erhellt daraus eine doppelte Methode. Es können nämlich entweder aus den für Nutation und Präcession verbesserten Rectascensionen und Declinationen die Längen und Breiten vermöge der mittleren Schiefe abgeleitet werden, woraus man sodann die bereits auf das mittlere Aequinox bezogenen Längen erhält; oder man kann bequemer aus den scheinbaren Rectascensionen und Declinationen, mit Anwendung der scheinbaren Schiefe, die Längen und Breiten berechnen und diese sodann von der Nutation und Aberration befreien.

Aus den Sonnentafeln werden die, den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Erdorte berechnet, die man dann natürlich auf die nämliche Ebene beziehen muss, auf welche die Beobachtungen des Himmelskörpers bezogen sind. Man vernachlässigt daher die Nutation bei Berechnung der Sonnenlänge, reducirt aber sodann diese Länge durch Anbringung der Präcession auf eine feste Epoche, und vermehrt die Länge um 180^0; der Breite der Sonne, wenn es der Mühe werth ist, sie in Rechnung zu nehmen, giebt man das entgegengesetzte Zeichen. Auf diese Weise erhält man die heliocentrische Position der Erde, welche, wenn man den Aequator zur Grundebene gewählt hat, unter Anwendung der mittleren Schiefe in Rectascension und Declination verwandelt wird.

117.

Die auf diese Weise aus den Tafeln berechnete Erdposition bezieht sich auf den Mittelpunkt der Erde, der beobachtete Ort des Himmelskörpers aber auf einen Punkt der Erdoberfläche; eine Nichtübereinstimmung, der sich auf dreierlei Weise Abhülfe schaffen lässt. Man kann nämlich die Beobachtung entweder auf den Erdmittelpunkt reduciren, d. h. sie von der Parallaxe befreien; oder aber den heliocentrischen Ort der Erde auf den Beobachtungsort reduciren, was sich dadurch bewirken lässt, dass man an den, aus den Tafeln berechneten Sonnenort die Parallaxe gehörig anbringt; oder endlich lassen sich auch beide Positionen auf irgend einen dritten Punkt übertragen, als welchen man am bequemsten den Einschnittspunkt des Visions-Radius mit der Ebene der Ecliptik annimmt: die Beobachtung selbst bleibt dann ungeändert, und die Reduction des Erdortes auf diesen Punkt ist im Art. 72 gelehrt. Die (134) erste Methode lässt sich nur dann anwenden, wenn der Abstand des Himmelskörpers von der Erde wenigstens näherungsweise bekannt ist; dann aber ist sie äusserst bequem und besonders in dem Falle, wenn die Beobachtung im Meridiane angestellt ist, wo nur die Declination allein von der Parallaxe afficirt wird. Uebrigens ist es vorzuziehen, diese Reduction unmittelbar an den beobachteten Ort anzubringen, bevor man die Umformungen des vorhergehenden Artikels unternimmt. Ist aber der Abstand von der Erde noch gänzlich unbekannt, so muss man auf die zweite oder dritte Methode recurriren, und zwar auf die zweite, wenn der Aequator als Grundebene angenommen wird, auf die dritte aber, falls man alle Positionen auf die Ecliptik beziehen will.

118.

Wenn der einer Beobachtung entsprechende Abstand eines Himmelskörpers von der Erde schon sehr nahe bekannt ist, so lässt sich diese Beobachtung vom Einflusse der Aberration auf mehre Arten befreien, die sich auf die verschiedenen, im Art. 71 behandelten Methoden stützen. Es sei t die wirkliche Zeit der Beobachtung; ϑ der Zeitraum, welchen das Licht gebraucht, um von dem Himmelskörper zur Erde zu gelangen, und den man erhält, wenn man die Distanz mit 493 Zeitsecunden multiplicirt; l der beobachtete Ort; l' derselbe, mit Hülfe der geocentrischen täglichen Bewegung auf den Zeitpunkt $t+\vartheta$ reducirte Ort; l'' der Ort l, aber befreit von demjenigen Theile der Aberration, welche den Planeten mit den Fixsternen gemeinsam ist; L der wahre, der Zeit t entsprechende Erdort (d. h. der Tafelort um $20''25$ vermehrt); endlich $'L$ der wahre, der Zeit $t-\vartheta$ entsprechende Erdort. Dann ist:

I. $l =$ der wahre Ort des Himmelskörpers aus $'L$ zur Zeit $t-\vartheta$ gesehen;

II. $l' =$ der wahre Ort des Himmelskörpers aus L gesehen zur Zeit t.

III. $l'' =$ der wahre Ort des Körpers aus L gesehen zur Zeit $t-\vartheta$.

Bei der Methode I wird daher der beobachtete Ort unverändert beibehalten, für die wirkliche Zeit aber die fingirte Zeit $t-\vartheta$ substituirt, und dabei der Ort der Erde für diese fingirte Zeit berechnet. Die Methode II bringt die Aenderung lediglich an die Beobachtung an, erfordert aber ausser dem Abstande auch noch die tägliche Bewegung. Bei der Methode III erleidet die Beobachtung eine von dem Abstande unabhängige Verbesserung, für die wirkliche Zeit wird die fingirte $t-\vartheta$ substituirt, aber unter Beibehaltung des der wirklichen Zeit entsprechenden Erdortes. Von diesen Methoden ist die erste die bei weitem bequemste, sobald die Entfernung wenigstens in soweit bekannt ist, dass die Reduction der Zeit mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden kann.

Ist aber diese Entfernung noch gänzlich unbekannt, so leidet keine dieser Methoden eine unmittelbare Anwendung; bei der ersten hat man zwar den geocentrischen Ort des Himmelskörpers, aber zu wünschen bleibt noch die Zeit und die Stellung der Erde, die von der unbekannten Entfernung abhängig sind; bei der zweiten sind zwar letztere gegeben, aber der erstere fehlt; bei der dritten endlich hat man zwar den geocentrischen Ort des (135)
Himmelskörpers und die Position der Erde, aber die mit jenen Daten zu verbindende Zeit fehlt.

Was ist daher bei unserer Aufgabe zu thun, wenn in einem solchen Falle eine, auch mit Rücksicht auf die Aberration genaue Lösung verlangt wird? Es ist dann sicherlich das Einfachste, die Bahn zuerst unter Beiseitelassung der Aberration zu bestimmen, und da diese niemals eine erhebliche Einwirkung äussern kann, so erhält man daraus die Abstände wenigstens mit einer solchen Genauigkeit, dass sich nun die Beobachtungen mittelst einer der so eben auseinandergesetzten Methoden von der Aberration befreien lassen, und man dann die Bestimmung der Bahn genauer wiederholen kann. Bei dieser Arbeit verdient nun die dritte Methode vor den übrigen den Vorzug. Denn es sind bei der ersten Methode alle die von der Position der Erde abhängigen Operationen ganz von Frischem wieder zu beginnen. Bei der zweiten Methode (welche ausserdem nur Anwendung leidet, wenn man eine so grosse Menge von Beobachtungen besitzt, dass sich daraus die tägliche Bewegung ableiten lässt) muss man alle Rechnungsoperationen von Neuem anstellen, die von dem geocentrischen Orte des Himmelskörpers abhängig sind. Bei der dritten Methode dagegen (wenn nämlich die erste Rechnung bereits auf solche geocentrische Orte gebaut war, die von der Fixstern-Aberration befreit sind) können alle vorläufige, von der Position der Erde und dem geocentrischen Orte des Körpers abhängige Operationen bei der neuen Rechnung unverändert beibehalten werden. Man kann daher gleich bei der ersten

Rechnung die Aberration mit erfassen, wenn die Methode der Bahnbestimmung so angethan ist, dass man daraus die Werthe der Abstände eher erhält, bevor es erforderlich wird, die verbesserten Zeiten in die Rechnung einzuführen. Es ist dann der Aberration wegen keine doppelte Rechnung nöthig, wie bei der weiteren Behandlung unserer Aufgabe noch klarer werden wird.

119.

Es würde nicht schwierig sein, aus der in unserer Aufgabe zwischen den gegebenen und den unbekannten Grössen bestehenden Verbindung ihren Stand auf sechs Gleichungen zu reduciren, oder noch auf wenigere, da die eine oder die andere der Unbekannten sich ganz bequem eliminiren liesse. Weil aber diese Verbindung eine äusserst verwickelte ist, so würden die Gleichungen sich meist als intractabele erweisen. Eine solche Trennung der Unbekannten aber, dass schliesslich eine Gleichung herauskäme, die nur eine einzige unbekannte Grösse enthielte, kann, allgemein gesprochen*), für unmöglich gehalten werden, und es lässt sich daher um so weniger die ganze Auflösung des Problems nur durch directe Operationen erledigen.

Aber auf die Lösung zweier Gleichungen $X = 0$ und $Y = 0$, wobei nur zwei unbekannte x, y untermischt verbleiben würden, lässt sich allerdings
(136) unser Problem zurückführen und zwar auf verschiedene Arten. Es ist nämlich nicht nothwendig, dass x und y zwei von den Elementen selbst sind, sondern es können Grössen sein, die auf irgend eine Art mit den Elementen zusammenhängen, wenn die letzteren nur nach Auffindung von x und y sich bequem daraus herleiten lassen. Ausserdem ist es offenbar nicht nöthig, dass X, Y durch entwickelte Functionen von x und y dargestellt werden, sondern es genügt, dass sie mit jenen durch ein System von Gleichungen so verbunden sind, dass man es in der Gewalt hat, von den gegebenen Werthen für x, y zu den entsprechenden Werthen von X, Y zu gelangen.

*) Falls die Beobachtungen so wenig von einander entfernt sind, dass die Zwischenzeiten als unendlich kleine Grössen sich behandeln lassen, so kann eine solche Trennung allerdings von Erfolg sein, und das ganze Problem auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung des siebenten oder achten Grades reducirt werden.

120.

Da nun die Natur der Aufgabe eine weitere Reduction als auf zwei Gleichungen, in denen zwei mit einander vermischte Unbekannte enthalten sind, nicht gestattet, so besteht die Hauptsache vorerst in einer schicklichen Auswahl der Unbekannten und in einer solchen Anordnung der Gleichungen, dass nicht nur X, Y auf die einfachste Weise von x, y abhängig erscheinen, sondern dass auch nach Auffindung dieser Werthe daraus die Elemente so bequem als möglich hervorgehen. — Andererseits muss aber auch in Betracht gezogen werden, durch welches Verfahren man die den Gleichungen Genüge leistenden Werthe der Unbekannten durch nicht zu mühsame Operationen ermittelt. Wenn dies nur durch gleichsam blinde Versuche zu bewerkstelligen wäre, so würde eine ungeheuere und kaum zu ertragende Arbeit erforderlich sein, welcher nichts destoweniger die Astronomen sich häufig unterzogen haben, welche Cometenbahnen durch eine sogenannte indirecte Methode bestimmt haben. Hierbei wird die Arbeit allerdings dadurch erheblich erleichtert, dass bei den ersten Versuchen minder scharfe Rechnung genügt, bis man zu genäherten Werthen der Unbekannten gelangt ist. Hat man aber erst eine genäherte Bestimmung, so lässt die Sache sich stets durch sichere und rasche Methoden zu Ende führen, welche ich hier auseinandersetzen will, bevor ich weiter gehe.

Den Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ geschieht von selbst ganz vollständig Genüge, wenn man für x, y deren wahre Werthe selbst getroffen hat; sind aber dafür Werthe angenommen, die von den wahren verschieden sind, so werden X und Y daraus von Null verschiedene Werthe erhalten. Je näher daher dieselben an die wahren herankommen, desto kleiner müssen auch die Werthe für X und Y herauskommen, und wenn ihre Verschiedenheiten von den wahren erst sehr klein sind, so darf man voraussetzen, dass die Aenderungen in den Werthen von X und Y sehr nahe der Aenderung in x proportional sind, wenn y unverändert bleibt, und proportional der von y, falls x sich nicht ändert. Bezeichnet man daher die wahren Werthe von x, y resp. mit ξ, η, so werden die der Voraussetzung $x = \xi + \lambda$, $y = \eta + \mu$ entsprechenden Werthe von X, Y durch die Form $X = \alpha\lambda + \beta\mu$,

$Y=\gamma\lambda+\delta\mu$ darzustellen sein, so dass man die Coefficienten α, β, γ, δ als constant annehmen kann, so lange λ und μ sehr klein bleiben. Hieraus lässt sich schliessen, dass, wenn für drei Systeme von Werthen für x, y, die von
(137) den wahren nur wenig verschieden sind, eine Bestimmung der entsprechenden Werthe von X, Y Statt gefunden hat, man daraus die wahren Werthe von x, y wenigstens insoweit ableiten könne, als dabei jene Voraussetzung zulässig ist. Wir wollen setzen, dass

$$\begin{array}{llll} \text{für } x=a, & y=b & \text{werde: } X=A, & Y=B \\ \phantom{\text{für }} x=a', & y=b' & \phantom{\text{werde: }} X=A', & Y=B' \\ \phantom{\text{für }} x=a'', & y=b'' & \phantom{\text{werde: }} X=A'', & Y=B'' \end{array}$$

und man hat dann

$$\begin{aligned} A &= \alpha(a-\xi)+\beta(b-\eta), & B &= \gamma(a-\xi)+\delta(b-\eta) \\ A' &= \alpha(a'-\xi)+\beta(b'-\eta), & B' &= \gamma(a'-\xi)+\delta(b'-\eta) \\ A'' &= \alpha(a''-\xi)+\beta(b''-\eta), & B'' &= \gamma(a''-\xi)+\delta(b''-\eta). \end{aligned}$$

Daraus entsteht nach Eliminirung von α, β, γ, δ

$$\xi = \frac{a(A'B''-A''B')+a'(A''B-AB'')+a''(AB'-A'B)}{A'B''-A''B'+A''B-AB''+AB'-A'B}$$

$$\eta = \frac{b(A'B''-A''B')+b'(A''B-AB'')+b''(AB'-A'B)}{A'B''-A''B'+A''B-AB''+AB'-A'B},$$

oder in einer zur Rechnung bequemeren Gestalt:

$$\xi = a+\frac{(a'-a)(A''B-AB'')+(a''-a)(AB'-A'B)}{A'B''-A''B'+A''B-AB''+AB'-A'B}$$

$$\eta = b+\frac{(b'-b)(A''B-AB'')+(b''-b)(AB'-A'B)}{A'B''-A''B'+A''B-AB''+AB'-A'B}.$$

Offenbar ist es auch in diesen Formeln gestattet, die Grössen a, b, A, B mit a', b', A', B', oder mit a'', b'', A'', B'' zu vertauschen.

Der gemeinschaftliche Nenner aller dieser Ausdrücke, den man auch unter die Form $(A'-A)(B''-B)-(A''-A)(B'-B)$ bringen kann, wird

$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)\{(a'-a)(b''-b)-(a''-a)(b'-b)\};$$

woraus man sieht, dass a, a', a'', b, b', b'' so genommen werden müssen, dass nicht $\frac{a''-a}{b''-b}=\frac{a'-a}{b'-b}$ wird, widrigenfalls diese Methode nicht anwendbar sein, sondern für ξ und η gebrochene Werthe liefern würde, deren Zähler und

Nenner zugleich verschwänden. Ebenso ist hieraus klar, dass, wenn zufällig $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ wird, derselbe Mangel den Gebrauch der Methode ganz zerstören würde, auf welche Weise man auch a, a', a'', b, b', b'' annehmen möchte. In einem solchen Falle müsste man für die Werthe von X folgende Form voraussetzen $\alpha\lambda + \beta\mu + \varepsilon\lambda\lambda + \zeta\lambda\mu + \vartheta\mu\mu$, und eine ähnliche für die Werthe von Y, wo dann die Analyse Methoden an die Hand geben würde, die der vorhergehenden analog sind, um aus den Werthen von X, Y, die für vier Systeme der Werthe von x, y gerechnet wären, die wahren Werthe der letzteren zu bestimmen. Auf diese Weise würde aber die Rechnung äusserst (138)
beschwerlich ausfallen und ausserdem lässt sich zeigen, dass in einem solchen Falle die Bahnbestimmung die erforderliche Schärfe der Natur der Sache nach nicht zulässt. Da diese Unzuträglichkeit nicht anders vermieden werden kann, als wenn man neue, mehr geeignete Beobachtungen heranzieht, so will ich bei diesem Gegenstande hier nicht verweilen.

121.

Sobald man daher für die Unbekannten bereits über genäherte Werthe disponirt, so lassen sich daraus die wahren mit aller nur zu wünschenden Schärfe durch die so eben erklärte Methode ableiten. Zuerst werden nämlich die jenen approximirten Werthen (a, b) entsprechenden Werthe von X, Y berechnet. Wenn letztere dann nicht von selbst verschwinden, so wird die Rechnung mit zwei anderen, davon wenig verschiedenen Werthen (a', b') wiederholt, und dann mit einem dritten Systeme (a'', b''), wenn nicht zufällig schon beim zweiten X und Y verschwinden. Dann lassen sich durch die Formeln des vorhergehenden Artikels die wahren Werthe finden, insofern die Voraussetzung, auf welcher jene Formeln beruhen, von der Wahrheit nicht merklich abweicht. Um sich über die Sache ein desto besseres Urtheil zu bilden, mag die Rechnung der Werthe von X, Y mit jenen verbesserten Werthen wiederholt werden, und falls diese zeigt, dass dadurch den Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ noch nicht Genüge geschehe, so wird man wenigstens sehr viel kleinere Werthe von X und Y daraus erhalten, als durch die drei früheren Hypothesen, und deshalb werden die hieraus abgeleiteten Bahnelemente weit genauer sein, als die den ersten Hypothesen entsprechenden. Will man sich hierbei nicht beruhigen, so wird es am gerathensten sein, unter Weglassung derjenigen Hypothese, welche die grössten Unterschiede hervorgebracht hatte, die beiden übrigen mit einer vierten von Neuem zu verbinden und so nach Anleitung des vorangehenden Artikels ein fünftes System der Werthe von x, y zu bilden. Auf dieselbe Weise kann man, wo es der Mühe werth erscheint, zu einer sechsten u. s. w. Hypothese übergehen, bis dadurch den Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ so genau Genüge geleistet wird, als es die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln gestatten. Sehr selten jedoch wird es nöthig sein, über das vierte System hinauszugehen, wenn man als erste Hypothesen nicht solche angenommen hat, die noch zu sehr von der Wahrheit abweichen.

122.

Da die bei der zweiten und dritten Hypothese anzunehmenden Werthe der Unbekannten in gewisser Weise willkürlich sind, wenn sie nur von der ersten Hypothese nicht gar zu verschieden sind, und man ausserdem in Acht nimmt, dass das Verhältniss $(a''-a):(b''-b)$ nicht zur Gleichheit mit $(a'-a):(b'-b)$ hinneigt, so pflegt gemeiniglich gesetzt zu werden: $a' = a$, $b'' = b$. Hieraus erwächst ein doppelter Vortheil; denn es kommen nicht nur die Formeln für ξ und η noch etwas einfacher heraus, sondern es bleibt auch ein Theil der ersten Rechnung derselbe bei der zweiten Hypothese und ein anderer Theil bei der dritten.

(139) Es giebt aber einen Fall, wo andere Gründe eine Abweichung von dieser Gewohnheit rathsam machen. Nimmt man nämlich an, dass X die Form $X'-x$ habe, und Y die Form $Y'-y$, und dass die Functionen X', Y' durch die Natur der Aufgabe so angethan seien, dass sie von mässigen, bei den Werthen von x, y begangenen Fehlern nur sehr wenig afficirt werden, oder dass $\left(\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}y}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}y}\right)$ äusserst kleine Grössen seien, so ist klar, dass die Unterschiede zwischen den Functionswerthen, die dem Systeme $x = \xi$, $y = \eta$ entsprechen, und zwischen denen, welche aus $x = a$, $y = b$ entstehen, auf eine gleichsam höhere Ordnung bezogen werden können, als die Differenzen $\xi - a$, $\eta - b$; nun sind jene Werthe $X' = \xi$, $Y' = \eta$, diese aber $X' = a + A$, $Y' = b + B$, woraus folgt, dass $a + A$, $b + B$ viel genauere

Werthe für x und y sind, als a und b. Wenn man auf dieselben die zweite Hypothese stützt, so geschieht dadurch sehr häufig den Gleichungen $X=0$, $Y=0$ schon so genau Genüge, dass man nicht weiter zu gehen braucht. Andernfalls wird auf dieselbe Weise aus der zweiten Hypothese eine dritte gebildet, indem man $a''=a'+A'=a+A+A'$, $b''=b'+B'=b+B+B'$ setzt, und wenn auch diese noch nicht als genau genug sich erweist, so wird daraus endlich eine vierte nach Anleitung des Art. 120 abgeleitet.

123.

In dem Vorhergehenden habe ich vorausgesetzt, dass man schon anderswoher im Besitze genäherter Werthe für die Unbekannten x, y sich befindet. Falls man bereits über genäherte Bestimmungen der ganzen Bahn gebietet (die vielleicht aus anderen Beobachtungen durch frühere Rechnungen abgeleitet und nun durch neue Beobachtungen zu verbessern sind), so lässt sich jener Bedingung ohne Schwierigkeit Genüge leisten, welche Bezeichnung man auch den Unbekannten beilegen mag. Dagegen ist es bei Bestimmung einer noch gänzlich unbekannten Bahn (eine Aufgabe, die sehr schwierig ist) keineswegs gleichgültig, welche Unbekannten man anwendet; vielmehr müssen letztere dann mit Kunst und in solcher Weise gewählt werden, dass man die genäherten Werthe aus der Natur der Aufgabe selbst schöpfen kann. Dies gelingt am besten, falls die drei, zur Bahnerforschung angewandten Beobachtungen keine zu grosse heliocentrische Bewegung des Himmelskörpers umfassen. Derartige Beobachtungen sind daher stets zur ersten Bestimmung anzuwenden, welche man nachher durch weiter von einander entfernte Beobachtungen nach Belieben verbessern kann. Denn man sieht ohne Weiteres, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler die Rechnung um so mehr stören, je näher an einander liegende Beobachtungen dazu verwendet werden. Daraus folgt, dass die Beobachtungen zur ersten Bestimmung nicht blindlings ausgewählt werden dürfen, sondern man sich hüten müsse, erstens, dass die Beobachtungen sich nicht zu nahe sind, und dann, dass sie nicht zu weit von einander entfernt liegen. Im ersten Falle wird zwar die Berechnung von Elementen, welche den Beobachtungen Genüge leisten, sehr rasch beendigt; diesen Elementen selbst wäre (140) jedoch wenig zu trauen, und könnten dieselben daraus mit Irrthümern so enorm entstellt herauskommen, dass sie nicht einmal als Annäherungen zu gelten vermöchten. Im zweiten Falle dagegen würde man von den künstlichen Mitteln verlassen werden, welche zur genäherten Bestimmung der Unbekannten zu benutzen sind, und man würde daraus nur eine ganz rohe Bestimmung ableiten können und doch sehr viel mehr Hypothesen brauchen, oder eine gänzlich ungereimte, und doch die langweiligsten und widerwärtigsten Versuche nicht vermeiden können. Ein erfahrenes Urtheil aber über diese Methodengrenzen wird besser durch häufige Anwendung, als durch Vorschriften erworben. Die unten zu behandelnden Beispiele werden zeigen, dass aus Beobachtungen der Juno, die nur 22 Tage von einander entlegen sind und eine heliocentrische Bewegung von $7^\circ 35'$ umfassen, die Elemente sich schon mit vieler Genauigkeit ableiten lassen, und dass wechselsweise unsere Methode sich auch mit dem besten Erfolge auf die Ceres-Beobachtungen anwenden lässt, welche 260 Tage von einander abstehen und eine heliocentrische Bewegung von $62^\circ 55'$ einschliessen, sowie, dass durch Anwendung von vier Hypothesen, oder vielmehr successiven Annäherungen, Elemente erhalten werden, die aufs Beste mit den Beobachtungen übereinstimmen.

