Erstes Buch.

Allgemeine Relationen unter den Grössen, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmt werden.

Erster Abschnitt.

Relationen, die einen einzelnen Ort in der Bahn betreffen.

1.

Wir wollen die Bewegungen der Himmelskörper in diesem Werke nur insoweit betrachten, als solche von der Anziehungskraft der Sonne abhängig sind. Ausgeschlossen bleiben daher hier alle secundären Planeten, ingleichen die Störungen, welche die Primären wechselseitig auf sich ausüben, sowie auch alle rotatorischen Bewegungen. Die bewegten Körper selbst wollen wir als mathematische Punkte betrachten und voraussetzen, dass alle Bewegungen nach Massgabe der nachfolgenden Gesetze vor sich gehen, welche daher als die Grundlage aller Untersuchungen im gegenwärtigen Werke anzusehen sind.

I. Die Bewegung eines jeden Himmelskörpers geschieht beständig in der nämlichen Ebene, in welcher zugleich der Mittelpunkt der Sonne liegt.

II. Der von dem Körper beschriebene Linienzug ist ein Kegelschnitt, der seinen Brennpunkt im Mittelpunkte der Sonne hat.

III. Die Bewegung in jenem Linienzuge geht in der Weise vor sich, dass die in verschiedenen Zeitabschnitten um die Sonne beschriebenen Flächenräume diesen Zeitabschnitten proportional sind. Drückt man daher Zeiten und Flächenräume durch Zahlen aus, so ergiebt jeder Flächenraum, wenn man ihn durch die Zeit, innerhalb deren er beschrieben wurde, dividirt, einen unveränderlichen Quotienten.

IV. Für die verschiedenen, um die Sonne sich bewegenden Körper stehen die Quadrate dieser Quotienten im zusammengesetzten*) Verhältnisse der den Bahnen entsprechenden Parameter und der Summen der Sonnenmasse und der Massen der bewegten Körper.

Bezeichnet also $2p$ den Parameter der Bahn, in welcher der Körper einherzieht; μ die Stoffmenge dieses Körpers (die Masse Sonne $= 1$ gesetzt); $\frac{1}{2}g$ die Fläche, welche der Körper in der Zeit t um die Sonne beschreibt;

(2) so wird $\dfrac{g}{t\sqrt{p}.\sqrt{(1+\mu)}}$ eine Constante für alle Himmelskörper bilden.

Da es also gleichgültig ist, welchen Himmelskörper man zur Bestimmung dieser constanten Zahl benutzt, so wollen wir letztere aus der Bewegung der Erde ableiten, und dabei deren mittlere Entfernung von der Sonne zur Distanz-Einheit annehmen. Die Einheit der Zeit soll stets der mittlere Sonnentag sein. Bezeichnet man ferner mit π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises, so wird der Flächenraum der ganzen, von der Erde beschriebenen Ellipse offenbar sein $= \pi\sqrt{p}$, welcher daher $= \frac{1}{2}g$ zu setzen ist, wenn man für t das siderische Jahr annimmt, wodurch unsere Constante $= \dfrac{2\pi}{t\sqrt{(1+\mu)}}$ wird. Um den numerischen Werth dieser Constante, die wir im Folgenden mit k bezeichnen wollen, zu ermitteln, setzen wir nach der neuesten Bestimmung das siderische Jahr, oder $t = 365{,}256\,3835$, die Masse der Erde oder $\mu = \dfrac{1}{354710} = 0{,}000\,002\,8192$; dadurch wird erhalten:

$\log 2\pi$	0,798 179 8684
compl. $\log t$	7,437 402 1852
compl. $\log \sqrt{(1+\mu)}$	9,999 999 3878
$\log k$	8,235 581 4414
$k =$	0,017 202 09895

*) Das in der lateinischen Handschrift gebrauchte Wort „in ratione inversa" soll heissen: „in ratione composita", cfr. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, B. I, p. 17, wo die Worte in einem Briefe von Gauss an Schumacher vom 14. December 1809 lauten:

„Herrn . . . bitte ich mich zu empfehlen und für die Anzeige des ärgerlichen Schreibfehlers „zu danken. In der deutschen Handschrift steht nicht im umgekehrten, sondern bloss im „zusammengesetzten Verhältniss; das erste Blatt der lateinischen Handschrift habe ich

2.

Die so eben erörterten Gesetze, weichen von den durch Kepler entdeckten nur in der Weise ab, dass sie in einer Form gegeben sind, die eine Anwendung auf alle Arten von Kegelschnitten gestattet, und dass dabei der Einwirkung des bewegten Körpers auf die Sonne, wovon der Factor $\sqrt{(1+\mu)}$ abhängt, Rechnung getragen ist. Wenn wir diese Gesetze als Erscheinungen betrachten, die aus unzähligen und unzweifelhaften Beobachtungen sich ergeben haben, so lehrt die Geometrie, welche Einwirkung von der Sonne auf die um Letztere bewegten Körper ausgeübt werden muss, um jene Erscheinungen beständig hervorzubringen. Auf diese Weise findet sich, dass die Einwirkung der Sonne auf die um sie laufenden Körper ganz so ausgeübt wird, als ob eine Anziehungskraft, deren Stärke dem Quadrate der Entfernung wechselseitig proportional wäre, die Körper gegen den Mittelpunkt der Sonne hintriebe. Geht man daher umgekehrt von der Annahme einer solchen Anziehungskraft als von einem Principe aus, so können jene Erscheinungen als nothwendige Folgen daraus abgeleitet werden. Hier mag eine blosse Erwähnung der Gesetze genügen, und es wird um so weniger erforderlich sein, an diesem Orte bei ihrem Zusammenhange mit dem Princip der Schwere zu verweilen, da seit dem grossen Newton noch mehre andere Schriftsteller jene Materie behandelt haben, und unter diesen Laplace in seinem vollendeten Werke „*Mécanique Céleste*“ in einer Weise, die (3)
nichts zu wünschen übrig lässt.

3.

