Zweiter Abschnitt. (45)

Relationen, die einen einzelnen Ort im Raume betreffen.

47.

Im ersten Abschnitte ist über die Bewegung der Himmelskörper in ihren Bahnen gehandelt, ohne dass Rücksicht auf die Lage genommen wäre, welche diese Bahnen im Raume einnehmen. Zur Bestimmung dieser Lage, wodurch man in den Stand gesetzt ist, die Beziehung der Orte eines Himmelskörpers auf irgend welche andere Punkte des Raumes anzugeben, wird offenbar sowohl die Lage der Bahnebene in Beziehung auf irgend eine bekannte Ebene erfordert (z. B. die Ebene der Erdbahn, Ecliptik), als die Lage der Apsiden in jener Ebene. Da Obiges am zweckmässigsten auf sphärische Trigonometrie zurückgeführt wird, so wollen wir uns eine, mit beliebigem Halbmesser um die Sonne als Mittelpunkt beschriebene Kugeloberfläche denken, auf der jede durch die Sonne gehende Ebene einen grössten Kreis, jede aus der Sonne gezogene gerade Linie aber einen Punkt zeichnet. Wenn Ebenen und gerade Linien nicht durch die Sonne selbst hindurchführen, so legen wir ihnen parallel Ebenen und gerade Linien durch die Sonne, und stellen uns vor, dass die den Letzteren auf der Kugeloberfläche entsprechenden grössten Kreise und Punkte auch erstere darstellen; auch kann man sich die Kugel mit einem sogenannten unendlich grossen Halbmesser beschrieben denken, auf welcher die parallelen Ebenen und geraden Linien ebenso dargestellt werden.

Fällt daher die Ebene der Bahn nicht mit der Ebene der Ecliptik zusammen, so schneiden sich die jenen Ebenen entsprechenden grössten Kreise (die wir einfach „Bahn“ und „Ecliptik“ nennen wollen) in zwei Punkten, welche Knoten heissen. In dem einen Knoten wird der aus der Sonne gesehene Körper aus der südlichen Gegend durch die Ecliptik in die nördliche übergehen, in dem anderen Knoten wird er aus letzterer in die

erstere zurückkehren. Ersterer heisst der aufsteigende, letzterer der niedersteigende Knoten. Die Lage der Knoten in der Ecliptik bezeichnet man durch ihren, nach Ordnung der Zeichen gezählten Abstand vom mittleren Frühlings-Aequinoxe (Länge). Es sei, in Fig. 1, ☊ der aufsteigende Knoten, $A☊B$ ein Theil der Ecliptik, $C☊D$ ein Theil der Bahn; die Bewegung der Erde und des Himmelskörpers mögen in der Richtung von A nach B und von C nach D vor sich gehen, so ist klar, dass der sphärische Winkel, den $☊D$ mit $☊B$ bildet, von 0° bis 180°, aber hierüber nicht hinaus, anwachsen kann, ohne dass ☊ aufhört der aufsteigende Knoten zu sein. Diesen Winkel nennt man die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik. Wenn die Lage der Bahnebene durch die Länge des aufsteigenden Knotens und durch die Neigung der Bahn bestimmt ist, so wird nur noch der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten erfordert. Diesen Abstand zählt man nach der Richtung der Bewegung, und nimmt ihn deshalb negativ oder zwischen 180° und 360° an, wenn das Perihel von der Ecliptik nach Süden belegen ist. Man merke sich noch die folgenden Ausdrücke: Die Länge eines jeden Punktes in dem Kreise der Bahn, wird von demjenigen Punkte an gezählt, der vom aufsteigenden Knoten ebensoweit
(46) rückwärts in der Bahn absteht, als das Frühlings-Aequinox von demselben Punkte rückwärts in der Ecliptik absteht. Hiernach wird die Länge des Perihels die Summe der Länge des Knotens und des Abstandes des Perihels vom Knoten sein; die wahre Länge des Körpers in der Bahn aber ist = der Summe der wahren Anomalie und der Länge des Perihels. Mittlere Länge endlich nennt man die Summe der mittleren Anomalie und der Länge des Perihels. Dieser letztere Ausdruck kann offenbar nur in elliptischen Bahnen Statt finden.

48.

Um daher den Ort eines Himmelskörpers im Raume für jeden Augenblick angeben zu können, muss man in der elliptischen Bahn Folgendes kennen:

I. Die mittlere Länge für einen bestimmten, an sich willkürlichen Zeitpunkt, den man mit „Epoche" bezeichnet; mit demselben Namen wird auch bisweilen diese Länge selbst belegt. Gemeiniglich wählt man für die Epoche den Anfang eines Jahres, nämlich den Mittag des ersten Januars in einem

Schaltjahre, oder den Mittag des vorhergehenden 31. Decembers im gemeinen Jahre.

II. Die mittlere Bewegung innerhalb eines gewissen Zeitraumes, z. B. in einem mittleren Sonnentage, oder in 365, $365\frac{1}{4}$, 36525 Tagen.

III. Die halbe grosse Axe, die zwar weggelassen werden könnte, wenn des Körpers Masse entweder bekannt, oder zu vernachlässigen ist, indem sie bereits durch die mittlere Bewegung (Art. 7) gegeben ist; der Bequemlichkeit wegen pflegt jedoch beides stets angegeben zu werden.

IV. Excentricität. V. Länge des Perihels. VI. Länge des aufsteigenden Knotens. VII. Neigung der Bahn.

Diese sieben Momente heissen die Elemente der Bewegung des Körpers.

In der Parabel oder Hyperbel vertritt die Zeit des Periheldurchganges die Stelle des ersten Elementes. Anstatt II dient dabei das, was in dieser Art von Kegelschnitten der mittleren täglichen Bewegung analog ist (siehe Art. 19; in der hyperbolischen Bewegung die Grösse $\lambda k b^{-\frac{3}{2}}$ Art. 23). In der Hyperbel können die übrigen Elemente ebenso beibehalten werden, in der Parabel aber, wo die grosse Axe unendlich und die Excentricität $= 1$ ist, wird an Stelle des dritten und vierten Elementes nur der Abstand im Perihele aufgeführt.

49.

Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche wird die Neigung der Bahn, welche ich von 0 bis 180° zähle, nur bis 90° ausgedehnt, und wenn der Winkel der Bahn mit dem Bogen $☊B$ (Fig. 1) einen rechten Winkel überschreitet, so wird der Winkel der Bahn mit dem Bogen $☊A$ (der dessen Complement zu 180° ist) als Neigung der Bahn betrachtet. In einem solchen Falle muss man dann hinzufügen, dass die Bewegung retrograd ist (gleich (47)
als wenn in unserer Figur $E☊F$ einen Theil der Bahn darstellt), um ihn vom andern Falle, wo die Bewegung direct genannt wird, zu unterscheiden. Die Länge in der Bahn pflegt dann so gezählt zu werden, dass sie im aufsteigenden Knoten mit der Länge dieses Punktes in der Ecliptik übereinkommt, in der Richtung $☊F$ aber abnimmt; der Anfangspunkt, von welchem die Längen gegen

die Ordnung der Bewegung in der Richtung $☊F$ gezählt werden, steht also ebenso weit vom ☊ ab, als das Frühlings-Aequinox von demselben ☊ in der Richtung $☊A$. Es wird deshalb in diesem Falle die Länge des Perihels gleich sein der um den Abstand des Perihels vom Knoten verminderten Länge des Knotens. Auf diese Weise wird jeder der beiden Sprachgebräuche leicht in den anderen verwandelt, ich ziehe aber den meinigen deshalb vor, weil man sich dabei über die Unterscheidung der directen und rückläufigen Bewegung hinwegsetzen, und in beiden Fällen stets dieselben Formeln anwenden kann, während der gewöhnliche Gebrauch häufig doppelte Rechnungsvorschriften erfordert.

50.

Die einfachste Art, um die Lage irgend eines Punktes an der Oberfläche der Himmelskugel in Beziehung auf die Ecliptik zu bestimmen, ergiebt sich durch seinen Abstand von der Ecliptik (Breite) und durch den Abstand des Punktes, wo die Ecliptik von einem auf sie gefällten Perpendikel geschnitten wird, vom Aequinox (Länge). Die Breite wird von beiden Seiten der Ecliptik an bis zu $90°$ gezählt, und wird in der nördlichen Region als positiv, in der südlichen als negativ betrachtet. Es mögen daher dem heliocentrischen Orte eines Himmelskörpers, d. h. der Projection einer von der Sonne nach dem Körper auf der Himmelskugel gezogenen geraden Linie, die Länge λ und die Breite β entsprechen. Es sei ferner u die Entfernung des heliocentrischen Orts vom aufsteigenden Knoten (welche das Argument der Breite genannt wird), i die Neigung der Bahn, ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens, so hat man zwischen i, u, β, $\lambda - ☊$, welche Grössen Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sind, folgende Relationen, die, wie man sich leicht überzeugt, ohne alle Einschränkung gelten:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tang}(\lambda - ☊) = \cos i \operatorname{tang} u$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - ☊)$$

$$\text{III.}\quad \sin\beta = \sin i \sin u$$

$$\text{IV.}\quad \cos u = \cos\beta \cos(\lambda - ☊).$$

Sind daher i und u gegebene Grössen, so wird daraus $\lambda - ☊$ mittelst der Gleichung I bestimmt, und sodann β mittelst II oder III, wenn nämlich β sich nicht zu sehr $\pm 90°$ nähert; die Formel IV kann zur Prüfung der

Rechnung dienen. Uebrigens lehren die Formeln I und IV, dass $\lambda - \Omega$ und u immer in demselben Quadranten liegen, so lange i zwischen 0^0 und 90^0 liegt; dagegen gehören $\lambda - \Omega$ und $360^0 - u$ zu denselben Quadranten, sobald i zwischen 90^0 und 180^0 liegt, oder wenn nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche die Bewegung rückläufig ist. Die Zweideutigkeit, welche die Bestim- (48)
mung von $\lambda - \Omega$ aus der Tangente nach Formel I zurücklässt, wird also hierdurch von selbst aufgehoben.

Folgende Formeln leitet man leicht aus Combination der vorhergehenden ab:

$$\text{V.}\quad \sin(u - \lambda + \Omega) = 2\sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{VI.}\quad \sin(u - \lambda + \Omega) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i \sin\beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{VII.}\quad \sin(u - \lambda + \Omega) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i \operatorname{tang}\beta \cos u$$

$$\text{VIII.}\quad \sin(u + \lambda - \Omega) = 2\cos\tfrac{1}{2}i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{IX.}\quad \sin(u + \lambda - \Omega) = \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}i \sin\beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{X.}\quad \sin(u + \lambda - \Omega) = \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}i \operatorname{tang}\beta \cos u.$$

Der Winkel $u - \lambda + \Omega$ (wenn i innerhalb 90^0), oder $u + \lambda - \Omega$ (wenn i über 90^0), heisst gemeiniglich die Reduction auf die Ecliptik; er ist nämlich der Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge λ und der Länge in der Bahn, die nach gewöhnlichem Sprachgebrauche ist: $\Omega \pm u$ (nach dem meinigen $\Omega + u$). Sobald die Neigung der Bahn klein oder wenig von 180^0 verschieden ist, so kann man diese Reduction als eine Grösse der zweiten Ordnung betrachten, und in diesem Falle ist es vorzuziehen, β zuerst durch Formel III und dann λ aus VII oder X zu berechnen, wodurch man grössere Schärfe als mittelst Formel I erlangen kann.

Wenn man ein Perpendikel von dem Orte des Körpers im Raume, auf die Ebene der Ecliptik fällt, so heisst der Abstand des Einschneidepunktes von der Sonne die curtirte Distanz. Bezeichnet man also letztere mit r', den radius vector aber mit r, so hat man

$$\text{XI.}\quad r' = r\cos\beta.$$

51.

Behuf eines Beispiels will ich die in den Artt. 13 und 14 angefangene Berechnung (wozu die Zahlen vom Planeten Juno genommen waren) weiter fortsetzen. Wir fanden oben: wahre Anomalie $= 315^\circ\, 1'\, 23''\, 02$, den Logarithmus des radius vector $= 0{,}325\,9877$; nun sei $i = 13^\circ\, 6'\, 44''\, 10$, Abstand des Perihels vom Knoten $= 241^\circ\, 10'\, 20''\, 57$, und daher $u = 196^\circ\, 11'\, 43''\, 59$; endlich sei $\Omega = 171^\circ\, 7'\, 48''\, 73$. Hieraus erhält man:

$\log \operatorname{tang} u \ldots\ldots\ldots 9{,}463\,0573$
$\log \cos i \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}988\,5266$
$\log \operatorname{tang}(\lambda - \Omega) \ldots 9{,}451\,5839$
$\lambda - \Omega \quad = \quad 195^\circ\, 47'\, 40''\, 25$
$\lambda \quad = \quad 6\;\; 55\;\; 28{,}98$
$\log r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}325\,9877$
$\log \cos \beta \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}999\,1289$
$\log r' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}325\,1166$

$\log \sin(\lambda - \Omega) \ldots\ldots 9{,}434\,8691\, n$
$\log \operatorname{tang} i \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}367\,2305$
$\log \operatorname{tang} \beta \ldots\ldots\ldots 8{,}802\,0996\, n$
$\beta \quad = -3^\circ\, 37'\, 40''\, 02$
$\log \cos \beta \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}999\,1289$
$\log \cos(\lambda - \Omega) \ldots\ldots 9{,}983\,2852\, n$
$9{,}982\,4141\, n$
$\log \cos u \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}982\,4141\, n.$

(49) Die Rechnung nach den Formeln III und VII würde so stehen:

$\log \sin u \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}445\,4714\, n$
$\log \sin i \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}355\,7570$
$\log \sin \beta \ldots\ldots\ldots\ldots 8{,}801\,2284\, n$
$\beta = -3^\circ\, 37'\, 40''\, 02$

$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} i \ldots\ldots\ldots 9{,}060\,4259$
$\log \operatorname{tang} \beta \ldots\ldots\ldots\ldots 8{,}802\,0995\, n$
$\log \cos u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}982\,4141\, n$
$\log \sin(u - \lambda + \Omega) \ldots 7{,}844\,9395$
$u - \lambda + \Omega \quad = \quad 0^\circ\, 24'\;\, 3''\, 34$
$\lambda - \Omega \quad = \quad 195\;\; 47\;\; 40{,}25.$

52.

Betrachtet man i und u als veränderliche Grössen, so giebt die Differentiation der Gleichung III im Art. 50:

$$\operatorname{cotang} \beta \, d\beta = \operatorname{cotang} i \, di + \operatorname{cotang} u \, du, \text{ oder}$$

$$\text{XII.} \quad d\beta = \sin(\lambda - \Omega)\, di + \sin i \cos(\lambda - \Omega)\, du.$$

Ebenso erhält man durch Differentiation der Gleichung I:

$$\text{XIII.} \quad d(\lambda - \Omega) = -\operatorname{tang} \beta \cos(\lambda - \Omega)\, di + \frac{\cos i}{\cos \beta^2}\, du.$$

Schliesslich folgt aus Differentiation der Gleichung XI:

$d r' = \cos\beta \, d r - r \sin\beta \, d\beta$, oder

XIV. $d r' = \cos\beta \, d r - r \sin\beta \sin(\lambda - \Omega) \, d i - r \sin\beta \sin i \cos(\lambda - \Omega) \, d u$.