124.

Ich gehe nun zur Aufzählung derjenigen Methoden über, welche vorzüglich zweckmässig sind und sich auf die vorangehenden Vorschriften stützen, deren hauptsächlichste Momente im ersten Buche auseinandergesetzt wurden und die hier nur unserem Zwecke angepasst zu werden brauchen.

Die einfachste Methode scheint die zu sein, wobei für x, y die Abstände des Himmelskörpers von der Erde in zwei Beobachtungen angenommen werden, oder vielmehr entweder die Logarithmen dieser Abstände, oder die Logarithmen der auf die Ecliptik oder den Aequator projicirten Abstände. Hieraus leitet man vermittelst Art. 64, V die heliocentrischen Orte und die hierzu gehörenden Abstände von der Sonne ab; daraus ferner nach Art. 110 die Lage der Bahnebene und die heliocentrischen Längen in der Bahn, und hieraus, sowie aus den Radien Vectoren und den entsprechenden Zeiten durch die in den Artikeln 85—105 ausführlich behandelte Aufgabe alle übrigen Elemente,

wodurch offenbar jene Beobachtungen genau dargestellt werden, welche
Werthe man auch dem x und y beigelegt haben würde. Wenn nun mittelst
dieser Elemente der geocentrische Ort zur Zeit der dritten Beobachtung
berechnet wird, so muss dessen Uebereinstimmung mit, oder dessen Ab-
weichung von dem *beobachteten* Orte entscheiden, ob die angenommenen
Werthe die wahren sind, oder davon abweichen. Man gewinnt daraus eine
doppelte Vergleichung, indem man die eine Differenz (in Länge oder gerader
Aufsteigung) für X, und die andere (in Breite oder Declination) für Y an-
nimmt. Falls daher die Werthe dieser Differenzen X, Y nicht von selbst
$=$ Null herauskommen, so lassen sich die wahren Werthe von x, y durch die
im Artikel 120 und folg. beschriebene Methode ermitteln. Uebrigens ist
es an und für sich gleichgültig, welche von den drei Beobachtungen man
hierbei zu Ausgangspunkten wählen will. Gemeiniglich empfiehlt es sich jedoch, (141)
die erste und letzte zu nehmen, mit Ausnahme eines besonderen Falles,
von dem ich gleich sprechen will.

Diese Methode ist sehr vielen, später zu erklärenden in dem Betrachte vorzuziehen, weil sie eine sehr allgemeine Anwendung gestattet. Ausgenommen muss dabei der Fall werden, wo die beiden äussersten Beobachtungen eine heliocentrische Bewegung von 180^0 oder 360^0 oder 540^0 u. s. w. umfassen, denn dann kann die Lage der Bahnebene aus zwei heliocentrischen Orten nicht bestimmt werden (Art. 110). Ebenso ist es nicht angemessen, die Methode dann anzuwenden, wenn die heliocentrische Bewegung zwischen den beiden äussersten Beobachtungen nur wenig von 180^0 oder 360^0 etc. verschieden ist, weil man in diesem Falle keine genaue Bestimmung der Lage der Bahn erhalten kann, oder vielmehr weil dann die kleinsten Veränderungen in den angenommenen Werthen der Unbekannten so grosse Veränderungen in der Bahnlage und folgeweise auch in den Werthen von X, Y hervorbringen würden, dass diese jenen nicht mehr als proportional angesehen werden können. Hier ist aber eine Abhülfe zur Hand, indem man nämlich in einem solchen Falle nicht von den beiden äussersten Beobachtungen ausgeht, sondern von der ersten und mittleren, oder von der mittleren und letzten, wobei man dann für X, Y die Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung im dritten oder ersten Orte annimmt. Wenn aber sowohl der zweite Ort vom ersten, als der dritte vom zweiten nahezu um 180 Grade abstehen sollten, so würde auf jene Weise dieser Nachtheil nicht gehoben werden, und es ist dann vorzuziehen, solche Beobachtungen, aus denen man der Natur der Sache nach eine genaue Bahnbestimmung überall nicht ableiten kann, zur Elementenberechnung nicht zu verwenden.

Ausserdem empfiehlt diese Methode sich noch dadurch, dass man daraus ohne Mühe zu schätzen vermag, welche Veränderungen die Elemente erleiden, wenn, unter Beibehaltung der beiden äussersten Orte, der mittlere um ein Weniges geändert wird. Auf diese Weise kann man sich also ein Urtheil über den Grad der Genauigkeit bilden, welche man den gefundenen Elementen beilegen darf.

125.

Durch Anbringung einer leichten Veränderung an die vorige Methode lässt sich daraus eine zweite ableiten. Ganz wie bei der ersten bestimmt man alle Elemente, indem man von den Abständen in zwei Beobachtungen ausgeht. Aus diesen Elementen berechnet man dann aber nicht den geocentrischen Ort für die dritte Beobachtung, sondern führt die Rechnung nur bis zum heliocentrischen Orte in der Bahn und leitet dann denselben heliocentrischen Ort mittelst der in den Art. 74 und 75 behandelten Aufgabe aus dem beobachteten geocentrischen Orte und der Lage der Bahnebene ab. Diese beiden Bestimmungen, die unter sich differiren (wenn nicht zufällig die wahren Werthe von x, y bei der Annahme getroffen sein sollten) werden, uns X und Y liefern, wo für X der Unterschied der beiden Werthe für die Länge in der Bahn genommen wird, und für Y der Unterschied zwischen den beiden
(142) Werthen für den Radius Vector, oder vielmehr für dessen Logarithmus. Diese Methode ist den nämlichen Anständen unterworfen, welche ich im vorhergehenden Artikel berührt habe. Man muss ihr aber noch die fernere Bemerkung beifügen, dass der heliocentrische Ort in der Bahn aus dem geocentrischen nicht gefunden werden kann, falls der Ort der Erde in einen der beiden Knoten der Bahn fällt. Dann lässt sich daher diese Methode nicht anwenden. Man thut jedoch wohl, dieser Methode auch in dem Falle sich zu enthalten, wenn der Ort der Erde nur wenig von einem der beiden Knoten absteht, weil die Voraussetzung, dass geringen Aenderungen von

x, y auch proportionale Aenderungen von X, Y entsprechen, dann zu fehlsam sein würde, und zwar aus einem ähnlichen Grunde, wie der im vorhergehenden Artikel angedeutete. Aber auch hier lässt sich durch Vertauschung des mittleren Orts mit einem der äusseren Orte, dem ein mehr von den Knoten entfernter Erdort entspricht, Abhülfe schaffen, wenn nicht zufällig bei allen drei Beobachtungen die Erde in der Nähe der Knoten sich befunden hat.

126.

Die vorhergehende Methode bahnt sofort zu einer dritten den Weg. Zunächst bestimme man wie vorher aus den Abständen des Himmelskörpers von der Erde in den äussersten Beobachtungen die entsprechenden Längen in der Bahn mit den Radien Vectoren. Mit Hülfe der Lage der Bahnebene, welche diese Rechnung liefert, leite man aus der mittlern Beobachtung die Länge in der Bahn und den Radius Vector ab. Dann aber berechne man aus diesen drei heliocentrischen Orten die übrigen Elemente vermittelst der in den Art. 82 und 83 behandelten Aufgabe, wobei das Verfahren unabhängig von den Zeiten der Beobachtungen ist. Auf diese Weise werden also die drei mittleren Anomalien und die tägliche Bewegung bekannt, woraus sich die Zeitintervalle zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung berechnen lassen. Deren Unterschiede von den wahren Intervallen nimmt man dann für X und Y.

Diese Methode würde weniger zweckmässig sein, falls die heliocentrische Bewegung nur einen kleinen Bogen umfasst. Denn in einem solchen Falle hängt (wie ich schon in Art. 82 bemerkt habe) diese Bahnbestimmung von Grössen der dritten Ordnung ab und lässt daher genügende Schärfe nicht zu. Die leichtesten Aenderungen in den Werthen von x, y könnten übergrosse Aenderungen in den Elementen und also auch in den Werthen von X, Y erzeugen, und man dürfte diese nicht als jenen proportional erachten. So oft aber die drei Orte eine beträchtliche heliocentrische Bewegung umfassen, so ist der Gebrauch der Methode allerdings vom besten Erfolge begleitet, vorausgesetzt, dass er nicht durch die in den vorangehenden Artikeln dargelegten Ausnahmen gestört wird, die daher offenbar auch bei dieser Methode zu berücksichtigen sind.

127.

Hat man die drei heliocentrischen Orte auf die im vorangehenden Artikel beschriebene Art ermittelt, so kann man auch in folgender Weise
(143) verfahren. Man bestimme die übrigen Elemente vermittelst der Aufgabe in den Artikeln 85—105 zuvörderst aus dem ersten und zweiten Orte mit der entsprechenden Zwischenzeit, sodann aber auf dieselbe Weise aus dem zweiten und dritten Orte und der zugehörigen Zwischenzeit. So wird man für die einzelnen Elemente zwei Werthe erhalten, aus deren Unterschieden man nach Belieben zwei für X und Y annehmen kann. Diese Methode empfiehlt sich ausserordentlich durch den nicht zu verachtenden Vortheil, dass man bei den ersten Hypothesen die übrigen Elemente, abgesehen von den beiden, welche man zur Feststellung von X, Y auswählt, überhaupt bei Seite lassen kann, und dass diese erst durch die letzte, auf bereits corrigirte Werthe von x, y gestützte Rechnung bestimmt werden, entweder allein aus der ersten Combination, oder allein aus der zweiten, oder, was gemeiniglich vorzuziehen ist, aus der Combination des ersten Orts mit dem dritten Orte. Im Uebrigen gewährt die Auswahl jener beiden Elemente, welche, allgemein gesprochen, willkürlich ist, eine grosse Mannigfaltigkeit der Auflösungen. Es können z. B. genommen werden der Logarithmus des halben Parameters mit dem Logarithmus der grossen Halbaxe, oder ersterer mit der Excentricität, oder der letztere mit der Excentricität, oder mit einem dieser Elemente die Länge des Perihels. Irgend eins dieser vier Elemente kann auch combinirt werden mit der excentrischen Anomalie, die dem mittleren Orte in jeder der beiden Rechnungen entspricht, wenn nämlich eine elliptische Bahn sich ergeben sollte, wo dann die Formeln 27—30 des Art. 96 eine sehr rasche Rechnung gewähren. In besondern Fällen aber bedarf diese Auswahl einer gewissen Vorsicht. So z. B. würde bei Bahnen, die zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigen, die grosse Halbaxe a oder ihr Logarithmus weniger zweckmässig sein, weil deren unmässige Variationen den Aenderungen von x, y nicht proportional erachtet werden dürften. In diesem Falle würde es dienlicher sein, $\frac{1}{a}$ auszuwählen. Ich halte mich aber bei diesen Vorsichtsmaassregeln um so weniger auf, als

die fünfte, im folgenden Artikel auseinanderzusetzende Methode vor den bislang erörterten vier Methoden fast in allen Fällen die überwiegendsten Vorzüge besitzt.

128.

Es sollen die drei, auf die nämliche Weise wie in den Artt. 125, 126 ermittelten Radien Vectoren mit r, r', r'' bezeichnet werden; sodann soll die heliocentrische Winkelbewegung in der Bahn vom zweiten zum dritten Orte mit $2f$, vom ersten zum dritten mit $2f'$, vom ersten zum zweiten mit $2f''$ angedeutet sein, so dass $f' = f + f''$ ist. Es sei ferner $r'r''\sin 2f = n$, $rr''\sin 2f' = n'$, $rr'\sin 2f'' = n''$. Endlich seien die Producte der constanten Grösse k (Artikel 2) mit den Zwischenzeiten von der zweiten zur dritten Beobachtung, von der ersten zur dritten, von der ersten zur zweiten beziehungsweise ϑ, ϑ', ϑ''. Man beginne nun mit einer doppelten Berechnung der Elemente (ganz wie im vorhergehenden Artikel) sowohl aus r, r', f'' und ϑ'', als aus r', r'', f, ϑ. In beiden Rechnungen gehe man aber nicht bis zu den Elementen selbst vor, sondern halte ein, sobald die Grösse, welche das Verhältniss des elliptischen Sectors zum Dreiecke ausdrückt, und welche oben (Art. 91) mit y oder $-Y$ bezeichnet wurde, gefunden ist. Es sei der Werth dieser Grösse in der ersten Rechnung η'', in der zweiten η. Man erhält daher (144)
mittelst der Formel [18] des Art. 95 für den halben Parameter p den doppelten Werth:

$$\sqrt{p} = \frac{\eta'' n''}{\vartheta''} \quad \text{und} \quad \sqrt{p} = \frac{\eta n}{\vartheta}.$$

Nach Art. 82 hat man aber überher einen dritten Werth

$$p = \frac{4rr'r''\sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''},$$

welche drei Werthe offenbar identisch sein müssten, falls man für x, y gleich von Anfang an die wahren Werthe getroffen hätte. Es müsste deshalb sein

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \frac{\eta'' n''}{\eta n},$$

$$n - n' + n'' = \frac{4\vartheta\vartheta'' rr'r''\sin f \sin f' \sin f''}{\eta\eta'' nn''} = \frac{n'\vartheta\vartheta''}{2\eta\eta'' rr'r''\cos f \cos f' \cos f''}.$$

Wenn daher diesen Gleichungen nicht bereits bei der ersten Rechnung von selbst Genüge geleistet wird, so kann man setzen

$$X = \log \frac{\eta n \vartheta''}{\eta'' n'' \vartheta},$$

$$Y = n - n' + n'' - \frac{n' \vartheta \vartheta''}{2\eta\eta'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}.$$

Diese Methode leidet eine ebenso allgemeine Anwendung wie die zweite, im Art. 124 gegebene. Es ist aber ein grosser Gewinn, dass bei dieser fünften Methode die ersten Hypothesen eine Entwickelung der Elemente selbst nicht erfordern, sondern man dabei gleichsam auf halbem Wege stehen bleiben kann. Sobald man übrigens bei diesem Verfahren soweit gelangt ist, dass sich voraussehen lässt, wie eine neue Hypothese von der Wahrheit nicht merklich verschieden sein werde, so genügt es, darin die Elemente selbst entweder lediglich aus r, r', f'', ϑ'', oder aus r', r'', f, ϑ, oder, was vorzuziehen ist, aus r, r'', f', ϑ' zu bestimmen.

129.

Die bis jetzt erläuterten fünf Methoden bahnen sofort den Weg zu ebensovielen andern, welche sich von jenen nur dadurch unterscheiden, dass für x und y an Stelle der Abstände von der Erde die Neigung der Bahn und die Länge des aufsteigenden Knotens genommen werden. Mit diesen neuen Methoden verhält es sich so:

I. Es werden aus x und y, sowie aus den beiden äussersten geocentrischen Orten nach Art. 74, 75 die heliocentrischen Längen in der Bahn und die Radien Vectoren bestimmt, und hieraus und aus den entsprechenden Zwischenzeiten alle übrigen Elemente; aus letzteren endlich der geocentrische Ort zur Zeit der mittleren Beobachtung, dessen Unterschiede mit dem beobachteten Orte in Länge und Breite X und Y liefern.

(145) Die vier übrigen Methoden kommen darin überein, dass aus der Lage der Bahnebene und den geocentrischen Orten alle drei heliocentrischen Längen in der Bahn und die entsprechenden Radien Vectoren berechnet werden. Sodann aber werden

II. die übrigen Elemente nur aus den beiden äussersten Orten und den entsprechenden Zeiten bestimmt. Nach diesen Elementen werden für die Zeit der mittleren Beobachtung die Länge in der Bahn und der Radius Vector berechnet, und die Verschiedenheiten dieser Grössen von den zuvor dafür gefundenen, d. h. aus dem geocentrischen Orte abgeleiteten Werthen, stellen X und Y dar.

III. Oder man leitet die übrigen Bahndimensionen aus allen drei heliocentrischen Orten (Art. 82, 83) her, eine Rechnung, wobei man die Zeiten nicht braucht. Dann berechnet man die Zwischenzeiten, welche in der so gefundenen Bahn zwischen der ersten und zweiten Beobachtung, und zwischen dieser und der dritten hätten verstreichen müssen, und deren Unterschiede mit den wahren liefern uns X und Y.

IV. Man berechne die übrigen Elemente auf doppelte Weise, nämlich sowohl aus Combination des ersten Orts mit dem zweiten, als aus Combination des zweiten mit dem dritten, unter Hinzunahme der entsprechenden Zeitintervalle. Durch Vergleichung dieser beiden Elementensysteme unter sich kann man aus den Unterschieden irgend welche zwei für X und Y nehmen.

V. Oder endlich führe man dieselbe doppelte Rechnung nur bis zu den Werthen der im Art. 91 mit y bezeichneten Grösse fort, und nehme dann für X und Y die im vorhergehenden Artikel gegebenen Ausdrücke an.

Um sich dieser vier letzten Methoden mit Sicherheit zu bedienen, dürfen die Orte der Erde für alle drei Beobachtungen den Knoten der Bahn nicht zu nahe liegen. Dagegen erfordert der Gebrauch der ersten Methode nur, dass diese Bedingung bei den beiden äussersten Beobachtungen Statt findet, oder vielmehr (weil man den mittleren Ort an Stelle eines der beiden äussersten setzen kann), dass von den drei Erdorten nicht mehr als einer in der Nähe der Knoten liegt.

130.

Die zehn, vom Art. 124 an erklärten Methoden stützen sich auf die Voraussetzung, dass man bereits genäherte Werthe für die Abstände des Himmelskörpers von der Erde, oder für die Lage der Bahnebene besitzt. Falls es sich

darum handelt, die Bahndimensionen, deren genäherte Werthe bereits anderswoher bekannt geworden sind (zum Beispiel aus einer früheren, auf andere Beobachtungen gestützten Rechnung), durch Beobachtungen zu verbessern, die weiter von einander entfernt sind, so stehen einer solchen Anforderung offenbar keine Schwierigkeiten im Wege. Hieraus aber ist noch nicht klar, auf welche Weise die erste Berechnung in Angriff zu nehmen ist, wo noch
(146) alle Bahndimensionen gänzlich unbekannt sind. Dieser Fall unserer Aufgabe ist der bei weitem wichtigste und schwierigste, wie man schon aus dem analogen Probleme in der Theorie der Cometen abnehmen kann, das bekanntlich schon lange die Geometer gequält und so viele vergebliche Versuche hervorgerufen hat. Um unsere Aufgabe als richtig gelöst ansehen zu können, muss offenbar den nachfolgenden Bedingungen Genüge geleistet sein, wenn anders die Auflösung nach der vom Art. 119 an erklärten Vorschrift geschehen soll. Zuerst müssen die Grössen x, y auf solche Weise gewählt werden, dass man für sie genäherte Werthe aus der Natur der Aufgabe selbst erzielen kann, wenigstens so lange die von den Beobachtungen umschlossene heliocentrische Bewegung des Himmelskörpers nicht zu beträchtlich ist. Zweitens aber wird erfordert, dass kleine Aenderungen der Grössen x, y nicht zu starken Aenderungen in den daraus abzuleitenden Grössen entsprechen, damit nicht die bei der Werthannahme jener Grössen etwa begangenen Fehler verhindern, dass man auch diese als genäherte ansehen kann. Endlich drittens verlangt man, dass die Rechnungsoperationen, durch welche man von den Grössen x, y nach und nach bis zu X, Y vorschreitet, nicht gar zu weitläuftig werden.

Diese Bedingungen geben ein Criterium an die Hand, nach welchem man sich über die Vorzüglichkeit jeder Methode ein Urtheil bilden kann, die sich noch sichtlicher aus häufigen Anwendungen offenbaren wird. Diejenige Methode, zu deren Auseinandersetzung ich jetzt übergehe und welche gewissermaassen als der wichtigste Theil dieses Werkes zu betrachten ist, leistet diesen Bedingungen in einer Weise Genüge, dass nichts mehr zu wünschen übrig erscheint. Bevor ich jedoch damit beginne, dieselbe in der für die Praxis bequemsten Gestalt zu erklären, will ich einige vorläufige Betrachtungen vorausschicken, um gleichsam den Zugang zu dieser Methode, der sonst vielleicht zu dunkel und weniger nahe liegend erscheinen könnte, zu beleuchten und zu eröffnen.

131.

Im Artikel 114 ist gezeigt, dass, wenn das Verhältniss zwischen den dort und im Art. 128 mit n, n', n'' bezeichneten Grössen bekannt ist, man die Abstände des Himmelskörpers von der Erde durch sehr einfache Formeln bestimmen kann. Wenn daher für x, y die Quotienten $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ genommen würden, so böten sich für diese Grössen in dem Falle, wo die heliocentrische Bewegung innerhalb der Beobachtungen keine übermässige ist, sofort die Werthe $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$, $\frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ dar (wobei die Symbole ϑ, ϑ', ϑ'' in derselben Bedeutung wie im Art. 128 zu nehmen). Hieraus scheint mithin eine nahe liegende Auflösung unserer Aufgabe sich zu eröffnen, falls man aus x und y die beiden Abstände von der Erde herleitet, und sodann nach Maassgabe einer der fünf in den Artt. 124—128 gegebenen Methoden verfährt.