Die Untersuchungen der Bewegungen der Himmelskörper, so weit solche in Kegelschnitten vor sich gehen, erfordern keineswegs eine vollständige Theorie dieser Art von Curven, und es wird daher eine einzige allgemeine Gleichung genügen, aus der wir Alles ableiten. Es erscheint deshalb

„verlegt und weiss also nicht, ob durch einen Druck- oder Schreibfehler inversa statt composita gesetzt ist, doch wohl das Letztere, ob ich gleich nicht begreife, wie es zugegangen ist.“
Anmerkung des Uebersetzers.

sachgemäss, gerade die Gleichung auszuwählen, auf welche wir als eine charakteristische bei Erforschung der zufolge des Attractionsgesetzes beschriebenen Curve Bezug nehmen. Wenn wir nämlich irgend einen Ort des Körpers in seiner Bahn bezeichnen durch die Abstände x und y von zwei geraden Linien, die in der Ebene der Bahn gezogen sind und im Mittelpunkte der Sonne d. h. in dem einen der beiden Brennpunkte der Curve unter rechten Winkeln sich schneiden; und wenn wir ausserdem die Entfernung eines Körpers von der Sonne (stets positiv genommen) mit r benennen, so haben wir zwischen r, x, y die lineäre Gleichung $r + \alpha x + \beta y = \gamma$; in welcher α, β, γ beständige Grössen ausdrücken, und zwar γ eine Grösse, die ihrer Natur nach stets positiv ist. Indem wir nun die Lage der geraden Linien, auf welche die Abstände x und y sich beziehen, verändern (eine Lage die an und für sich ganz willkürlich ist, wenn es nur dabei bleibt, dass sich die Linien unter rechten Winkeln schneiden), so wird dadurch offenbar die Form der Gleichung und der Werth von γ nicht geändert, während α und β immer andere und wieder andere Werthe erlangen und man sieht, dass jene Lage so bestimmt werden kann, dass $\beta = 0$ wird, α aber wenigstens nicht negativ. — Schreibt man solchergestalt für α und γ beziehungsweise e und p, so nimmt obige Gleichung die Gestalt an $r + ex = p$. Die gerade Linie, auf welche in diesem Falle die Abstände y bezogen werden, heisst die Apsidenlinie, p der halbe Parameter, e die Excentricität, und der betreffende Kegelschnitt wird mit dem Namen Ellipse, Parabel oder Hyperbel bezeichnet, je nachdem e kleiner als die Einheit, gleich der Einheit, oder grösser als die Einheit ist.

Uebrigens sieht man leicht, dass die Lage der Apsidenlinie durch die vorgetragenen Bedingungen vollständig bestimmt ist, den einzigen Fall ausgenommen, wo sowohl α als β schon an und für sich $= 0$ waren. In diesem Falle wird stets $r = p$, auf welche geraden Linien die Abstände x und y auch bezogen werden. Indem daher e ebenfalls $= 0$ ist, so wird die Curve (die dann ein Kreis ist) nach unserer Begriffsbestimmung dem Genus der Ellipsen beizuzählen sein, hat aber das Eigenthümliche, dass die Lage der Apsiden gänzlich willkürlich bleibt, wenn man anders jene Bezeichnung auch auf diesen Fall auszudehnen belieben sollte.

4.

Für den Abstand x wollen wir jetzt den Winkel v einführen, der zwischen der Apsidenlinie und der geraden Linie (radius vector) enthalten ist, die von der Sonne nach dem Orte des Körpers führt, und zwar möge dieser Winkel von derjenigen Seite der Apsidenlinie beginnen, wo die Abstände x positiv sind. Auch werde angenommen, dass dieser Winkel nach derjenigen (4)
Gegend hin wachse, wohin die Bewegung des Körpers gerichtet ist. Auf diese Weise wird $x = r\cos v$, und demnach unsere Formel $r = \frac{p}{1+e\cos v}$, woraus sich folgende Schlüsse unmittelbar ableiten lassen:

I. Für $v = 0$ wird der Werth des radius vector ein Kleinstes, nämlich $r = \frac{p}{1+e}$; dieser Punkt heisst das Perihel.

II. Den entgegengesetzten Werthen von v entsprechen gleiche Werthe von r; die Apsidenlinie theilt daher den Kegelschnitt in zwei gleiche Theile.

III. In der Ellipse wächst von $v = 0$ an r beständig, bis es den grössten Werth $\left(r = \frac{p}{1-e}\right)$ im Aphel erreicht, für welches $v = 180^0$. Nach Passirung des Aphels nimmt r auf dieselbe Weise wieder ab, wie es früher gewachsen war, bis es für $v = 360^0$ das Perihel von Neuem berührt. Derjenige Theil der Apsidenlinie, welcher an dieser Stelle vom Perihel und an jener vom Aphel begrenzt wird, heisst die grosse Axe. Es wird daher die grosse Halbaxe, welche auch die mittlere Entfernung genannt wird, $= \frac{p}{1-ee}$. Der Abstand des inmitten der Axe belegenen Punktes (des Mittelpunkts der Ellipse) vom Brennpunkte ist $= \frac{ep}{1-ee} = ea$, wobei a die grosse Halbaxe bezeichnet.

IV. Dagegen existirt in der Parabel eigentlich kein Aphel, sondern r wächst über alle Grenzen hinaus, je näher v an $+180^0$ oder -180^0 herankommt. Für $v = \pm 180^0$ wird der Werth von r unendlich, was anzeigt, dass die Curve von der Apsidenlinie in dem, dem Perihele gegenüber liegenden Theile nicht geschnitten wird. Es kann daher im eigentlichen Sinne hier von einer grossen Axe, oder von einem Mittelpunkte der Curve nicht die Rede sein; aber nach der gewöhnlichen Manier der Analysis wird durch Erweiterung der für die Ellipse erfundenen Formeln der grossen Axe ein unendlicher Werth beigelegt, und der Mittelpunkt der Curve wird in unendliche Entfernung vom Brennpunkte gesetzt.

V. In der Hyperbel schliesslich wird v in noch engere Grenzen eingezwängt, nämlich innerhalb $v = -(180^0 - \psi)$ und $v = +(180^0 - \psi)$; wo ψ einen Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$. Denn während v sich einem dieser Grenzwerthe nähert, wächst r in's Unendliche fort; und wenn für v einer dieser Grenzwerthe selbst angenommen würde, so würde der Werth von r als ein unendlicher herauskommen, was anzeigt, dass die Hyperbel von einer geraden Linie, die gegen die Apsidenlinie unter einem Winkel von $180^0 - \psi$ oberhalb oder unterhalb geneigt ist, überall nicht geschnitten wird. Für die solchergestalt ausgeschlossenen Werthe, nämlich von $180^0 - \psi$ bis zu $180^0 + \psi$, weist unsere Formel dem r einen negativen Werth an; denn die gerade Linie, die unter einem solchen Winkel gegen die Apsidenlinie geneigt ist, schneidet
(5) selbst zwar die Hyperbel nicht, wenn sie jedoch rückwärts verlängert wird, so trifft sie das andere Stück der Hyperbel, welches bekanntlich von dem ersten Stücke überall getrennt und gegen denjenigen Brennpunkt hin, welchen die Sonne einnimmt, convex ist. Aber in unserer Untersuchung — welche, wie schon erwähnt, auf der Voraussetzung beruht, dass r positiv genommen werden soll, — nehmen wir auf dieses zweite Stück der Hyperbel keine Rücksicht, worin nur ein solcher Himmelskörper einherziehen könnte, auf den die Sonne nicht attractiv, sondern nach denselben Gesetzen repulsiv wirken würde. Im eigentlichen Sinne des Worts giebt es daher auch in der Hyperbel kein Aphel. Als das Analogon des Aphels könnte derjenige Punkt des abgekehrten Stücks genommen werden, welcher auf der Apsidenlinie liegt und welcher den Werthen $v = 180^0$, $r = -\frac{p}{e-1}$ entspricht. Will man daher wie bei der Ellipse den Werth des Ausdrucks $\frac{p}{1-ee}$ auch hier, wo er negativ sich ergiebt, die halbe grosse Axe der Hyperbel nennen, so zeigt diese Grösse die Entfernung