In dieser letzten Gleichung muss man entweder die Glieder, welche $d i$ und $d u$ enthalten, mit $206\,265''$ dividiren, oder die übrigen mit dieser Zahl multipliciren, wenn man die Aenderungen von i und u als in Secunden ausgedrückt annimmt.

53.

Die Lage eines Punktes im Raume wird sehr bequem durch die Abstände bestimmt, welche er von drei, sich einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen einnimmt. Wählt man zu einer dieser Ebenen die Ebene der Ecliptik, und bezeichnet mit z den Abstand des Himmelskörpers von dieser Ebene, der positiv genommen wird im nördlichen, negativ im südlichen Theile, so hat man offenbar $z = r' \operatorname{tang}\beta = r \sin\beta = r \sin i \sin u$. Die beiden übrigen Ebenen, welche ebenfalls als durch die Sonne gelegt gedacht werden, projiciren an der Himmelskugel grösste Kreise, welche die Ecliptik unter rechten Winkeln schneiden, deren Pole daher in der Ecliptik selbst liegen und 90^0 von einander abstehen. Denjenigen Pol einer jeden Ebene, auf dessen Seite die Abstände als positive gezählt werden, nenne ich den positiven Pol. Es mögen mithin N und $N + 90^0$ die Längen der positiven Pole bezeichnen, und die Abstände von den ihnen entsprechenden Ebenen sollen beziehungsweise x und y sein. Man hat dann offenbar:

$$x = r' \cos(\lambda - N) = r \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) \cos(N - \Omega) + r \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) \sin(N - \Omega) \quad (50)$$

$$y = r' \sin(\lambda - N) = r \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) \cos(N - \Omega) - r \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) \sin(N - \Omega).$$

Diese Werthe gehen über in

$$x = r \cos(N - \Omega) \cos u + r \cos i \sin(N - \Omega) \sin u$$

$$y = r \cos i \cos(N - \Omega) \sin u - r \sin(N - \Omega) \cos u.$$

Wird folglich der positive Pol der Ebene der x in den aufsteigenden Knoten selbst gestellt, so dass $N = \Omega$ ist, so hat man für die Coordinaten x, y, z die sehr einfachen Ausdrücke:

$$x = r \cos u,$$

$$y = r \cos i \sin u,$$

$$z = r \sin i \sin u.$$

Wenn aber diese Voraussetzung nicht Statt findet, so kann man doch den obigen Formeln eine ungefähr ebenso bequeme Gestalt durch Einführung von vier Hülfsgrössen a, b, A, B geben, die so bestimmt werden, dass

$$\begin{aligned}
\cos(N - ☊) &= a \sin A \\
\cos i \sin(N - ☊) &= a \cos A \\
-\sin(N - ☊) &= b \sin B \\
\cos i \cos(N - ☊) &= b \cos B
\end{aligned}$$

(siehe Art. 14, II). Dann ist offenbar

$$\begin{aligned}
x &= r a \sin(u + A) \\
y &= r b \sin(u + B) \\
z &= r \sin i \sin u.
\end{aligned}$$

54.

Die in dem Vorangehenden erklärten Relationen der Bewegung zur Ecliptik bleiben offenbar ganz die nämlichen, wenn an Stelle der Ecliptik irgend eine andere Ebene gesetzt wird, falls nur die Lage der Bahnebene gegen diese Ebene bekannt ist. Jedoch muss man dann die Ausdrücke Länge und Breite weglassen. Es bietet sich also die Aufgabe dar: *Aus der bekannten Lage der Bahnebene und einer anderen neuen Ebene gegen die Ecliptik die Lage der Bahnebene gegen diese neue Ebene herzuleiten.* Es seien $n☊$, $☊☊'$, $n☊'$ Theile grösster Kreise, welche von der Ebene der Ecliptik, von der Bahnebene und von der neuen Ebene an der Himmelskugel projicirt werden (Fig. 2). Damit die Neigung des zweiten Kreises gegen den dritten und der Ort des aufsteigenden Knotens ohne Zweideutigkeit angegeben werden könne, muss im dritten Kreise eine von zwei Richtungen ausgewählt werden, die derjenigen analog ist, welche bei der Ecliptik die Ordnung der Zeichen ist. In unserer Figur soll diese Richtung von n nach $☊'$ gehen. Ausserdem muss von beiden Halbkugeln, welche der Kreis $n☊'$ von einander trennt, die
(51) eine als der nördlichen, die andere als der südlichen Halbkugel analog angenommen werden. Diese Halbkugeln aber sind schon von selbst unterschieden, in soweit stets dasjenige als nördlich angesehen wird, was Jemandem, der in einem Kreise nach Ordnung der Zeichen vorschreitet, zur Rechten liegt (nämlich auf der innern Kugelfläche, welche unsere Figur vorstellt). In der Figur sind daher

☊, n, ☊′ die aufsteigenden Knoten des zweiten Kreises auf dem ersten, des dritten auf dem ersten, und des zweiten auf dem dritten; $180^0 - n☊☊'$, $☊n☊'$, $n☊'☊$ sind die Neigungen des zweiten gegen den ersten, des dritten gegen den ersten, des zweiten gegen den dritten. Es hängt mithin unsere Aufgabe von der Auflösung eines sphärischen Dreiecks ab, wo aus einer Seite und den anliegenden Winkeln das Uebrige gefunden werden muss. Ich übergehe hier die hinreichend bekannten gewöhnlichen Vorschriften der sphärischen Trigonometrie zur Behandlung dieses Falles, brauche dagegen zur grösseren Bequemlichkeit eine andere Methode, die aus gewissen Gleichungen, welche vergeblich in unseren trigonometrischen Büchern gesucht werden, abgeleitet ist.

Diese Gleichungen, die wir später häufig benutzen werden, sind die folgenden, wobei a, b, c die Seiten und A, B, C die diesen Seiten respective gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks bezeichnen:

$$\text{I.}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}$$

$$\text{III.}\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A}$$

Obgleich ich den Beweis dieser Sätze der Kürze halber hier übergehen muss, so kann doch ein Jeder deren Wahrheit leicht bestätigt finden in Dreiecken, in denen weder die Seiten noch die Winkel über 180^0 hinausgehen. Wenn man die Idee des sphärischen Dreiecks in der grössten Allgemeinheit auffasst, so dass weder Seiten noch Winkel durch irgend welche Grenzen beschränkt werden (was viele ausgezeichnete Vortheile gewährt, jedoch zuvor einiger Erläuterungen bedarf) so können Fälle eintreten, wo in allen vorhergehenden Gleichungen das Zeichen geändert werden muss: weil aber die frühern Zeichen offenbar wiederhergestellt werden, sobald einer der Winkel oder eine der Seiten um 360^0 vermehrt oder vermindert wird, so kann man die oben gebrauchten Zeichen stets sicher beibehalten, es mag nun aus der Seite und den anliegenden Winkeln, oder aus dem Winkel und den anliegenden Seiten das Uebrige bestimmt werden; denn stets gehen aus unseren Formeln entweder für die gesuchten Stücke die Werthe selbst hervor, oder solche, die

von den wahren um 360^0 verschieden, ihnen also gleich geltend sind. Eine vollständigere Erklärung dieses Gegenstandes will ich bis zu einer andern Gelegenheit aufsparen. Dass aber meine Vorschriften, die ich auf jene For-
(52) meln sowohl bei Lösung unserer Aufgabe als bei andern Gelegenheiten gestützt habe, in allen Fällen eine allgemeine Gültigkeit besitzen, liesse sich einstweilen mit Hülfe einer strengen Induction d. h. durch vollständige Aufzählung aller Fälle unschwer erweisen.

55.

Bezeichnet man wie oben die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ecliptik mit ☊, die Neigung mit i; ferner die Länge des aufsteigenden Knotens der neuen Ebene in der Ecliptik mit n, deren Neigung mit ε; den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahn in der neuen Ebene vom aufsteigenden Knoten der neuen Ebene in der Ecliptik (den Bogen n☊′ in Fig. 2) mit ☊′; die Neigung der Bahn gegen die neue Ebene mit i'; schliesslich den Bogen von ☊ bis ☊′ nach der Richtung der Bewegung mit Δ; — so werden die Seiten unseres sphärischen Dreiecks ☊$-n$, ☊′, Δ, und die gegenüberstehenden Winkel i', 180^0-i, ε. Man hat also nach den Formeln des vorhergehenden Artikels:

$$\sin\tfrac{1}{2}i'\sin\tfrac{1}{2}(\text{☊}'+\Delta)=\sin\tfrac{1}{2}(\text{☊}-n)\sin\tfrac{1}{2}(i+\varepsilon)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i'\cos\tfrac{1}{2}(\text{☊}'+\Delta)=\cos\tfrac{1}{2}(\text{☊}-n)\sin\tfrac{1}{2}(i-\varepsilon)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\sin\tfrac{1}{2}(\text{☊}'-\Delta)=\sin\tfrac{1}{2}(\text{☊}-n)\cos\tfrac{1}{2}(i+\varepsilon)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\cos\tfrac{1}{2}(\text{☊}'-\Delta)=\cos\tfrac{1}{2}(\text{☊}-n)\cos\tfrac{1}{2}(i-\varepsilon).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(\text{☊}'+\Delta)$ und $\sin\frac{1}{2}i'$; die beiden übrigen $\frac{1}{2}(\text{☊}'-\Delta)$ und $\cos\frac{1}{2}i'$; aus $\frac{1}{2}(\text{☊}'+\Delta)$ und $\frac{1}{2}(\text{☊}'-\Delta)$ entwickeln sich ☊′ und Δ; aus $\sin\frac{1}{2}i'$ oder $\cos\frac{1}{2}i'$ (deren Uebereinstimmung zur Prüfung der Rechnung dient) ergiebt sich i'. Die Zweideutigkeit, ob $\frac{1}{2}(\text{☊}'+\Delta)$ und $\frac{1}{2}(\text{☊}'-\Delta)$ zwischen 0 und 180^0, oder zwischen 180^0 und 360^0 zu nehmen ist, wird dadurch gehoben, dass sowohl $\sin\frac{1}{2}i'$ als $\cos\frac{1}{2}i'$ positiv werden müssen, weil der Natur der Sache nach i' innerhalb 180^0 fallen muss.

56.

Ein Beispiel zu den vorhergehenden Vorschriften. Sei $\Omega = 172^\circ 28' 13''7$, $i = 34^\circ 38' 1''1$. Sodann sei die neue Ebene dem Aequator parallel und daher $n = 180^\circ$, der Winkel ε (Schiefe der Ecliptik) $= 23^\circ 27' 55''8$, so hat man:

$\Omega - n = -\ 7^\circ 31' 46''3$	$\frac{1}{2}(\Omega - n) = -\ 3^\circ 45' 53''15$
$i + \varepsilon = 58\ \ 5\ 56,9$	$\frac{1}{2}(i + \varepsilon) = 29^\circ\ 2\ 58,45$
$i - \varepsilon = 11\ 10\ \ 5,3$	$\frac{1}{2}(i - \varepsilon) = 5\ 35\ \ 2,65$
$\log\sin\frac{1}{2}(\Omega - n) \ldots\ldots 8,817\,3026\,n$	$\log\cos\frac{1}{2}(\Omega - n) \ldots\ldots 9,999\,0618$
$\log\sin\frac{1}{2}(i + \varepsilon) \ldots\ldots 9,686\,2484$	$\log\sin\frac{1}{2}(i - \varepsilon) \ldots\ldots 8,988\,1405$
$\log\cos\frac{1}{2}(i + \varepsilon) \ldots\ldots 9,941\,6108$	$\log\cos\frac{1}{2}(i - \varepsilon) \ldots\ldots 9,997\,9342.$

Hieraus folgt (53)

$\log\sin\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(\Omega' + \Delta) \ldots 8,503\,5510\,n$	$\log\cos\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(\Omega' - \Delta) \ldots 8,758\,9134\,n$
$\log\sin\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(\Omega' + \Delta) \ldots 8,987\,2023$	$\log\cos\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(\Omega' - \Delta) \ldots 9,996\,9960$
woraus $\frac{1}{2}(\Omega' + \Delta) = 341^\circ 49' 19''01$	woraus $\frac{1}{2}(\Omega' - \Delta) + 356^\circ 41' 31''43$
$\log\sin\frac{1}{2}i' \ldots\ldots\ldots\ldots 9,009\,4368$	$\log\cos\frac{1}{2}i' \ldots\ldots\ldots\ldots 9,997\,7202.$

Wir erhalten daher $\frac{1}{2}i' = 5^\circ 51' 56''445$; $i' = 11^\circ 43' 52''89$; $\Omega' = 338^\circ 30' 50''43$; $\Delta = -14^\circ 52' 12''42$.

Uebrigens entspricht der Punkt n an der Himmelskugel offenbar dem Herbstaequinox. Es wird deshalb der Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahn im Aequator vom Frühlings-Aequinox (dessen gerade Aufsteigung) $= 158^\circ 30' 50''43$.

Zur Erläuterung des Art. 53 will ich dieses Beispiel noch weiter fortsetzen und die Formeln für die Coordinaten in Beziehung auf die drei durch die Sonne gelegten Ebenen entwickeln, deren eine dem Aequator parallel sei, während die positiven Pole der beiden übrigen Ebenen in der Rectascension 0° und 90° liegen sollen; die Abstände von diesen Ebenen seien resp. z, x, y. Bezeichnet man nun ausserdem den Abstand des heliocentrischen Orts an der Himmelskugel von den Punkten Ω und Ω' beziehungsweise mit u und u', so ist $u' = u - \Delta = u + 14^\circ 52' 12''42$; und Dasjenige, was im Art. 53 mit i, $N - \Omega$, u ausgedrückt wurde, wird hier sein: i', $180^\circ - \Omega'$, u'. So erhält man aus den dort gegebenen Formeln:

$\log a \sin A \ldots\ldots 9{,}968\,7197\,n$	$\log b \sin B \ldots\ldots 9{,}563\,8058$
$\log a \cos A \ldots\ldots 9{,}554\,6380\,n$	$\log b \cos B \ldots\ldots 9{,}959\,5519\,n$
also $A = 248^\circ\,55'\,22''97$	also $B = 158^\circ\,5'\,54''97$
$\log a \ldots\ldots 9{,}998\,7923$	$\log b \ldots\ldots 9{,}992\,0848.$

Man hat daher:

$$x = ar\sin(u' + 248^\circ\,55'\,22''97) = ar\sin(u + 263^\circ\,47'\,35''39)$$
$$y = br\sin(u' + 158\;\;\;5\;54{,}97) = br\sin(u + 172\;\;58\;\;\;7{,}39)$$
$$z = cr\sin u' \qquad\qquad\qquad = cr\sin(u + \;\;14\;\;52\;\;12{,}42)$$

wo $\log c = \log \sin i' = 9{,}308\,1870.$

Eine andere Auflösung dieses hier behandelten Problems findet man in von Zach, Monatliche Correspondenz, Band IX, S. 385.*)

57.