In der That wird, wenn man auch die Symbole η, η'' in der Bedeutung des Art. 128 nimmt, und dem analog mit η' den Quotienten bezeichnet, (147) welcher aus der Division des zwischen beiden Radien Vectoren enthaltenen Sectors durch die zwischen ebendenselben befindliche Dreiecksfläche entsteht, $\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot \frac{\eta'}{\eta}$, $\frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \cdot \frac{\eta'}{\eta''}$ sein, und man sieht leicht, dass, wenn n, n', n'' als kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen werden, dann, allgemein gesprochen, $\eta - 1$, $\eta' - 1$, $\eta'' - 1$ Grössen der zweiten Ordnung sind, und dass daher $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$, $\frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ als genäherte Werthe der Grössen x, y von den wahren nur um Grössen der zweiten Ordnung verschieden sind. Nichts desto weniger findet sich bei näherer Betrachtung der Sache, dass diese Methode überhaupt ungereimt ist, eine Erscheinung, deren Grund ich mit wenig Worten erklären will.

Ohne viele Mühe erkennt man, dass die Grösse $(0.1.2)$, mit welcher die Abstände in den Formeln 9, 10, 11 des Art. 114 multiplicirt sind, mindestens von der dritten Ordnung wird, wogegen z. B. in der Gleichung [9] die Grössen $(0.1.2)$, $(I.1.2)$, $(II.1.2)$ von der ersten Ordnung sind; hieraus folgt aber leicht, dass ein bei den Werthen der Grössen

$\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ begangener Fehler zweiter Ordnung in den Werthen der Abstände einen Fehler von der Ordnung Null erzeugen werde. Es würden deshalb nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche die Abstände nur dann mit einem begrenzten Fehler herauskommen, wenn die Zwischenzeiten unendlich klein sind, und man würde mithin sowohl diese Abstände, als die übrigen daraus abzuleitenden Grössen nicht einmal für Annäherungen halten können, und die Methode würde daher mit der zweiten Bedingung des vorangehenden Artikels im Widerspruche stehen.

132.

Setzt man der Kürze wegen $(0.1.2) = a$, $(0.\mathrm{I}.2)D' = -b$, $(0.\mathrm{O}.2)D = +c$, $(0.\mathrm{II}.2)D'' = +d$, so dass die Gleichung [10] des Art. 114 wird $a\delta' = b + c.\frac{n}{n'} + d.\frac{n''}{n'}$, so werden zwar die Coefficienten c und d von der ersten Ordnung sein, es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die Differenz $c - d$ zur zweiten Ordnung gehören müsse. Hieraus folgt aber, dass der Werth der Grösse $\frac{cn + dn''}{n + n''}$, der aus der approximirten Voraussetzung $n : n'' = \vartheta : \vartheta''$ entsteht, nur mit einem Fehler von der vierten Ordnung behaftet sei, ja sogar nur von der fünften, falls die mittlere Beobachtung von den äusseren um gleiche Zwischenräume absteht. Denn es wird jener Fehler

$$= \frac{c\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''} - \frac{cn + dn''}{n + n''} = \frac{\vartheta\vartheta''(d-c)(\eta''-\eta)}{(\vartheta+\vartheta'')(\eta''\vartheta + \eta\vartheta'')},$$

wo der Nenner von der zweiten Ordnung ist, der eine Factor des Zählers $\vartheta\vartheta''(d - c)$ von der vierten, der andere $(\eta'' - \eta)$ von der zweiten oder in jenem speciellen Falle von der dritten. Stellt man daher jene Gleichung in folgender Gestalt dar: $a\delta' = b + \frac{cn + dn''}{n + n''}.\frac{n + n''}{n'}$, so ist klar, dass der

(148) Fehler der im vorhergehenden Artikel vorgetragenen Methode nicht daraus herrührt, dass die Grössen n, n'' hier den Grössen ϑ, ϑ'' proportional angenommen sind, sondern daraus, dass man noch überdies die Grösse n' der Grösse ϑ' proportional gesetzt hat. Auf diese Weise wird nämlich an der Stelle des Factors $\frac{n + n''}{n'}$, der minder genaue Werth $\frac{\vartheta + \vartheta''}{\vartheta'} = 1$ eingeführt,

von welchem der wahre Werth $= 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2\eta\eta'' rr'r'' \cos f \cos f' \cos f''}$ um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist. (Art. 128).

133.

Da die Cosinusse der Winkel f, f', f'', ebenso wie die Grössen η, η'' von der Einheit um eine Differenz der zweiten Ordnung verschieden sind, so sieht man, dass ein Fehler vierter Ordnung begangen wird, wenn statt $\frac{n+n''}{n'}$ der genäherte Werth $1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}$ eingeführt wird. Falls daher anstatt der Gleichung des Art. 114 die folgende angewandt wird:

$$a\delta' = b + \frac{c\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}\right),$$

so wird sich in dem Werthe des Abstandes δ' ein Irrthum zweiter Ordnung ergeben, wenn die äusseren Beobachtungen von den mittleren gleichen Abstand haben, oder ein Fehler erster Ordnung in den übrigen Fällen. Diese neue Form jener Gleichung ist jedoch zur Bestimmung von δ' nicht geeignet, weil sie die noch unbekannten Grössen r, r', r'' enthält.

Allgemein gesprochen entfernen sich die Grössen $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ von der Einheit um eine Differenz der ersten Ordnung, und ebenso das Product $\frac{rr''}{r'r'}$. In dem besonderen, schon oft erwähnten Falle sieht man leicht, dass dieses Product nur um eine Differenz der zweiten Ordnung von der Einheit verschieden sei. Ja, wenn die Bahnform der Ellipse nur wenig excentrisch ist, so dass die Excentricität als eine Grösse der ersten Ordnung sich betrachten lässt, so würde die Differenz von $\frac{rr''}{r'r'}$ zu einer noch um einen Grad höheren Ordnung gehören können. Es ist daher klar, dass jener Fehler von derselben Ordnung wie vorher bleiben werde, wenn in unserer Gleichung statt $\frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}$ gesetzt wird $\frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}$, wodurch sie folgende Form erhält:

$$a\delta' = b + \frac{c\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right).$$

(149) Auch diese Gleichung enthält zwar noch die unbekannte Grösse r', welche sich aber offenbar eliminiren lässt, da sie nur von δ' und bekannten Grössen abhängig ist. Würde die Gleichung alsdann gehörig geordnet, so wäre sie eine des achten Grades.

134.

Aus dem Vorstehenden ist bereits der Grund ersichtlich, warum wir in unserer Methode für x, y resp. die Grössen $\frac{n''}{n} = P$ und $2\left(\frac{n+n''}{n'} - 1\right)r'^3 = Q$ annehmen wollen. Denn es ist zuerst klar, dass, wenn P und Q als bekannt angesehen werden, sich daraus δ' mittelst der Gleichung

$$a\delta' = b + \frac{c+dP}{1+P}\left(1+\frac{Q}{2r'^3}\right)$$

bestimmen lasse und sodann δ und δ'' durch die Gleichungen [4] und [6] des Artikels 114, indem man hat

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{1+P}\left(1+\frac{Q}{2r'^3}\right), \quad \frac{n''}{n'} = \frac{P}{1+P}\left(1+\frac{Q}{2r'^3}\right).$$

Zweitens ist offenbar, dass bei der ersten Hypothese für die Grössen P und Q, deren genau wahre Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}\cdot\frac{\eta}{\eta''}$ und $\frac{r'r''\vartheta\vartheta''}{rr''\eta\eta''\cos f\cos f'\cos f''}$ sind, sofort die genäherten Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$ sich darbieten, eine Hypothese, aus welcher in die Bestimmung von δ' und mithin auch von δ, δ'' Fehler der ersten Ordnung übergehen, oder von der zweiten Ordnung in dem mehrfach erwähnten Specialfalle. Obgleich man sich übrigens im Allgemeinen auf diese Schlussfolgerungen fest verlassen darf, so können sie doch in einem besondern Falle ihre Beweiskraft verlieren, falls nämlich die Grösse $(0.1.2)$, die im Allgemeinen von der dritten Ordnung ist, zufällig $=$ Null wird, oder doch so klein, dass sie einer höheren Ordnung angehören muss. Dies geschieht, falls die geocentrische Bewegung an der Himmelskugel nahe an dem mittleren Orte einen Einbiegungspunkt zeigt. Um daher diese Methode benutzen zu können, ist es schliesslich offenbar nothwendig erforderlich, dass die heliocentrische Bewegung innerhalb der drei Beobachtungen nicht zu beträchtlich sei. Diese Einschränkung aber kann nach der Natur der sehr verwickelten Aufgabe in keiner Weise vermieden werden, und ist auch nicht für einen Nachtheil zu halten, da man stets wünschen wird, die erste Bestimmung der unbekannten Bahn eines neuen Himmelskörpers baldmöglichst zu beginnen. Ausserdem ist jene Einschränkung, wie die unten gegebenen Beispiele zeigen werden, in ziemlich weitem Sinne zu verstehen.

135.

Die vorstehenden Untersuchungen sind zu dem Zwecke angeführt, damit die Grundsätze, worauf sich meine Methode stützt, und gleichsam ihr wahrer Nerv desto klarer durchblickt werden. Die Durchführung selbst aber wird die Methode in einer ganz verschiedenen Gestalt darstellen, welche ich nach sehr häufigen Anwendungen als die bequemste unter vielen andern von (150)
mir versuchten empfehlen kann. Da bei der Bestimmung einer unbekannten Bahn aus drei Beobachtungen das ganze Geschäft sich stets auf einige Hypothesen, oder vielmehr successive Annäherungen zurückführen lässt, so ist es als ein sehr grosser Vortheil zu erachten, wenn es gelingt, die Rechnung derartig anzuordnen, dass gleich von Anfang an so viele Operationen als möglich, die nicht von P und Q, sondern einzig von der Combination bekannter Grössen abhängen, von den Hypothesen selbst sich trennen lassen. Man braucht dann offenbar die vorläufigen, allen einzelnen Hypothesen gemeinsamen Operationen nur einmal auszuführen, und die Hypothesen selbst werden auf so wenig Operationen wie möglich reducirt. Auch ist es dabei von grossem Werthe, wenn man nicht nöthig hat, bei den einzelnen Hypothesen bis zu den Elementen selbst vorzuschreiten, sondern wenn man sich deren Berechnung bis zur letzten Hypothese aufsparen kann. In beider Hinsicht dürfte meine Methode, welche ich jetzt auseinandersetzen will, nichts zu wünschen übrig lassen.

136.

Vor allen Dingen muss man die drei heliocentrischen Orte der Erde an der Himmelskugel A, A', A'' (Fig. 4) mit den drei entsprechenden geocentrischen Orten des Himmelskörpers B, B', B'' durch grösste Kreise verbinden, und sowohl die Lage dieser grössten Kreise in Beziehung auf die Ecliptik (wenn man nämlich letztere zur Grundebene wählt), als in ihnen die Lage der Punkte B, B', B'' berechnen. Es seien α, α', α'' drei geocentrische Längen des Himmelskörpers, β, β', β'' dessen Breiten, l, l', l'' die heliocentrischen Längen der Erde, deren Breiten = Null gesetzt werden (Artt. 117, 72). Es seien ferner γ, γ', γ'' die Neigungen der grössten Kreise, welche von A, A', A'' beziehungsweise nach B, B', B'' gezogen sind, gegen die Ecliptik. Um in Bestimmung dieser Neigungen eine feste Regel zu befolgen, wollen wir sie beständig in Beziehung auf denjenigen Theil der Ecliptik messen, welcher von den Punkten A, A', A'' nach der Ordnung der Zeichen belegen ist, so dass ihre Grösse von 0 bis zu 360° durchgezählt wird, oder, was auf dasselbe herauskommt, im nördlichen Theile von 0 bis 180°, im südlichen von 0 bis —180°. Die Bogen AB, $A'B'$, $A''B''$, die man stets zwischen 0 und 180° setzen kann, bezeichne ich mit δ, δ', δ''. So hat man für die Bestimmung von γ, δ die Formeln:

$$[1]\quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin(\alpha - l)}$$

$$[2]\quad \operatorname{tang}\delta = \frac{\operatorname{tang}(\alpha - l)}{\cos\gamma},$$

welchen man zur Prüfung der Rechnung hinzufügen kann:

(151) $$\sin\delta = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},\quad \cos\delta = \cos\beta\cos(\alpha - l).$$

Zur Bestimmung von γ', δ', γ'', δ'' dienen offenbar ganz analoge Formeln. Würde gleichzeitig $\beta = 0$, $\alpha - l = 0$ oder $= 180°$, d. h. befände sich der Körper zugleich in der Opposition oder Conjunction und in der Ecliptik, so würde γ unbestimmt bleiben; aber ich setze voraus, dass dieser Fall bei keiner der drei Beobachtungen Statt habe.

Wenn statt der Ecliptik der Aequator als Grundebene gewählt wird, so müsste man, um die Lage der drei grössten Kreise in Beziehung auf den Aequator zu bestimmen, ausser den Neigungen noch überher die Rectascensionen der Einschnitte mit dem Aequator berechnen, und auch ausser den Abständen der Punkte B, B', B'' von diesen Einschnitten annoch die Abstände der Punkte A, A', A'' von denselben bestimmen. Da dies von der im Art. 110 behandelten Aufgabe abhängig ist, so halte ich mich hier bei der Entwickelung der Formeln nicht weiter auf.

137.

Das zweite Geschäft bildet die Bestimmung der relativen Lage jener drei grössten Kreise unter sich, die von der Lage der gegenseitigen Einschnitte und von den Neigungen abhängig ist. Da ich dieses ohne Zweideutigkeit auf klare und allgemeine Begriffe zurückzuführen wünsche, so dass man nicht für die einzelnen verschiedenen Fälle auf besondere Figuren zu recurriren braucht, so muss ich einige vorgängige Erläuterungen voranschicken. Zuerst muss man nämlich in jedem grössten Kreise zwei entgegengesetzte Richtungen unterscheiden, was dadurch geschieht, dass man die eine als eine vorschreitende oder positive, die andere als eine rückgängige oder negative betrachtet. Da dies an sich ganz willkürlich ist, so will ich, um eine feste Norm aufzustellen, stets die Richtungen von A, A', A'' nach B, B', B'' hin als positive betrachten, so z. B. wenn die Einschneidung des ersten Kreises mit dem zweiten durch eine positive Distanz vom Punkte A dargestellt wird, so ist dies so zu verstehen, dass sie von A gen B hin (wie D'' in unserer Figur) zu nehmen sei; wenn sie aber negativ wäre, so müsste sie von der anderen Seite von A genommen werden. Sodann aber zweitens, werden auch die beiden Halbkugeln, in welche jeder grösste Kreis die ganze Kugel zertheilt, durch schickliche Benennungen von einander zu unterscheiden sein. Und zwar will ich diejenige Halbkugel die obere nennen, welche dem an der inneren Kugelfläche einen grössten Kreis in vorschreitender Richtung Durchwandernden zur Rechten ist; die andere die untere. Die obere Region wird daher analog sein der nördlichen Halbkugel in Beziehung auf Ecliptik oder Aequator, die untere der südlichen.

Hat man dies richtig verstanden, so wird man leicht beide Einschnitte der grössten Kreise von einander unterscheiden können; in dem einen Einschnitte nämlich lenkt der erste Kreis aus der untern Region des zweiten in (152)
die obere, oder, was dasselbe ist, der zweite aus der oberen Region des ersten in die untere. Bei dem zweiten Einschnitte findet das Gegentheil Statt. An und für sich ist es freilich ganz gleichgültig, welche Einschnitte wir bei unserem Problem auswählen wollen. Um aber auch hier nach einer unveränderlichen Norm zu verfahren, wollen wir stets diejenigen (D, D', D'' in Fig. 4)

annehmen, wo resp. der dritte Kreis $A''B''$ in des zweiten $A'B'$, der dritte in des ersten AB, der zweite in des ersten obere Region übergeht. Die Lage dieser Einschnitte wird durch ihre Abstände von den Punkten A' und A'', A und A'', A und A' bestimmt, welche wir einfach mit $A'D$, $A''D$, AD', $A''D'$, AD'', $A'D''$ bezeichnen wollen. Sodann werden die gegenseitigen Neigungen der Kreise die Winkel sein, welche resp. in diesen Einschnittspunkten D, D', D'' zwischen denjenigen Theilen der sich schneidenden Kreise enthalten sind, die in vorschreitender Richtung liegen. — Diese, stets innerhalb 0 und 180° zu nehmenden Neigungen bezeichne ich mit ε, ε', ε''. Die Bestimmung dieser neun unbekannten Grössen aus den bekannten hängt offenbar von derselben Aufgabe ab, die im Art. 55 abgehandelt ist. Man hat daher folgende Gleichungen:

$$[3]\quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(A'D+A''D) = \sin\tfrac{1}{2}(l''-l')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$$
$$[4]\quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(A'D+A''D) = \cos\tfrac{1}{2}(l''-l')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma''-\gamma')$$
$$[5]\quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(A'D-A''D) = \sin\tfrac{1}{2}(l''-l')\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$$
$$[6]\quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(A'D-A''D) = \cos\tfrac{1}{2}(l''-l')\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''-\gamma').$$

Aus den Gleichungen [3] und [4] wird $\frac{1}{2}(A'D+A''D)$ und $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ gefunden, die beiden übrigen geben $\frac{1}{2}(A'D-A''D)$ und $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$, und so $A'D$, $A''D$ und ε. Der Zweifel bei Bestimmung der Bögen $\frac{1}{2}(A'D+A''D)$, $\frac{1}{2}(A'D-A''D)$ durch die Tangenten wird mittels der Bedingung entschieden, dass $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ und $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ positiv herauskommen müssen, und die Uebereinstimmung von $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ und $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ dient zur Prüfung der ganzen Rechnung.

Die Bestimmung der Grössen AD', $A''D'$, ε', AD'', $A'D''$, ε'' geschieht auf ganz ähnliche Weise, und es wird nicht nöthig sein, die zu dieser Berechnung anzuwendenden acht Gleichungen hierher zu übertragen, da sie von selbst aus den Gleichungen 3 — 6 folgen, wenn

	$A'D$	$A''D$	ε	$l''-l'$	γ''	γ'	
mit	AD'	$A''D'$	ε'	$l''-l$	γ''	γ	oder
mit	AD''	$A'D''$	ε''	$l'-l$	γ'	γ	

resp. vertauscht werden.

Eine neue Prüfung der ganzen Rechnung lässt sich noch aus der gegenseitigen Relation zwischen den Seiten und den Winkeln des von den Punkten D, D', D'' gebildeten sphärischen Dreiecks ableiten, woraus man folgende ganz allgemein geltenden Gleichungen erhält, welche Lage auch diese Punkte haben mögen:

$$\frac{\sin(AD'-AD'')}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin(A'D-A'D'')}{\sin\varepsilon'} = \frac{\sin(A''D-A''D')}{\sin\varepsilon''}.$$

Wenn endlich der Aequator an Stelle der Ecliptik zur Grundebene (153)
gewählt wird, so erleidet die Rechnung nur die Aenderung, dass man für die heliocentrischen Orte der Erde A, A', A'' diejenigen Punkte des Aequators substituiren muss, wo er von den Kreisen AB, $A'B'$, $A''B''$ geschnitten wird. Man nimmt daher für l, l', l'' die Rectascensionen dieser Einschnitte, und für $A'D$ die Distanz des Punktes D vom zweiten Einschnitte u. s. w.

138.

Das dritte Geschäft besteht nun darin, dass man die beiden äussersten geocentrischen Orte des Himmelskörpers, d. h. die Punkte B, B'' durch einen grössten Kreis verbindet, und des letzteren Einschnitt mit dem grössten Kreise $A'B'$ bestimmt. Es sei B^* dieser Einschnitt, und $\delta'-\sigma$ dessen Abstand vom Punkte A', sowie α^* dessen Länge, β^* die Breite. Man hat also, weil B, B^*, B'' in demselben grössten Kreise liegen, die bekannte Gleichung:

$$0 = \operatorname{tang}\beta\sin(\alpha''-\alpha^*) - \operatorname{tang}\beta^*\sin(\alpha''-\alpha) + \operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha^*-\alpha),$$

welche, wenn man $\operatorname{tang}\gamma'\sin(\alpha^*-l')$ für $\operatorname{tang}\beta^*$ substituirt, folgende Gestalt annimmt:

$$0 = \begin{cases} \cos(\alpha^*-l')\left\{\operatorname{tang}\beta\sin(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha-l')\right\} \\ -\sin(\alpha^*-l')\left\{\operatorname{tang}\beta\cos(\alpha''-l') + \operatorname{tang}\gamma'\sin(\alpha''-\alpha) - \operatorname{tang}\beta''\cos(\alpha-l')\right\}. \end{cases}$$

Da nun $\operatorname{tang}(\alpha^*-l') = \cos\gamma'\operatorname{tang}(\delta'-\sigma)$, so hat man

$$\operatorname{tang}(\delta'-\sigma) = \frac{\operatorname{tang}\beta\sin(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha-l')}{\cos\gamma'(\operatorname{tang}\beta\cos(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta''\cos(\alpha-l')) + \sin\gamma'\sin(\alpha''-\alpha)}.$$

Hieraus leitet man die folgenden, zur numerischen Rechnung bequemeren Gleichungen ab.

Man setze

[7] $\operatorname{tang}\beta\sin(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha-l') = S$

[8] $\operatorname{tang}\beta\cos(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta''\cos(\alpha-l') = T\sin t$

[9] $\sin(\alpha''-\alpha) = T\cos t$,

(Art. 14, II), und es wird sein:

$$[10] \quad \operatorname{tang}(\delta' - \sigma) = \frac{S}{T \sin(t + \gamma')}.$$

Die Zweideutigkeit in Bestimmung des Bogens $\delta' - \sigma$ durch die Tangente entsteht daraus, dass die grössten Kreise $A'B'$, BB'' in zwei Punkten sich schneiden. Ich nehme für B^* stets den dem Punkte B' nächsten Einschnitt, so dass σ immer zwischen die Grenzen -90° und $+90^\circ$ fällt, wodurch jene Zweideutigkeit gehoben wird. Gemeiniglich wird dann der Werth des Bogens σ (der von der Curvatur der geocentrischen Bewegung abhängt) eine hinlänglich
(154) mässige Grösse sein, und zwar, allgemein gesprochen, von der zweiten Ordnung, wenn die Zeitintervalle als Grössen erster Ordnung angesehen werden.