des bereits erwähnten Punktes vom Perihel und zugleich seine Lage an, welche in der Ellipse die entgegengesetzte Stelle einnimmt. Ebenso erhält hier $\frac{ep}{1-ee}$ d. h. der Abstand des mittleren Punktes zwischen diesen beiden Punkten (Centrums der Hyperbel) vom Brennpunkte einen negativen Werth wegen der entgegengesetzten Lage.

5.

Der Winkel v, welcher in der Parabel zwischen den Grenzen -180^0 und $+180^0$, für die Hyperbel innerhalb $-(180^0-\psi)$ und $+(180^0-\psi)$ eingeschlossen ist, bei der Ellipse aber den ganzen Kreis in stets erneuten Perioden durchläuft, heisst die wahre Anomalie des bewegten Körpers. Bislang pflegten zwar fast alle Astronomen die wahre Anomalie in der Ellipse nicht vom Perihel, sondern vom Aphel an zu zählen, gegen die Analogie der Parabel und der Hyperbel, in denen es kein Aphel giebt, und man daher vom Perihel anfangen musste. Wir haben indess um so weniger Bedenken getragen, eine Analogie zwischen allen Arten von Kegelschnitten herzustellen, da die neusten französischen Astronomen dazu mit dem Beispiele vorangegangen sind.

Im Uebrigen ist es mitunter dienlich, die Form des Ausdrucks $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ etwas zu ändern. Vorzüglich merke man sich folgende Formeln:

$$r = \frac{p}{1+e-2e\sin\frac{1}{2}v^2} = \frac{p}{1-e+2e\cos\frac{1}{2}v^2}$$

$$r = \frac{p}{(1+e)\cos\frac{1}{2}v^2+(1-e)\sin\frac{1}{2}v^2}$$

In der Parabel hat man daher: $r = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2}$; in der Hyperbel aber ist folgender Ausdruck besonders bequem:

$$r = \frac{p\cos\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}.$$

6.

(6) Wir wollen jetzt zur Vergleichung der „Bewegung“ mit der „Zeit“ schreiten. Wenn man, wie in Art. 1, den innerhalb der Zeit t um die Sonne beschriebenen Flächenraum $= \frac{1}{2} g$ setzt, die Masse des bewegten Körpers $= \mu$ (die Sonnenmasse $= 1$ gesetzt), so haben wir: $g = kt\sqrt{p} \,.\, \sqrt{(1+\mu)}$. Das Differential des Flächenraums aber wird $= \frac{1}{2} rrdv$, woraus hervorgeht: $kt\sqrt{p} \,.\, \sqrt{(1+\mu)} = \int rrdv$, wobei dies Integral so genommen wird, dass es für $t = 0$ verschwindet. Diese Integration muss für die verschiedenen Arten von Kegelschnitten auf verschiedene Weise behandelt werden, weshalb wir das Einzelne getrennt betrachten, und den Anfang mit der Ellipse machen wollen.

Da r aus v mittelst eines Bruches bestimmt wird, dessen Nenner aus zwei Gliedern besteht, so wollen wir vor allen Dingen diese Unbequemlichkeit durch Einführung einer neuen Grösse für v beseitigen. Zu diesem Zwecke setzen wir $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} E$, wonach die letzte Formel im vorhergehenden Artikel für r giebt $(1-e) \quad + (1+e)$ $\quad c^2\tfrac{1}{2}E + s^2\tfrac{1}{2}E \mp e(s^2\tfrac{1}{2}E \mp c^2\tfrac{1}{2}E)$

$$r = \frac{p \cos \frac{1}{2} E^2}{(1+e) \cos \frac{1}{2} v^2} = p\left(\frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{1+e} + \frac{\sin \frac{1}{2} E^2}{1-e}\right) = \frac{p}{1-ee}(1 - e \cos E).$$

Ferner wird $\frac{dE}{\cos \frac{1}{2} E^2} = \frac{dv}{\cos \frac{1}{2} v^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ und daher: $dv = \frac{pdE}{r\sqrt{(1-ee)}}$; hieraus $rrdv = \frac{rpdE}{\sqrt{(1-ee)}} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}(1 - e\cos E)\, dE$ und wenn man integrirt:

$$kt\sqrt{p} \cdot \sqrt{(1+\mu)} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}(E - e \sin E) + \text{Const.}$$

Wenn wir daher die Zeit vom Durchgange durch das Perihel an beginnen lassen, wo $v = 0$, $E = 0$ und daher auch Constans $= 0$, so haben wir, weil $\frac{p}{1-ee} = a$,

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Bei dieser Gleichung muss der Hülfswinkel E, welcher die excentrische Anomalie heisst, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden. Offenbar aber lässt sich dieser Winkel in Graden etc. beibehalten, wenn man nur auch $e\sin E$ und $\frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ auf dieselbe Art ausdrückt; diese Grössen werden in Bogensecunden erhalten, wenn man sie durch die Zahl 206264,81 multiplicirt. Der Multiplication der letzteren Grösse bleibt man überhoben, falls man sogleich die Grösse k in Secunden dargestellt anwendet, und daher setzen wir an Stelle des früheren Werthes $k = 3548'', 18761$, dessen $\log = 3{,}550\,006\,5746$. — Auf diese Weise ausgedrückt heisst die Grösse $\frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ die mittlere Anomalie, die daher im Verhältniss der Zeit wächst und zwar täglich um das Augment $\frac{k\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$, welches man die (7) mittlere tägliche Bewegung (motus medius diurnus) nennt. — Die mittlere Anomalie bezeichnen wir durch M.

7.