Es kann mithin der Abstand eines Himmelskörpers von irgend einer durch die Sonne gehenden Ebene auf die Form $kr\sin(v+K)$ zurückgeführt werden, wobei v die wahre Anomalie bezeichnet, und wo k der Sinus der Neigung der Bahn gegen diese Ebene, K der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten der Bahn in derselben Ebene ist. Soweit nun die Lage
(54) der Bahnebene, und der Apsidenlinie in letzterer, sowie die Lage der Ebene, auf welche die Abstände sich beziehen, als constant gelten können, werden auch k und K constant sein. Meist jedoch wird jene Methode in einem solchen Falle benutzt werden, wo, wenn auch die Störungen vernachlässigt werden, welche die erste und zweite Voraussetzung stets etwas afficiren, wenigstens die dritte Voraussetzung unzulässig ist. Letzteres tritt ein, sobald die Abstände auf die Ebene des Aequators bezogen werden, oder auf eine den Aequator unter rechtem Winkel in gegebener Rectascension schneidende Ebene. Denn da die Lage des Aequators wegen Praecession der Aequinoctien und überher wegen der Nutation (wenn von seiner wahren, nicht von seiner mittleren Lage die Rede ist) veränderlich ist, so werden in diesem Falle auch k und K Veränderungen, allerdings langsamen, unterworfen sein. Die Berechnung dieser Veränderungen kann ohne Schwierigkeit durch Differentialformeln bewerkstelligt

*) Vergl. Anhang Seite 53 folgende. *Anmerkung des Uebersetzers.*

werden; der Kürze wegen mag es aber hier genügen, die differentialen Veränderungen von i, Ω', Δ anzuführen, in soweit solche von den Aenderungen des $\Omega - n$ und des ε abhängen.

$$\mathrm{d}\,i' = \sin\varepsilon\sin\Omega'\,\mathrm{d}(\Omega - n) - \cos\Omega'\,\mathrm{d}\,\varepsilon$$

$$\mathrm{d}\,\Omega' = \frac{\sin i\cos\Delta}{\sin i'}\,\mathrm{d}(\Omega - n) + \frac{\sin\Omega'}{\mathrm{tang}\,i'}\,\mathrm{d}\,\varepsilon$$

$$\mathrm{d}\,\Delta = \frac{\sin\varepsilon\cos\Omega'}{\sin i'}\,\mathrm{d}(\Omega - n) + \frac{\sin\Omega'}{\sin i'}\,\mathrm{d}\,\varepsilon.$$

Sobald es sich übrigens nur darum handelt, in Beziehung auf solche veränderliche Ebenen mehre Orte eines Himmelskörpers zu berechnen, die innerhalb eines mässigen Zeitraumes (z. B. eines Jahres) liegen, so wird es gemeiniglich am Bequemsten sein, die Grössen a, A, b, B, c, C für zwei Epochen, zwischen welche jene Orte fallen, zu ermitteln, und ihre Veränderungen für die angenommenen einzelnen Zeitpunkte daraus mittelst einfacher Interpolation abzuleiten.

58.

Unsere Formeln für Abstände von gegebenen Ebenen enthalten v und r; und sobald man vorher diese Grössen aus der Zeit bestimmen muss, so kann dadurch ein Theil der Operationen noch abgekürzt, und die Arbeit merklich erleichtert werden. Denn man kann jene Abstände durch eine sehr einfache Formel sofort aus der excentrischen Anomalie in der Ellipse, oder aus der Hülfsgrösse F oder u in der Hyperbel herleiten, so dass es der Berechnung der wahren Anomalie und des radius vector überall nicht bedarf. Es wird nämlich verändert der Ausdruck $kr\sin(v + K)$

I. für die Ellipse (unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Artikels 8) in:

$$ak\cos\varphi\cos K\sin E + ak\sin K(\cos E - e).$$

Bestimmt man also l, L, λ durch folgende Gleichungen:

$$ak\sin K = l\sin L \qquad (55)$$
$$ak\cos\varphi\cos K = l\cos L$$
$$-eak\sin K = -el\sin L = \lambda,$$

so geht dieser Ausdruck über in: $l\sin(E + L) + \lambda$, wo l, L, λ constant sein werden, so lange man k, K, e als constant annehmen darf; wenn Letzteres nicht angeht, so gilt über die Berechnung jener Aenderungen Dasselbe, was im vorhergehenden Artikel bemerkt ist.

Als Beispiel wollen wir die Umformung des im Artikel 56 für x gefundenen Ausdrucks hinzufügen, wo die Länge des Perihels $= 121^\circ 17' 34''4$, $\varphi = 14^\circ 13' 31''97$, $\log a = 0{,}442\,3790$ gesetzt ist. Es wird mithin der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Ecliptik $= 308^\circ 49' 20''7 = u - v$; hieraus $K = 212^\circ 36' 56''09$. Man hat also:

$\log ak$	0,441 1713	$\log l \sin L$	0,172 7600 n
$\log \sin K$	9,731 5887 n	$\log l \cos L$	0,353 1154 n
$\log ak \cos\varphi$	0,427 6456	$L =$	$213^\circ 25' 51''30$
$\log \cos K$	9,925 4698 n	$\log l =$	0,431 6627
		$\log\lambda =$	9,563 2352
		$\lambda = +$	0,365 7929.

II. In der Hyperbel geht die Formel $kr\sin(v+K)$ nach Art. 21 über in: $\lambda + \mu \operatorname{tang} F + \nu \operatorname{secans} F$, wenn man dabei setzt: $ebk \sin K = \lambda$, $bk \operatorname{tang}\psi \cos K = \mu$, $-bk\sin K = \nu$; offenbar kann man auch diesen Ausdruck auf die Form bringen $\frac{n\sin(F+N)+\nu}{\cos F}$. — Wenn an Stelle von F die Hülfsgrösse u angewendet ist, so geht der Ausdruck $kr\sin(v+K)$ nach Art. 21 über in: $\alpha + \beta u + \frac{\gamma}{u}$, wo α, β, γ durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$\alpha = \lambda = ebk\sin K$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(\nu+\mu) = -\tfrac{1}{2} ebk \sin(K-\psi)$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\nu-\mu) = -\tfrac{1}{2} ebk\sin(K+\psi).$$

III. In der Parabel, wo die wahre Anomalie aus der Zeit unmittelbar abgeleitet wird, bleibt nichts Anderes übrig, als für den radius vector seinen Werth zu substituiren. Bezeichnet dann q den Abstand im Perihel, so wird der Ausdruck $kr\sin(v+K) = \frac{qk\sin(v+K)}{\cos\frac{1}{2}v^2}$.

59.

Die zur Bestimmung der Abstände von, durch die Sonne gelegten Ebenen gegebenen Vorschriften lassen sich offenbar auch für die Abstände

der Erde anwenden, wobei aber nur die einfachsten Fälle vorzukommen pflegen. — Es seien R der Abstand der Erde von der Sonne, L die heliocentrische Länge der Erde (die von der geocentrischen Länge der Sonne (56)
180^0 verschieden ist) und endlich X, Y, Z die Abstände der Erde von drei Ebenen, die sich in der Sonne unter rechten Winkeln schneiden. Falls nun

I. die Ebene der Z die Ecliptik selbst ist, und die Länge der Pole der übrigen Ebenen, von welchen die Abstände X und Y sind, resp. mit N und $N+90^0$ bezeichnet werden, so ist

$$X = R\cos(L-N); \quad Y = R\sin(L-N); \quad Z = 0.$$

II. Wenn die Ebene der Z dem Aequator parallel ist, und die Rectascensionen der Pole der übrigen Ebenen, von welchen die Abstände X und Y sind, resp. zu 0 und 90^0 angenommen werden, so hat man, wenn ε die Schiefe der Ecliptik bezeichnet:

$$X = R\cos L; \quad Y = R\cos\varepsilon\sin L; \quad Z = R\sin\varepsilon\sin L.$$

Die Herausgeber der neuesten Sonnentafeln, v. Zach und de Lambre, haben angefangen, auch auf die Breite der Sonne Rücksicht zu nehmen, eine Grösse, die von den Störungen der übrigen Planeten und des Mondes herrührt und kaum eine einzige Secunde erreichen kann. Bezeichnet nun B die heliocentrische Breite der Erde, welche stets der Breite der Sonne gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt ist, so hat man

im Falle I.	im Falle II.
$X = R\cos B\cos(L-N)$	$X = R\cos B\cos L$
$Y = R\cos B\sin(L-N)$	$Y = R\cos B\cos\varepsilon\sin L - R\sin B\sin\varepsilon$
$Z = R\sin B$	$Z = R\cos B\sin\varepsilon\sin L + R\sin B\cos\varepsilon.$

Für $\cos B$ kann hier immer sicher Eins, und der Winkel B in Theilen des Radius ausgedrückt für $\sin B$ gesetzt werden.

Die so gefundenen Coordinaten werden auf den Mittelpunkt der Erde bezogen. Wenn ξ, η, ζ die Abstände eines beliebigen Punktes auf der Erdoberfläche von drei Ebenen sind, die durch den Mittelpunkt der Erde gelegt und den durch die Sonne gelegten parallel sind, so werden die Abstände jenes Punktes von den durch die Sonne gehenden Ebenen offenbar sein

$$X+\xi; \quad Y+\eta; \quad Z+\zeta$$

und die Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ werden in beiden Fällen auf folgende Weise leicht bestimmt. Es sei ϱ der Halbmesser der Erdkugel (oder der

Sinus der mittleren Horizontalparallaxe der Sonne), λ die Länge desjenigen Punktes der Himmelskugel, wo sich die gerade aus dem Centrum der Erde nach dem Oberflächenpunkte gezogene Linie projicirt, β dessen Breite, α Rectascension, δ Declination, so hat man

im Falle I.	im Falle II.
$\xi = \varrho \cos\beta \cos(\lambda - N)$	$\xi = \varrho \cos\delta \cos\alpha$
$\eta = \varrho \cos\beta \sin(\lambda - N)$	$\eta = \varrho \cos\delta \sin\alpha$
$\zeta = \varrho \sin\beta$	$\zeta = \varrho \cos\delta.$

(57) Dieser Punkt der Himmelskugel entspricht offenbar dem Zenith des Orts auf der Oberfläche (wenn nämlich die Erde als eine Kugel betrachtet wird), weshalb seine gerade Aufsteigung mit der Rectascension der Mitte des Himmels, oder mit der in Bogen verwandelten Sternzeit übereinkommt, sowie die Declination mit der Polhöhe. — Falls es der Mühe werth wäre, dabei der sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen, so müsste man für δ die verbesserte Polhöhe und für ϱ den wahren Abstand des Orts vom Mittelpunkte der Erde anwenden, welche nach bekannten Vorschriften gefunden werden. Aus α und δ werden Länge und Breite λ und β durch bekannte, auch weiter unten abgehandelte Regeln hergeleitet. Uebrigens ist klar, dass λ mit der Länge des Nonagesimus und $90^0 - \beta$ mit dessen Höhe übereinkommen.

60.

Wenn x, y, z Abstände eines Himmelskörpers von drei, in der Sonne unter rechten Winkeln sich schneidenden Ebenen bezeichnen; X, Y, Z Abstände der Erde (sei es deren Mittelpunktes oder eines Punktes auf der Oberfläche) von denselben Ebenen; so ist klar, dass $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ die Abstände des Himmelskörpers von drei Ebenen sein werden, die jenen parallel durch die Erde gelegt sind, und dass diese Abstände die nämliche Relation zu dem Abstande des Körpers von der Erde und zu seinem geocentrischen Orte*) d. h. zur Lage der geraden Projectionslinie, die von der Erde nach dem Körper an der Himmelskugel gezogen wird, haben, welche x, y, z zum Abstande von der Sonne und zum heliocentrischen Orte besitzen. Es sei nun $\varDelta$ der Abstand des

*) Im weiteren Sinne; denn eigentlich wird dieser Ausdruck auf den Fall bezogen, wo die Gerade aus dem Mittelpunkte der Erde gezogen wird.

Himmelskörpers von der Erde. Man stelle sich vor, dass an der Himmelskugel ein Perpendikel von dem geocentrischen Orte auf denjenigen grössten Kreis gefällt sei, welcher der Ebene der „z" Abstände entspricht, und es sei a der Abstand des Perpendikel-Einschnitts vom positiven Pole des grössten Kreises, welcher der „x" Ebene entspricht; endlich sei b die Länge dieses Perpendikels, oder der Abstand des geocentrischen Orts von dem den „z" Distanzen entsprechenden grössten Kreise; — dann wird b die geocentrische Breite oder Declination sein, je nachdem die Ebene der „z" Distanzen die Ecliptik oder der Aequator ist; dagegen ist $a+N$ die geocentrische Länge oder Rectascension, wenn N im ersten Falle die Länge, im zweiten Falle die Rectascension des Pols der Ebene der „x" Distanzen bedeutet. —

Man hat deshalb

$$x-X=\varDelta\cos b\cos a$$
$$y-Y=\varDelta\cos b\sin a$$
$$z-Z=\varDelta\sin b.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben a und $\varDelta\cos b$, welche letztere (stets positive) Grösse durch Combination mit der dritten Gleichung b und $\varDelta$ liefert.

61. (58)

Wir haben in dem Vorangehenden eine überaus leichte Methode zur Bestimmung des geocentrischen Orts eines Himmelskörpers in Beziehung auf die Ecliptik oder den Aequator gegeben, es mag nun dieser Ort von der Parallaxe resp. der Nutation befreit oder hiemit behaftet sein. — Denn, was die Nutation betrifft, so liegt der ganze Unterschied darin, ob man die mittlere oder wahre Lage des Aequators wählt, und deshalb zählt man die Längen im ersten Falle vom mittleren Aequinox, im zweiten vom wahren, sowie man in jenem Falle die mittlere, in diesem aber die wahre Schiefe der Ecliptik braucht. Uebrigens ist von selbst klar, dass, je mehr Abkürzungen man bei der Coordinaten-Berechnung einführt, man desto mehr präliminare Operationen vornehmen muss. Es wird deshalb die Vorzüglichkeit der oben zur unmittelbaren Ableitung der Coordinaten aus der excentrischen Anomalie aufgestellten Methode besonders dann sich offenbaren, wenn viele geocentrische Orte zu bestimmen sind. Wenn man dagegen nur einen oder recht wenige geocentrische Orte zu berechnen hat, so würde es sich keineswegs der Mühe lohnen, die Arbeit der Berechnung so vieler Hülfsgrössen zu unternehmen. In einem derartigen Falle wird es sich vielmehr empfehlen, die gewöhnliche Methode nicht zu verlassen, nach welcher aus der excentrischen Anomalie die wahre und der radius vector, hieraus der heliocentrische Ort in Rücksicht auf die Ecliptik, hieraus geocentrische Länge und Breite, und endlich Rectascension und Declination gefunden werden. Damit hier nichts zu mangeln scheine, will ich die beiden letzteren Operationen noch kurz erklären.