Welche Modificationen bei der Rechnung anzubringen sind, wenn statt der Ecliptik der Aequator als Grundebene gewählt wird, ist aus der Anmerkung des vorhergehenden Artikels von selbst klar.

Uebrigens bleibt die Lage des Punktes B^* dann offenbar unbestimmt, wenn die Kreise BB'', $A'B'$ überhaupt zusammenfallen sollten; diesen Fall, wo die vier Punkte A', B, B', B'' in demselben grössten Kreise liegen würden, schliesse ich von unserer Untersuchung aus. Es ist aber auch angemessen, bei Auswahl der Beobachtungen selbst den Fall zu vermeiden, wo die Lage dieser vier Punkte nur wenig von einem grössten Kreise abweicht, widrigenfalls die Lage des Punktes B^*, welche bei den nachfolgenden Operationen von grosser Wichtigkeit ist, durch die kleinsten Beobachtungsfehler zu sehr afficirt werden und sich nicht mit der nöthigen Genauigkeit bestimmen lassen würde. Ebenso würde der Punkt B^* dann unbestimmt bleiben, wenn die Punkte B, B'' in einen einzigen zusammenfielen†), in welchem Falle die Position des Kreises BB'' unbestimmt bleiben würde. Ich schliesse deshalb auch diesen Fall aus, sowie man sich denn auch aus ähnlichen Gründen wie die vorigen derjenigen Beobachtungen zu enthalten hat, bei welchen der erste und letzte geocentrische Ort in Punkte der Kugel fallen, die sich sehr nahe sind.

---

†) Oder auch dann, wenn letztere sich entgegengesetzt sind, aber von diesem Falle spreche ich nicht, weil unsere Methode nicht auf Beobachtungen ausgedehnt werden kann, die einen so grossen Zeitraum umfassen.

139.

Es seien an der Himmelskugel C, C', C'' die drei heliocentrischen Orte des Himmelskörpers, welche resp. in den grössten Kreisen AB, $A'B'$, $A''B''$, und zwar zwischen A und B, A' und B', A'' und B'' belegen sein werden (Art. 64, III); ausserdem werden die Punkte C, C', C'' in demselben grössten Kreise liegen, nämlich in demjenigen, welchen die Bahnebene an der Himmelskugel projicirt. Ich bezeichne mit r, r', r'' die drei Entfernungen des Himmelskörpers von der Sonne; mit ϱ, ϱ', ϱ'' dessen Abstände von der Erde; mit R, R', R'' die drei Abstände der Erde von der Sonne. Ferner setze ich die Bögen $C'C''$, CC'', CC' resp. $= 2f$, $2f'$, $2f''$, und $r'r''\sin 2f = n$, $rr''\sin 2f' = n'$, $rr'\sin 2f'' = n''$. Man hat daher $f' = f + f''$, $AC + CB = \delta$, $A'C' + C'B' = \delta'$, $A''C'' + C''B'' = \delta''$ und sodann

$$\frac{\sin\delta}{r} = \frac{\sin AC}{\varrho} = \frac{\sin CB}{R}$$
$$\frac{\sin\delta'}{r'} = \frac{\sin A'C'}{\varrho'} = \frac{\sin C'B'}{R'}$$
$$\frac{\sin\delta''}{r''} = \frac{\sin A''C''}{\varrho''} = \frac{\sin C''B''}{R''}.$$

Hieraus sieht man, dass, sobald die Lage der Punkte C, C', C'' bekannt (155) sein würde, sich daraus die Grössen r, r', r'' und ϱ, ϱ', ϱ'' bestimmen liessen. Ich will nun zeigen, wie sich erstere aus den Grössen $\frac{n''}{n} = P$, $2\left(\frac{n+n''}{n'} - 1\right)r'^3 = Q$ ableiten lässt, von denen, wie ich bereits oben erklärt habe, unsere Methode ausgeht.

140.

Zuerst bemerke ich, dass, wenn N irgend ein Punkt des grössten Kreises $CC'C''$ ist, und man die Abstände der Punkte C, C', C'' von dem Punkte N nach der nämlichen Richtung zählt, welche von C nach C'' geht, so dass allgemein wird:

$$NC'' - NC' = 2f, \quad NC'' - NC = 2f', \quad NC' - NC = 2f'',$$

man folgende Gleichung habe:

$$0 = \sin 2f \sin NC - \sin 2f' \sin NC' + \sin 2f'' \sin NC'' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}.$$

Nun gehe ich davon aus, dass N im Einschnitte der grössten Kreise BB^*B'', $CC'C''$ genommen sei, gleichsam im aufsteigenden Knoten des ersteren auf dem zweiten. Ich bezeichne mit $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ resp. die Abstände der Punkte C, C', C'', D, D', D'' von dem grössten Kreise BB^*B'', die von einer der beiden Seiten positiv, von der anderen entgegengesetzten negativ zu nehmen sind. Darnach werden offenbar $\sin\mathfrak{C}$, $\sin\mathfrak{C}'$, $\sin\mathfrak{C}''$ resp. proportional sein $\sin NC$, $\sin NC'$, $\sin NC''$, wodurch die Gleichung (I) folgende Gestalt erhält:

$$0 = \sin 2f \sin\mathfrak{C} - \sin 2f' \sin\mathfrak{C}' + \sin 2f'' \sin\mathfrak{C}'',$$

oder, wenn man mit $rr'r''$ multiplicirt,

$$0 = nr\sin\mathfrak{C} - n'r'\sin\mathfrak{C}' + n''r''\sin\mathfrak{C}'' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}.$$

Ferner ist klar, dass sich verhalte $\sin\mathfrak{C}$ zu $\sin\mathfrak{D}'$ wie der Sinus des Abstandes des Punktes C von B zum Abstande des Punktes D' von B, wobei jeder Abstand nach derselben Richtung hin gemessen wird. Man hat daher

$$-\sin\mathfrak{C} = \frac{\sin\mathfrak{D}'\sin CB}{\sin(AD' - \delta)}$$

und auf ähnliche Weise erhält man:

$$-\sin\mathfrak{C} = \frac{\sin\mathfrak{D}''\sin CB}{\sin(AD'' - \delta)}$$

$$-\sin\mathfrak{C}' = \frac{\sin\mathfrak{D}\sin C'B^*}{\sin(A'D - \delta' + \sigma)} = \frac{\sin\mathfrak{D}''\sin C'B^*}{\sin(A'D'' - \delta' + \sigma)}$$

$$-\sin\mathfrak{C}'' = \frac{\sin\mathfrak{D}\sin C''B''}{\sin(A''D - \delta'')} = \frac{\sin\mathfrak{D}'\sin C''B''}{\sin(A''D' - \delta'')}.$$

(156) Dividirt man daher die Gleichung (II) mit $r''\sin\mathfrak{C}''$, so entsteht:

$$0 = n\cdot\frac{r\sin CB}{r''\sin C''B''}\cdot\frac{\sin(A''D' - \delta'')}{\sin(AD' - \delta)} - n'\cdot\frac{r'\sin C'B^*}{r''\sin C''B''}\cdot\frac{\sin(A''D - \delta'')}{\sin(A'D - \delta' + \sigma)} + n''.$$

Wenn man nun hier den Bogen $C'B'$ mit z bezeichnet, für r, r', r'' ihre Werthe aus dem vorhergehenden Artikel substituirt, und der Kürze wegen setzt:

$$[11] \quad \frac{R\sin\delta\sin(A''D' - \delta'')}{R''\sin\delta''\sin(AD' - \delta)} = a$$

$$[12] \quad \frac{R'\sin\delta'\sin(A''D - \delta'')}{R''\sin\delta''\sin(A'D - \delta' + \sigma)} = b,$$

so verhält sich unsere Gleichung wie folgt:

$$0 = an - bn' \cdot \frac{\sin(z - \sigma)}{\sin z} + n'' \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}.$$

Der Coefficient b lässt sich auch vermittelst der, leicht aus den eben gegebenen Gleichungen abzuleitenden Formel

$$[13] \quad a \times \frac{R' \sin\delta' \sin(AD'' - \delta)}{R \sin\delta \sin(A'D'' - \delta' + \sigma)} = b$$

berechnen. Zur Prüfung der Rechnung wird es gut sein, beide Formeln [12] und [13] zu benutzen.

Falls $\sin(A'D'' - \delta' + \sigma)$ grösser ist als $\sin(A'D - \delta' + \sigma)$, so wird die zweite Formel von den unvermeidlichen Tafelfehlern weniger afficirt, als die erste, und ist daher dieser vorzuziehen, wenn sich eine kleine, hieraus zu erklärende Verschiedenheit in den Werthen von b ergeben sollte. Dagegen verdient die erste Formel mehr Vertrauen, sobald $\sin(A'D'' - \delta' + \sigma)$ kleiner ist als $\sin(A'D - \delta' + \sigma)$. Wenn man will, kann man ein schickliches Mittel zwischen beiden Werthen nehmen.

Zur Prüfung der Rechnung lassen sich auch die nachfolgenden Formeln brauchen, deren nicht so schwierige Ableitung ich indess der Kürze wegen weglasse:

$$0 = \frac{a \sin(l'' - l')}{R} - \frac{b \sin(l'' - l)}{R'} \cdot \frac{\sin(\delta' - \sigma)}{\sin\delta'} + \frac{\sin(l' - l)}{R''}$$

$$b = \frac{R' \sin\delta'}{R'' \sin\delta''} \cdot \frac{U \cos\beta \cos\beta''}{\sin(AD' - \delta) \sin\varepsilon'},$$

wo U den Quotienten

$$\frac{S}{\sin(\delta' - \sigma)} = \frac{T \sin(t + \gamma')}{\cos(\delta' - \sigma)}$$

(Art. 138, Gleichung 10) bezeichnet.

141.

Aus $P = \frac{n''}{n}$ und der Gleichung (III) des vorhergehenden Artikels folgt: $(n + n'')\frac{P + a}{P + 1} = bn' \frac{\sin(z - \sigma)}{\sin z}$. Hieraus aber sowie aus

$$Q = 2\left(\frac{n + n''}{n'} - 1\right) r'^3 \quad \text{und} \quad r' = \frac{R' \sin\delta'}{\sin z} \quad \text{erhält man}$$ (157)

$$\sin z + \frac{Q \sin z^4}{2 R'^3 \sin \delta'^3} = b \frac{P+1}{P+a} \sin(z-\sigma), \quad \text{oder}$$

$$\frac{Q \sin z^4}{2 R'^3 \sin \delta'^3} = \left(b \frac{P+1}{P+a} - \cos\sigma\right) \sin(z-\sigma) - \sin\sigma \cos(z-\sigma).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$[14] \quad \frac{1}{2 R'^3 \sin \delta'^3 \sin\sigma} = c$$

und führt den Hülfswinkel ω so ein, dass

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\sin\sigma}{b \dfrac{P+1}{P+a} - \cos\sigma}$$

wird, so erhält man die Gleichung (IV)

$$c Q \sin\omega \sin z^4 = \sin(z-\omega-\sigma),$$

woraus man die Unbekannte z bestimmen muss. Zur bequemeren Berechnung des Winkels ω lässt sich die vorige Formel für $\operatorname{tang}\omega$ so darstellen:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{(P+a) \operatorname{tang}\sigma}{P\left(\dfrac{b}{\cos\sigma} - 1\right) + \left(\dfrac{b}{\cos\sigma} - a\right)}.$$

Setzt man daher

$$[15] \quad \frac{\dfrac{b}{\cos\sigma} - a}{\dfrac{b}{\cos\sigma} - 1} = d$$

$$[16] \quad \frac{\operatorname{tang}\sigma}{\dfrac{b}{\cos\sigma} - 1} = e,$$

so hat man zur Bestimmung von ω die einfache Formel:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{e(P+a)}{P+d}.$$

Die Berechnung der Grössen a, b, c, d, e aus den Formeln 11—16, welche lediglich von gegebenen Grössen abhängt, kann man als das vierte Geschäft betrachten. Die Grössen b, c, e selbst hat man nicht nöthig, sondern nur ihre Logarithmen.

Uebrigens giebt es einen besondern Fall, in welchem obige Vorschriften einiger Abänderung bedürfen. Falls nämlich der grösste Kreis BB'' mit $A''B''$
(158) zusammenfällt und deshalb die Punkte B, B^* mit D', D, so würden a, b unendliche Werthe erhalten. Setzt man in diesem Falle

$$\frac{R\sin\delta\sin(A'D''-\delta'+\sigma)}{R'\sin\delta'\sin(AD''-\delta)}=\pi,$$

so hat man statt der Gleichung III folgende: $0=\pi n-\frac{n'\sin(z-\sigma)}{\sin z}$, woraus man dieselbe Gleichung IV erhält, wenn man macht

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{\pi\sin\sigma}{P+(1-\pi\cos\sigma)}.$$

Ebenso wird in dem besonderen Falle, wo $\sigma=0$, die Grösse c unendlich und $\omega=0$, woraus der Factor $c\sin\omega$ in der Gleichung IV unbestimmt zu sein scheint; nichtsdestoweniger ist er in Wahrheit bestimmt und sein Werth $=\frac{P+a}{2R'^3\sin\delta'^3(b-1)(P+d)}$, wie eine kleine Aufmerksamkeit lehren wird. In diesem Falle wird daher $\sin z=R'\sin\delta'\sqrt[3]{\frac{2(b-1)(P+d)}{Q(P+a)}}$.

142.

Die Gleichung IV, welche entwickelt zur achten Ordnung aufsteigen würde, wird in ihrer ungeänderten Form durch Versuche sehr rasch aufgelöst. Uebrigens zeigt die Theorie der Gleichungen (was weiter zu entwickeln ich hier jedoch der Kürze wegen unterlasse), dass diese Gleichung entweder zwei, oder vier Auflösungen durch reelle Werthe zulasse. Im ersteren Falle wird der eine Werth von $\sin z$ positiv sein, den anderen negativen muss man verwerfen, weil nach der Natur der Aufgabe r' nicht negativ herauskommen kann. Im zweiten Falle wird von den Werthen für $\sin z$ entweder einer positiv sein und die andern drei negativ — wo es daher nicht zweifelhaft ist, welchen man annehmen muss — oder man hat drei positive mit einem negativen. In diesem Falle muss man auch von den positiven Werthen, wenn solche da sind, diejenigen verwerfen, wo z grösser herauskommt als δ', weil vermöge einer andern wesentlichen Bedingung der Aufgabe ϱ' und deshalb auch $\sin(\delta'-z)$ eine positive Grösse sein muss.

So oft die Beobachtungen um mässige Zeiträume von einander entfernt sind, wird gemeiniglich der letztere Fall Statt haben, dass drei positive Werthe für $\sin z$ der Gleichung Genüge thun. Unter diesen Auflösungen pflegt ausser der wahren noch eine gefunden zu werden, wo z wenig

von δ' verschieden, bald etwas grösser, bald etwas kleiner ist. Diese Erscheinung ist auf folgende Weise zu erklären. Die analytische Behandlung unserer Aufgabe ist allein auf die Bedingung gestützt, dass die drei Orte des Körpers im Raume in geraden Linien liegen müssen, deren Lage durch den absoluten Ort der Erde und die beobachtete Position bestimmt wird. Schon nach der Natur der Sache müssen zwar jene Orte in denjenigen Seiten
(159) der geraden Linien liegen, woher das Licht auf die Erde herabgelangt; aber die analytischen Gleichungen erkennen diese Einschränkung nicht an, und müssen alle, mit den Kepler'schen Gesetzen übereinstimmende Ortssysteme auf gleiche Weise umfassen, sei es nun, dass letztere von dieser Seite der Erde her in diesen geraden Linien liegen, oder von jener Seite her, oder sei es endlich, dass sie mit der Erde selbst zusammenfallen. Auch dieser letzte Fall würde unserer Aufgabe Genüge leisten, da die Erde selbst nach Norm jener Gesetze sich bewegt. Hieraus sieht man, dass die Gleichungen auch diejenige Auflösung begreifen müssen, in welcher die Punkte C, C', C'' mit den Punkten A, A', A'' zusammenfallen (insoweit man die sehr kleinen Veränderungen vernachlässigt, welchen die elliptischen Erdorte vermöge der Störungen und der Parallaxe unterworfen sind). Die Gleichung IV muss daher stets die Auflösung $z = \delta'$ zulassen, wenn für P und Q die den Erdorten entsprechenden wahren Werthe genommen werden. Falls mithin jenen Grössen Werthe beigemessen werden, die von diesen nicht viel verschieden sind (was sich immer annehmen lässt, wenn die Zwischenzeiten mässig sind), so muss unter den Auflösungen der Gleichung IV nothwendig eine gefunden werden, welche sehr nahe an den Werth $z = \delta'$ herankommt.

Gemeiniglich wird zwar in dem Falle, wo die Gleichung IV drei Auflösungen durch positive Werthe für z zulässt, die dritte Lösung (ausser der wahren und der, von welcher wir eben gesprochen haben) einen Werth von z geben, der grösser als δ' und deshalb analytisch ebenso möglich, physisch aber unmöglich ist. Dann kann es daher nicht zweifelhaft sein, welchen man nehmen muss. Es kann sich aber auch ereignen, dass jene Gleichung zwei verschiedene schickliche Auflösungen zulässt, und dann würde sich unserer Aufgabe durch zwei ganz verschiedene Bahnen Genüge leisten lassen. Uebrigens ist in einem solchen Falle die wahre Bahn von der falschen leicht zu unterscheiden, sobald nur erst andere mehr entfernte Beobachtungen zur Prüfung hinzugezogen werden können.

143.

Sobald der Winkel z gefunden ist, hat man sofort r' durch die Gleichung $r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z}$. Ferner erhält man aus den Gleichungen $P = \frac{n''}{n}$ und (III)

$$\frac{n'r'}{n} = \frac{(P+a) R' \sin \delta'}{b \sin (z-\sigma)}$$

$$\frac{n'r'}{n''} = \frac{1}{P} \cdot \frac{n'r'}{n}.$$

Um die Formeln, welche zur Bestimmung der Lage der Punkte C, C'' aus der Lage des Punktes C' dienen, so abzuhandeln, dass ihre allgemeine Wahrheit auch für diejenigen Fälle sofort einleuchte, welche die Fig. 4 nicht zeigt, bemerke ich, dass der Sinus des Abstandes des Punktes C' vom grössten Kreise CB (positiv genommen in der oberen Region, negativ in der untern) gleich sei dem Producte von $\sin \varepsilon''$ in den Sinus des Abstandes (160)
des Punktes C' von D'' (nach der vorschreitenden Richtung gemessen) und daher $= -\sin \varepsilon'' \sin C'D'' = -\sin \varepsilon'' \sin (z + A'D'' - \delta')$. Ebenso wird der Sinus des Abstandes des Punktes C'' von demselben grössten Kreise $= -\sin \varepsilon' \sin C''D'$. Offenbar aber verhalten sich dieselben Sinusse wie $\sin CC'$ zu $\sin CC''$, oder wie $\frac{n''}{rr'}$ zu $\frac{n'}{rr''}$, oder wie $n''r''$ zu $n'r'$. Setzt man daher $C''D' = \zeta''$, so hat man

$$\text{V.} \quad r'' \sin \zeta'' = \frac{n'r'}{n''} \cdot \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon'} \sin (z + A'D'' - \delta').$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man, wenn $CD' = \zeta$ gesetzt wird,

$$\text{VI.} \quad r \sin \zeta = \frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} \sin (z + A'D - \delta')$$

$$\text{VII.} \quad r \sin (\zeta + AD'' - AD') = r'' P . \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon''} \sin (\zeta'' + A''D - A''D').$$

Durch Combination der Gleichungen V und VI mit den folgenden, aus Art. 139 herübergeschriebenen:

$$\text{VIII.} \quad r'' \sin (\zeta'' - A''D' + \delta'') = R'' \sin \delta''$$

IX. $r\sin(\zeta - AD' + \delta') = R\sin\delta'$)

lassen sich die Grössen ζ, ζ'', r, r'' nach Anleitung des Art. 78 daraus bestimmen. Zur bequemeren Erledigung der Rechnung bringe ich noch folgende Formeln bei. Man setze:

$$[17] \quad \frac{R\sin\delta}{\sin(AD'-\delta)} = \varkappa$$

$$[18] \quad \frac{R''\sin\delta''}{\sin(A''D'-\delta'')} = \varkappa''$$

$$[19] \quad \frac{\cos(AD'-\delta)}{R\sin\delta} = \lambda$$

$$[20] \quad \frac{\cos(A''D'-\delta'')}{R''\sin\delta''} = \lambda''.$$

Die von P und Q noch unabhängige Berechnung dieser Grössen oder vielmehr ihrer Logarithmen kann als das f ü n f t e und letzte Geschäft bei den Präliminar-Operationen angesehen werden, und wird dasselbe sogleich bequem mit der Berechnung von a, b oder mit dem vierten Geschäfte erledigt, wo $a = \frac{\varkappa}{\varkappa''}$ wird. Macht man sodann:

(161)
$$\frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} \cdot \sin(z + A'D - \delta') = p$$
$$\frac{n'r'}{n''} \cdot \frac{\sin\varepsilon''}{\sin\varepsilon'} \cdot \sin(z + A'D'' - \delta') = p''$$
$$\varkappa(\lambda p - 1) = q$$
$$\varkappa''(\lambda'' p'' - 1) = q'',$$

so erhält man ζ und r aus $r\sin\zeta = p$, $r\cos\zeta = q$, und ζ'', sowie r'', aus $r''\sin\zeta'' = p''$, $r''\cos\zeta'' = q''$. Ein Zweifel in Bestimmung von ζ und ζ'' kann hier nicht obwalten, weil r und r'' nothwendig als positive Grössen herauskommen müssen. Die vollständige Rechnung mittelst der Gleichung VII kann zur Prüfung dienen.