Im Perihele sind daher die wahre Anomalie, die excentrische Anomalie und die mittlere Anomalie $= 0$. — Indem nun von hieran die wahre Anomalie wächst, so werden auch die excentrische und die mittlere jedoch so vermehrt, dass die excentrische kleiner bleibt, als die wahre, und die mittlere kleiner als die excentrische, bis zum Aphel, wo alle drei zugleich $= 180^0$ werden; von hieran aber bis zum Perihel ist die excentrische immer grösser als die wahre, und die mittlere Anomalie grösser als die excentrische, bis im Perihel alle drei $= 360^0$ werden, oder was auf dasselbe herauskommt, alle wiederum $= 0$. Im Allgemeinen ist klar, dass, wenn einer wahren Anomalie v eine excentrische E und eine mittlere M entspricht, dann einer wahren von $360^0 - v$ eine excentrische von $360^0 - E$ und eine mittlere von $360^0 - M$ entspricht. Der Unterschied zwischen der wahren Anomalie und der mittleren $v - M$ heisst die Gleichung des Mittelpunkts (aequatio centri), welche daher vom Perihel bis zum Aphel positiv, vom Aphel bis zum Perihel negativ ist, im Perihele und Aphele selbst aber verschwindet. Da nun also v und M den vollen Kreis von 0 bis zu 360^0 in der nämlichen Zeit durchlaufen, so wird die Zeit eines einmaligen Umlaufs, welche auch die periodische Zeit (tempus periodicum) heisst, in Tagen ausgedrückt gefunden, wenn man 360^0

durch die tägliche Bewegung $\frac{k\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ dividirt; woraus man sieht, dass für die verschiedenen, um die Sonne revolvirenden Körper die Quadrate der periodischen Umlaufszeiten den Cuben der mittleren Entfernungen proportional sind, in soweit es erlaubt ist, deren Massen, oder vielmehr die Ungleichheit der Massen zu vernachlässigen.

8.

Nun wollen wir die bemerkenswerthesten Relationen zwischen den Anomalien und dem radius vector sammeln, deren Ableitung Niemandem, der nur mittelmässig in der trigonometrischen Analyse bewandert ist, Schwierigkeiten darbieten kann. Die Formeln werden concinner, wenn man für e den Winkel einführt, dessen Sinus $= e$ ist. Wird dieser Winkel mit φ bezeichnet, so hat man: $\sqrt{(1-ee)} = \cos\varphi$; $\sqrt{(1+e)} = \cos(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$; $\sqrt{(1-e)} = \cos(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$; $\sqrt{(1+e)} + \sqrt{(1-e)} = 2\cos\frac{1}{2}\varphi$; $\sqrt{(1+e)} - \sqrt{(1-e)} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi$. — Die vorzüglichsten Relationen zwischen a, p, r, e, φ,
(8) v, E, M sind folgende:

I. $p = a\cos\varphi^2$

II. $r = \frac{p}{1+e\cos v}$

III. $r = a(1-e\cos E)$

IV. $\cos E = \frac{\cos v + e}{1+e\cos v}$; oder $\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$

V. $\sin\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos E)} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e\cos v}} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r(1-e)}{p}} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a(1+e)}}$

VI. $\cos\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos E)} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1+e}{1+e\cos v}} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r(1+e)}{p}} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}$

VII. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}E = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\ \operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$

VIII. $\sin E = \dfrac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \dfrac{r \sin v}{a \cos \varphi}$

IX. $r \cos v = a(\cos E - e) = 2\, a \cos(\tfrac{1}{2} E + \tfrac{1}{2}\varphi + 45^0) \cos(\tfrac{1}{2} E - \tfrac{1}{2}\varphi - 45^0)$

X. $\sin \tfrac{1}{2}(v - E) = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin v \sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

XI. $\sin \tfrac{1}{2}(v + E) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin v \sqrt{\dfrac{r}{p}} = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin E \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

XII. $M = E - e \sin E.$

9.

Verlängert man ein, aus irgend einem Punkte der Ellipse auf die Apsidenlinie gefälltes Perpendikel rückwärts, bis es einen aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit dem Halbmesser $= a$ beschriebenen Kreis trifft, so wird die Neigung desjenigen Halbmessers, der dem Einschneidepunkte entspricht, gegen die Apsidenlinie (ähnlich verstanden, wie vorhin für die wahre Anomalie) der excentrischen Anomalie gleich sein, wie sich ohne Mühe aus der Gleichung IX im vorhergehenden Artikel ableiten lässt. Man sieht ferner, dass $r \sin v$ den Abstand eines jeden Punktes der Ellipse von der Apsidenlinie bezeichnet; und da dieser Abstand nach Gleichung VIII $= a \cos \varphi \sin E$ ist, so wird er seinen grössten Werth bei $E = 90^0$ erreichen, d. h. im Mittelpunkte der Ellipse. Dieser grösste Abstand, der $= a \cos \varphi = \dfrac{p}{\cos \varphi} = \sqrt{ap}$ heisst die halbe kleine Axe. Im Brennpunkte der Ellipse, d. h. für $v = 90^0$, wird jener Abstand offenbar $= p$, oder gleich dem halben Parameter.

10. (9)

Die Gleichungen des Art. 8 enthalten Alles, was zur Berechnung der excentrischen Anomalie und der mittleren aus der wahren, oder der excentrischen und der wahren aus der mittleren erforderlich ist. Um die excentrische aus der wahren abzuleiten, bedient man sich gewöhnlich der Formel VII. Gemeiniglich jedoch empfiehlt es sich, zu diesem Zwecke die Gleichung X zu benutzen, besonders sobald die Excentricität nicht zu gross ist, in welchem

Falle E mit grösserer Schärfe aus X berechnet werden kann, als aus VII. Ausserdem hat man bei Anwendung der Gleichung X den Logarithmus des Sinus von E, der in XII gebraucht wird, sofort durch die Gleichung VIII, welcher bei Anwendung von VII erst aus den Tafeln genommen werden müsste; wenn daher bei jener Methode der fragliche Logarithmus gleichfalls den Tafeln entnommen wird, so erlangt man dadurch eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung. Derartige Rechnungsprüfungen und Bestätigungen sind stets überaus schätzbar, und uns bei denselben Raths zu erholen, wird daher bei allen in diesem Werke abzuhandelnden Methoden, da wo es bequem geschehen kann, unsere eifrige Sorge sein. Zur besseren Erläuterung fügen wir ein vollständig berechnetes Beispiel hinzu:

Gegeben sei $v = 310^0\,55'\,29''\,64$, $\varphi = 14^0\,12'\,1''\,87$, $\log r = 0{,}330\,7640$; Gesucht werden: p, a, E und M.

$\log \sin \varphi$	9,389 7262	
$\log \cos v$	9,816 2877	
	9,206 0139	woraus $e \cos v = 0{,}160\,6993$
$\log (1 + e \cos v)$ . .	0,064 7197	
$\log r$	0,330 7640	
$\log p$	0,395 4837	
$\log \cos \varphi^2$	9,973 0448	
$\log a$	0,422 4389	
$\log \sin v$	9,878 2740	n*)
$\log \sqrt{\frac{p}{r}}$	0,032 3598.5	
	9,845 9141.5 n	
$\log \sin \frac{1}{2} \varphi$	9,092 0395	

$\log \sin \frac{1}{2}(v - E)$ 8,937 9536.5 n also $\frac{1}{2}(v - E) = -4^0\,58'\,22''\,94$; $v - E = -9^0\,56'\,45''\,88$; $E = 320^0\,52'\,15''\,52$

*) Der dem Logarithmus beigefügte Buchstab n deutet an, dass die ihm entsprechende Zahl eine negative ist.