62.

Es sei des Himmelskörpers heliocentrische Länge $=\lambda$, Breite $=\beta$; die geocentrische Länge $=l$, Breite $=b$, Abstand von der Sonne r, von der Erde Δ; endlich die heliocentrische Länge der Erde $=L$, Breite $=B$, Abstand von der Sonne $=R$. Da wir nun nicht $B=0$ setzen, so kann man unsere Formeln auch auf den Fall anwenden, wo die heliocentrischen und geocentrischen Orte nicht auf die Ecliptik, sondern auf irgend eine andere Ebene bezogen werden; nur fallen dann die Benennungen Länge und Breite weg; ausserdem kann man sogleich die Parallaxe berücksichtigen, sobald der heliocentrische Ort der Erde nicht auf deren Mittelpunkt, sondern auf einen Ort an ihrer Oberfläche unmittelbar bezogen wird. Ich setze ferner $r\cos\beta = r'$, $\Delta\cos b = \Delta'$, $R\cos B = R'$. Bezieht man jetzt den Ort des Himmelskörpers und der Erde im Raume auf drei Ebenen, deren eine die Ecliptik ist, während die Pole der zweiten und dritten in der Länge N und $N+90^0$ liegen, so ergeben sich sofort folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
r'\cos(\lambda-N)-R'\cos(L-N) &= \Delta'\cos(l-N)\\
r'\sin(\lambda-N)-R'\sin(L-N) &= \Delta'\sin(l-N)\\
r'\operatorname{tang}\beta \qquad -R'\operatorname{tang}B \qquad &= \Delta'\operatorname{tang}b,
\end{aligned}$$

(59) wobei der Winkel N ganz willkürlich ist. Die erste und zweite Gleichung bestimmen zugleich $l-N$ und Δ', woraus die dritte b giebt; aus b und Δ' wird Δ erhalten. Damit die Rechnung so bequem wie möglich ausfalle, bestimme ich den willkürlichen Winkel N auf folgende drei Arten:

I. Indem wir $N = L$ setzen, machen wir $\frac{r'}{R'}\sin(\lambda - L) = P$, $\frac{r'}{R'}\cos(\lambda - L) - 1 = Q$; dann wird $l - L$, $\frac{\varDelta'}{R'}$ und b durch folgende Formeln gefunden:

$$\operatorname{tang}(l - L) = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{\varDelta'}{R'} = \frac{P}{\sin(l - L)} = \frac{Q}{\cos(l - L)}$$

$$\operatorname{tang} b = \frac{\frac{r'}{R'}\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang} B}{\frac{\varDelta'}{R'}}.$$

II. Wenn man $N = \lambda$ setzt, wird

$$\frac{R'}{r'}\sin(\lambda - L) = P,\quad 1 - \frac{R'}{r'}\cos(\lambda - L) = Q$$

und dann ist: $\operatorname{tang}(l - \lambda) = \frac{P}{Q}$

$$\frac{\varDelta'}{r'} = \frac{P}{\sin(l - \lambda)} = \frac{Q}{\cos(l - \lambda)}$$

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang}\beta - \frac{R'}{r'}\operatorname{tang} B}{\frac{\varDelta'}{r'}}.$$

III. Wenn $N = \frac{1}{2}(\lambda + L)$, so werden l und $\varDelta'$ durch die Gleichungen gefunden:

$$\operatorname{tang}\left(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L)\right) = \frac{r' + R'}{r' - R'}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\lambda - L)$$

$$\varDelta' = \frac{(r' + R')\sin\frac{1}{2}(\lambda - L)}{\sin\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right)} = \frac{(r' - R')\cos\frac{1}{2}(\lambda - L)}{\cos\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right)}$$

und sodann b durch die oben gegebene Gleichung. Der Logarithmus des Bruches $\frac{r' + R'}{r' - R'}$ wird bequem berechnet, wenn man $\frac{R'}{r'} = \operatorname{tang}\zeta$ setzt, wodurch $\frac{r' + R'}{r' - R'} = \operatorname{tang}(45^0 + \zeta)$ wird. Auf diese Weise ist die Methode III zur Bestimmung von l noch etwas kürzer, als I und II, für die übrigen Operationen aber sind diese jener vorzuziehen.

(60) **63.**

Als Beispiel will ich die im Art. 51 bis zum heliocentrischen Orte geführte Rechnung weiter fortsetzen. Es möge jenem Orte die heliocentrische Länge der Erde $24°19'49''05 = L$ entsprechen und $\log R = 9{,}998\,0979$; die Breite B setze ich $= 0$. Man hat also $\lambda - L = -17°24'20''07$, $\log R' = \log R$, und daher nach der zweiten Methode:

$\log \frac{R'}{r'}$ 9,672 9813	$\log(1-Q)$ 9,652 6258
$\log \sin(\lambda - L)$ . . . . . 9,475 8653 n	$1-Q$ 0,449 3925
$\log \cos(\lambda - L)$ 9,979 6445	Q 0,550 6075
$\log P$ . . . . 9,148 8466 n	
$\log Q$ 9,740 8421	
Hieraus $l - \lambda = -14°21'6''75$	mithin $l = 352°34'22''23$
$\log \frac{\Delta'}{r'}$ 9,754 6117	$\log \Delta'$ 0,079 7283
$\log \operatorname{tang} \beta$ . . . . 8,802 0996 n	$\log \cos b$ 9,997 3144
$\log \operatorname{tang} b$ . . . . 9,047 4879 n	$\log \Delta$ 0,082 4139
$b = -6°21'55''07$	

Nach der dritten Methode hat man aus $\log \zeta = 9{,}672\,9813$, $\zeta = 25°13'6''31$ und daher

$\log \operatorname{tang}(45° + \zeta)$ 0,444 1091
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\lambda - L)$ . . . . 9,184 8938 n
$\log \operatorname{tang}(l - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}L)$ . . 9,629 0029 n

$$\left.\begin{aligned} l - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}L &= -23°\ \ 3'16''79 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}L &= 15\ \ 37\ \ 39{,}015 \end{aligned}\right\} \text{daraus } l = 352°34'22''225.$$

64.

In Beziehung auf die Aufgabe des Artikels 62 füge ich noch folgende Bemerkungen hinzu.

I. Setzt man in der dort erwähnten zweiten Gleichung $N = \lambda$, $N = L$, $N = l$, so erhält man:

$R' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - \lambda)$; $r' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - L)$; $r' \sin(l - \lambda) = R' \sin(l - L)$. Die erste oder zweite Gleichung dient zur bequemen Rechnungsprüfung, wenn die Methode I oder II des Art. 62 angewandt ist. So erhalten wir in unserem Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \log\sin(\lambda - L) \ldots 9{,}475\,8653\,n & l - L = -31^\circ 45' 26''82 \\ \log\frac{\Delta'}{r'} \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}754\,6117 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad 9{,}721\,2536\,n & \\ \log\sin(l - L) \ldots 9{,}721\,2536\,n & \end{array}$$

II. Die Sonne und zwei Punkte in der Ebene der Ecliptik, welche (61) Projectionen des Himmelskörperorts und des Erdorts sind, bilden ein ebenes Dreieck, dessen Seiten Δ', R', r' sind und die gegenüberstehenden Winkel entweder $\lambda - L$, $l - \lambda$, $180^\circ - l + L$; oder $L - \lambda$, $\lambda - l$, $180^\circ - L + l$. Aus diesem Grundsatze folgen die in I erwähnten Relationen von selbst.

III. Die Sonne, der wahre Ort des Himmelskörpers im Raume, und der wahre Ort der Erde bilden ein anderes Dreieck, dessen Seiten Δ, R, r sind. Werden die letzteren respective gegenüberstehenden Winkel mit S, T, $180^\circ - S - T$ bezeichnet, so ist $\frac{\sin S}{\Delta} = \frac{\sin T}{R} = \frac{\sin(S+T)}{r}$. Die Ebene dieses Dreiecks projicirt auf der Himmelskugel einen grössten Kreis, in welchem der heliocentrische Ort der Erde, der heliocentrische Ort des Himmelskörpers und des letzteren geocentrischer Ort liegen, und zwar so, dass der Abstand des zweiten vom ersten, des dritten vom zweiten, des dritten vom ersten, nach derselben Richtung gezählt, respective sind S, T, $S+T$.

IV. Entweder aus den bekannten differentialen Veränderungen der Stücke des ebenen Dreiecks, oder ebenso leicht aus den Formeln des Art. 62, kann man folgende Differential-Gleichungen herleiten:

$$\mathrm{d}l = \frac{r' \cos(\lambda - l)}{\Delta'}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{\sin(\lambda - l)}{\Delta'}\,\mathrm{d}r'$$

$$\mathrm{d}\Delta' = -r' \sin(\lambda - l)\,\mathrm{d}\lambda + \cos(\lambda - l)\,\mathrm{d}r'$$

$$\mathrm{d}b = \frac{r' \cos b \sin b \sin(\lambda - l)}{\Delta'}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{r' \cos b^2}{\Delta' \cos\beta^2}\,\mathrm{d}\beta + \frac{\cos b^2}{\Delta'}\Big(\mathrm{tang}\,\beta - \cos(\lambda - l)\,\mathrm{tang}\,b\Big)\,\mathrm{d}r',$$

wo die Glieder, welche $\mathrm{d}r'$, $\mathrm{d}\Delta'$ enthalten, mit 206 265 zu multipliciren, oder die übrigen hiemit zu dividiren sind, wenn die Aenderungen der Winkel in Secunden ausgedrückt werden.

V. Die umgekehrte Aufgabe, also die Bestimmung des heliocentrischen Orts aus dem geocentrischen, ist der oben vorgetragenen Aufgabe vollständig analog, weshalb es überflüssig sein würde, darüber noch ein Mehres beizubringen. Denn alle Formeln des Art. 62 gelten auch für jene Aufgabe, nur dass alle Grössen, welche auf den heliocentrischen Ort des Himmelskörpers sich beziehen, mit denjenigen Analogen vertauscht werden, welche auf den geocentrischen Bezug haben, mithin für L, B respective $L+180^{\circ}$, $-B$ gesetzt, oder, was dasselbe ist, für den heliocentrischen Ort der Erde der geocentrische der Sonne genommen wird.

65.

Mag es auch in dem Falle, wo aus gegebenen Elementen nur sehr wenige geocentrische Orte bestimmt werden sollen, kaum der Mühe werth sein, alle obigen Kunstgriffe anzuwenden, durch welche man von der excentrischen Anomalie sogleich zur geocentrischen Länge und Breite, und so zur
(62) Rectascension und Declination übergehen kann, weil die hieraus hervorgehenden Abkürzungen von der Menge der vorher zu berechnenden Hülfsgrössen absorbirt werden würden, — so wird doch stets die Zusammenziehung der Reduction auf die Ecliptik mit der Berechnung der geocentrischen Länge und Breite einen nicht zu verachtenden Vortheil gewähren. Wenn nämlich für die Ebene der „z“ Coordinaten die Ecliptik selbst gewählt wird, die Pole der Coordinaten-Ebenen x und y aber in die Länge ☊ und $90^{\circ}+$☊ gestellt werden, so lassen sich die Coordinaten sehr leicht ohne alle weitere Hülfsgrössen bestimmen. Man hat nämlich:

$$\begin{array}{l|l|l}
x = r\cos u & X = R'\cos(L-\Omega) & x-X = \Delta'\cos(l-\Omega) \\
y = r\cos i\sin u & Y = R'\sin(L-\Omega) & y-Y = \Delta'\sin(l-\Omega) \\
z = r\sin i\sin u & Z = R'\operatorname{tang} B & z-Z = \Delta'\operatorname{tang} b.
\end{array}$$

Ist $B=0$, so ist $R'=R$, $Z=0$. Nach diesen Formeln wird unser Beispiel durch folgende Zahlen absolvirt: $L-\Omega = 213^{\circ}12'0''32$.

$\log r$	0,325 9877	$\log R'$	9,998 0979
$\log \cos u$	9,982 4141 n	$\log \cos (L - \Omega)$	9,922 6027 n
$\log \sin u$	9,445 4714 n	$\log \sin (L - \Omega)$	9,738 4353 n
$\log x$	0,308 4018 n	$\log X$	9,920 7006 n
$\log r \sin u$	9,771 4591 n		
$\log \cos i$	9,988 5266		
$\log \sin i$	9,355 7570		
$\log y$	9,759 9857 n	$\log Y$	9,736 5332 n
$\log z$	9,127 2161 n	$Z =$	0

Daraus folgt

$\log (x - X)$	0,079 5906 n		
$\log (y - Y)$	8,480 7165 n		
daraus $(l - \Omega) =$	$181^\circ 26' 33'' 49$	$l =$	$352^\circ 34' 22'' 22$
$\log \Delta'$	0,079 7283		
$\log \operatorname{tang} b$	9,047 4878 n	$b =$	$-\ 6^\circ 21' 55'' 06$

66.

Aus der Länge und Breite eines Punktes an der Himmelskugel werden dessen gerade Aufsteigung und Abweichung durch Auflösung eines sphärischen Dreiecks bestimmt, welches von jenem Punkte und den Nordpolen der Ecliptik und des Aequators gebildet wird. Ist daher $\varepsilon =$ Schiefe der Ecliptik, $l =$ Länge, $b =$ Breite, $\alpha =$ Rectascension, $\delta =$ Declination, so sind die Seiten des Dreiecks $= \varepsilon$, $90^\circ - b$, $90^\circ - \delta$. Für die der zweiten und dritten Seite gegenüberstehenden Winkel kann man annehmen: $90^\circ + \alpha$, $90^\circ - l$ (wenn man nämlich die Idee eines sphärischen Dreiecks in grösster Allgemeinheit auffasst). Den dritten, der Seite ε gegenüberstehenden Winkel setze ich (63)
$= 90^\circ - E$. Man hat daher mittelst der Formeln des Art. 54

$$\sin (45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}(E + \alpha) = \sin (45^\circ + \tfrac{1}{2} l) \sin \big(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + b)\big)$$
$$\sin (45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \cos \tfrac{1}{2}(E + \alpha) = \cos (45^\circ + \tfrac{1}{2} l) \cos \big(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - b)\big)$$
$$\cos (45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}(E - \alpha) = \cos (45^\circ + \tfrac{1}{2} l) \sin \big(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - b)\big)$$
$$\cos (45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \cos \tfrac{1}{2}(E - \alpha) = \sin (45^\circ + \tfrac{1}{2} l) \cos \big(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon + b)\big).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(E+\alpha)$ und $\sin(45^0-\frac{1}{2}\delta)$; die beiden letzten $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ und $\cos(45^0-\frac{1}{2}\delta)$. Aus $\frac{1}{2}(E+\alpha)$ und $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ erhält man zugleich α und E. Aus $\sin(45^0-\frac{1}{2}\delta)$ oder $\cos(45^0-\frac{1}{2}\delta)$, deren Uebereinstimmung zugleich zur Prüfung der Rechnung dient, wird $45^0-\frac{1}{2}\delta$ und hieraus δ bestimmt. Die Bestimmung der Winkel $\frac{1}{2}(E+\alpha)$, $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ aus ihren Tangenten ist deshalb keiner Zweideutigkeit unterworfen, weil sowohl der Sinus als der Cosinus des Winkels $45^0-\frac{1}{2}\delta$ positiv herauskommen muss.