Es giebt aber zwei Fälle, wo man eine andere Methode befolgen muss. So oft nämlich der Punkt D' mit B entweder zusammenfällt, oder auf der Kugel ihm entgegengesetzt ist, oder so oft $AD' - \delta' = 0$ oder $= 180°$, so müssen die Gleichungen VI und IX nothwendig identisch sein, und es würde daher $\varkappa = \infty$, $\lambda p - 1 = 0$ werden und mithin q unbestimmt bleiben. In diesem Falle werden zwar ζ'' und r'' auf dieselbe oben gezeigte Art bestimmt, sodann aber muss man ζ und r aus Combination der Gleichung VII mit VI oder IX ableiten. Ich unterlasse es, die aus dem Art. 78 zu entnehmenden Formeln hier nochmals herzuschreiben, und bemerke nur, dass in dem Falle, wo $AD'-\delta$ zwar nicht $=0$ und auch nicht $=180^0$, doch aber ein sehr kleiner Bogen ist, man besser thut, dieselbe Methode zu befolgen, weil dann die erstere Methode nicht die nöthige Schärfe zulassen würde. Und zwar möge man die Combination der Gleichung VII mit VI oder mit IX annehmen, je nachdem $\sin(AD''-AD')$ grösser oder kleiner ist, als $\sin(AD''-\delta)$.

Ebenso würde in dem Falle, wo der Punkt D' oder der ihm entgegengesetzte entweder mit B'' zusammenfällt, oder nur wenig davon absteht, die Bestimmung der Grössen ζ'', r'' durch die vorhergehende Methode entweder unmöglich werden, oder wenig Sicherheit gewähren. Dann bestimmt man daher ζ und r zwar durch jene Methode, alsdann aber ζ'' und r'' aus Combination der Gleichung VII entweder mit V oder mit VIII, jenachdem $\sin(A''D-A''D')$ grösser oder kleiner ist als $\sin(A''D-\delta'')$. Uebrigens braucht man nicht zu besorgen, dass zugleich D' mit den Punkten B, B'' oder den entgegengesetzten Punkten zusammenfällt, oder nur wenig von ihnen absteht; denn den Fall, wo B mit B'' zusammenfällt, oder nur sehr wenig davon absteht, habe ich bereits oben im Artikel 138 von unserer Untersuchung ausgeschlossen.

144.

Hat man die Bögen ζ, ζ'' gefunden, so ist dadurch die Lage der Punkte C, C'' gegeben, und es lässt sich der Abstand $CC''=2f'$ aus ζ, ζ'' und ε' bestimmen. Es seien u, u'' die Neigungen der grössten Kreise AB, $A''B''$ zu dem grössten Kreise CC'' (welche in Fig. 4 resp. die Winkel $C''CD'$ und $180^0-CC''D'$ sein werden), so hat man folgende, ganz denen im Art. 137 [3]—[6] analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin f'\sin\tfrac{1}{2}(u''+u) &= \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'\sin\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta'') \qquad (162)\\
\sin f'\cos\tfrac{1}{2}(u''+u) &= \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'\sin\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta'')\\
\cos f'\sin\tfrac{1}{2}(u''-u) &= \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cos\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta'')\\
\cos f'\cos\tfrac{1}{2}(u''-u) &= \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cos\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta'').
\end{aligned}$$

Die beiden ersten geben $\frac{1}{2}(u''+u)$ und $\sin f'$, die beiden andern $\frac{1}{2}(u''-u)$ und $\cos f'$; aus $\sin f'$ und $\cos f'$ hat man f'. Die Winkel $\frac{1}{2}(u''+u)$ und $\frac{1}{2}(u''-u)$, welche erst in der letzten Hypothese zur Bestimmung der Lage der Bahnebene gebraucht werden, kann man in den ersten Hypothesen bei Seite lassen.

Auf ganz ähnliche Weise liesse sich f aus ε, $C'D$ und $C''D$, sowie f'', aus ε'', CD'' und $C'D''$ bestimmen; man wendet aber hierzu bequemer die folgenden Formeln an:

$$\sin 2f = r \sin 2f' \,.\, \frac{n}{n'r'}$$

$$\sin 2f'' = r'' \sin 2f' \,.\, \frac{n''}{n'r'},$$

wo man die Logarithmen der Grössen $\frac{n}{n'r'}$ und $\frac{n''}{n'r'}$ schon aus der früheren Rechnung vor sich hat. Eine neue Prüfung der ganzen Rechnung endlich wird dadurch gewonnen, dass $2f+2f''=2f'$ werden muss; sollte zufällig ein Unterschied Statt finden, so kann er sicherlich von keiner Bedeutung sein, wenn sonst alle Operationen so genau als möglich vollzogen sind. Bisweilen kann jedoch, falls die Rechnung allenthalben mit sieben Decimalen durchgeführt ist, dieser Irrthum auf einige Zehntheile der Secunde steigen, welchen man, wenn es der Mühe werth scheint, mit leichter Mühe unter $2f$ und $2f''$ so vertheilen kann, dass die Logarithmen der Sinusse auf gleiche Weise entweder vermehrt oder vermindert werden, wodurch der Gleichung $P = \frac{r \sin 2f''}{r'' \sin 2f} = \frac{n''}{n}$ mit aller Schärfe, die die Tafeln zulassen, genügt sein wird. Sind f und f'' wenig verschieden, so reicht es hin, zwischen $2f$ und $2f''$ jenen Unterschied gleichmässig zu vertheilen.

145.

Nachdem man solchergestalt die Positionen des Himmelskörpers in der Bahn bestimmt hat, muss man eine doppelte Berechnung der Elemente sowohl aus Combination des zweiten Orts mit dem dritten beginnen, als aus Combination des ersten mit dem zweiten, zugleich mit den entsprechenden Zeitintervallen. Bevor man aber diese Operation unternimmt, bedürfen die Zeitintervalle noch einer Verbesserung, wenn man nämlich beschlossen hat, auf die Aberration nach Maassgabe der dritten Methode im Art. 118 Rücksicht zu nehmen. In diesem Falle nämlich muss man statt der wirklichen Zeiten als fingirte solche (163) setzen, welche resp. um 493ϱ, $493\varrho'$, $493\varrho''$ Secunden früher sind. Zur Berechnung der Entfernungen ϱ, ϱ', ϱ'' hat man die Formeln:

$$\varrho = \frac{R\sin(AD'-\zeta)}{\sin(\zeta - AD' + \delta)} = \frac{r\sin(AD'-\zeta)}{\sin\delta},$$

$$\varrho' = \frac{R'\sin(\delta'-z)}{\sin z} = \frac{r'\sin(\delta'-z)}{\sin\delta'},$$

$$\varrho'' = \frac{R''\sin(A''D'-\zeta'')}{\sin(\zeta''-A''D'+\delta'')} = \frac{r''\sin(A''D'-\zeta'')}{\sin\delta''}.$$

Hat man übrigens die Beobachtungen von Anfang an sogleich nach der ersten oder zweiten Methode des Art. 118 von der Aberration befreit, so muss diese Rechnung weggelassen werden, und es würde deshalb auch nicht nöthig sein, die Werthe der Entfernungen ϱ, ϱ', ϱ'' zu ermitteln, als um vielleicht zu prüfen, ob diejenigen Werthe, auf welche man vorher die Berechnung der Aberration gestützt hatte, genau genug waren. Schliesslich ist es von selbst klar, dass es dieser ganzen Rechnung auch alsdann nicht bedarf, wenn man die Aberration überhaupt vernachlässigen wollte.

146.

Die Berechnung der Elemente — welche man in dem einen Falle aus r', r'', $2f$ und der verbesserten Zwischenzeit der zweiten und dritten Beobachtung, deren Product mit der Grösse k (Art. 1) ich mit ϑ bezeichne; und im anderen Falle aus r, r', $2f''$ und dem Zeitintervall zwischen der ersten und zweiten Beobachtung, dessen Product mit $k = \vartheta''$ sein soll, anstellt — wird nach der in den Artikeln 88 bis 105 gegebenen Methode nur bis zu der dort mit y bezeichneten Grösse durchgeführt, deren Werth in der ersten Combination ich mit η, in der zweiten mit η'' bezeichnen will. Es wird daher

$$\frac{\vartheta''\eta}{\vartheta\eta''} = P', \qquad \frac{r'r'\vartheta\vartheta''}{rr''\eta\eta''\cos f\cos f'\cos f''} = Q',$$

und man sieht, dass, wenn die Werthe der Grössen P und Q, auf welche die ganze Rechnung bis jetzt gebaut war, die wahren sein sollten, $P' = P$, $Q' = Q$

herauskommen müsse. Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass, falls $P' = P$, $Q' = Q$ herauskommt, die doppelte Elementen-Rechnung, wenn sie von beiden Seiten zu Ende geführt wird, ganz gleiche Zahlen liefern müsse, durch welche also alle drei Beobachtungen genau dargestellt würden, und so der Aufgabe vollständig genügt würde. Falls aber nicht $P' = P$, $Q' = Q$ wird, so mag man $P' - P$, $Q' - Q$ für X und Y nehmen, wenn man nämlich P und Q für x, y genommen hat. Noch bequemer ist es, $\log P = x$, $\log Q = y$ zu setzen, und $\log P' - \log P = X$, $\log Q' - \log Q = Y$. Alsdann ist die Rechnung mit anderen Werthen von x, y zu wiederholen.

(164) 147.

Eigentlich würde es zwar auch hier, ebenso wie in den zehn oben abgehandelten Methoden, willkürlich sein, welche neue Werthe man für x, y in der zweiten Hypothese setzen wollte, wenn solche nur nicht den oben erklärten allgemeinen Bedingungen widersprechen. Da es jedoch offenbar ein grosser Vortheil ist, falls man sofort von etwas genaueren Werthen ausgehen kann, so würde es nicht weise sein, die zweiten Werthe gleichsam aufs Gerathewohl anzunehmen, da es in der Natur der Sache liegt, dass, wenn die ersten Werthe von P, Q nur mit kleinen Fehlern behaftet sind, sich daraus die Werthe P', Q' viel genauer darstellen lassen, wenn anders die heliocentrische Bewegung eine mässige war. Ich will deshalb stets P', Q' als zweite Werthe von P, Q nehmen, oder $\log P'$, $\log Q'$ als die zweiten Werthe für x, y, wenn die ersten Werthe durch $\log P$, $\log Q$ bezeichnet sind.

In dieser zweiten Hypothese, wo alle durch die Formeln 1—20 dargelegten Präliminar-Operationen unverändert beizubehalten sind, wird die Rechnung nun auf ganz ähnliche Weise wiederholt. Zuerst wird der Winkel ω, dann werden z, r', $\frac{n'r'}{n}$, $\frac{n'r'}{n''}$, ζ, r, ζ'', r'', f, f', f'' bestimmt. Aus der mehr oder weniger beträchtlichen Differenz zwischen den neuen und alten Werthen dieser Grössen lässt sich leicht ermessen, ob es der Mühe werth ist oder nicht, auch die Verbesserung der Zeiten wegen der Aberration von Neuem zu berechnen. Ist dies nicht der Mühe werth, so bleiben die Zeitintervalle und deshalb auch die Grössen ϑ und ϑ'' die nämlichen wie vorher. Schliesslich leitet man aus f, r', r''; f'', r, r' und den Zwischenzeiten η, η'' und hieraus neue Werthe für P', Q' ab, die gemeiniglich von den durch die erste Hypothese gelieferten viel weniger verschieden sind, als diese selbst von den ersten Werthen für P, Q. Die zweiten Werthe von X, Y werden daher viel kleiner sein, als die ersten, und die zweiten Werthe für P', Q' kann man als dritte Werthe für P, Q nehmen, und hiermit die Rechnung abermals wiederholen. Sowie also solchergestalt aus der zweiten Hypothese schon genauere Werthe resultirten als aus der ersten, so wird man solche aus der dritten noch genauer erhalten, als aus der zweiten, und man könnte dann die dritten Werthe für P', Q' als die vierten für P, Q nehmen, und dergestalt die Rechnung so oft wiederholen, bis man zu einer Hypothese gelangt, in welcher X, Y als verschwindend angenommen werden möchten. Falls aber die dritte Hypothese noch nicht als ausreichend erscheinen sollte, so wird man es vorziehen, die für P und Q in der vierten Hypothese anzunehmenden Werthe nach der in den Artikeln 120, 121 gegebenen Methode aus den drei ersten abzuleiten, wodurch man eine raschere Annäherung erhält und es selten nöthig sein wird, noch bis zu einer fünften Hypothese zu gehen.

148. (165)

Falls die aus den drei Beobachtungen abzuleitenden Elemente noch gänzlich unbekannt sind (ein Fall, dem unsere Methode vorzugsweise angepasst ist), so kann man, wie schon bemerkt, bei der ersten Hypothese für P und Q die approximirten Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$ annehmen, wo ϑ und ϑ'' einstweilen aus den unverbesserten Zeitintervallen abgeleitet werden. Drückt man deren Verhältniss zu den verbesserten Intervallen durch $\mu : 1$ und $\mu'' : 1$ aus, so hat man in der ersten Hypothese

$$X = \log\mu - \log\mu'' + \log\eta - \log\eta''$$

$$Y = \log\mu + \log\mu'' - \log\eta - \log\eta'' + \text{Comp.}\log\cos f + \text{Comp.}\log\cos f' + \text{Comp.}\log\cos f'' + 2\log r' - \log r - \log r''.$$

Die Logarithmen der Grössen μ, μ'' sind im Vergleich mit den übrigen Gliedern von keiner Bedeutung; $\log\eta$ und $\log\eta''$, die beide positiv sind, heben sich in X einigermaassen gegenseitig auf, vorzüglich wenn die Zeitintervalle fast gleich sind, woraus dann X einen kleinen, bald positiven, bald negativen Werth erhält; dagegen erwächst in Y aus den negativen Gliedern $\log\eta$ und $\log\eta''$ zwar einige Compensation der positiven Glieder Comp. $\log\cos f$, Comp. $\log\cos f'$, Comp. $\log\cos f''$, aber weniger vollständig, weil gemeiniglich die letzteren erheblich grösser sind als die ersteren. Ueber das Zeichen von $\log\frac{r'r'}{rr''}$ lässt sich im Allgemeinen nichts bestimmen.

Falls die heliocentrische Bewegung innerhalb der Beobachtungen eine mässige ist, so wird es selten nöthig sein, bis zu einer vierten Hypothese zu gehen; gemeiniglich giebt die dritte, oft schon die zweite hinreichende Genauigkeit, ja bisweilen kann man schon bei den aus der ersten sich ergebenden Zahlen stehen bleiben. Es ist dabei immer gut, die grössere oder geringere Genauigkeit zu berücksichtigen, welche die Beobachtungen besitzen; denn es würde eine undankbare Arbeit sein, bei der Rechnung eine hundert- oder tausendfach grössere Genauigkeit zu erkünsteln, als die Beobachtungen zulassen. Bei diesen Dingen wird aber das Urtheil durch häufige praktische Ausübung besser geschärft, als durch Vorschriften, und die Erfahrenen werden leicht einige Fertigkeit erlangen, es richtig zu beurtheilen, wo man stehen bleiben darf.

149.

Erst in der letzten Hypothese werden die Elemente selbst gerechnet, entweder aus f, r', r'', oder aus f'', r, r', indem man eine von beiden Rechnungen bis zu Ende durchführt, die man bei den vorigen Hypothesen nur bis zu η oder η'' zu verfolgen brauchte. Will man beide Rechnungen durchführen, so wird die Uebereinstimmung der resultirenden Zahlen eine neue
(166) Prüfung der ganzen Arbeit liefern. Dennoch empfiehlt es sich, sobald erst f, f', f'' gefunden sind, die Elemente aus der alleinigen Combination des ersten und dritten Orts abzuleiten, nämlich aus f', r, r'' und dem Zeitintervalle, und endlich zur grösseren Sicherheit der Rechnung den mittleren Ort in der Bahn nach den gefundenen Elementen abzuleiten.

Auf diese Weise werden also die Dimensionen des Kegelschnitts bekannt, nämlich Excentricität, halbe grosse Axe oder halber Parameter, die Lage des Perihels in Beziehung auf die heliocentrischen Orte C, C', C'', die mittlere Bewegung und die mittlere Anomalie für eine willkürliche Epoche (wenn nämlich die Bahn eine elliptische ist), oder die Zeit des Perihel-Durchganges (falls sie eine Hyperbel oder Parabel ist). Es erübrigt daher nur, die Lage der heliocentrischen Orte in der Bahn in Beziehung auf den aufsteigenden Knoten, die Lage dieses Knotens in Beziehung auf den Aequinoctialpunkt, sowie die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik (oder den Aequator) zu bestimmen. Dies Alles lässt sich durch Auflösung eines sphärischen Dreiecks bewerkstelligen. Es sei ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens, i die Neigung der Bahn, g und g'' die Argumente der Breite in erster und dritter Beobachtung; endlich $l - ☊ = h$, $l'' - ☊ = h''$. Wenn nun in der vierten Figur ☊ den aufsteigenden Knoten bezeichnet, so werden im Dreiecke ☊AC die Seiten sein $AD' - \zeta$, g, h, und die diesen resp. gegenüberstehenden Winkel i, $180^0 - \gamma$, u. Man hat daher

$$\sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}(g+h) = \sin \tfrac{1}{2}(AD' - \zeta) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + u)$$
$$\sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}(g+h) = \cos \tfrac{1}{2}(AD' - \zeta) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - u)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}(g-h) = \sin \tfrac{1}{2}(AD' - \zeta) \cos \tfrac{1}{2}(\gamma + u)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}(g-h) = \cos \tfrac{1}{2}(AD' - \zeta) \cos \tfrac{1}{2}(\gamma - u).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\tfrac{1}{2}(g+h)$ und $\sin\tfrac{1}{2} i$, die beiden übrigen $\tfrac{1}{2}(g-h)$ und $\cos\tfrac{1}{2} i$. Aus g wird die Lage des Perihels in Beziehung auf den aufsteigenden Knoten bekannt, aus h die Lage des Knotens in der Ecliptik. Schliesslich wird i bekannt, indem der Sinus und Cosinus zur gegenseitigen Prüfung dienen. Zu demselben Ziele kann man mit Hülfe des Dreiecks ☊$A''C''$ gelangen, wo man nur in den vorhergehenden Formeln die Buchstaben g, h, A, ζ, γ, u in g'', h'', A'', ζ'', γ'' u'' zu verwandeln braucht. Um für die ganze Arbeit noch eine andere Prüfung zu erlangen, wird es nützlich sein, die Rechnung auf beide Weise durchzuführen. Wenn sich daraus kleine Unterschiede in den Werthen von i, ☊ und der Länge des Perihels in der Bahn ergeben sollten, so kann man die mittleren Werthe annehmen. Selten aber werden diese Unterschiede bis auf $0''1$ oder $0''2$ steigen, wenn man anders alle Rechnungen streng mit sieben Decimalen geführt hat.

Hat man übrigens statt der Ecliptik den Aequator zur Grundebene gewählt, so entsteht hieraus bei der Rechnung keine andere Differenz, als dass man statt der Punkte A, A'' die Einschnitte des Aequators mit den grössten Kreisen AB, $A''B''$ nehmen muss.

150.

Ich gehe jetzt zur Erläuterung dieser Methode durch einige ausführliche Beispiele über, die zugleich aufs Deutlichste zeigen werden, wie weit ihre Anwendbarkeit ausgedehnt ist und wie bequem und rasch sie stets zum erwünschten Ziele führt*).

Das erste Beispiel soll der neue Planet Juno liefern, zu welchem Zwecke ich folgende, in Greenwich angestellte und von Maskelyne mir mitgetheilte Beobachtungen ausgewählt habe.

mittlere Zeit Greenwich.	scheinbare Rectascension.	scheinbare südliche Declination.
1804 Oct. 5. $10^h 51^m 6^s$	$357^0 10' 22'' 35$	$6^0 40' 8''$
17. 9 58 10	355 43 45, 30	8 47 25
27. 9 16 41	355 11 10, 95	10 2 28

Aus den Sonnentafeln findet man für dieselben Zeiten:

	Länge der Sonne vom scheinbaren Aequinox.	Nutation.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.	scheinbare Schiefe der Ecliptik.
Oct. 5	$192^0 28' 53'' 72$	$+15'' 43$	0,998 8839	$-0'' 49$	$23^0 27' 59'' 48$
17	204 20 21, 54	+15, 51	0,995 3968	+ 0, 79	59, 26
27	214 16 52, 21	+15, 60	0,992 8340	−0, 15	59, 06

Ich will bei Führung der Rechnung so verfahren, als ob die Bahn noch gänzlich unbekannt wäre. Man kann daher die Orte der Juno von der Parallaxe

*) Es ist nicht richtig, eine Methode mehr oder weniger genau, als eine andere zu nennen. Denn man kann nur von derjenigen Methode sagen, dass sie die Aufgabe gelöst habe, durch welche man in den Stand gesetzt ist, jeden beliebigen Grad der Genauigkeit zu erreichen. Die eine Methode kann daher der anderen nur in dem Betracht den Rang ablaufen, dass derselbe Grad der Genauigkeit durch die eine schnell und mit minderer Arbeit, durch die andere langsamer und mit grösserer Mühe erreicht wird.

nicht befreien, sondern muss diese auf die Orte der Erde übertragen. Zuerst reducire ich daher die beobachteten Orte vom Aequator auf die Ecliptik unter Anwendung der scheinbaren Schiefe, woraus hervorgeht:

	scheinbare Länge der Juno.	scheinbare Breite der Juno.
Oct. 5	354° 44′ 54″ 27	— 4° 59′ 31″ 59
17	352 34 44, 51	— 6 21 56, 25
27	351 34 51, 57	— 7 17 52, 70

Mit dieser Rechnung verbinde ich sogleich die Bestimmung der Länge (168) und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes in den drei Beobachtungen. Die Rectascension kommt zwar mit der Rectascension der Juno überein (weil die Beobachtungen im Meridiane selbst angestellt sind), die Declination ist aber gleich der Polhöhe = 51° 28′ 39″. Man erhält so:

	Länge des Zeniths.	Breite.
Oct. 5	24° 29′	46° 53′
17	23 25	47 24
27	23 1	47 36

Jetzt werden nach Anleitung der Vorschriften im Art. 72 die fingirten Orte der Erde in der Ebene der Ecliptik berechnet, an welchen der Himmelskörper ebenso erschienen sein würde, als an den wahren Orten der Beobachtungen. Auf diese Weise bekommt man, wenn die mittlere Sonnenparallaxe = 8″,6 gesetzt wird:

	Reduction der Länge.	Reduction der Distanz.	Reduction der Zeit.
Oct. 5	— 22″ 39	+ 0,000 3856	— 0ˢ 19
17	— 27, 21	+ 0,000 2329	— 0, 12
27	— 35, 82	+ 0,000 2085	— 0, 12

Die Reduction der Zeit ist nur deshalb beigefügt, um zu zeigen, dass sie überhaupt unmerklich ist.