Ferner wird

$\log e \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}389\,7262$
$\log 206\,264{,}8 \ldots 5{,}314\,4251$
$\log e$ in Sec. $\ldots\ldots 4{,}704\,1513$
$\log \sin E \ldots\ldots 9{,}800\,0767\,n$
$4{,}504\,2280\,n$ also

Rechnung für log sin E nach Formel VIII. (10)

$\log \frac{r}{p} \sin v \ldots\ldots 9{,}813\,5543\,n$
$\log \cos \varphi \ldots\ldots\ldots 9{,}986\,5224$
$\log \sin E \ldots\ldots\ldots 9{,}800\,0767\,n$

$e \sin E$ in Sec. $= 319\,32''\,14 = 8^0\,52'\,12''\,14$

und $M = 329^0\,44'\,27''\,66$. — Rechnung nach Formel VII für E:

$\frac{1}{2} v = 155^0\,27'\,44''\,82$
$45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 37^0\,53'\,59''\,065$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \ldots\ldots 9{,}659\,4579\,n$
$\log \operatorname{tang} (45^0 - \frac{1}{2}\varphi)\; 9{,}891\,2427$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} E \ldots\ldots 9{,}550\,7006\,n$

woraus $\frac{1}{2} E = 160^0\,26'\,7''\,76$ und $E = 320^0\,52'\,15''\,52$, wie oben.

11.

Die umgekehrte, unter dem Namen des Kepler'schen Problems berühmte Aufgabe, nämlich aus der mittleren Anomalie die wahre und den radius vector zu finden, kommt weit häufiger zur Frage. Die Astronomen pflegen die Gleichung des Mittelpunktes durch eine unendliche, nach den Sinussen der Winkel M, $2\,M$, 3 M etc. fortschreitende Reihe darzustellen, wobei die einzelnen Coefficienten der Sinusse ebenfalls Reihen sind, die nach den Potenzen der Excentricität in's Unendliche fortlaufen. Ich habe es um so weniger für nothwendig erachtet, mich bei dieser von mehrern Schriftstellern entwickelten Formel für die Gleichung des Mittelpunktes hier aufzuhalten, weil sie, wenigstens nach meinem Urtheile, für den praktischen Gebrauch, namentlich wenn die Excentricität nicht sehr klein ist, viel weniger geeignet ist, als die indirecte Methode, welche ich daher in der Form, die mir die bequemste scheint, etwas näher erörtern will.

Die Gleichung XII, $E = M + e \sin E$, die transcendent ist und eine directe Auflösung nicht zulässt, wird durch Versuche aufgelöst, indem man mit einem genäherten Werthe von E beginnt, der durch geeignete, so oft wiederholte Methoden corrigirt wird, bis er jener Gleichung genau Genüge thut, d. h. entweder mit aller der Genauigkeit, welche die Sinustafeln zulassen, oder doch mit der, welche dem vorgesteckten Ziele entspricht. Wenn nun

jene Correctionen nicht blindlings, sondern nach einer sicheren und bestimmten Norm angestellt werden, so besteht kaum ein wesentlicher Unterschied zwischen einer solchen indirecten Methode und der Auflösung durch Reihen, wenn nicht darin, dass bei jener der erste Werth der Unbekannten einigermaassen willkürlich ist, was eher für einen Gewinn gelten kann, da ein schicklich ausgewählter Werth es erlaubt, die Verbesserungen ausserordentlich zu beschleunigen. Setzen wir voraus, dass ε ein genäherter Werth von E sei, und x die jenem hinzuzufügende (in Secunden ausgedrückte) Verbesserung, so dass der Werth
(11) $E = \varepsilon + x$ unserer Gleichung genau Genüge thut. Man berechne $e \sin \varepsilon$ in Secunden durch Logarithmen, und bemerke bei dieser Ausführung zugleich aus den Tafeln die Aenderung von $\log \sin \varepsilon$ für $1''$ durch die Variation von ε, sowie die Veränderung des $\log e \sin \varepsilon$ für die Aenderung einer Einheit in der Zahl $e \sin \varepsilon$; diese Veränderungen mögen ohne Rücksicht auf die Zeichen λ, μ sein, wobei es kaum nöthig ist, daran zu erinnern, dass dabei jeder Logarithmus durch gleich viele Decimalstellen ausgedrückt vorausgesetzt wird. Wenn nun schon ε dem wahren Werthe von E bereits so nahe kommt, dass man die Veränderungen des Logarithmus des Sinus von ε bis zu $\varepsilon + x$, und die Veränderungen des Logarithmus der Zahl von $e \sin \varepsilon$ bis zu $e \sin(\varepsilon + x)$ als einförmige annehmen kann, so lässt sich offenbar setzen: $e \sin(\varepsilon + x) = e \sin \varepsilon \pm \frac{\lambda x}{\mu}$, wobei das obere Zeichen für den ersten und vierten Quadranten, das untere für den zweiten und dritten gilt. — Es sei daher $\varepsilon + x = M + e \sin(\varepsilon + x)$, so wird $x = \frac{\mu}{\mu \mp \lambda}(M + e \sin \varepsilon - \varepsilon)$ und der wahre Werth von E, oder von $\varepsilon + x = M + e \sin \varepsilon \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda}(M + e \sin \varepsilon - \varepsilon)$ wobei die Zeichen in angegebener Weise bestimmt werden. Uebrigens sieht man leicht, dass ohne Rücksicht auf das Zeichen $\mu : \lambda = 1 : e \cos \varepsilon$ und daher immer μ grösser als λ, woraus geschlossen wird, dass im ersten und letzten Quadranten $M + e \sin \varepsilon$ zwischen ε und $\varepsilon + x$, dass aber im zweiten und dritten $\varepsilon + x$ zwischen ε und $M + e \sin \varepsilon$ liegt; eine Regel, welche uns der Beachtung der Zeichen überhebt. Weicht der vorausgesetzte Werth von ε noch zu sehr von der Wahrheit ab, als dass die vorhin erwähnte Voraussetzung genau genug sein sollte, so wird man wenigstens durch diese Methode einen viel

näheren Werth finden, mit welchem man die nämliche Operation noch einmal und so oft es nöthig scheint, zu wiederholen hat. Es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn der Unterschied des ersten Werthes für ε vom wahren, als eine Grösse der ersten Ordnung angesehen wird, der Fehler des neuen Werthes zur zweiten Ordnung gehört und durch Wiederholung der Operation zur vierten, achten etc. Ordnung heruntergebracht wird. Desto kleiner überdies die Excentricität ist, desto schneller werden die successiven Verbesserungen convergiren.