Die differentialen Veränderungen der Grössen α, δ werden aus den Veränderungen von l und b nach bekannten Grundsätzen auf folgende Weise gefunden:

$$d\alpha = \frac{\sin E\cos b}{\cos\delta}\,dl - \frac{\cos E}{\cos\delta}\,db$$

$$d\delta = \cos E\cos b\,dl + \sin E\,db.$$

67.

Eine andere Methode zur Auflösung der im vorhergehenden Artikel behandelten Aufgabe wird durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\cos\varepsilon\sin l = \sin\varepsilon\tang b + \cos l\tang\alpha$$

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin b + \sin\varepsilon\cos b\sin l$$

$$\cos b\cos l = \cos\alpha\cos\delta.$$

Man bestimme einen Hülfswinkel ϑ durch die Gleichung

$$\tang\vartheta = \frac{\tang b}{\sin l}, \quad \text{so hat man}$$

$$\tang\alpha = \frac{\cos(\varepsilon+\vartheta)\tang l}{\cos\vartheta}$$

$$\tang\delta = \sin\alpha\tang(\varepsilon+\vartheta).$$

Zur Prüfung der Rechnung lässt sich diesen Gleichungen noch hinzufügen:

$$\cos\delta = \frac{\cos b\cos l}{\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad \cos\delta = \frac{\cos(\varepsilon+\vartheta)\cos b\sin l}{\cos\vartheta\sin\alpha}.$$

Die Zweideutigkeit in der Bestimmung von α durch die zweite Gleichung wird dadurch beseitigt, dass $\cos\alpha$ und $\cos l$ dieselben Vorzeichen haben müssen.

(64) Diese Methode führt weniger rasch zum Ziele, wenn ausser α und δ auch E ermittelt werden soll. — Die bequemste Formel zur Bestimmung

dieses Winkels wird dann sein $\cos E = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos b} = \frac{\sin\varepsilon\cos l}{\cos\delta}$. Inzwischen kann durch diese Formel E dann nicht mit Schärfe berechnet werden, wenn $\pm\cos E$ nur wenig von der Einheit verschieden ist; ausserdem bleibt es zweifelhaft, ob E zwischen 0 und 180°, oder zwischen 180° und 360° genommen werden muss. Die erstere Unbequemlichkeit ist selten von irgend welcher Bedeutung, besonders weil zur Berechnung der differentialen Verhältnisse die grösste Schärfe des Werthes von E nicht erforderlich ist; der gedachte Zweifel aber kann mit Hülfe der Gleichung $\cos b\cos\delta\sin E = \cos\varepsilon - \sin b\sin\delta$ leicht gelöst werden, welche zeigt, dass E zwischen 0 und 180°, oder 180° und 360° genommen werden muss, je nachdem $\cos\varepsilon$ grösser oder kleiner als $\sin b\sin\delta$ ist. Offenbar bedarf es auch nicht einmal dieser Prüfung, sobald einer der beiden Winkel b, δ die Grenze von 66° 32′ nicht überschreitet; denn dann wird $\sin E$ stets positiv. Im Uebrigen könnte dieselbe Gleichung in dem schon oben angedeuteten Falle zur genaueren Bestimmung von E gebraucht werden, wenn es der Mühe werth sein sollte.

68.

Die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, also die Bestimmung von Länge und Breite aus Rectascension und Declination stützt sich auf dasselbe sphärische Dreieck. Die obigen Formeln werden diesem Zwecke angepasst durch einfache Vertauschung von b mit δ, und von l mit $-\alpha$. Wegen des häufigen Gebrauchs will ich auch diese Formeln hersetzen:

Nach der Methode des Art. 66 hat man

$$\begin{aligned}
\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}(E-l) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin\left(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right)\\
\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}(E-l) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos\left(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\right)\\
\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}(E+l) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin\left(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\right)\\
\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}(E+l) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos\left(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right).
\end{aligned}$$

Bestimmt man dagegen wie bei der andern Methode im Art. 67 den Hülfswinkel ζ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin\alpha},$$ so hat man

$$\operatorname{tang} l = \frac{\cos(\zeta - \varepsilon)\operatorname{tang}\alpha}{\cos\zeta}$$

$$\operatorname{tang} b = \sin l \operatorname{tang}(\zeta - \varepsilon).$$

(65) Zur Prüfung der Rechnung dient:

$$\cos b = \frac{\cos\delta\cos\alpha}{\cos l} = \frac{\cos(\zeta-\varepsilon)\cos\delta\sin\alpha}{\cos\zeta\sin l}.$$

Zur Bestimmung von E dienen dann ebenso wie im vorhergehenden Artikel die Gleichungen

$$\cos E = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos b} = \frac{\sin\varepsilon\cos l}{\cos\delta}$$

$$\cos b\cos\delta\sin E = \cos\varepsilon - \sin b\sin\delta.$$

Die differentialen Aenderungen von l und b ergeben sich durch die Formeln:

$$\mathrm{d}l = \frac{\sin E\cos\delta}{\cos b}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\cos E}{\cos b}\,\mathrm{d}\delta$$

$$\mathrm{d}b = -\cos E\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha + \sin E\,\mathrm{d}\delta.$$

69.

Als Beispiel wollen wir aus der Rectascension $355^0 43' 45'' 30 = \alpha$, der Declination $-8^0 47' 25'' 0 = \delta$, der Schiefe der Ecliptik $23^0 27' 59'' 26 = \varepsilon$ die Länge und Breite berechnen. Es ist also $45^0 + \frac{1}{2}\alpha = 222^0 51' 52'' 65$, $45^0 - \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta) = 37^0 39' 42'' 87$, $45^0 - \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta) = 28^0 52' 17'' 87$. Hieraus ferner

$\log\cos(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)$ .... $9{,}865\,0820\,n$ $\log\sin(45^0 + \frac{1}{2}\alpha)$ .... $9{,}832\,6803\,n$

$\log\sin(45^0 - \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta))$ ... $9{,}786\,0418$ $\log\sin(45^0 - \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta))$ .. $9{,}683\,8112$

$\log\cos(45^0 - \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta))$ ... $9{,}898\,5222$ $\log\cos(45^0 - \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta))$ .. $9{,}942\,3572$

$\log\sin(45^0 - \frac{1}{2}b)\sin\frac{1}{2}(E-l)$ .... $9{,}651\,1238\,n$

$\log\sin(45^0 - \frac{1}{2}b)\cos\frac{1}{2}(E-l)$ .... $9{,}775\,0375\,n$

daher $\frac{1}{2}(E-l) = 216^0 56' 5'' 39$; $\log\sin(45^0 - \frac{1}{2}b) = 9{,}872\,3171$

$\log\cos(45^0 - \frac{1}{2}b)\sin\frac{1}{2}(E+l)$ .... $9{,}516\,4915\,n$

$\log\cos(45^0 - \frac{1}{2}b)\cos\frac{1}{2}(E+l)$ .... $9{,}763\,6042\,n$

daher $\frac{1}{2}(E+l) = 209^0 30' 49'' 94$; $\log\cos(45^0 - \frac{1}{2}b) = 9{,}823\,9669$.

Es wird folglich $E = 426^0 26' 55'' 33$, $l = -7^0 25' 15'' 45$, oder, was auf dasselbe herauskommt, $E = 66^0 26' 55'' 33$ und $l = 352^0 34' 44'' 55$. Den Winkel $45^0 - \frac{1}{2}b$

erhält man durch den Logarithmus des Sinus $= 48^\circ 10' 58'' 12$, aus dem Logarithmus des Cosinus $= 48^\circ 10' 58'' 17$, aus der Tangente (deren Logarithmus den Unterschied jener bildet) $= 48^\circ 10' 58'' 14$; hieraus $b = -6^\circ 21' 56'' 28$.

Nach der zweiten Methode steht die Rechnung so: (66)

$\log \operatorname{tang} \delta \ldots\ldots\ 9{,}189\,3062\,n$
$\log \sin \alpha \ldots\ldots\ 8{,}871\,9792\,n$
$\log \operatorname{tang} \zeta \ldots\ldots\ 0{,}317\,3270$
$\zeta = 64^\circ\, 17'\, 6'' 83$
$\zeta - \varepsilon = 40\ \ 49\ \ 7{,}57$

$\mathrm{C}.\log \cos \zeta \ldots\ldots\ 0{,}362\,6190$
$\log \cos (\zeta - \varepsilon) \ldots\ 9{,}878\,9703$
$\log \operatorname{tang} \alpha \ldots\ldots\ 8{,}873\,1869\,n$
$\log \operatorname{tang} l \ldots\ldots\ 9{,}114\,7762\,n$
$l = 352^\circ\, 34'\, 44'' 50$
$\log \sin l \ldots\ldots\ 9{,}111\,1232\,n$
$\log \operatorname{tang} (\zeta - \varepsilon) \ldots\ 9{,}936\,3874$
$\log \operatorname{tang} b \ldots\ldots\ 9{,}047\,5106\,n$
$b = -6^\circ\, 21'\, 56'' 26$

Zur Bestimmung des Winkels E hat man die doppelte Rechnung:

$\log \sin \varepsilon \ldots\ldots\ 9{,}600\,1144$
$\log \cos \alpha \ldots\ldots\ 9{,}998\,7924$
$\mathrm{C}.\log \cos b \ldots\ldots\ 0{,}002\,6859$
$\log \cos E \ldots\ldots\ 9{,}601\,5927$
woraus $E = 66^\circ\, 26'\, 55'' 35$.

$\log \sin \varepsilon \ldots\ldots\ 9{,}600\,1144$
$\log \cos l \ldots\ldots\ 9{,}996\,3470$
$\mathrm{C}.\log \cos \delta \ldots\ldots\ 0{,}005\,1313$
$\log \cos E \ldots\ldots\ 9{,}601\,5927$

70.

Um Alles beisammen zu haben, was zur Berechnung der geocentrischen Orte erforderlich ist, muss noch Einiges über Parallaxe und Aberration hinzugefügt werden. Ich habe zwar schon oben eine Methode gegeben, wonach der von der Parallaxe afficirte, d. h. der einem Punkte auf der Erdoberfläche entsprechende Ort, unmittelbar und mit grösster Leichtigkeit zu bestimmen ist. Da aber bei der gewöhnlichen, in den Artt. 62 und folgenden behandelten Methode der geocentrische Ort auf den Mittelpunkt der Erde bezogen zu werden pflegt, in welchem Falle er von der Parallaxe befreit heisst, so muss noch eine besondere Methode zur Bestimmung der Parallaxe, welche der Unterschied zwischen beiden Orten ist, hinzugefügt werden.

Es seien deshalb die geocentrische Länge und Breite eines Himmelskörpers in Bezug auf den Erdmittelpunkt λ und β, und in Bezug auf irgend einen Punkt an der Erdoberfläche l und b; der Abstand des Körpers von dem Erdmittelpunkte $= r$, von dem Erdoberflächenpunkte $= \Delta$; es entspreche endlich an der Himmelskugel dem Zenith dieses Punktes die Länge L, die Breite B und der Halbmesser der Erde sei $= R$. Von selbst ist schon klar, dass alle Gleichungen des Art. 62 auch hier Statt finden; aber man kann sie bedeutend abkürzen, da hier R eine Grösse ausdrückt, die im Vergleiche mit r und Δ fast verschwindet. Uebrigens werden dieselben Gleichungen offenbar auch dann gelten, wenn λ, l, L, statt der Längen die Rectascensionen, und β, b, B statt der Breiten die Declinationen bedeuten. In diesem Falle sind
(67) $l-\lambda$, $b-\beta$ Rectascensions- und Declinations-Parallaxen, in jenem aber Längen- und Breiten-Parallaxen. Wenn man R als eine Grösse der ersten Ordnung betrachtet, so werden $l-\lambda$, $b-\beta$, $\Delta-r$ von derselben Ordnung sein, und wenn man die höheren Ordnungen vernachlässigt, so leitet man aus den Formeln des Art. 62 leicht ab:

$$\text{I.} \quad l-\lambda = \frac{R\cos B\sin(\lambda-L)}{r\cos\beta}$$

$$\text{II.} \quad b-\beta = \frac{R\cos B\cos\beta}{r}\left(\operatorname{tang}\beta\cos(\lambda-L)-\operatorname{tang}B\right)$$

$$\text{III.} \quad \Delta-r = -R\cos B\sin\beta\left(\operatorname{cotang}\beta\cos(\lambda-L)+\operatorname{tang}B\right).$$

Nimmt man den Hülfswinkel ϑ dabei so, dass $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\operatorname{tang}B}{\cos(\lambda-L)}$, so erhalten die Gleichungen II und III folgende Form:

$$\text{II.} \quad b-\beta = \frac{R\cos B\cos(\lambda-L)\sin(\beta-\vartheta)}{r\cos\vartheta} = \frac{R\sin B\sin(\beta-\vartheta)}{r\sin\vartheta}$$

$$\text{III.} \quad \Delta-r = -\frac{R\cos B\cos(\lambda-L)\cos(\beta-\vartheta)}{\cos\vartheta} = -\frac{R\sin B\cos(\beta-\vartheta)}{\sin\vartheta}.$$

Um in I und II die Grössen $l-\lambda$ und $b-\beta$ in Secunden zu erhalten, muss für R die mittlere, in Secunden ausgedrückte Sonnenparallaxe gesetzt werden; in III aber ist für R dieselbe, mit $206\,265''$ dividirte Parallaxe zu nehmen. Endlich kann man, ohne an Genauigkeit zu verlieren, bei den Parallaxen-Werthen statt r, λ, β auch Δ, l, b anwenden, sobald bei der umgekehrten Aufgabe aus dem mit der Parallaxe behafteten Orte der von ihr freie Ort bestimmt werden soll.

Beispiel. Es sei die gerade Aufsteigung der Sonne für den Mittelpunkt der Erde $= 220^\circ 46' 44''65 = \lambda$, die Declination $= -15^\circ 49' 43''94 = \beta$, der Abstand $= 0{,}990\,4311 = r$. Ferner die in Graden ausgedrückte Sternzeit für irgend einen Ort auf der Erdoberfläche $= 78^\circ 20' 38''0 = L$, Polhöhe des Orts $= 45^\circ 27' 57''0 = B$, mittlere Sonnenparallaxe $= 8''6 = R$. Gesucht wird der von diesem Orte aus gesehene Sonnenort und sein Sonnenabstand.