Endlich müssen alle Längen, sowohl die des Planeten als die der Erde, auf das mittlere Frühlings-Aequinox für irgend eine Epoche, wozu ich den Anfang des Jahres 1805 wähle, reducirt werden. Nach Einführung der Nutation muss daher auch noch die Präcession hinzugefügt werden, welche für die drei Beobachtungen resp. ist: $11''87$, $10''23$, $8''86$, so dass man für die erste Beobachtung addiren muss: $-3''56$, für die zweite: $-5''28$, für die dritte: $-6''74$.

Schliesslich sind Längen und Breiten der Juno von der Fixstern-Aberration zu befreien. So findet man durch die bekannten Regeln, dass man von den Längen resp. abziehen muss: $19''12$, $17''11$, $14''82$, dass man aber zu den Breiten addiren muss: $0''53$, $1''18$, $1''75$, eine Addition, wodurch die absoluten Grössen eine Verminderung erleiden, weil die südlichen Breiten als negative angesehen werden.

(169)

151.

Nach gehöriger Anbringung aller dieser Reductionen, stehen die wahren Daten der Aufgabe, wie folgt:

Beobachtungszeiten auf den Pariser Meridian reducirt . .	Oct. 5,458 644	17,421 885	27,393 077
Längen der Juno α, α', α'' . . .	$354^\circ 44' 31'' 60$	$352^\circ 34' 22'' 12$	$351^\circ 34' 30'' 01$
Breiten β, β', β''	—4 59 31,06	—6 21 55,07	—7 17 50,95
Längen der Erde l, l', l''	12 28 27,76	24 19 49,05	34 16 9,65
Log. der Abstände R, R', R''	9,999 6826	9,998 0979	9,996 9678

Hieraus geben die Rechnungen nach Art. 136 und 137 folgende Zahlen:

γ, γ', γ''	$196^\circ 0' 8'' 36$	$191^\circ 58' 0'' 33$	$190^\circ 41' 40'' 17$
δ, δ', δ''	18 23 59,20	32 19 24,93	43 11 42,05
Die Logarithmen der Sinusse .	9,499 1995	9,728 1105	9,835 3631
$A'D$, AD', AD''	232 6 26,44	213 12 29,82	209 43 7,47
$A''D$, $A''D'$, $A'D''$	241 51 15,22	234 27 0,90	221 13 57,87
ε, ε', ε''	2 19 34,00	7 13 37,70	4 55 46,19
Die Logarithmen der Sinusse .	8,608 3885	9,099 6915	8,934 1440
$\log \sin \frac{1}{2}\varepsilon'$		8,799 5259	
$\log \cos \frac{1}{2}\varepsilon'$		9,999 1357	

Ferner hat man nach Art. 138:

$\log \operatorname{tang} \beta$	8,941 2494 n	$\log \operatorname{tang} \beta''$	9,107 4080 n
$\log \sin(\alpha''-l')$	9,733 2391 n	$\log \sin(\alpha-l')$	9,693 5181 n
$\log \cos(\alpha''-l')$	9,924 7904	$\log \cos(\alpha-l')$	9,939 3180

Hieraus

$\log(\operatorname{tang}\beta \cos(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta'' \cos(\alpha-l')) = \log T \sin t$ ... 8,578 6513

$\log \sin(\alpha''-\alpha) = \log T \cos t$ ... 8,742 3191 n

Hieraus $t = 145^0\,32'\,57''\,78$ $\qquad \log T$ ... 8,826 0683

$t+\gamma' = 337\;\;30\;\;58,11$ $\qquad \log \sin(t+\gamma')$ ... 9,582 5441 n

Endlich

$\log(\operatorname{tang}\beta \sin(\alpha''-l') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\alpha-l')) = \log S$ ... 8,203 3319 n

$\log T \sin(t+\gamma')$ ... 8,408 6124 n

woraus $\log \operatorname{tang}(\delta'-\sigma)$ ... 9,794 7195

$\delta'-\sigma = 31^0\,56'\,11''\,81$; also $\sigma = 0^0\,23'\,13''\,12$.

Nach Artikel 140 wird

$A''D'-\delta''$	$= 191^0\,15'\,18''\,85$	$\log\sin$ ... 9,290 4352 n	$\log\cos$ ... 9,991 5661 n	(170)
$AD'-\delta$	$= 194\;\;48\;\;30,62$	— ... 9,407 5427 n	— ... 9,985 3301 n	
$A''D-\delta''$	$= 198\;\;39\;\;33,17$	— ... 9,505 0667 n		
$A'D-\delta'+\sigma$	$= 200\;\;10\;\;14,63$	— ... 9,537 5909 n		
$AD''-\delta$	$= 191\;\;19\;\;8,27$	— ... 9,292 8554 n		
$A'D''-\delta'+\sigma$	$= 189\;\;17\;\;46,06$	— ... 9,208 2723 n.		

Daraus folgt

$$\log a = 9{,}549\,4437, \quad a = +0{,}354\,3592$$
$$\log b = 9{,}861\,3533.$$

Die Formel 13 würde $\log b = 9{,}861\,3531$ geben, aber ich ziehe ersteren Werth vor, weil $\sin(A'D-\delta'+\sigma)$ grösser ist als $\sin(A'D''-\delta'+\sigma)$.

Ferner wird nach Art. 141

$3 \log R' \sin \delta'$ ... 9,178 6252

$\log 2$ ... 0,301 0300

$\log \sin \sigma$ ... 7,829 5601

7,309 2153 und daher $\log c = 2{,}690\,7847$.

$\log b$ ... 9,861 3533

$\log \cos \sigma$ ... 9,999 9901

9,861 3632

woraus $\frac{b}{\cos\sigma} = 0{,}726\,7135$. Daraus erhält man $d = -1{,}362\,5052$, $\log e = 8{,}392\,9518\,n$. Schliesslich geben die Formeln des Art. 143:

$$\begin{aligned}
&\log \varkappa \ldots\ldots 0{,}091\,3394\,n\\
&\log \varkappa'' \ldots\ldots 0{,}541\,8957\,n\\
&\log \lambda \ldots\ldots 0{,}486\,4480\,n\\
&\log \lambda'' \ldots\ldots 0{,}159\,2352\,n.
\end{aligned}$$

152.

Damit sind die Präliminar-Rechnungen erledigt und ich gehe zur ersten Hypothese über. Der (unverbesserte) Zeitraum zwischen der zweiten und dritten Beobachtung beträgt 9,971 192 Tage, zwischen der ersten und zweiten 11,963 241 Tage. Die Logarithmen dieser Zahlen sind 0,998 7471 und 1,077 8489, woraus $\log\vartheta = 9{,}234\,3285$, $\log\vartheta'' = 9{,}313\,4303$. Ich setze daher zur ersten Hypothese

$$\begin{aligned}
x &= \log P = 0{,}079\,1018\\
y &= \log Q = 8{,}547\,7588.
\end{aligned}$$

(171) Hieraus wird

$$P = 1{,}199\,7804,\quad P+a = 1{,}554\,1396,\quad P+d = -0{,}162\,7248;$$

$\log e \ldots\ldots 8{,}392\,9518\,n$
$\log(P+a) \ldots\ldots 0{,}191\,4900$
$\mathrm{C.}\log(P+d) \ldots 0{,}788\,5463\,n$

$\log\mathrm{tang}\,\omega \ldots\ldots 9{,}372\,9881$, woraus $\omega = +13^\circ\,16'\,51''89$, $\omega+\sigma = +13^\circ\,40'\,5''01$.

$\log Q \ldots\ldots 8{,}547\,7588$
$\log c \ldots\ldots 2{,}690\,7847$
$\log\sin\omega \ldots\ldots 9{,}361\,2147$

$\log Qc\sin\omega \ldots 0{,}599\,7582$.

Der Gleichung $Qc\sin\omega\sin z^4 = \sin(z - 13^\circ\,40'\,5''\,01)$ lässt sich durch wenige Versuche Genüge thun mit einem Werthe von $z = 14^\circ\,35'\,4''\,90$, woraus $\log\sin z = 9{,}401\,0744$, $\log r' = 0{,}325\,1340$. Jene Gleichung lässt ausser dieser Auflösung noch drei andere zu, nämlich

$$z = 32^\circ\ 2'\ 28''$$
$$z = 137\ 27\ 59$$
$$z = 193\ \ 4\ 18.$$

Die dritte muss man verwerfen, weil $\sin z$ dadurch negativ herauskommt; die zweite weil z grösser wird als δ'; die erste entspricht der Annäherung an die Erdbahn, worüber im Art. 142 gesprochen ist.

Ferner hat man nach Art. 143:

$\log \frac{R' \sin \delta'}{b}$ 9,864 8551
$\log (P + a)$ 0,191 4900
Comp. $\log \sin (z - \sigma)$ .. 0,610 3578

$\log \frac{n' r'}{n}$ 0,666 7029
$\log P$ 0,079 1018

$\log \frac{n' r'}{n''}$ 0,587 6011

$$z + A'D - \delta' = z + 199^\circ\ 47'\ 1''\ 51 = 214^\circ\ 22'\ 6''\ 41; \quad \log \sin = 9{,}751\,6736\, n$$
$$z + A'D'' - \delta' = z + 188\ 54\ 32,94 = 203\ 29\ 37,84; \quad \log \sin = 9{,}600\,5923\, n.$$

Hieraus folgt $\log p = 9{,}927\,0735\, n$; $\log p'' = 0{,}022\,6459\, n$, und sodann $\log q = 0{,}293\,0977\, n$; $\log q'' = 0{,}258\,0086\, n$, woraus:

$$\zeta = 203^\circ\ 17'\ 31''\ 22; \quad \log r = 0{,}330\,0178$$
$$\zeta'' = 210\ 10\ 58,88; \quad \log r'' = 0{,}321\,2819.$$

Endlich erhält man vermittelst Art. 144 (172)

$$\tfrac{1}{2}(u'' + u) = 205^\circ\ 18'\ 10''\ 53$$
$$\tfrac{1}{2}(u'' - u) = -3\ 14\ 2,02$$
$$f' = 3\ 48\ 14,66$$

$\log \sin 2f'$	9,121 8791	$\log \sin 2f'$	9,121 8791
$\log r$	0,330 0178	$\log r''$	0,321 2819
Comp. $\log \frac{n' r'}{n}$ ...	9,333 2971	Comp. $\log \frac{n' r'}{n''}$ ...	9,412 3989
$\log \sin 2f$	8,785 1940	$\log \sin 2f''$	8,855 5599
$2f = 3^\circ\ 29'\ 46''\ 03$		$2f'' = 4^\circ\ 6'\ 43''\ 28.$	

Die Summe $2f + 2f''$ ist hier von $2f'$ nur um $0''\ 01$ verschieden.

Um nun die Zeiten für Aberration zu verbessern, müssen die Distanzen ϱ, ϱ', ϱ'' nach den Formeln des Art. 145 berechnet, und muss sodann mit diesen Distanzen die Zeit von 493 Secunden oder 0,005 706 Tagen multiplicirt werden. Hier die Rechnung:

$\log r$	0,330 02	$\log r'$	0,325 13	$\log r''$	0,321 28
$\log\sin(AD'—\zeta)$	9,236 06	$\log\sin(\delta'—z)$	9,483 84	$\log\sin(A''D'—\zeta'')$	9,613 84
Comp. $\log\sin\delta$	0,500 80	C. $\log\sin\delta'$	0,271 89	Comp. $\log\sin\delta''$	0,164 64
$\log\varrho$	0,066 88	$\log\varrho'$	0,080 86	$\log\varrho''$	0,099 76
log const.	7,756 33		7,756 33		7,756 33
log der Reduct.	7,823 21		7,837 19		7,856 09
Reduction =	0,006 656		0,006 874		0,007 179

Der Beobachtungen	verbesserte Zeiten	Intervalle	Logarithmen
I.	Oct. 5,451 988		
		11^d 963 023	1,077 8409
II.	17,415 011		
		9,970 887	0,998 7339.
III.	27,385 898		

Es werden mithin die verbesserten Logarithmen der Grössen ϑ, ϑ'' 9,234 3153 und 9,313 4223. Fängt man jetzt die Bestimmung der Elemente aus f, r', r'', ϑ an, so kommt $\log\eta = 0{,}000\,2285$; ebenso aus f'', r, r', ϑ'' wird $\log\eta'' =$ 0,000 3191. Diese im ersten Buche, Abschnitt III, weitläuftig erklärte Berechnung herzusetzen, will ich unterlassen.

Endlich hat man nach Art. 146:

(173)

$\log\vartheta''$	9,313 4223	$2\log r'$	0,650 2680
Comp. $\log\vartheta$	0,765 6847	Comp. $\log r r''$	9,348 7003
$\log\eta$	0,000 2285	$\log\vartheta\vartheta''$	8,547 7376
Comp. $\log\eta''$	9,999 6809	Comp. $\log\eta\eta''$	9,999 4524
$\log P'$	0,079 0164.	Comp. $\log\cos f$	0,000 2022
		Comp. $\log\cos f'$	0,000 9579
		Comp. $\log\cos f''$	0,000 2797
		$\log Q'$	8,547 5981.

Aus der ersten Hypothese resultirt daher $X = —0{,}000\,0854$, $Y = —0{,}000\,1607$.

153.

In zweiter Hypothese lege ich für P, Q diejenigen Werthe zum Grunde, welche in der ersten für P', Q' gefunden waren, und setze also

$$x = \log P = 0{,}079\,0164$$
$$y = \log Q = 8{,}547\,5981.$$

Da die Rechnung hier ganz ebenso wie in erster Hypothese geführt wird, so setze ich nur die Hauptmomente her:

ω	$13^\circ\,15'\,38''\,13$	ζ''	$210^\circ\;\;9'\,24''\,98$
$\omega+\sigma$	$13\;\;38\;\;51,25$	$\log r$	$0{,}330\,7676$
$\log Qc\sin\omega$	$0{,}598\,9389$	$\log r''$	$0{,}322\,2280$
z	$14\;\;33\;\;19,00$	$\frac{1}{2}(u''+u)$	$205\;\;22\;\;15,58$
$\log r'$	$0{,}325\,9918$	$\frac{1}{2}(u''-u)$	$-3\;\;14\;\;4,79$
$\log\frac{n'r'}{n}$	$0{,}667\,5193$	$2f'$	$7\;\;34\;\;53,32$
		$2f$	$3\;\;29\;\;0,18$
$\log\frac{n'r'}{n''}$	$0{,}588\,5029$	$2f''$	$4\;\;5\;\;53,12$
ζ	$203\;\;16\;\;38,16$		

Die Reduction der Zeiten für Aberration von Neuem zu berechnen würde nicht der Mühe werth sein, da sie kaum um eine Secunde von denen abweichen würden, welche in erster Hypothese gefunden.

Die fernere Rechnung giebt $\log\eta = 0{,}000\,2270$, $\log\eta'' = 0{,}000\,3173$, woraus man erhält

$$\log P' = 0{,}079\,0167 \qquad X = +\,0{,}000\,0003$$
$$\log Q' = 8{,}547\,6110 \qquad Y = +\,0{,}000\,0129.$$

Hieraus sieht man, um wie viel genauer die zweite Hypothese, als die erste ist.

154. (174)

Um nichts zu wünschen übrig zu lassen, will ich noch die dritte Hypothese ansetzen, wobei ich wiederum die in zweiter Hypothese gefundenen Werthe für P', Q' als Werthe für P, Q nehme. Setzt man daher

$$x = \log P = 0{,}079\,0167$$
$$y = \log Q = 8{,}547\,6110,$$

so sind die Hauptmomente der Rechnung folgende:

ω . . . . $13^0\,15'\,38''\,39$	ζ'' . . . . $210^0\;\;8'\,25''\,65$
$\omega+\sigma$ . . . . $13\;\;38\;\;51,51$	$\log r$ . . . . $0{,}330\,7640$
$\log Q\,c\sin\omega$ . . . . . . $0{,}598\,9542$	$\log r''$ . . . . $0{,}322\,2239$
z . . . . $14\;\;33\;\;19,50$	$\frac{1}{2}(u''+u)$ . . . . $205\;\;22\;\;14,57$
$\log r'$ . . . . $0{,}325\,9878$	$\frac{1}{2}(u''-u)$ . . . . $-3\;\;14\;\;\;4,78$
$\log\frac{n'r'}{n}$ . . . . $0{,}667\,5154$	$2f'$ . . . . $7\;\;34\;\;53,73$
	$2f$ . . . . $3\;\;29\;\;\;0,39$
$\log\frac{n'r'}{n''}$ . . . . $0{,}588\,4987$	$2f''$ . . . . $4\;\;\;5\;\;53,34$
ζ . . . . $203\;\;16\;\;38,41$	

Alle diese Zahlen weichen von den in zweiter Hypothese gefundenen so wenig ab, dass man sicher annehmen kann, dass die dritte Hypothese keiner Verbesserung weiter bedürfe*). Man kann daher jetzt zur Bestimmung der Elemente selbst vorschreiten aus $2f'$, r, r'', ϑ', welche hierher abzuschreiben ich unterlasse, weil dieselbe schon oben Art. 97 als Beispiel ausführlich vorgetragen ist. Es bleibt daher nur übrig, die Lage der Bahnebene nach Anleitung des Art. 149 zu berechnen, und die Epoche auf den Anfang des Jahres 1805 zu übertragen. Diese Berechnung stützt sich auf folgende Zahlen:

$$AD' - \zeta = \;\;9^0\,55'\,51''\,41$$
$$\tfrac{1}{2}(\gamma+u) = 202\;\;18\;\;13{,}855$$
$$\tfrac{1}{2}(\gamma-u) = -6\;\;18\;\;\;5{,}495,$$

woraus man ableitet:

$$\tfrac{1}{2}(g+h) = 196^0\,43'\,14''\,62$$
$$\tfrac{1}{2}(g-h) = -4\;\;37\;\;24{,}41$$
$$\tfrac{1}{2}i = \;\;6\;\;33\;\;22{,}05.$$

(175) Es wird daher $h = 201^0\,20'\,39''\,03$ und deshalb $\Omega = l - h = 171^0\,7'\,48''\,73$; ferner $g = 192^0\,5'\,50''\,21$, und mithin, da die wahre Anomalie für die erste

*) Wenn die Rechnung ebenso wie in vorstehenden Hypothesen zu Ende geführt würde, so würde $X = 0$, und $Y = +0{,}000\,0003$ herauskommen; ein Werth, der als verschwindend anzusehen ist, und kaum über die der letzten Decimale stets anklebende Unsicherheit hinausgeht.

Beobachtung im Art. 97 zu $310^{\circ} 55' 29'' 64$ gefunden war, ist der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Bahn $= 241^{\circ} 10' 20'' 57$, die Länge des Perihels $= 52^{\circ} 18' 9'' 30$; endlich die Neigung der Bahn $= 13^{\circ} 6' 44'' 10$. Will man zur nämlichen Rechnung lieber vom dritten Orte ausgehen, so ist

$$\begin{aligned} A''D'-\zeta'' &= 24^{\circ}\, 18'\, 35''\, 25 \\ \tfrac{1}{2}(\gamma''+u'') &= 196\;\; 24\;\; 54,98 \\ \tfrac{1}{2}(\gamma''-u'') &= -5\;\; 43\;\; 14,81, \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(g''+h'') &= 211^{\circ}\, 24'\, 32''\, 45 \\ \tfrac{1}{2}(g''-h'') &= -11\;\; 43\;\; 48,48 \\ \tfrac{1}{2}i &= 6\;\; 33\;\; 22,05, \end{aligned}$$

und hieraus die Länge des aufsteigenden Knotens $= l''-h'' = 171^{\circ} 7' 48'' 72$, die Länge des Perihels $= 52^{\circ} 18' 9'' 30$, Neigung der Bahn $= 13^{\circ} 6' 44'' 10$, ganz wie oben.

Der Zeitraum zwischen der letzten Beobachtung bis zum Beginn des Jahres 1805 beträgt 64,614 102 Tage und ihm entspricht eine mittlere heliocentrische Bewegung von $53293'' 66 = 14^{\circ} 48' 13'' 66$. Hiernach wird die Epoche der mittleren Anomalie für den Anfang des Jahres 1805 und den Pariser Meridian $= 349^{\circ} 34' 12'' 38$, und die Epoche der mittleren Länge $= 41^{\circ} 52' 21'' 68$.

155.

Um die Genauigkeit der Elemente klar zu stellen, will ich aus ihnen den mittleren Ort berechnen. Für October 17,415 011 findet sich die mittlere Anomalie $= 332^{\circ} 28' 54'' 77$, hieraus die wahre $315^{\circ} 1' 23'' 02$ und $\log r' = 0{,}325\,9877$ (vergl. die Beispiele im Art. 13 und 14). Letztere müsste der wahren Anomalie in erster Beobachtung vermehrt um den Winkel $2f''$ gleich sein, oder der wahren Anomalie in dritter Beobachtung vermindert um den Winkel $2f$, d. h. $= 315^{\circ} 1' 22'' 98$; der Logarithmus des Radius Vector aber $= 0{,}325\,9878$; Unterschiede, die als Null zu erachten sind. Setzt man die Berechnung für die mittlere Beobachtung bis zum geocentrischen Orte fort, so erhält man Zahlen, die von dieser Beobachtung nur um wenige Hunderttheile der Secunde abweichen (Art. 63); Unterschiede, die von den unvermeidlichen Tafelfehlern gleichsam absorbirt werden.