12.

Ein genäherter Werth für E, von welchem man bei der Rechnung ausgehen kann, wird gemeiniglich zur Hand sein, besonders falls die Aufgabe für mehre Werthe von M zu lösen ist, von denen einige schon absolvirt sind. In Ermangelung aller anderen Hülfsmittel constirt aber wenigstens soviel, dass E zwischen den Grenzen M und $M \pm e$ liegen muss (wo e die in Secunden ausgedrückte Excentricität bezeichnet und wobei das obere Zeichen im ersten und zweiten Quadranten, das untere im dritten und vierten genommen wird). Es kann daher für den Anfangswerth von E entweder M, oder ein Werth angenommen werden, der nach irgend welcher Schätzung vermehrt oder vermindert
ist. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass die erste Rechnung, sobald man (12)
von einem wenig genauen Werthe ausgeht, keine ängstliche Genauigkeit erfordert, und dass kleinere Logarithmentafeln, z. B. die von Lalande, völlig ausreichen. Ausserdem kann man zur Bequemlichkeit der Rechnung immer solche Werthe für ε wählen, deren Sinus aus den Tafeln selbst ohne Interpolation sich entnehmen lässt, z. B. in Minuten oder in vollen Zehnern der Secunden, je nachdem die angewandten Tafeln in Minuten, oder von zehn zu zehn Secunden fortschreiten. Uebrigens kann Jeder leicht diejenigen Modificationen entwickeln, welche jene Vorschriften für den Fall erleiden, dass die Winkel in der neuen Decimaleintheilung ausgedrückt sind.

13.

Beispiel: Es sei die Excentricität dieselbe wie im Beispiel zu Art. 10. $M = 332^\circ\, 28'\, 54''\, 77$. Hier ist daher log e in Secunden $= 4{,}704\,1513$ und deshalb $e = 50600'' = 14^0\,3'\,20''$. Da nun hier E kleiner sein muss als M, so setzen wir zur ersten Rechnung $\varepsilon = 326^0$, wofür man aus den kleinern Tafeln erhält:

$\log\sin\varepsilon \ldots\ 9{,}747\,56\,n$, Veränderung für $1' \ldots 19$, also $\lambda = 0{,}312$

$\log e$ in Sec. . $4{,}704\,15$

$4{,}451\,71\,n$

hieraus $e\sin\varepsilon = -28295'' = -7^0\,51'\,35''$

$M + e\sin\varepsilon \ldots\ 324\ \ 37\ \ 20$

Veränderung des Logarithmus für eine Tafeleinheit, die hier $10''$ begleicht, ...15,25; also $\mu = 1{,}525$

Differirt von ε um $1^0\,22'\,40'' = 4960''$, folglich $\dfrac{0{,}312}{1{,}213} \times 4960''$ $= 1276'' = 21'\,16''$. Hiermit wird der verbesserte Werth von $E = 324^0\,37'\,20'' - 21'\,16'' = 324^0\,16'\,4''$, mit welchem man die Rechnung nach grösseren Tafeln wiederholt.

$\log\sin\varepsilon \ldots 9{,}766\,4112\,n$ $\qquad \lambda = 29{,}25$

$\log e \ldots\ 4{,}704\,1513$

$4{,}470\,5625\,n$ $\qquad \mu = 146$

$e\sin\varepsilon = -29550''\,34 = -8^0\,12'\,30''\,34$

$M + e\sin\varepsilon \ldots\ 324^0\,16'\,24''\,43$

Differirt von ε um .... $-20''\,43$. Multiplicirt man diese Differenz durch $\dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{29{,}25}{116{,}75}$, so erhält man $-5''\,12$ und daher ist der aufs Neue verbesserte Werth für $E = 324^0\,16'\,24''\,43 + 5''\,12 = 324^0\,16'\,29''\,55$, innerhalb $0''\,01$ genau.

(13)

14.

Zur Bestimmung der wahren Anomalie und des radius vector aus der excentrischen Anomalie geben die Gleichungen des Art. 8 mehre Methoden an die Hand, von denen wir die vorzüglichsten erläutern wollen.

I. Nach der gewöhnlichen Methode wird v durch die Gleichung VII und dann r durch die Gleichung II bestimmt. Auf diese Weise steht das Beispiel des vorhergehenden Artikels, wenn man den für p in Art. 10 gegebenen Werth beibehält, so:

$\frac{1}{2}E = 162^\circ\ 8'\ 14''\ 75.$

log tang $\frac{1}{2}E$ . . . . 9,508 2198 n

log tang $(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ . . 9,891 2427

log tang $\frac{1}{2}v$ . . . . 9,616 9771 n

$\frac{1}{2}v = 157^\circ\ 30'\ 41''\ 50$

$v = 315\quad 1\ 23{,}00$

log e 9,389 7262

log cos v 9,849 6597

9,239 3859

$e \cos v$ $= 0{,}173\,5345$

log p 0,395 4837

log $(1 + e\cos v)$ . . 0,069 4959

log r 0,325 9878

II. Kürzer ist folgende Methode, wenn mehre Orte zu berechnen sind, für welche man die constanten Logarithmen der Grössen $\sqrt{a(1+e)}$, $\sqrt{a(1-e)}$ nur einmal zu berechnen braucht. Aus den Gleichungen V und VI erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \sin\tfrac{1}{2}E\sqrt{a(1+e)}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}E\sqrt{a(1-e)}$$

wodurch $\frac{1}{2}v$ und $\log\sqrt{r}$ schnell bestimmt werden. Im Allgemeinen wird allerdings — sobald man $P\sin Q = A$, $P\cos Q = B$ hat — Q durch die Formel tang $Q = \frac{A}{B}$ gefunden, und dann ist hiernach $P = \frac{A}{\sin Q}$ oder $P = \frac{B}{\cos Q}$. Die Erstere wendet man an, wenn $\sin Q$ grösser als $\cos Q$ ist; die zweite, wenn $\cos Q$ grösser als $\sin Q$ ist. Gemeiniglich schliessen die Aufgaben, bei welchen man zu solchen Gleichungen gelangt, (wie dieselben denn in diesem Werke sehr häufig vorkommen) die Bedingung in sich, dass P eine positive Grösse sein muss, und dann wird der Zweifel, ob Q innerhalb 0° bis 180°, oder von 180°—360° zu nehmen ist, von selbst beseitigt. Ohne das Vorhandensein einer solchen Bedingung aber bleibt diese Bestimmung unserem Ermessen überlassen.