$\log R$	0,934 50	$\log R$	0,934 50	
$\log\cos B$	9,845 93	$\log\sin B$	9,852 99	
$\mathrm{C.}\log r$	0,004 18	$\mathrm{C.}\log r$	0,004 18	
$\mathrm{C.}\log\cos\beta$	0,016 79	$\mathrm{C.}\log\sin\vartheta$	0,103 17	
$\log\sin(\lambda - L)$	9,785 08	$\log\sin(\beta - \vartheta)$	9,771 52 n	
$\log(l - \lambda)$	0,586 48	$\log(b - \beta)$	0,666 36 n	
$l - \lambda =$	$+3''86$	$b - \beta =$	$-4''64$	
$l =$	$220^\circ 46' 48''51$	$b =$	$-15^\circ 49' 48''58$	
$\log\operatorname{tang} B$	0,007 06	$\log(b - \beta)$	0,666 36 n	(68)
$\log\cos(\lambda - L)$	9,899 09 n	$\log\operatorname{cotang}(\beta - \vartheta)$ ..	0,135 22	
$\log\operatorname{tang}\vartheta$	0,107 97 n	$\log r$	9,995 82	
$\vartheta =$	$127^\circ 57' 0''$	$\log 1''$	4,685 57	
$\beta - \vartheta =$	$-143^\circ 46' 44''$	$\log(r - \varDelta)$	5,482 97 n	
		$r - \varDelta =$	$-0{,}000\,0304$	
		$\varDelta =$	$0{,}990\,4615.$	

71.

Die Aberration der Fixsterne, sowie auch derjenige Theil der Aberration der Planeten und Cometen, welcher allein von der Bewegung der Erde herrührt, entspringt daraus, weil mit der ganzen Erde das Sehrohr bewegt wird, während der Lichtstrahl dessen optische Axe durchläuft. Der beobachtete Ort des Himmelskörpers (welcher auch der scheinbare, oder mit der Aberration afficirte genannt wird) wird bestimmt durch die Lage der optischen Axe eines Fernrohrs, welches so aufgestellt ist, dass der von dem Körper ausgegangene Lichtstrahl auf seinem Wege beide äusseren Enden dieser Axe berührt; diese Lage ist aber verschieden von der wahren Lage des Lichtstrahls im Raume. —

Wir wollen zwei Zeitmomente unterscheiden, t und t', wo der Lichtstrahl das vordere Ende (das Centrum des Objectivglases) und wo er das hintere Ende (den Brennpunkt des Objectivs) berührt. Die Orte dieser Enden im Raume sollen für den ersten Zeitpunkt a und b, für den späteren a' und b' heissen. Dann ist klar, dass die gerade Linie ab' die wahre Lage des Strahls im Raume ist, dass aber dem scheinbaren Orte die gerade Linie ab oder $a'b'$ (die man als parallel annehmen kann) entspricht. Auch sieht man ohne Weiteres, dass der scheinbare Ort von der Länge des Rohrs unabhängig ist. Der Unterschied zwischen der Lage der geraden Linien $b'a$, ba ist die Aberration, sowie solche für die Fixsterne Statt findet, und die Art ihrer Berechnung will ich als bekannt übergehen. Für die Irrsterne ist aber jener Unterschied noch nicht die vollständige Aberration, denn der Planet ändert in der Zeit, welche sein Lichtstrahl gebraucht, um auf die Erde herabzugelangen, seinen Ort, weshalb die Lage dieses Strahls nicht dem wahren geocentrischen Orte zur Zeit der Beobachtung entspricht. Wir wollen annehmen, dass der Lichtstrahl, welcher zur Zeit t das Fernrohr trifft, zur Zeit T vom Planeten ausgegangen sei; der Ort des Planeten im Raume zur Zeit T soll P heissen, zur Zeit t aber p. Endlich soll A der Ort des vorangehenden Endes der Axe des Rohrs für den Zeitpunkt T sein. — Nun ist klar,

1) dass die gerade Linie AP den wahren Ort des Planeten zur Zeit T,
2) die gerade Linie ap den wahren Ort zur Zeit t,
3) die gerade Linie ba oder $b'a'$ den scheinbaren Ort zur Zeit t oder t' (deren Unterschied als eine unendlich kleine Grösse betrachtet werden kann),
4) die gerade Linie $b'a$ denselben scheinbaren, von der Aberration der Fixsterne befreiten Ort

zeigen.

(69) Die Punkte P, a, b' liegen schon in einer geraden Linie, und die Theile Pa, ab' werden den Zwischenzeiten $t-T$, $t'-t$ proportional sein, wenn die Bewegung des Lichtes mit gleichförmiger Schnelligkeit vor sich geht. Das Zeit-Intervall $t'-T$ ist wegen der erstaunlichen Geschwindigkeit des Lichtes stets sehr klein, und man darf annehmen, dass in dieser Zwischenzeit die Bewegung der Erde geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich geht: also werden auch A, a, a' in gerader Richtung liegen und die Theile

Aa, aa' auch den Intervallen $t-T$, $t'-t$ proportional sein. Hieraus schliesst man leicht, dass die Geraden AP, $b'a'$ Parallellinien sind, und daher der erste Ort mit dem dritten identisch ist.

Die Zeit $t-T$ wird das Product des Abstandes Pa in 493 Zeitsecunden sein, innerhalb derer das Licht den mittleren Abstand der Erde von der Sonne durchläuft, welchen wir dabei als Einheit annehmen. Bei dieser Berechnung darf man statt der Distanz Pa auch PA oder pa annehmen, da der Unterschied von keiner Bedeutung sein kann.

Aus diesen Grundsätzen folgen drei Methoden, den scheinbaren Ort eines Planeten oder Cometen für einen beliebigen Zeitpunkt t zu bestimmen, von denen bald die eine, bald die andere den Vorzug verdient.

I. Man ziehe von der angenommenen Zeit die Zeit ab, welche das Licht gebraucht, um vom Planeten bis zur Erde zu gelangen. So erhält man die reducirte Zeit T, für welche der wahre, nach gewöhnlicher Art berechnete Ort mit dem scheinbaren Orte für die Zeit t identisch sein wird. Zur Berechnung der Reduction der Zeit $t-T$ muss die Entfernung des Planeten von der Erde bekannt sein. Gemeiniglich werden zu diesem Zwecke bequeme Hülfsmittel nicht fehlen, z. B. eine, wenn auch nur flüchtig gerechnete Ephemeride, widrigenfalls es hinreichen würde, den wahren Abstand für die Zeit t in gewöhnlicher Art aber ohne zu grosse Schärfe durch vorläufige Rechnung zu bestimmen.

II. Man berechne für die angenommene Zeit t den wahren Ort und die Entfernung, hieraus die Reduction der Zeit $t-T$ und hieraus mit Hülfe der täglichen Bewegung (in Länge und Breite, oder Rectascension und Declination) die Reduction des wahren Orts auf die Zeit T.

III. Man berechne den heliocentrischen Ort der Erde zwar für die Zeit t, den heliocentrischen Ort des Planeten aber für die Zeit T; sodann aus Combination derselben auf gewohnte Weise den geocentrischen Ort des Planeten, der um die Fixstern-Aberration vermehrt (die man auf bekannte Weise ableitet oder aus den Tafeln nimmt) den verlangten scheinbaren Ort liefern wird.

Die zweite Methode, die gewöhnlich angewandt zu werden pflegt, empfiehlt sich vor den übrigen zwar dadurch, dass es dabei der doppelten Rechnung zur Bestimmung der Entfernung nicht bedarf, leidet aber an der

Unzuträglichkeit, dass man sie nur anwenden kann, wenn mehre benachbarte Orte entweder berechnet, oder aus den Beobachtungen schon bekannt sind, indem man sonst die tägliche Bewegung nicht als gegeben ansehen kann.

(70) Die Unbequemlichkeit der ersten und dritten Methode wird gänzlich gehoben, wenn mehre einander benachbarte Orte zu berechnen sind. Denn wenn nur erst für einige der letzteren die Abstände bekannt geworden sind, so kann man sehr bequem und mit hinreichender Schärfe auf die nächstfolgenden Abstände durch die gewöhnlichen Hülfsmittel schliessen. Wenn übrigens der Abstand bekannt ist, so ist die erste Methode deshalb der dritten gemeiniglich vorzuziehen, weil es dabei der Fixstern-Aberration nicht bedarf. Muss man aber zu einer doppelten Berechnung seine Zuflucht nehmen, so empfiehlt die dritte Methode sich dadurch, dass bei der zweiten Rechnung der Ort der Erde wenigstens beibehalten werden kann.

Schon von selbst bietet sich das für die umgekehrte Aufgabe Erforderliche dar, d. h. für die Bestimmung des wahren Orts aus dem scheinbaren. Nach der ersten Methode behält man nämlich den Ort selbst unverändert bei, aber die Zeit t, welcher der angenommene Ort als scheinbarer entspricht, verwandelt man in die reducirte Zeit T, welcher derselbe Ort als wahrer Ort entsprechen wird. — Nach der Methode II behält man die Zeit t bei, aber dem angenommenen Orte fügt man die Bewegung in der Zeit $t-T$ hinzu, als ob man ihn auf eine Zeit $t+(t-T)$ reduciren wollte. — Nach der Methode III betrachtet man den angenommenen, von der Fixstern-Aberration befreiten Ort als wahren Ort für die Zeit T, aber der wahre, der Zeit t entsprechende Erdort wird beibehalten, als ob er zu jener gehörte. Die Nützlichkeit der dritten Methode wird im zweiten Buche deutlicher erhellen.

Der Vollständigkeit halber bemerke ich noch, dass der Ort der Sonne von der Aberration ganz so afficirt wird, wie der Ort eines Planeten. Da aber sowohl der Abstand von der Erde, als die tägliche Bewegung sehr nahe constant sind, so erhält auch die Aberration einen nahezu beständigen und der mittleren Bewegung der Sonne während 493 Zeitsecunden gleichen Werth, mithin $= 20''25$, welche Grösse man von der wahren Länge abziehen muss, um die scheinbare zu erhalten. Der genaue Werth der Aberration steht im zusammengesetzten Verhältnisse des Abstandes und der täglichen Bewegung, oder, was auf eins herauskommt, dieser Werth verhält sich verkehrt wie der

Abstand. Es müsste deshalb jener mittlere Werth in der Erdferne um 0″34 vermindert, in der Erdnähe aber um eben so viel vermehrt werden. Uebrigens schliessen unsere Sonnentafeln die constante Aberration — 20″25 bereits ein. Man muss mithin, um die wahre Länge zu erhalten, zu der Tafellänge 20″25 addiren.

72.

Den Schluss dieser Abtheilung sollen einige Aufgaben bilden, welche bei der Bestimmung der Planeten- und Cometen-Bahnen häufig angewandt werden. Zuerst wollen wir auf die Parallaxe zurückkommen. Wie der beobachtete Ort von ihr befreit wird, lehrt Art. 70. Da eine solche Reduction auf den Mittelpunkt der Erde, eine wenigstens genäherte Kenntniss des Abstandes des Planeten von der Erde voraussetzt, so kann dieselbe nicht vorgenommen werden, wenn die Bahn des beobachteten Planeten noch gänzlich unbekannt ist. Aber auch in diesem Falle kann man wenigstens denselben Zweck erreichen, um dessentwillen die Reduction auf den Erdmittelpunkt unternommen wird, deshalb nämlich, weil, da dieser Mittelpunkt in der Ebene der Ecliptik liegt (71) (oder doch angenommen wird, dass er dort liege), hierdurch mehre der Formeln eine grössere Einfachheit und Concinnität erhalten, als wenn die Beobachtung auf einen Punkt ausserhalb der Ebene der Ecliptik bezogen würde. In dieser Beziehung bildet es daher keinen Unterschied, ob die Beobachtung auf den Mittelpunkt der Erde, oder auf irgend einen Punkt in der Ebene der Ecliptik reducirt wird. Es ist klar, dass wenn zu diesem Zwecke der Punkt des Einschnitts der Ebene der Ecliptik mit einer geraden, vom Planeten nach dem wahren Beobachtungsorte gezogenen Linie gewählt wird, die Beobachtung selbst keiner weiteren Reduction bedarf, da der Planet aus allen Punkten jener geraden Linie auf gleiche Weise gesehen*) wird. Deshalb ist es gestattet, diesen Punkt gleichsam als fingirten Beobachtungsort dem wahren Orte zu substituiren. Die Lage jenes Punktes wird auf folgende Weise bestimmt.

*) Wenn die äusserste Genauigkeit erforderlich sein sollte, so müsste man die Zwischenzeit, innerhalb deren das Licht vom wahren Beobachtungsorte nach dem fingirten (oder umgekehrt) gelangt, zu der angenommenen Zeit addiren oder davon subtrahiren, wenn es sich um Orte handelt, die mit der Aberration behaftet sind. Aber dieser Unterschied kann kaum von irgend welcher Bedeutung sein, wenn nicht die Breite sehr klein ist.

Es sei die Länge des Himmelskörpers $= \lambda$, Breite $= \beta$, Abstand $= \Delta$, alles in Beziehung auf den wahren Ort der Beobachtung auf der Erdoberfläche, dessen Zenith die Länge l und die Breite b entsprechen. Ferner sei π der Halbmesser der Erde, L die heliocentrische Länge des Mittelpunkts der Erde, $B =$ dessen Breite, $R =$ dessen Abstand von der Sonne; endlich sei L' die heliocentrische Länge des fingirten Ortes, R' dessen Abstand von der Sonne, $\Delta + \delta$ dessen Abstand vom Himmelskörper. Dann ergeben sich ohne Weiteres folgende Gleichungen, wobei N einen willkürlichen Winkel bezeichnet:

$$R' \cos(L' - N) + \delta \cos\beta \cos(\lambda - N) = R \cos B \cos(L - N) + \pi \cos b \cos(l - N)$$
$$R' \sin(L' - N) + \delta \cos\beta \sin(\lambda - N) = R \cos B \sin(L - N) + \pi \cos b \sin(l - N)$$
$$\delta \sin\beta = R \sin B + \pi \sin b.$$

Setzt man daher

I. $(R \sin B + \pi \sin b) \operatorname{cotang} \beta = \mu$, so wird

II. $R' \cos(L' - N) = R \cos B \cos(L - N) + \pi \cos b \cos(l - N) - \mu \cos(\lambda - N)$

III. $R' \sin(L' - N) = R \cos B \sin(L - N) + \pi \cos b \sin(l - N) - \mu \sin(\lambda - N)$

IV. $\delta = \dfrac{\mu}{\cos\beta}$.

Aus den Gleichungen II und III kann R' und L', aus IV aber das Zeitintervall bestimmt werden, was zur Beobachtungszeit hinzuzulegen und in Secunden $= 493\,\delta$ sein wird.