Das vorangehende Beispiel habe ich deshalb mit grösster Genauigkeit behandelt, damit man sehe, wie leicht durch unsere Methode eine möglichst scharfe Auflösung erreicht wird. In der Praxis wird es aber selten nöthig sein, diesen Typus mit gleicher Aengstlichkeit nachzuahmen. Gemeiniglich wird es
(176) genügen, allenthalben sechs Decimalen anzuwenden, und in unserem Beispiele würde schon die zweite Hypothese keine geringere und die erste eine völlig ausreichende Genauigkeit geliefert haben. Ich glaube, dass es dem Leser angenehm sein werde, eine Vergleichung der aus der dritten Hypothese abgeleiteten Elemente mit denen vornehmen zu können, welche die zweite oder auch die erste Hypothese geliefert haben würden. Diese drei Elementen-Systeme legt folgendes Schema dar:

	Aus Hypothese III.	Aus Hypothese II.	Aus Hypothese I.
Epoche d. mittleren Länge 1805	$41^\circ 52' 21'' 68$	$41^\circ 52' 18'' 40$	$42^\circ 12' 37'' 83$
Mittlere tägliche Bewegung	$824'' 7989$	$824'' 7983$	$823'' 5025$
Perihel	52 18 9, 30	52 18 6, 66	52 41 9, 81
φ	14 12 1, 87	14 11 59, 94	14 24 27, 49
Log. der grossen Halbaxe	0,422 4389	0,422 4392	0,422 8944
aufsteigender Knoten	171 7 48, 73	171 7 49, 15	171 5 48, 86
Neigung der Bahn	13 6 44, 10	13 6 45, 12	13 2 37, 50

Durch Berechnung des heliocentrischen Ortes in der Bahn für die mittlere Beobachtung nach dem zweiten Elementen-Systeme wird der Fehler im Logarithmus des Radius Vector $= 0$, der Fehler der Länge in der Bahn $= 0'' 03$ gefunden. Dieser Ort aber aus dem Systeme nach erster Hypothese abgeleitet giebt Irrthum im Logarithmus des Radius Vector $= 0{,}000\,0002$, Fehler der Länge in der Bahn $= 1'' 31$. Durch Fortsetzung der Rechnung bis zum geocentrischen Orte aber findet sich:

	Aus Hypothese II.	Aus Hypothese I.
geocentrische Länge	$352^0\,34'\,22''26$	$352^0\,34'\,19''97$
Fehler	0,14	2,15
geocentrische Breite	6 21 55,06	6 21 54,47
Fehler	0,01	0,60

156. (177)

Das zweite Beispiel will ich von der Pallas hernehmen, deren nachfolgende, zu Mailand angestellte Beobachtungen ich der von Zach'schen Monatlichen Correspondenz, Band 14, Seite 90, entlehne.

Mailänder mittlere Zeit.	Scheinbare Rectascension.	Scheinbare Declination.
1805 Nov. 5. $14^h\,14^m\;4^s$	$78^0\,20'\,37''8$	$27^0\,16'\,57''7$ südlich
Dec. 6. 11 51 27	73 8 48,8	32 52 44,3 „
1806 Jan. 15. 8 50 36	67 14 11,1	28 38 8,1 „

An Stelle der Ecliptik will ich hier den Aequator zur Grundebene wählen, und die Rechnung so durchführen, als ob die Bahn noch gänzlich unbekannt wäre. Zunächst hat man aus den Sonnentafeln für die angesetzten Zeiten:

	Länge der Sonne vom mittleren Aequinox.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.
Nov. 5	$223^0\,14'\;7''61$	0,9904311	$+\,0''59$
Dec. 6	254 28 42,59	0,9846753	$+\,0,12$
Jan. 15	295 5 47,62	0,9838153	$-\,0,19$

Die Längen der Sonne reducire ich unter Anbringung der Präcession von resp. $+7''59$, $+3''36$, $-2''11$ auf den Anfang des Jahres 1806 und bringe solche dann mit Anwendung der mittleren Schiefe $= 23^0\,27'\,53''53$ und unter gehöriger Rücksicht auf die Breiten, auf Rectascensionen und Declinationen. Ich finde so:

	Rectascension der Sonne.	Declination der Sonne.
Nov. 5	220° 46′ 44″65	15° 49′ 43″94 südlich
Dec. 6	253 9 23,26	22 33 39,45 „
Jan. 15	297 2 51,11	21 8 12,98 „

Diese Positionen werden auf den Mittelpunkt der Erde bezogen und müssen deshalb durch Anbringung der Parallaxe an den Beobachtungsort reducirt werden, da man die Positionen des Planeten von der Parallaxe nicht befreien kann. Die bei dieser Rechnung anzuwendenden Rectascensionen des Zeniths kommen mit den Rectascensionen des Planeten überein (weil die Beobachtungen im Meridiane selbst angestellt sind), die Declination ist aber allenthalben die Polhöhe = 45° 28′. Damit ergeben sich folgende Zahlen:

(178)

	Rectascension der Erde.	Declination der Erde.	Logarithmus der Distanz v. d. Sonne.
Nov. 5	40° 46′ 48″51	15 49′ 48″59 nördlich	9,9958375
Dec. 6	73 9 23,26	22 33 42,83 „	9,9933099
Jan. 15	117 2 46,09	21 8 17,29 „	9,9929259

Die beobachteten Orte der Pallas müssen von der Nutation und der Aberration der Fixsterne befreit werden, und sind dann mit Anbringung der Präcession auf den Anfang des Jahres 1806 zu reduciren. Unter diesen Titeln müssen daher folgende Verbesserungen an die Beobachtungen angebracht werden:

	Beobachtung I.		Beobachtung II.		Beobachtung III.	
	Rectascension.	Declination.	Rectascension.	Declination.	Rectascension.	Declination.
Nutation	—12″86	— 3″08	—13″68	—3″42	—13″06	—3″75
Aberration	—18,13	— 9,89	—21,51	—1,63	—15,60	+ 9,76
Präcession	+ 5,43	+ 0,62	+ 2,55	—0,39	— 1,51	—0,33
Summe	—25,56	—12,35	—32,64	—4,66	—30,17	+ 5,68

Hieraus gehen nachfolgende Positionen der Pallas hervor, auf welche die Rechnung zu stützen:

Mittlere Pariser Zeit.	Rectascension.	Declination.
Nov. 5,574047	78° 20′ 12″24	—27° 17′ 9″05
36,475035	73 8 16,16	—32 52 48,96
76,349444	67 13 40,93	—28 38 2,42

157.

Zuerst bestimme ich nun die Lage der grössten Kreise, welche von den heliocentrischen Orten der Erde nach den geocentrischen Orten des Planeten gezogen werden. Die Einschnitte dieser Kreise mit dem Aequator, oder (wenn man das lieber will) ihre aufsteigenden Knoten sollen die Buchstaben 𝔄, 𝔄′, 𝔄″ zugeschrieben erhalten, und die Abstände der Punkte B, B', B'' von diesen Punkten bezeichne ich mit $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$. Beim grösseren Theile der Operationen muss für A, A', A'', nun 𝔄, 𝔄′, 𝔄″, und für δ, δ', δ'' nun $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$ substituirt werden; wo aber A, A', A'', δ, δ', δ'' beizubehalten sind, wird der aufmerksame Leser auch ohne meine Erinnerung leicht einsehen.

Die Rechnung ergiebt (179)

Rectascension der Punkte 𝔄, 𝔄′, 𝔄″	233° 54′ 57″10	253° 8′ 57″01	276° 40′ 25″87
γ, γ', γ''	51 17 15,74	90 1 3,19	131 59 58,03
$\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$	215 58 49,27	212 52 48,96	220 9 12,96
δ, δ', δ''	56 26 34,19	55 26 31,79	69 10 57,84
𝔄′D, 𝔄D', 𝔄D''	23 54 52,13	30 18 3,25	29 8 43,32
𝔄″D, 𝔄″D', 𝔄′D''	33 3 26,35	31 59 21,14	22 20 6,91
ε, ε', ε''	47 1 54,69	89 34 57,17	42 33 41,17
Logarithmen der Sinus	9,8643525	9,9999885	9,8301910
$\log\sin\frac{1}{2}\varepsilon'$		9,8478971	
$\log\cos\frac{1}{2}\varepsilon'$		9,8510614	

In der Berechnung nach Art. 138 wird für l' die Rectascension des Punktes $\mathfrak{A}'$ angewandt. So findet sich

$$\log T \sin t \ldots . \; 8{,}486\,8236\, n$$
$$\log T \cos t \ldots . \; 9{,}284\,8162\, n.$$

Hieraus $t = 189^0\, 2'\, 48''83$, $\log T = 9{,}290\,2527$; ferner $t + \gamma' = 279^0\, 3'\, 52''02$,

$$\log S \ldots\ldots\ldots\ldots \; 9{,}011\,0566\, n$$
$$\log T \sin (t + \gamma') \ldots \; 9{,}284\,7950\, n,$$

woraus $\Delta' - \sigma = 208^0\, 1'\, 55''64$ und $\sigma = 4^0\, 50'\, 53''32$.

In den Formeln des Art. 140 muss man $\sin\delta$, $\sin\delta'$, $\sin\delta''$ für a, b und $\frac{b}{a}$ beibehalten, und ebenso in den Formeln des Art. 142. Behuf dieser Rechnungen hat man dann:

$\mathfrak{A}''D' - \Delta''$	$= 171^0\, 50'\, 8''18$	$\log\sin \ldots 9{,}152\,3306$	$\log\cos \ldots 9{,}995\,5759\, n$
$\mathfrak{A}D' - \Delta$	$= 174\;\; 19\;\; 13{,}98$	$\ldots\ldots\ldots 8{,}995\,4722$	$\ldots\ldots\ldots 9{,}997\,8629\, n$
$\mathfrak{A}''D - \Delta''$	$= 172\;\; 54\;\; 13{,}39$	$\ldots\ldots\ldots 9{,}091\,7972$	
$\mathfrak{A}'D - \Delta' + \sigma$	$= 175\;\; 52\;\; 56{,}49$	$\ldots\ldots\ldots 8{,}856\,1520$	
$\mathfrak{A}D'' - \Delta$	$= 173\;\; 9\;\; 54{,}05$	$\ldots\ldots\ldots 9{,}075\,5844$	
$\mathfrak{A}'D'' - \Delta' + \sigma$	$= 174\;\; 18\;\; 11{,}27$	$\ldots\ldots\ldots 8{,}996\,7978.$	

Hieraus erhält man:

$$\log \varkappa = 0{,}921\,1850, \quad \log \lambda = 0{,}081\,2057\, n$$
$$\log \varkappa'' = 0{,}811\,2762, \quad \log \lambda'' = 0{,}031\,9691\, n$$
$$\log a = 0{,}109\,9088, \quad a = +\,1{,}287\,9790$$
$$\log b = 0{,}181\,0404$$

$\log \frac{b}{a} = 0{,}071\,1314$, woraus $\log b = 0{,}181\,0402$ wird. Unter
(180) diesen beiden nahezu gleichen Werthen für b nehme ich den mittlern $\log b = 0{,}181\,0403$. Schliesslich entsteht

$$\log c = 1{,}045\,0295$$
$$d = +\,0{,}448\,9906$$
$$\log e = 9{,}210\,2894,$$

womit die präliminaren Rechnungen beendigt sind.

Der Zeitunterschied zwischen der zweiten und dritten Beobachtung beträgt $= 39{,}874\,409$ Tage, zwischen der ersten und zweiten $= 30{,}900\,961$

Tage. Hieraus wird $\log\vartheta = 9{,}836\,2757$, $\log\vartheta'' = 9{,}725\,5533$. Ich setze daher zur ersten Hypothese

$$x = \log P = 9{,}889\,2776$$
$$y = \log Q = 9{,}561\,8290.$$

Die Hauptmomente der Rechnung sind dann:

$$\omega + \sigma = 20^{0}\,8'\,46''72$$
$$\log Qc \sin\omega = 0{,}028\,2028.$$

Hiermit wird der wahre Werth von $z = 21^{0}\,11'\,24''30$ und $\log r' = 0{,}350\,9379$. Die drei übrigen Werthe von z, die der Gleichung IV im Art. 141 Genüge leisten, werden in diesem Falle:

$$z = 63^{0}\,41'\,12''$$
$$z = 101\;\;12\;\;58$$
$$z = 199\;\;24\;\;\;7,$$

von denen der erste als Annäherung an die Erdbahn anzusehen ist, dessen Verschiedenheit davon aber hier wegen der zu grossen Zwischenzeit bei weitem beträchtlicher ist, als im vorhergehenden Beispiele. Die fernere Rechnung ergiebt folgende Zahlen:

ζ	$195^{0}\,12'\;\;2''48$
ζ''	196 57 50,78
$\log r$	0,364 7022
$\log r''$	0,335 5758
$\frac{1}{2}(u''+u)$	266 47 50,47
$\frac{1}{2}(u''-u)$	—43 39 5,33
$2f'$	22 32 40,86
$2f$	13 5 41,17
$2f''$	9 27 0,05.

Die Differenz zwischen $2f'$ und $2f+2f''$, welche hier $0''36$ beträgt, wird unter $2f$ und $2f''$ so vertheilt, dass man setzt $2f = 13^{0}\,5'\,40''96$, $2f'' = 9^{0}\,26'\,59''90$.

Nun muss man die Zeiten wegen Aberration verbessern, wo in den (181)
Formeln des Art. 145 zu setzen ist

$$AD' - \zeta = \mathfrak{A}D' - \varDelta + \delta - \zeta;\quad A''D' - \zeta'' = \mathfrak{A}''D' - \varDelta'' + \delta'' - \zeta''.$$

Man hat daher:

$\log r$	0,364 70	$\log r'$	0,350 94	$\log r''$	0,335 57
$\log\sin(AD'-\zeta)$	9,764 62	$\log\sin(\delta'-z)$	9,750 38	$\log\sin(A''D'-\zeta'')$	9,842 20
Comp. $\log\sin\delta$	0,079 18	C. $\log\sin\delta'$	0,084 31	Comp. $\log\sin\delta''$	0,029 32
log const.	7,756 33	log const.	7,756 33	log const.	7,756 33
	796483		7,941 97		7,963 42
Reduct. der Zeit	0,009 222		0,008 749		0,009 192

Damit wird erhalten:

Corrigirte Zeiten.	Intervalle.	Logarithmen.
Nov. 5,564 852		
	30,901 434	1,489 9785
36,466 286		
	39,873 966	1,600 6894
76,340 252		

und es werden die verbesserten Logarithmen der Grössen ϑ, ϑ'' resp. 9,836 2708 und 9,725 5599. Beginnt man daher die Berechnung der Elemente aus r', r'', $2f$, ϑ, so wird $\log\eta = 0{,}003\,1921$; sowie aus r, r', $2f''$, ϑ'' kommt $\log\eta'' = 0{,}001\,7300$. Daraus $\log P' = 9{,}890\,7512$, $\log Q' = 9{,}571\,2864$ und deshalb

$$X = +0{,}001\,4736, \quad Y = +0{,}009\,4574.$$

Die Hauptmomente der zweiten Hypothese, wobei ich setze

$$x = \log P = 9{,}890\,7512$$
$$y = \log Q = 9{,}571\,2864,$$

sind folgende:

$\omega + \sigma$ . . . . 20° 8′ 0″87
$\log Qc\sin\omega$ 0,037 3071
z 21 12 6,09
$\log r'$ 0,350 7110
ζ 195 16 59,90
ζ'' 196 52 40,63
$\log r$ 0,363 0642
$\log r''$ 0,336 9708
$\frac{1}{2}(u''+u)$ 267 6 10,75
$\frac{1}{2}(u''-u)$ . . . . —43 39 4,00
(182) $2f'$ 22 32 8,69
$2f$ 13 1 54,65
$2f''$ . . . . 9 30 14,38.

Die Differenz $0''34$ zwischen $2f'$ und $2f+2f''$ ist so zu vertheilen, dass $2f=13^\circ\,1'\,54''\,45$, $2f''=9^\circ\,30'\,14''\,24$ gesetzt wird.

Wenn man es der Mühe werth hält, die Verbesserungen der Zeiten hiemit von Neuem zu berechnen, so findet sich für die erste Beobachtung 0,009 169, für die zweite 0,008 742, für die dritte 0,009 236. Also sind die verbesserten Zeiten Nov. 5,564 905, Nov. 36,466 293, Nov. 76,340 280. Damit wird

$$\begin{array}{ll} \log\vartheta \ldots\ldots & 9{,}836\,2703 \\ \log\vartheta'' \ldots\ldots & 9{,}725\,5594 \\ \log\eta \ldots\ldots & 0{,}003\,1790 \\ \log\eta'' \ldots\ldots & 0{,}001\,7413 \\ \log P' \ldots\ldots & 9{,}890\,7268 \\ \log Q' \ldots\ldots & 9{,}571\,0593. \end{array}$$

Auf diese Weise folgt also aus zweiter Hypothese

$$X=-0{,}000\,0244, \quad Y=-0{,}000\,2271.$$

Für die dritte Hypothese endlich, in der

$$x=\log P=9{,}890\,7268$$
$$y=\log Q=9{,}571\,0593$$

gesetzt wird, sind die Hauptmomente der Rechnung:

$\omega+\sigma$	$20^\circ\ 8'\ 1''62$	$\log r''$	0,336 9536
$\log Qc\sin\omega$	0,037 0857	$\frac{1}{2}(u''+u)$	$267^\circ\ 5'\,53''09$
z	21 12 4,60	$\frac{1}{2}(u''-u)$	—43 39 4,19
$\log r'$	0,350 7191	$2f'$	22 32 7,67
ζ	195 16 54,08	$2f$	13 1 57,42
ζ''	196 52 44,45	$2f''$	9 30 10,63
$\log r$	0,363 0960		

Die Differenz $0''38$ wird so vertheilt, dass $2f=13^\circ\,1'\,57''20$, $2f''=9^\circ\,30'\,10''47$ *).

Da die Unterschiede aller dieser Zahlen von den in der zweiten Hypothese gefundenen nur sehr gering sind, so kann man schon sicher annehmen, dass die dritte Hypothese keiner Verbesserung weiter bedarf, und (183)

*) Diese etwas grössere, in allen drei Hypothesen fast gleiche Differenz ist zum grössten Theile daraus entstanden, dass σ ungefähr zwei Hunderttheile der Secunde kleiner als sein richtiger Werth und der Logarithmus von b um einige Einheiten grösser, als sein richtiger Werth herausgebracht war.

dass mithin eine neue Hypothese überflüssig ist. — Es kann deshalb nun die Berechnung der Elemente aus $2f'$, ϑ', r, r'' begonnen werden, und da dieselbe in den oben bereits ausführlich erklärten Operationen enthalten ist, so will ich mich begnügen, zur Annehmlichkeit derer, die solche selbständig auszuführen wünschen, die Elemente herzusetzen:

Rectascension des aufsteigenden Knotens im Aequator	158° 40′ 38″93
Neigung der Bahn gegen den Aequator	11 42 49,13
Abstand des Perihels von jenem aufsteigenden Knoten	323 14 56,92
mittlere Anomalie für die Epoche 1806	335 4 13,05
mittlere tägliche (siderische) Bewegung	770″2662
φ	14 9 3,91
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422438

158.

Die beiden vorigen Beispiele haben mir keine Gelegenheit geboten, die Methode des Art. 120 zu benutzen, denn die successiven Hypothesen convergirten so rasch, dass man schon bei der zweiten hätte stehen bleiben können, und dass die dritte kaum merklich von der Wahrheit abwich. Man wird sich in der That dieses Vortheils stets erfreuen, und sich über eine vierte Hypothese hinwegsetzen können, falls die heliocentrische Bewegung eine mässige ist, und die drei Radien Vectoren nicht zu ungleich sind, vorzüglich wenn überdies die Zwischenzeiten von einander nur wenig verschieden. Je mehr aber diese Bedingungen der Aufgabe unerfüllt bleiben, desto stärker werden die supponirten Werthe für P, Q von den wahren differiren, und desto langsamer die nachfolgenden Werthe zu den wahren convergiren. In einem solchen Falle sind daher die drei ersten Hypothesen so zu erledigen, wie es die beiden vorigen Beispiele zeigen (nur mit dem Unterschiede, dass in dritter Hypothese nicht die Elemente selbst, sondern, ebenso wie in erster und zweiter, die Grössen η, η'', P', Q', X, Y berechnet werden müssen). Dann aber nimmt man nicht ferner mehr die Schlusswerthe von P', Q' als neue Werthe für die Grössen P, Q in einer vierten Hypothese, sondern diese werden nach der Methode des Art. 120 aus Combination der drei ersten Hypothesen ermittelt. Selten wird es dann erforderlich sein, noch zu einer fünften Hypothese nach

Vorschrift des Art. 121 vorzugehen. Auch diese Rechnungen will ich jetzt durch ein Beispiel erläutern, woraus man zugleich darüber klar werden wird, welche weite Anwendung sich für unsere Methode eröffnet.

159.

Als drittes Beispiel wähle ich die nachfolgenden Ceres-Beobachtungen, deren erste von Olbers in Bremen, die zweite von Harding in Göttingen, (184) die dritte von Bessel zu Lilienthal angestellt ist.