In unserem Beispiele haben wir $e = 0{,}245\,3162$,

log sin $\frac{1}{2}E$ . . . . 9,486 7632 log cos $\frac{1}{2}E$ . . . . . 9,978 5434 n

$\log\sqrt{a(1+e)}$ . . 0,258 8593 $\log\sqrt{a(1-e)}$ . . . 0,150 1020

Hieraus (14)

$\left.\begin{array}{l}\log \sin\frac{1}{2}v\sqrt{r}\ .\ .\ 9{,}745\,6225\\ \log\cos\frac{1}{2}v\sqrt{r}\ .\ .\ 0{,}128\,6454\ n\end{array}\right\}$ woraus log tang $\frac{1}{2}v = 9{,}616\,9771\ n$

$\frac{1}{2}v = 157^\circ\ 30'\ 41''\ 50$

$v = 315\quad 1\ 23{,}00$

log cos $\frac{1}{2}v$ . . . . 9,965 6515 n

$\log\sqrt{r}$ 0,162 9939

log r 0,325 9878

III. Diesen Methoden fügen wir eine dritte hinzu, welche beinahe ebenso kurz, als die zweite, dieser aber da, wo die äusserste Genauigkeit verlangt wird, meistens vorzuziehen ist. Zuerst wird nämlich r durch die Gleichung III, und sodann v aus X bestimmt. Unser auf diese Weise behandeltes Beispiel steht dann so:

$\log e$	9,389 7262	$\log \sin E$	9,766 3366 n
$\log \cos E$	9,909 4637	$\log \sqrt{(1-e\cos E)}$	9,951 7744
	9,299 1899		9,814 5622 n
$e \cos E =$	0,199 1544	$\log \sin \frac{1}{2}\varphi$	9,092 0395
$\log a$	0,422 4389	$\log \sin \frac{1}{2}(v-E)$	8,906 6017 n
$\log(1-e\cos E)$	9,903 5488	$\frac{1}{2}(v-E)$	$=-4^{\circ}\,37'\,33''\,24$
$\log r$	0,325 9877	$v-E$	$=-9\;\;15\;\;6\;\;48$
		v	$= 315\;\;1\;\;23\;\;02$

Zur Prüfung der Rechnung ist die Formel VIII oder XI sehr bequem, vorzüglich wenn v und r durch die dritte Methode bestimmt sind. Hier folgt die Rechnung:

$\log \frac{a}{r} \sin E$	9,862 7878 n	$\log \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$	9,814 5622 n
$\log \cos \varphi$	9,986 5224	$\log \cos \frac{1}{2}\varphi$	9,996 6567
	9,849 3102 n		9,811 2189 n
$\log \sin v$	9,849 3102 n	$\log \sin \frac{1}{2}(v+E)$	9,811 2189 n

15.

Da die mittlere Anomalie M, wie wir gesehen haben, durch v und φ vollständig bestimmt wird, und ebenso v durch M und φ, so ist klar, dass, wenn alle drei Grössen zugleich als veränderliche betrachtet werden, unter ihren differentialen Aenderungen eine Bedingungsgleichung Statt finden müsse, deren Erforschung nicht überflüssig erscheint. Indem man zuerst die Gleichung VII im Art. 8 differentiirt, erhält man $\frac{\mathrm{d}E}{\sin E} = \frac{\mathrm{d}v}{\sin v} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$; differentiirt man nun auch die Gleichung XII, so folgt $\mathrm{d}M = (1-e\cos E)\,\mathrm{d}E - \sin E\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Eliminirt man aus diesen Differentialgleichungen $\mathrm{d}E$, so resultirt

$$\mathrm{d}M = \frac{\sin E(1 - e\cos E)}{\sin v}\,\mathrm{d}v - \left(\sin E\cos\varphi + \frac{\sin E(1 - e\cos E)}{\cos\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \qquad (15)$$

oder, falls man für $\sin E$ und für $1 - e\cos E$ ihre Werthe aus den Gleichungen VIII und III substituirt:

$$\mathrm{d}M = \frac{rr}{aa\cos\varphi}\,\mathrm{d}v - \frac{r(r+p)\sin v}{aa\cos\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

oder endlich, wenn man jeden Coefficienten nur durch v und φ ausdrückt:

$$\mathrm{d}M = \frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v)^2}\,\mathrm{d}v - \frac{(2+e\cos v)\sin v\cos\varphi^2}{(1+e\cos v)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Betrachtet man umgekehrt v als eine Function der Grössen M und φ, so erhält die Gleichung folgende Form:

$$\mathrm{d}v = \frac{aa\cos\varphi}{rr}\,\mathrm{d}M + \frac{(2+e\cos v)\sin v}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

oder durch Einführung von E statt v

$$\mathrm{d}v = \frac{aa\cos\varphi}{rr}\,\mathrm{d}M + \frac{aa}{rr}(2 - e\cos E - ee)\sin E\,\mathrm{d}\varphi.$$

16.

Der radius vector r wird durch v und φ oder durch M und φ noch nicht vollständig bestimmt, sondern hängt derselbe überdies von p oder von a ab. Sein Differential besteht daher aus drei Gliedern. Durch Differentiation der Gleichung II im Art. 8 erhält man

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{e\sin v}{1+e\cos v}\,\mathrm{d}v - \frac{\cos\varphi\cos v}{1+e\cos v}\,\mathrm{d}\varphi$$

Setzt man hier $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}a}{a} - 2\tang\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, (was aus der Differentiation der Gleichung I folgt) und drückt zufolge des vorhergehenden Artikels $\mathrm{d}v$ durch $\mathrm{d}M$ und $\mathrm{d}\varphi$ aus, so folgt nach den nöthigen Reductionen

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{a}{r}\tang\varphi\sin v\,\mathrm{d}M - \frac{a}{r}\cos\varphi\cos v\,\mathrm{d}\varphi, \text{ oder}$$

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{a}\mathrm{d}a + a\tang\varphi\sin v\,\mathrm{d}M - a\cos\varphi\cos v\,\mathrm{d}\varphi$$

Uebrigens beruhen diese, sowie die im vorhergehenden Artikel entwickelten Formeln auf der Annahme, dass v, φ und M oder vielmehr $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}M$ in Theilen des Radius dargestellt werden. Will man also die Veränderungen der Winkel v, φ, M in Secunden ausdrücken, so muss man entweder diejenigen Theile der Formeln, welche $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\varphi$ oder $\mathrm{d}M$ enthalten, durch 206264,8 dividiren, oder diejenigen, welche $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}p$ oder $\mathrm{d}a$ enthalten, durch dieselbe Zahl multipliciren. Es werden daher die Formeln des vorhergehenden Artikels, welche in dieser Beziehung homogen sind, einer Aenderung nicht bedürfen.

17.