Diese Gleichungen sind genau und allgemein und sie können auch dann angewandt werden, wenn statt der Ebene der Ecliptik der Aequator gesetzt wird, und L, L', λ, l Rectascensionen, B, β, b Declinationen bedeuten. Aber in dem hier vorzugsweise behandelten Falle, wo nämlich der fingirte Ort in der Ecliptik belegen sein muss, gestattet die Kleinheit der Grössen B, π, $L' - L$ noch einige Abkürzung der vorhergehenden Formeln. Es kann nämlich statt π die mittlere Sonnenparallaxe genommen werden, B statt $\sin B$, Eins
(72) statt $\cos B$ und $\cos(L' - L)$, $L' - L$ statt $\sin(L' - L)$. Macht man so $N = L$, so nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

I. $\mu = (RB + \pi \sin b) \operatorname{cotang} \beta$

II. $R' = R + \pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L)$

III. $L' - L = \dfrac{\pi \cos b \sin(l - L) - \mu \sin(\lambda - L)}{R'}$.

Eigentlich müssen hier zwar B, π, $L'-L$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden; aber man sieht, dass, wenn man jene Winkel in Secunden ausdrückt, die Gleichungen I und III ohne Aenderung beibehalten werden können, für II aber gesetzt werden muss:

$$R' = R + \frac{\pi \cos b \cos(l-L) - \mu \cos(\lambda - L)}{206\,265''}.$$

Uebrigens kann in Formel III für den Nenner R' ohne merklichen Irrthum stets R genommen werden. Die Reduction der Zeit wird aber beim Ausdrucke der Winkel in Secunden $= \dfrac{493^s . \mu}{206\,265'' . \cos\beta}$.

73.

Beispiel: Es sei $\lambda = 354^\circ 44' 54''$, $\beta = -4^\circ 59' 32''$, $l = 24^\circ 29'$, $b = 46^\circ 53'$, $L = 12^\circ 28' 54''$, $B = +0''49$, $R = 0{,}998\,8839$, $\pi = 8''60$; so steht die Rechnung wie folgt:

$\log R$	9,999 51	$\log \pi$	0,934 50
$\log B$	9,690 20	$\log \sin b$	9,863 30
$\log BR$	9,689 71	$\log \pi \sin b$	0,797 80

Hieraus $\log(BR + \pi \sin b)$ 0,830 40

$\log \operatorname{cotang} \beta$ .... 1,058 73 n

$\log \mu$ .... 1,889 13 n

$\log \pi$	0,934 50	$\log \mu$	1,889 13 n
$\log \cos b$	9,834 73	$\log 1''$	4,685 57
$\log 1''$	4,685 57	$\log \cos(\lambda - L)$	9,978 86
$\log \cos(l-L)$	9,990 40		6,553 56 n
	5,445 20	N. Z.	$= -0{,}000\,3577$
N. Z.	$= +0{,}000\,0279$		

Hieraus erhält man $R' = R + 0{,}000\,3856 = 0{,}999\,2695$. Ferner ist (73)

$\log \pi \cos b$	0,769 23	$\log \mu$	1,889 13 n
$\log \sin(l-L)$	9,317 94	$\log \sin(\lambda - L)$	9,483 71 n
Compl. $\log R'$	0,000 32	Compl. $\log R'$	0,000 32
	0,087 49		1,373 16
N. Z.	$= +1''22$	N. Z.	$= +23''61$

Hieraus erhält man $L' = L - 22''39$. Zuletzt hat man

$\log \mu$	1,889 13 n
C. log 206 265	4,685 57
log 493	2,692 85
C. log cos β	0,001 65
	9,269 20 n,

und daher die Reduction der Zeit $= -0^{s}186$ und deshalb von keiner Bedeutung.

74.

Eine andere Aufgabe: *aus dem geocentrischen Orte eines Himmelskörpers und der Lage der Bahnebene dessen heliocentrischen Ort in der Bahn abzuleiten* — ist der vorstehenden in so weit verwandt, als sie ebenfalls abhängig ist von dem Einschnitte einer geraden, zwischen der Erde und dem Himmelskörper gezogenen Linie mit einer der Lage nach gegebenen Ebene. Die Auflösung wird sehr bequem aus den Formeln des Art. 65 erhalten, wo die Bezeichnung der Charaktere folgende war:

L Länge der Erde, R ihr Abstand von der Sonne; die Breite B setze ich $= 0$ (da der Fall, wo sie nicht $= 0$ ist, auf diesen leicht mittelst des Artikels 72 zurückgeführt werden kann), woraus dann $R' = R$; $l =$ geocentrische Länge des Himmelskörpers, b dessen Breite, Δ sein Abstand von der Erde, r Abstand von der Sonne, u Argument der Breite, Ω Länge des aufsteigenden Knotens, i Neigung der Bahn.

So hat man die Gleichungen:

$$\text{I.}\quad r\cos u - R\cos(L-\Omega) = \Delta\cos b\cos(l-\Omega)$$

$$\text{II.}\quad r\cos i\sin u - R\sin(L-\Omega) = \Delta\cos b\sin(l-\Omega)$$

$$\text{III.}\quad r\sin i\sin u = \Delta\sin b.$$

Multiplicirt man die Gleichung I mit $\sin(L-\Omega)\sin b$, die Gleichung II mit $-\cos(L-\Omega)\sin b$, III mit $-\sin(L-l)\cos b$, so wird, nach Addirung der Producte,

$$\cos u\sin(L-\Omega)\sin b - \sin u\cos i\cos(L-\Omega)\sin b - \sin u\sin i\sin(L-l)\cos b = 0,$$

woraus dann

$$\text{IV.}\quad \tang u = \frac{\sin(L-\Omega)\sin b}{\cos i\cos(L-\Omega)\sin b + \sin i\sin(L-l)\cos b}.$$

Multiplicirt man aber I mit $\sin(l - \Omega)$, II mit $-\cos(l - \Omega)$, so wird, nach (74)
Addition der Producte,

$$\text{V.}\quad r = \frac{R \sin(L - l)}{\sin u \cos i \cos(l - \Omega) - \cos u \sin(l - \Omega)}.$$

Die Zweideutigkeit in Bestimmung von u aus Gleichung IV wird von selbst durch Gleichung III gehoben, die zeigt, dass u zwischen 0 und 180^0, oder zwischen 180^0 und 360^0 genommen werden müsse, je nachdem die Breite b positiv oder negativ ist. Ist aber $b = 0$, so zeigt die Gleichung V, dass $u = 0$, oder $u = 180^0$ gesetzt werden muss, je nachdem $\sin(L - l)$ und $\sin(l - \Omega)$ verschiedene Zeichen haben, oder dieselben Zeichen.

Die numerische Berechnung der Formeln IV und V kann auf verschiedene Weise durch Einführung von Hülfswinkel abgekürzt werden. Z. B.

setzt man $\dfrac{\operatorname{tang} b \cos(L - \Omega)}{\sin(L - l)} = \operatorname{tang} A$, so wird $\operatorname{tang} u = \dfrac{\sin A \operatorname{tang}(L - \Omega)}{\sin(A + i)}$;

setzt man $\dfrac{\operatorname{tang} i \sin(L - l)}{\cos(L - \Omega)} = \operatorname{tang} B$, so wird $\operatorname{tang} u = \dfrac{\cos B \sin b \operatorname{tang}(L - \Omega)}{\sin(B + b) \cos i}$.

Ganz ebenso erhält die Gleichung V durch Einführung eines Hülfswinkels, dessen Tangente $= \cos i \operatorname{tang} u$ oder $= \dfrac{\operatorname{tang}(l - \Omega)}{\cos i}$ ist, eine concinnere Form. So wie wir die Formel V aus Combination der Gleichungen I und II erhielten, so gelangen wir durch Combination der Gleichungen II und III zu folgender:

$$r = \frac{R \sin(L - \Omega)}{\sin u\,(\cos i - \sin i \sin(l - \Omega) \operatorname{cotang} b)}$$

und ebenso durch Combination der Gleichungen I und III zu

$$r = \frac{R \cos(L - \Omega)}{\cos u - \sin u \sin i \cos(l - \Omega) \operatorname{cotang} b}.$$

Beide lassen sich auf gleiche Weise wie V durch Einführung von Hülfswinkeln noch einfacher machen. Auflösungen, die aus dem Vorstehenden resultiren, findet man gesammelt und durch ein Beispiel erläutert in von Zach, Monatliche Correspondenz, Band V, S. 540*), weshalb ich deren weitere Entwicklung hier übergehe. Wenn ausser u und r auch der Abstand Δ bestimmt werden soll, so kann dies durch Gleichung III geschehen.

---

*) Der vollständige Abdruck dieser hier citirten Abhandlung von Gauss findet sich im Anhange, Seite 42—45. *Anmerkung des Uebersetzers.*

75.

Eine andere Auflösung der vorhergehenden Aufgabe stützt sich auf den im Art. 64 III vorgetragenen Satz, dass der heliocentrische Ort der Erde, sowie der geocentrische Ort des Himmelskörpers und dessen heliocentrischer Ort in einem und demselben grössten Kreise der Kugel liegen. Es seien in Fig. 3 jene Orte beziehungsweise T, G, H; ferner ☊ der Ort des aufsteigenden Knotens;
(75) ☊T, ☊H Theile der Ecliptik und der Bahn; GP ein auf die Ecliptik aus G herabgelassenes Loth, was daher gleich b ist. Hieraus und aus dem Bogen $PT = L - l$ wird der Winkel T und der Bogen TG bestimmt. Dann sind in dem sphärischen Dreiecke ☊HT gegeben der Winkel ☊ $= i$, der Winkel T und die Seite ☊$T = L -$ ☊, woraus die beiden übrigen Seiten ☊$H = u$ und TH abgeleitet werden. Endlich wird $HG = TG - TH$ und $r = \frac{R \sin TG}{\sin HG}$, $\varDelta = \frac{R \sin TH}{\sin HG}$.

76.

Im Art. 52 habe ich gezeigt, wie die differentialen Veränderungen der heliocentrischen Länge und Breite und des curtirten Abstandes durch die Veränderung des Argumentes der Breite u, der Neigung i und des Radius vector r ausgedrückt werden können, und hernach (Art. 64, IV) habe ich aus jenen die Veränderungen der geocentrischen Länge und Breite l, b abgeleitet. Durch Combination jener Formeln werden daher $\mathrm{d}l$ und $\mathrm{d}b$ durch $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}i$, d☊, $\mathrm{d}r$ ausgedrückt erhalten. Es ist aber der Mühe werth, zu zeigen, wie man auch bei dieser Rechnung der Reduction des heliocentrischen Orts auf die Ecliptik überhoben bleiben kann, ebenso wie ich im Art. 65 den geocentrischen Ort unmittelbar aus dem heliocentrischen Orte in der Bahn abgeleitet habe. Zur grösseren Vereinfachung der Formeln, will ich die Breite der Erde vernachlässigen, da sie wenigstens bei den Differential-Formeln keinen merklichen Einfluss haben kann. Es dienen also hier folgende Formeln, bei denen der Kürze wegen ω für $l -$ ☊ und, wie oben, $\varDelta'$ für $\varDelta \cos b$ geschrieben ist:

$$\varDelta' \cos\omega = r\cos u - R\cos(L-\Omega) = \xi$$
$$\varDelta' \sin\omega = r\cos i \sin u - R\sin(L-\Omega) = \eta$$
$$\varDelta' \operatorname{tang} b = r\sin i \sin u = \zeta.$$

Aus Differentiation derselben erhält man:

$$\cos\omega \,.\, \mathrm{d}\varDelta' - \varDelta' \sin\omega \,.\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\xi$$
$$\sin\omega \,.\, \mathrm{d}\varDelta' + \varDelta' \cos\omega \,.\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\eta$$
$$\operatorname{tang} b \,.\, \mathrm{d}\varDelta' + \frac{\varDelta}{\cos b}\mathrm{d}b = \mathrm{d}\zeta$$

und hieraus durch Elimination

$$\mathrm{d}\omega = \frac{-\sin\omega \,.\, \mathrm{d}\xi + \cos\omega \,.\, \mathrm{d}\eta}{\varDelta'}$$
$$\mathrm{d}b = \frac{-\cos\omega\sin b \,.\, \mathrm{d}\xi - \sin\omega\sin b \,.\, \mathrm{d}\eta + \cos b \,.\, \mathrm{d}\zeta}{\varDelta}.$$

Wenn in diesen Formeln für ξ, η, ζ ihre Werthe gehörig substituirt werden, so erhält man $\mathrm{d}\omega$ und $\mathrm{d}b$ durch $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}i$, $\mathrm{d}\Omega$ ausgedrückt. Dann werden, da $\mathrm{d}l = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\Omega$ ist, die partiellen Differentiale von l, b sich so verhalten:

$$\text{I.}\quad \varDelta' \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\right) = -\sin\omega\cos u + \cos\omega\sin u\cos i \tag{76}$$
$$\text{II.}\quad \frac{\varDelta'}{r}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u}\right) = \sin\omega\sin u + \cos\omega\cos u\cos i$$
$$\text{III.}\quad \frac{\varDelta'}{r}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}i}\right) = -\cos\omega\sin u\sin i$$
$$\text{IV.}\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\Omega}\right) = 1 + \frac{R}{\varDelta'}\cos(L-\Omega-\omega) = 1 + \frac{R}{\varDelta'}\cos(L-l)$$
$$\text{V.}\quad \varDelta\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r}\right) = -\cos\omega\cos u\sin b - \sin\omega\sin u\cos i\sin b + \sin u\sin i\cos b$$
$$\text{VI.}\quad \frac{\varDelta}{r}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\right) = \cos\omega\sin u\sin b - \sin\omega\cos u\cos i\sin b + \cos u\sin i\cos b$$
$$\text{VII.}\quad \frac{\varDelta}{r}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}i}\right) = \sin\omega\sin u\sin i\sin \mathrm{b} + \sin u\cos i\cos b$$
$$\text{VIII.}\quad \frac{\varDelta}{R}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\Omega}\right) = \sin b\sin(L-\Omega-\omega) = \sin b\sin(L-l).$$

Die Formeln IV und VIII erscheinen hier bereits in einer für die Rechnung sehr bequemen Form. Die Formeln I, III und V aber können durch naheliegende Substitutionen concinner redigirt werden, nämlich:

$$\text{I}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{R}{r\varDelta'}\sin(L-l)$$

$$\text{III}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}i}\right) = -\cos\omega\,\mathrm{tang}\,b$$

$$\text{V}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{R}{r\varDelta}\cos(L-l)\sin b = -\frac{R}{r\varDelta'}\cos(L-l)\sin b\cos b.$$

Endlich können auch die übrigen Formeln II, VI, VII durch Einführung gewisser Hülfswinkel noch vereinfacht werden, was auf folgende Weise sehr bequem geschieht.