Mittlere Zeit des Beobachtungsorts.	Rectascension.	nördl. Declination.
1805 Sept. 5. $13^h\ 8^m 54^s$	$95^0 59' 25''$	$22^0 21' 25''$
1806 Jan 17. 10 58 51	101 18 40,6	30 21 22,3
1806 Mai 23. 10 23 53	121 56 7	28 2 45

Da die Methoden in den beiden vorigen Beispielen schon reichlich erläutert sind, welche man zur Berücksichtigung der Parallaxe und Aberration dann anwendet, wenn die Abstände von der Erde als noch gänzlich unbekannte angesehen werden, so überhebe ich mich bei diesem dritten Beispiele dieser überflüssigen Arbeitsvermehrung, und entnehme zu diesem Zwecke die genäherten Abstände aus der Monatlichen Correspondenz von Zach (Band XI, S. 284), um die Beobachtungen von Einwirkung der Parallaxe und Aberration zu befreien. — Die nachfolgende Tafel stellt diese Abstände zugleich mit den daraus abgeleiteten Reductionen dar:

Abstand der Ceres von der Erde	2,899	1,638	2,964
Zeit, die das Licht von dort bis zur Erde braucht	$23^m 49^s$	$13^m 28^s$	$24^m 21^s$
Reducirte Zeit der Beobachtung	$12^h 45^m\ 5^s$	$10^h 45^m 23^s$	$9^h 59^m 32^s$
Sternzeit in Graden	$355^0 55'$	$97^0 59'$	$210^0 41'$
Parallaxe in Rectascension	$+ 1''90$	$+ 0''22$	$- 1''97$
Parallaxe in Declination	$- 2,08$	$- 1,90$	$- 2,04.$

Die Data der Aufgabe, nach Befreiung von Parallaxe und Aberration und nach Reduction der Zeiten auf Pariser Meridian, verhalten sich dann so:

	Rectascension.	Declination.
1805 Sept. 5. $12^h 19^m 14^s$	$95^\circ 59' 23'' 10$	$22^\circ 21' 27'' 08$
1806 Jan. 17. 10 15 2	101 18 40,38	30 21 24,20
1806 Mai 23. 9 33 18	121 56 8,97	28 2 47,04

Aus diesen Rectascensionen und Declinationen sind die Längen und Breiten abgeleitet mit Anwendung einer Ecliptikschiefe von $23^\circ 27' 55'' 90$, $23^\circ 27' 54'' 59$, $23^\circ 27' 53'' 27$. Dann sind die Längen von der Nutation befreit, welche war resp. $+17'' 31$, $+17'' 88$, $+18'' 00$ und dann auf den Anfang des Jahres 1806 reducirt durch Anbringung der Praecession $+15'' 98$, $-2'' 39$, $-19'' 68$. Endlich sind für die reducirten Zeiten aus den Tafeln die Sonnenorte genommen, wo bei den Längen die Nutation weggelassen, dagegen die
(185) Praecession ganz wie an die Längen der Ceres angebracht ist. Die Breite der Sonne ist überhaupt vernachlässigt. So entstanden folgende, bei der Rechnung anzuwendende Zahlen:

Zeit 1805 Sept.	5,513 36	139,427 11	265,398 13
α, α', α''	$95^\circ 32' 18'' 56$	$99^\circ 49' 5'' 87$	$118^\circ 5' 28'' 85$
β, β', β''	-0 59 34,06	$+7$ 16 36,80	$+7$ 38 49,39
l, l', l''	342 54 56,00	117 12 43,25	241 58 50,71
$\log R$, $\log R'$, $\log R''$	0,003 1514	9,992 9861	0,005 6974

Die präliminaren Rechnungen der Artt. 136—140 geben:

γ, γ', γ''	$358^\circ 55' 28'' 09$	$156^\circ 52' 11'' 49$	$170^\circ 48' 44'' 79$
δ, δ', δ''	112 37 9,66	18 48 39,81	123 32 52,13
$A'D$, AD', AD''	15 32 41,40	252 42 19,14	136 2 22,38
$A''D$, $A''D'$, $A'D''$	138 45 4,60	6 26 41,10	358 5 57,00
ε, ε', ε''	29 18 8,21	170 32 59,08	156 6 25,25

$$\sigma = 8^\circ 52' 4'' 05$$
$$\log a = 0{,}184\,0193\,n \qquad a = -1{,}527\,6340$$
$$\log b = 0{,}004\,0987$$
$$\log c = 2{,}006\,6735$$
$$d = 117{,}508\,73$$
$$\log e = 0{,}856\,8244$$

$$\log \varkappa \;\;= 0{,}161\,1012$$
$$\log \varkappa'' = 9{,}977\,0819\,n$$
$$\log \lambda \;\;= 9{,}916\,4090\,n$$
$$\log \lambda'' = 9{,}732\,0127\,n.$$

Die Zwischenzeit zwischen der ersten und zweiten Beobachtung ist $= 133{,}913\,75$ Tage, swischen der zweiten und dritten $= 125{,}971\,02$. Damit wird $\log \vartheta = 0{,}335\,8520$, $\log \vartheta'' = 0{,}362\,4066$, $\log \frac{\vartheta''}{\vartheta} = 0{,}026\,5546$, $\log \vartheta\vartheta'' = 0{,}698\,2586$. Die vorzüglichsten Rechnungs-Momente der drei ersten hieraus zu bildenden Hypothesen giebt die nachfolgende Uebersicht:

	I.	II.	III.
$\log P = x$	0,026 5546	0,025 6968	0,025 6275
$\log Q = y$	0,698 2586	0,739 0190	0,748 1055
$\omega + \sigma$	7° 15′ 13″523	7° 14′ 47″139	7° 14′ 45″071
$\log Q c \sin \omega$	1,154 6650 n	1,197 3925 n	1,206 6327 n
z	7 3 59,018	7 2 32,870	7 2 16,900
$\log r'$	0,411 4726	0,412 9371	0,413 2107
ζ	160 10 46,74	160 20 7,82	160 22 9,42
ζ''	262 6 1,03	262 12 18,26	262 14 19,49
$\log r$	0,432 3934	0,429 1773	0,428 4841
$\log r''$	0,409 4712	0,407 1975	0,406 4697
$\frac{1}{2}(u''+u)$	262 55 23,22	262 57 6,83	262 57 31,17
$\frac{1}{2}(u''-u)$	273 28 50,95	273 29 15,06	273 29 19,56
$2f'$	62 34 28,40	62 49 56,50	62 53 57,06
$2f$	31 8 30,03	31 15 59,09	31 18 13,83
$2f''$	31 25 58,43	31 33 57,32	31 35 43,32
$\log \eta$	0,020 2496	0,020 3158	0,020 3494
$\log \eta''$	0,021 1074	0,021 2429	0,021 2751
$\log P'$	0,025 6968	0,025 6275	0,025 6289
$\log Q'$	0,739 0190	0,748 1055	0,750 2337
X	$-0{,}000\,8578$	$-0{,}000\,0693$	$+0{,}000\,0014$
Y	$+0{,}040\,7604$	$+0{,}009\,0865$	$+0{,}002\,1282$

(186)

Bezeichne ich nun die drei Werthe für X mit A, A', A'' und die drei Werthe für Y mit B, B', B''; die aus der Division der Grössen $A'B''-A''B'$, $A''B-AB''$, $AB'-A'B$ durch ihre Summe entstandenen Quotienten mit k, k', k'', so dass man hat $k+k'+k''=1$, und endlich die Werthe für $\log P'$ und $\log Q'$ in dritter Hypothese mit M und N (welches die neuen Werthe für x, y sein würden, wenn man die vierte Hypothese ebenso aus der dritten herleiten wollte, wie die dritte aus der zweiten abgeleitet war), so entnimmt man den Formeln des Art. 120 leicht, dass der verbesserte Werth von x wird $=M-k(A'+A'')-k'A''$, und der verbesserte Werth für $y=N-k(B'+B'')-k'B''$. Durch Rechnung ergiebt sich der erste $=0{,}025\,6331$, der zweite $=0{,}750\,9143$. Auf diese verbesserten Werthe stütze ich nun die vierte Hypothese, deren Hauptmomente folgende sind:

$\omega+\sigma$	$7^\circ\,14'\,45''\,247$	$\log r''$	$0{,}406\,2033$
$\log Qc\sin\omega$	$1{,}209\,4284n$	$\frac{1}{2}(u''+u)$	$262^\circ\,57'\,38''\,78$
z	$7\;\;2\;12{,}736$	$\frac{1}{2}(u''-u)$	$273\;\;29\;\;20{,}73$
$\log r'$	$0{,}413\,2817$	$2f'$	$62\;\;55\;\;16{,}64$
ζ	$160\;\;22\;\;45{,}38$	$2f$	$31\;\;19\;\;1{,}49$
ζ''	$262\;\;15\;\;3{,}90$	$2f''$	$31\;\;36\;\;15{,}20$
$\log r$	$0{,}428\,2792$		

(187) Die zwischen $2f'$ und $2f+2f''$ auftauchende Differenz $0''05$ vertheile ich so, dass $2f=31^\circ\,19'\,1''47$, $2f''=31^\circ\,36'\,15''17$ gesetzt wird. — Wenn nun aus den beiden äussersten Orten die Elemente selbst hergeleitet werden, so erhält man folgende Zahlen:

Wahre Anomalie für den ersten Ort . . .	$289^\circ\;\;7'\,39''75$
Wahre Anomalie für den dritten Ort . . .	$352\;\;2\;56{,}39$
Mittlere Anomalie für den ersten Ort . . .	$297\;\;41\;\;35{,}65$
Mittlere Anomalie für den dritten Ort . . .	$353\;\;15\;\;22{,}49$
Mittlere tägliche siderische Bewegung	$769''6755$
Mittlere Anomalie für Anfang 1806	$322\;\;35\;\;52{,}51$
Winkel φ	$4\;\;37\;\;57{,}78$
Logarithmus der grossen Halbaxe	$0{,}442\,4661.$

Berechnet man mit diesen Elementen den heliocentrischen Ort für die Zeit der mittleren Beobachtung, so findet sich mittlere Anomalie

$= 326^\circ 19' 25'' 72$, Logarithmus des Radius Vector 0,413 2825, wahre Anomalie $= 320^\circ 43' 54'' 87$. Letztere müsste von der wahren Anomalie für den ersten Ort abstehen um die Differenz $2f''$, oder von der wahren Anomalie für den dritten Ort um $2f$, und müsste daher werden $= 320^\circ 43' 54'' 92$ und der Logarithmus des Radius Vector $= 0{,}413\,2817$. Der Unterschied von $0''05$ in der wahren Anomalie, und von acht Einheiten in dem fraglichen Logarithmus ist bedeutungslos. Würde man die vierte Hypothese auf gleiche Weise durchführen wie die drei ersten, so käme $X = 0$, $Y = -0{,}000\,0168$, woraus die verbesserten Werthe von x, y würden

$$x = \log P = 0{,}025\,6331 \text{ (derselbe wie in vierter Hypothese)}$$
$$y = \log Q = 0{,}750\,8917.$$

Wenn auf diese Werthe eine fünfte Hypothese gebaut würde, so würde die Auflösung die äusserste Schärfe erlangen, welche die Tafeln nur gewähren; aber die hieraus hervorgehenden Elemente würden kaum merklich von denen abweichen, welche die vierte Hypothese lieferte.

Um vollständige Elemente zu haben, erübrigt nur, die Lage der Bahnebene zu berechnen. Nach Anleitung von Art. 149 kommt

	aus dem ersten Orte		aus dem dritten Orte	
g	$354^\circ\ 9'\ 44''22$	g''	$57^\circ\ 5'\ 0''91$	
h	261 56 6,94	h''	161 0 1,61	
i	10 37 33,02		10 37 33,00	
☊	80 58 49,06		80 58 49,10	
Distanz des Perihels von ☊	65 2 4,47		65 2 4,52	(188)
Länge des Perihels	146 0 53,53		146 0 53,62.	

Im Mittel wird daher $i = 10^\circ 37' 33'' 01$, ☊ $= 80^\circ 58' 49'' 08$, Perihellänge $= 146^\circ 0' 53'' 57$. Endlich die mittlere Länge für den Anfang des Jahres 1806 $= 108^\circ 36' 46'' 08$.

160.

Bei Auseinandersetzung der Methode, welcher die vorangehenden Untersuchungen gewidmet waren, trafen wir auf einige besondere Fälle, wo sie eine Anwendung nicht leidet, wenigstens nicht in der Gestalt, in welcher sie von mir dargelegt ist. Wir sahen, dass dieser Mangel zuerst dann Statt habe, wenn einer der drei geocentrischen Orte, entweder mit dem entsprechenden heliocentrischen Orte der Erde, oder mit dem entgegengesetzten Punkte zusammenfällt (letzterer Fall kann offenbar nur dann eintreten, wenn der Himmelskörper zwischen Sonne und Erde durchgeht); zweitens dann, wenn der erste geocentrische Ort des Himmelskörpers mit dem dritten zusammenfällt; drittens dann, wenn alle drei geocentrischen Orte zugleich mit dem zweiten heliocentrischen Orte der Erde in demselben grössten Kreise liegen.

Im ersten Falle wird die Lage irgend eines der grössten Kreise AB, $A'B'$, $A''B''$ unbestimmt bleiben, sowie im zweiten und dritten Falle die Lage des Punktes B^*. — In diesen Fällen verlieren also die vorigen Methoden, mittelst deren man, wenn die Grössen P, Q als bekannte angesehen werden, aus den geocentrischen Orten die heliocentrischen bestimmt, ihre Kraft. Dabei mache ich jedoch auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam. Im ersten Falle liegt der Fehler lediglich an der Methode, im zweiten und dritten aber in der Natur der Aufgabe selbst. Im ersten Falle wird man daher die fragliche Bestimmung dennoch bewerkstelligen können, wenn man nur die Methode in angemessener Weise ändert; im zweiten und dritten aber ist sie absolut unmöglich und die heliocentrischen Orte bleiben dann unbestimmt. Ich will diese Relationen mit wenigen Worten entwickeln, aber Alles zu erschöpfen, was hiermit zusammenhängt, ist um so weniger nöthig, da in allen diesen Specialfällen eine genaue Bahnbestimmung unmöglich ist, wo sie von den kleinsten Beobachtungsfehlern enorm afficirt werden würde. Derselbe Mangel ist auch dann schon fühlbar, wenn die Beobachtungen zwar nicht völlig, aber doch recht nahe sich in einem dieser Fälle befinden. Bei der Auswahl der Beobachtungen muss man daher dies berücksichtigen, und sich sorgfältig hüten, nicht einen Ort anzuwenden, wo der Körper zugleich in der Nachbarschaft des Knotens und der Opposition oder Conjunction verweilt, sowie auch nicht solche Beobachtungen, wo der Körper in der letzten Beobachtung nahezu an denselben geocentrischen Ort zurückgekehrt ist, den er bei erster Beobachtung inne hatte, und endlich nicht solche, wo der grösste Kreis, welcher von dem mittleren heliocentrischen Orte der Erde nach dem mittleren geocen-
(189) trischen Orte des Himmelskörpers gezogen ist, einen sehr spitzen Winkel mit

der Richtung der geocentrischen Bewegung bildet, und den ersten und dritten Ort gleichsam streift.

161.

Ich mache für den ersten Fall drei Unterabtheilungen.

I. Wenn der Punkt B mit A oder mit dem entgegengesetzten Punkte coincidirt, so ist $\delta = 0$ oder $= 180^0$; γ, ε', ε'' und die Punkte D', D'' bleiben unbestimmt, dagegen werden γ', γ'', ε und die Punkte D, B^* bestimmt. Der Punkt C fällt nothwendig mit A zusammen. Durch analoge Betrachtungen, wie in Art. 140, leitet man leicht folgende Gleichung ab:

$$0 = n' \frac{\sin(z - \sigma)}{\sin z} \cdot \frac{R' \sin \delta'}{R'' \sin \delta''} \cdot \frac{\sin(A''D - \delta'')}{\sin(A'D - \delta' + \sigma)} - n''.$$

Es lässt sich daher hierher Alles übertragen, was in den Artt. 141 und 142 auseinandergesetzt ist, falls man nur $a = 0$ setzt, und b mittelst der Gleichung 12 des Art. 140 bestimmt. Die Grössen z, r', $\frac{n'r'}{n}$, $\frac{n'r'}{n''}$ werden ganz wie oben berechnet. Sobald also z und solchergestalt die Lage des Punktes C' bekannt wird, kann man dem grössten Kreise CC' seine Lage anweisen und dessen Einschnitt mit dem grössten Kreise $A''B''$ finden, d. h. den Punkt C'', und somit die Bögen CC', CC'', $C'C''$ oder $2f''$, $2f'$, $2f$; hieraus endlich erhält man

$$r = \frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin 2f}{\sin 2f'}, \qquad r'' = \frac{n'r'}{n''} \cdot \frac{\sin 2f''}{\sin 2f'}.$$

II. Auf den Fall, wo der Punkt B'' mit A'' oder dem entgegengesetzten Punkte zusammenfällt, lässt sich Alles eben Gesagte übertragen, wenn man nur Alles, was auf den ersten Ort sich bezieht, mit dem vertauscht, was zum dritten Orte gehört.

III. Etwas anders aber muss man den Fall behandeln, wo B' entweder mit A' oder mit dem entgegengesetzten Punkte zusammenfällt. Hier wird der Punkt C' mit A' zusammenfallen; γ', ε, ε'' und die Punkte D, D'', B^* werden unbestimmt bleiben. Dagegen lässt sich der Einschnitt des grössten Kreises BB'' mit der Ecliptik*) angeben, dessen Länge $= l' + \pi$

*) Allgemeiner gesprochen mit dem grössten Kreise AA''; der Kürze halber habe ich aber hier nur den Fall betrachtet, wo die Ecliptik zur Grundebene gewählt ist.

gesetzt sein soll. Durch ähnliche Betrachtungen wie die des Art. 140 erhält man die Gleichung

$$0 = n\frac{R\sin\delta\sin(A''D'-\delta'')}{R''\sin\delta''\sin(AD'-\delta)} + n'r'\frac{\sin\pi}{R''\sin(l''-l'-\pi)} + n''.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von n, welcher im Art. 140 mit a übereinkommt, auch hier mit a, und den Coefficienten von $n'r'$ mit β, so lässt sich

(190) a auch hier durch die Formel $a = -\frac{R\sin(l'+\pi-l)}{R''\sin(l''-l'-\pi)}$ bestimmen. Man hat daher $0 = an + \beta n'r' + n''$; eine Gleichung, durch welche man, wenn man sie combinirt mit $P = \frac{n''}{n}$, $Q = 2\left(\frac{n+n''}{n'} - 1\right)r'^3$, erhält:

$$\frac{\beta(P+1)}{P+a}r'^4 + r'^3 + \tfrac{1}{2}Q = 0,$$

woraus sich die Distanz r' ableiten lässt, wenn nur β nicht $= 0$ ist, in welchem Falle daraus nichts Anderes folgen würde, als $P = -a$. Wenn übrigens auch β nicht $= 0$ ist (wo man dann auf den dritten, im nachfolgenden Artikel zu betrachtenden Fall kommen würde), so wird doch β stets eine sehr kleine Grösse sein, und deshalb P nur wenig von $-a$ sich unterscheiden müssen. Hieraus ist aber klar, dass die Bestimmung des Coefficienten $\frac{\beta(P+1)}{P+a}$ sehr unsicher wird, und deshalb r' sich mit irgend welcher Genauigkeit nicht ableiten lässt. Ferner hat man $\frac{n'r'}{n} = -\frac{P+a}{\beta}$, $\frac{n'r'}{n''} = -\frac{P+a}{\beta P}$; worauf, ähnlich wie im Art. 143, leicht folgende Gleichungen entwickelt werden:

$$r\sin\zeta = \frac{n'r'}{n}\cdot\frac{\sin\gamma''}{\sin\varepsilon'}\sin(l''-l')$$

$$r''\sin\zeta'' = -\frac{n'r'}{n''}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\varepsilon'}\sin(l'-l)$$

$$r\sin(\zeta - AD') = r''P\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma}\sin(\zeta''-A''D'),$$

aus deren Combination mit den Gleichungen VIII und IX des Art. 143 die Grössen r, ζ, r'', ζ'' sich bestimmen lassen. Die übrigen Rechnungsoperationen kommen mit den oben beschriebenen überein.

162.

Im zweiten Falle, in welchem B'' mit B zusammenfällt, wird auch D' mit denselben Punkten oder mit dem entgegengesetzten Punkte zusammenfallen. Es werden daher $AD'-\delta'$ und $A''D'-\delta''$ entweder $=0$ oder $=180°$ sein; wonach man aus den Gleichungen des Art. 143 ableitet:

$$\frac{n'r'}{n} = \pm \frac{\sin\varepsilon'}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{R\sin\delta}{\sin(z+A'D-\delta')}$$

$$\frac{n'r'}{n''} = \pm \frac{\sin\varepsilon'}{\sin\varepsilon''} \cdot \frac{R''\sin\delta''}{\sin(z+A'D''-\delta')}$$

$$R\sin\delta\sin\varepsilon''\sin(z+A'D''-\delta') = PR''\sin\delta''\sin\varepsilon\sin(z+A'D-\delta').$$

Hieraus ist klar, dass z, unabhängig von Q, allein durch P bestimmbar ist (wenn nicht zufällig $A'D'' = A'D$ oder $= A'D \pm 180°$ ist, wo man auf den dritten Fall kommen würde). Hat man aber z gefunden, so wird auch r' bekannt, und weiter mit Hülfe der Werthe der Grössen $\frac{n'r'}{n}$, $\frac{n'r'}{n''}$ auch $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$. Hieraus endlich auch $Q = 2\left(\frac{n}{n'}+\frac{n''}{n'}-1\right)r'^3$. — Offenbar lassen sich dann also P und Q nicht als von einander unabhängige Data betrachten, sondern sie stellen entweder nur ein einziges Datum dar, oder incongruirende Data. Die Lage der Punkte C, C'' bleibt in diesem Falle willkürlich, wenn solche nur in demselben grössten Kreise mit C' genommen werden. (191)

Im dritten Falle, wo A', B, B', B'' in demselben grössten Kreise liegen, werden D und D'' resp. mit den Punkten B'', B oder mit den entgegengesetzten zusammenfallen; woraus sich mittelst Combination der Gleichungen VII, VIII, IX des Art. 143 ergiebt $P = \frac{R\sin\delta\sin\varepsilon''}{R''\sin\delta''\sin\varepsilon} = \frac{R\sin(l'-l)}{R''\sin(l''-l')}$. In diesem Falle ist daher der Werth für P schon durch die Daten des Problems selbst geliefert, und es wird deshalb die Lage der Punkte C, C', C'' unbestimmt bleiben.

163.

Die von Art. 136 an auseinandergesetzte Methode ist zwar vorzugsweise der ersten Bestimmung einer noch ganz unbekannten Bahn angepasst. Sie kann jedoch mit gleich glücklichem Erfolge auch dann benutzt werden, wenn es sich um Verbesserung einer schon sehr nahe bekannten Bahn aus drei, von einander, so weit man will, abstehenden Beobachtungen handelt. In einem solchen Falle muss man indessen Einiges ändern. Wenn nämlich die Beobachtungen eine sehr grosse heliocentrische Bewegung umfassen, so ist es nicht mehr gestattet, $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$ als genäherte Werthe der Grössen P, Q zu betrachten. — Man kann vielmehr dann dafür viel genauere Werthe aus den sehr nahe bekannten Elementen ableiten. Man berechne daher leichthin vermittelst dieser Elemente die heliocentrischen Orte in der Bahn für die drei Beobachtungszeiten, woraus, wenn man die wahren Anomalien mit v, v', v'', die Radien Vectoren mit r, r', r'', den halben Parameter mit p bezeichnet, die folgenden genäherten Werthe sich ergeben:

$$P = \frac{r\sin(v'-v)}{r''\sin(v''-v')}, \quad Q = \frac{4r'^4 \sin\frac{1}{2}(v'-v)\sin\frac{1}{2}(v''-v')}{p\cos\frac{1}{2}(v''-v)}.$$

Hierauf baue man dann die erste Hypothese, und durch kleine beliebige Aenderungen die zweite und dritte. Denn es würde nicht vortheilhaft sein, hier (wie es oben geschehen ist) P' und Q' für die neuen Werthe anzunehmen, indem sich nicht mehr annehmen lässt, dass man daraus genauere Werthe erhalten werde. Durch diese Rechnung lassen sich alle drei Hypothesen sehr bequem zugleich erledigen, worauf man dann die vierte nach Vorschrift des Art. 120 bildet. Uebrigens habe ich nichts dagegen, dass, wenn Jemand dafür hält, wie die eine oder die andere der in den Artt. 124—129 auseinandergesetzten zehn Methoden in einem solchen Falle, wenn nicht rascher, doch beinahe ebenso rasch zum Ziele führen werde, er dann davon nach Belieben Gebrauch mache.