Man bestimme die Hülfswinkel M, N durch die Formeln $\mathrm{tang}\,M = \frac{\mathrm{tang}\,\omega}{\cos i}$, $\mathrm{tang}\,N = \sin\omega\,\mathrm{tang}\,i = \mathrm{tang}\,M\cos\omega\sin i$. Dann wird zugleich

$$\frac{\cos M^2}{\cos N^2} = \frac{1+\mathrm{tang}\,N^2}{1+\mathrm{tang}\,M^2} = \frac{\cos i^2 + \sin\omega^2\sin i^2}{\cos i^2 + \mathrm{tang}\,\omega^2} = \cos\omega^2.$$

Die Beseitigung der Zweideutigkeit bei Bestimmung von M und N aus den Tangenten kann nach Willkür und daher auch so geschehen, dass man

$$\frac{\cos M}{\cos N} = +\cos\omega,\quad \text{mithin}\ \frac{\sin N}{\sin M} = +\sin i$$

nimmt. Sodann gehen die Formeln II, VI und VII in folgende über:

(77)
$$\text{II}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{r\sin\omega\cos(M-u)}{\varDelta'\sin M}$$

$$\text{VI}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{r}{\varDelta}\left\{\cos\omega\sin i\cos(M-u)\cos(N-b) + \sin(M-u)\sin(N-b)\right\}$$

$$\text{VII}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}i}\right) = \frac{r\sin u\cos i\cos(N-b)}{\varDelta\cos N}.$$

Diese Transformationen werden in Beziehung auf die Formeln II und VII Jedem klar sein. Bezüglich der Formel VI aber scheint eine Erläuterung am Platze. Wenn man nämlich bei Formel VI zuerst für u setzt: $M-(M-u)$, so erhält man:

$$\frac{\varDelta}{r}\left(\frac{db}{du}\right) = \cos(M-u)\left\{\cos\omega\,\sin M\sin b - \sin\omega\,\cos i\cos M\sin b + \sin i\cos M\cos b\right\}$$
$$-\sin(M-u)\left\{\cos\omega\cos M\sin b + \sin\omega\cos i\sin M\sin b - \sin i\sin M\cos b\right\}.$$

Nun ist

$$\cos\omega\sin M = \cos i^2\cos\omega\sin M + \sin i^2\cos\omega\sin M = \sin\omega\cos i\cos M + \sin i^2\cos\omega\sin M;$$

weshalb der erstere Theil jenes Ausdruckes übergeht in:

$$\sin i\cos(M-u)\left\{\sin i\cos\omega\sin M\sin b + \cos M\cos b\right\}$$
$$= \sin i\cos(M-u)\left\{\cos\omega\sin N\sin b + \cos\omega\cos N\cos b\right\} = \cos\omega\sin i\cos(M-u)\cos(N-b).$$

Ebenso wird $\cos N = \cos\omega^2 \cos N + \sin\omega^2 \cos N = \cos\omega \cos M + \sin\omega \cos i \sin M$; wodurch der zweite Theil des Ausdrucks übergeht in:

$$-\sin(M-u)\left\{\cos N \sin b - \sin N \cos b\right\} = \sin(M-u)\sin(N-b).$$

Hieraus folgt sofort der Ausdruck VI*. —

Der Hülfswinkel M kann auch zur Transformation der Formel I benutzt werden, die nach dessen Einführung die Gestalt annimmt:

$$\text{I}^{**}.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\sin\omega \sin(M-u)}{\varDelta' \sin M},$$

aus deren Vergleichung mit Formel I* folgt:

$$-R\sin(L-l)\sin M = r\sin\omega\sin(M-u);$$

wonach dann auch der Formel II* die etwas einfachere Form zugetheilt werden kann:

$$\text{II}^{**}.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u}\right) = -\frac{R}{\varDelta'}\sin(L-l)\,\mathrm{cotang}(M-u).$$

Um die Formel VI* noch mehr zusammenzuziehen, muss man einen neuen Hülfswinkel einführen, was auf doppelte Weise geschehen kann, indem (78)
man nämlich entweder $\mathrm{tang}\,P = \frac{\mathrm{tang}(M-u)}{\cos\omega \sin i}$, oder $\mathrm{tang}\,Q = \frac{\mathrm{tang}(N-b)}{\cos\omega\sin i}$ setzt, wodurch man dann erhält:

$$\text{VI}^{**}.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{r\sin(M-u)\cos(N-b-P)}{\varDelta \sin P} = \frac{r\sin(N-b)\cos(M-u-Q)}{\varDelta\sin Q}.$$

Uebrigens sind die Hülfsgrössen M, N, P, Q nicht rein fictiv, und es lässt sich leicht angeben, was einer jeden an der Himmelskugel entspricht, so dass auf diese Weise mehren der vorstehenden Gleichungen noch eine elegantere Darstellung durch Bogen und Winkel an der Kugel gegeben werden könnte. Ich verweile dabei um so weniger, da sie bei der numerischen Berechnung die oben behandelten Formeln nicht überflüssig machen können.

77.

Das in dem vorangehenden Artikel Entwickelte enthält in Verbindung mit dem, was in den Artikeln 15, 16, 20, 27, 28 für die einzelnen Arten der Kegelschnitte gesagt worden, Alles, was zur Berechnung derjenigen differentialen Veränderungen erforderlich ist, die im geocentrischen Orte durch Veränderungen der einzelnen Elemente entstehen. Zur besseren Erläuterung dieser Vorschriften wollen wir das in den Artt. 13, 14, 51, 63, 65 tractirte Beispiel wieder vornehmen. Zuerst will ich nach Anleitung des vorhergehenden Artikels dl und db durch dr, du, di, $d\Omega$ ausdrücken, wobei die Rechnung so steht:

$\log\operatorname{tang}\omega$ 8,401 13	$\log\sin\omega$ .... 8,400 99 n	$\log\operatorname{tang}(M-u)$ 9,419 32 n
$\log\cos i$ 9,988 53	$\log\operatorname{tang} i$ 9,367 23	$\log\cos\omega\sin i$ ... 9,355 62 n
$\log\operatorname{tang} M$ 8,412 60	$\log\operatorname{tang} N$ ..... 7,768 22 n	$\log\operatorname{tang} P$ 0,063 70
$M = 1^\circ 28' 52''$	$N = 179^\circ 39' 50''$	$P = 49^\circ 11' 13''$
$M-u = 165\ 17\ 8$	$N-b = 186\ 1\ 45$	$N-b-P = 136\ 50\ 32$

I*	II**	III*
$\log\sin(L-l)$ ... 9,721 25	(*) 9,639 62	$\log\cos\omega$ .... 9,999 86 n
$\log R$ 9,998 10	$\log\cot(M-u)$ 0,580 68 n	$\log\operatorname{tang} b$ .... 9,047 49 n
C. $\log\Delta'$ 9,920 27	$\log\left(\frac{dl}{du}\right)$ 0,220 30	$\log\left(\frac{dl}{di}\right)$ .... 9,047 35 n
(*) 9,639 62		
C. $\log r$ 9,674 01		
$\log\left(\frac{dl}{dr}\right)$ 9,313 63		

(79)

IV	V*	VI**
$\log\frac{R}{\Delta'}$ 9,918 37	(**) 9,847 93	$\log\frac{r}{\Delta}$ .... 0,243 57 n
$\log\cos(L-l)$ .. 9,929 56	$\log\sin b\cos b$ .. 9,042 12 n	$\log\sin(M-u)$ .. 9,404 84
(**) 9,847 93	C. $\log r$ 9,674 01	$\log\cos(N-b-P)$ 9,863 01 n
$=\log\left(\frac{dl}{d\Omega}-1\right)$	$\log\left(\frac{db}{dr}\right)$ 8,564 06	C. $\log\sin P$ 0,120 99
		$\log\left(\frac{db}{du}\right)$ .... 9,632 41 n

VII*	VIII
$\log r\sin u\cos i$ .. 9,759 99 n	(*) 9,639 62
$\log\cos(N-b)$ .. 9,997 59 n	$\log\sin b\cos b$ .. 9,042 12 n
C. $\log\Delta$ 9,917 59	$\log\left(\frac{db}{d\Omega}\right)$ ...... 8,681 74 n
C. $\log\cos N$ ..... 0,000 01 n	
$\log\left(\frac{db}{di}\right)$ .... 9,675 18 n	

Die Zusammenstellung dieser Werthe ergiebt

$$dl = +0{,}205\,89\,dr + 1{,}660\,73\,du - 0{,}111\,52\,di + 1{,}704\,58\,d\Omega$$
$$db = +0{,}036\,65\,dr - 0{,}428\,95\,du - 0{,}473\,35\,di - 0{,}048\,05\,d\Omega.$$

Kaum bedarf es wohl der schon häufig wiederholten Bemerkung, dass entweder die Aenderungen $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}i$, $\mathrm{d}\Omega$ in Theilen des Radius auszudrücken, oder die Coefficienten von $\mathrm{d}r$ mit $206\,265''$ zu multipliciren sind, wenn erstere in Secunden verstanden werden.

Bezeichnet man nun die Länge des Perihels (die in unserem Beispiele $= 52^\circ 18' 9''30$ ist) mit Π und die wahre Anomalie mit v, so ist die Länge in der Bahn $= u + \Omega = v + \Pi$, und daher $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v + \mathrm{d}\Pi - \mathrm{d}\Omega$, und wenn man diesen Werth in die vorangehenden Formeln substituirt, so erhält man $\mathrm{d}l$ und $\mathrm{d}b$ durch $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\Pi$, $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}i$ ausgedrückt. Es erübrigt daher nur, $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}v$ nach Anleitung der Artikel 15 und 16 durch die differentialen Aenderungen der elliptischen Elemente darzustellen. (Bei der folgenden Rechnung bedeutet das Symbol M nicht mehr unseren Hülfswinkel, sondern — wie im ersten Abschnitte — die mittlere Anomalie.)

In dem Beispiele des Art. 14 war $\log \frac{r}{a} = 9{,}903\,55 = \log\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a}\right)$ (80)

$\log \frac{aa}{rr}$	0,192 90	$\log a$	0,422 44
$\log \cos\varphi$	9,986 52	$\log \operatorname{tang}\varphi$	9,403 20
$\log\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}M}\right)$	0,179 42	$\log \sin v$	9,849 31 n
$2 - e\cos E =$	1,800 85	$\log\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}M}\right)$	6,674 95 n
$ee =$	0,060 18	$\log a$	0,422 44
	1,740 67	$\log \cos\varphi$	9,986 52
$\log$	0,240 72	$\log \cos v$	9,849 66
$\log \frac{aa}{rr}$	0,192 90	$\log\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)$	0,258 62 n
$\log \sin E$	9,766 34 n		
$\log\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\right)$	0,199 96 n		

Hieraus erhält man

$$\mathrm{d}v = +1{,}511\,54\,\mathrm{d}M - 1{,}584\,75\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}r = -9{,}473\,10\,\mathrm{d}M - 1{,}813\,93\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}800\,85\,\mathrm{d}a$$

und nach Substitution dieser Werthe in die früheren Formeln folgt:

$$\mathrm{d}l = +2{,}412\,87\,\mathrm{d}M - 3{,}005\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}164\,88\,\mathrm{d}a + 1{,}660\,73\,\mathrm{d}\Pi$$
$$- 0{,}111\,52\,\mathrm{d}i + 0{,}043\,85\,\mathrm{d}\Omega$$
$$\mathrm{d}b = -0{,}665\,72\,\mathrm{d}M + 0{,}613\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}029\,25\,\mathrm{d}a - 0{,}428\,95\,\mathrm{d}\Pi$$
$$- 0{,}473\,35\,\mathrm{d}i + 0{,}380\,90\,\mathrm{d}\Omega.$$

Nimmt man an, dass die Zeit, welcher der berechnete Ort entspricht, um n Tage von der Epoche entfernt ist, und wird die mittlere Länge für die Epoche mit N, die tägliche Bewegung mit τ bezeichnet, so ist $M = N + n\tau - \Pi$, und daher $\mathrm{d}M = \mathrm{d}N + n\,\mathrm{d}\tau - \mathrm{d}\Pi$. In unserem Beispiele ist die dem berechneten Orte entsprechende Zeit = October 17,415 07 des Jahres 1804 im Meridiane von Paris. Wenn mithin für die Epoche der Beginn des Jahres 1805 gesetzt wird, so ist $n = -74{,}584\,93$; die für jene Epoche gesetzte mittlere Länge war $= 41^\circ 52' 21''61$ und die tägliche Bewegung $= 824''7988$. Substituirt man nun in die eben gefundenen Formeln für $\mathrm{d}M$ seinen Werth, so verhalten sich die durch die alleinigen Veränderungen der Elemente ausgedrückten differentialen Veränderungen des geocentrischen Orts, wie folgt:

$$\mathrm{d}l = 2{,}412\,87\,\mathrm{d}N - 179{,}96\,\mathrm{d}\tau - 0{,}752\,14\,\mathrm{d}\Pi - 3{,}005\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}164\,88\,\mathrm{d}a$$
$$- 0{,}111\,52\,\mathrm{d}i + 0{,}043\,85\,\mathrm{d}\Omega$$
$$\mathrm{d}b = -0{,}665\,72\,\mathrm{d}N + 49{,}65\,\mathrm{d}\tau + 0{,}236\,77\,\mathrm{d}\Pi + 0{,}613\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}029\,35\,\mathrm{d}a$$
$$- 0{,}473\,35\,\mathrm{d}i + 0{,}380\,90\,\mathrm{d}\Omega.$$

(81) Wird des Himmelskörpers Masse entweder vernachlässigt, oder wenigstens als bekannt angesehen, so sind τ und a von sich gegenseitig abhängig, und somit kann man entweder $\mathrm{d}\tau$ oder $\mathrm{d}a$ aus den Formeln eliminiren. Da nämlich, nach Art. 6, $\tau a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{(1+\mu)}$, so ist $\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}a}{a}$, in welcher Formel, wenn $\mathrm{d}\tau$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden soll, man auch τ ebenso ausdrücken muss. Auf diese Weise ist unserem Beispiele

$\log \tau$	2,916 35
$\log 1''$	4,685 57
$\log \frac{3}{2}$	0,176 09
$\mathrm{C.}\log a$	9,577 56
$\log \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}a}$	7,355 57 n,

oder $\mathrm{d}\tau = -0{,}002\,2676\,\mathrm{d}a$ und $\mathrm{d}a = -440{,}99\,\mathrm{d}\tau$, und durch Substitution dieses Werthes in unsere Formeln ergiebt sich endlich als letzte Form:

$$\mathrm{d}l = 2{,}412\,87\,\mathrm{d}N - 252{,}67\,\mathrm{d}7 - 0{,}752\,14\,\mathrm{d}\Pi - 3{,}005\,31\,\mathrm{d}\varphi$$
$$- 0{,}111\,52\,\mathrm{d}i + 0{,}043\,85\,\mathrm{d}\Omega$$
$$\mathrm{d}b = -0{,}665\,72\,\mathrm{d}N + 36{,}71\,\mathrm{d}7 + 0{,}236\,77\,\mathrm{d}\Pi + 0{,}613\,31\,\mathrm{d}\varphi$$
$$- 0{,}473\,35\,\mathrm{d}i + 0{,}380\,90\,\mathrm{d}\Omega.$$

Bei Entwickelung dieser Formeln haben wir vorausgesetzt, dass sämmtliche Aenderungen $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}7$, $\mathrm{d}\Pi$, $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}i$, $\mathrm{d}\Omega$ in Theilen des Radius ausgedrückt seien; offenbar aber werden wegen der Homogeneität aller Theile dieselben Formeln auch dann gelten, wenn alle jene Aenderungen in Secunden ausgedrückt sind.*)

---

*) Wegen der bei mehren Zahlen des Art. 77 vorgenommenen Aenderungen vergl. die Andeutung im Druckfehler-Verzeichnisse der lateinischen Ausgabe, sowie den Ergänzungsband zu den Astronom. Nachrichten, pag. 181. *Anmerkung des Uebersetzers.*