(16) Wir wollen noch Einiges über die Untersuchung der *grössten Mittelpunktsgleichung* hinzufügen. Zuvörderst ist von selbst klar, dass der Unterschied zwischen der excentrischen und mittleren Anomalie ein Grösstes ist für $E = 90^0$, wo er gleich e (in Graden u. s. w. ausgedrückt) ist; der radius vector in diesem Punkte ist $= a$; woraus $v = 90^0 + \varphi$ und so ist die ganze Gleichung des Mittelpunkts $= \varphi + e$, welche jedoch hier nicht ein Grösstes ist, weil der Unterschied zwischen v und E noch über φ hinaus anwachsen kann. *Dieser* Unterschied wird ein Grösstes für $\mathrm{d}(v - E) = 0$, oder für $\mathrm{d}v = \mathrm{d}E$, wo die Exentricität offenbar als constant anzusehen ist. Da im Allgemeinen $\frac{\mathrm{d}v}{\sin v} = \frac{dE}{\sin E}$, so erhellt bei dieser Annahme, dass in dem Punkte, wo die Differenz zwischen v und E ein Grösstes ist, $\sin v = \sin E$ sein muss; wodurch man aus den Gleichungen VIII und III erhält: $r = a\cos\varphi$; $e\cos E = 1 - \cos\varphi$, oder $\cos E = + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$. Ebenso wird gefunden: $\cos v = - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, weshalb sein wird*): $v = 90^0 + \text{arc.}\sin\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, $E = 90^0 - \text{arc.}\sin\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, hieraus ferner $\sin E = \sqrt{(1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^2)} = \frac{\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$; so dass die ganze Gleichung des Mittelpunkts in diesem Punkte wird $= 2\,\text{arc.}\sin\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + 2\sin\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\cos\varphi}$, wobei der zweite Theil in Graden etc. ausgedrückt ist. In demjenigen Punkte endlich, wo die ganze Gleichung des Mittelpunktes ein Grösstes ist, muss $\mathrm{d}v = \mathrm{d}M$ werden und daher nach Art. 15, $r = a\sqrt{\cos\varphi}$; hiernach wird

$$\cos v = -\frac{1 - \cos\varphi^{\frac{3}{2}}}{e},\quad \cos E = \frac{1 - \sqrt{\cos\varphi}}{e} = \frac{1 - \cos\varphi}{e\,(1 + \sqrt{\cos\varphi})} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \sqrt{\cos\varphi}},$$

*) Auf diejenigen Maxima, die zwischen dem Aphel und dem Perihel liegen, braucht man keine Rücksicht zu nehmen, da sie offenbar von den zwischen Perihel und Aphel belegenen nur in den Zeichen verschieden sind.

durch welche Formel man E mit der äussersten Genauigkeit bestimmen kann. Wenn E gefunden ist, so wird mittelst der Gleichungen X und XII die Gleichung des Mittelpunktes

$$= 2\,\text{arc.}\sin\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\sin E}{\sqrt[4]{\cos\varphi}} + e\sin E.$$

Bei dem Ausdrucke der grössten Mittelpunktsgleichung durch eine, nach den Potenzen der Excentricität fortschreitende Reihe, die mehre Schriftsteller abgehandelt haben, will ich mich hier nicht aufhalten. Als Beispiel wollen wir einen Conspectus der drei hier betrachteten Maxima für die Juno hinzufügen, deren Excentricität nach den neuesten Elementen = 0,255 4996 angenommen ist.

Maximum	E	$E - M$	$v - E$	$v - M$
$E - M$	90° 0′ 0″	14° 38′ 20″ 57	14° 48′ 11″ 48	29° 26′ 32″ 05
$v - E$	82 32 9	14 30 54 01	14 55 41 79	29 26 35 80
$v - M$	86 14 40	14 36 27 39	14 53 49 57	29 20 16 96

18.

In der Parabel würden die excentrische Anomalie, die mittlere Anomalie und die mittlere Bewegung = 0 werden, und hier können also diese Begriffsbestimmungen nicht zur Vergleichung der Bewegung mit der Zeit dienen. Jedoch bedürfen wir bei der Parabel zur Integrirung von $rr\,dv$ eines Hülfswinkels überall nicht; denn es wird (17)

$$rr\mathrm{d}v = \frac{pp\mathrm{d}v}{4\cos\frac{1}{2}v^4} = \frac{pp\,\mathrm{d}\tan\frac{1}{2}v}{2\cos\frac{1}{2}v^2} = \tfrac{1}{2}pp\,(1 + \tan\tfrac{1}{2}v^2)\,\mathrm{d}\tan\tfrac{1}{2}v,$$

und daher: $\int rr\mathrm{d}v = \frac{1}{2}pp\,(\tan\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\tan\frac{1}{2}v^3) + \text{const.}$ Wenn man die Zeit vom Durchgange durch das Perihel zu zählen beginnt, so wird die Constante = 0 und man hat daher

$$\tan\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\tan\tfrac{1}{2}v^3 = \frac{2tk\sqrt{(1+\mu)}}{p^{\frac{3}{2}}}$$

durch welche Formel man t aus v und v aus t ableiten kann, sobald p und μ bekannt sind. Statt p pflegt bei parabolischen Elementen der radius vector im Perihele, der $= \frac{1}{2}p$ ist, angewandt und die Masse überhaupt vernachlässigt zu werden. Schwerlich wird es jemals möglich sein, die Masse eines solchen Körpers, dessen Bahn als Parabel berechnet wird, zu bestimmen und in Wahrheit scheinen die Cometen nach den neusten und besten Beobachtungen eine so geringe Dichtigkeit und Masse zu besitzen, dass letztere als unmerklich angesehen und mit Sicherheit vernachlässigt werden kann.

19.

Die Auflösung der Aufgabe: aus der wahren Anomalie die Zeit abzuleiten und noch vielmehr die Auflösung des umgekehrten Problems, kann bedeutend durch eine Hülfstafel erleichtert werden, welche in sehr vielen astronomischen Büchern sich findet. Die bei weitem bequemste aber ist die Barker'sche Tafel, welche auch dem ausgezeichneten Werke von Olbers (Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen, Weimar 1797) angehängt ist. Dieselbe enthält für alle wahren Anomalien von 0 bis 180^0 von fünf zu fünf Minuten den Werth des Ausdruckes $75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + 25 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v^3$ unter dem Namen mittlere Bewegung (motus medius). Wird daher die Zeit verlangt, welche der wahren Anomalie v entspricht, so braucht man nur die mit dem Argumente v aus der Tafel genommene mittlere Bewegung durch $\frac{150 k}{p^{\frac{3}{2}}}$ zu dividiren, welche Grösse die mittlere tägliche Bewegung (motus medius diurnus) heisst; wenn dagegen aus der Zeit die wahre Anomalie berechnet werden soll, so muss man die in Tagen ausgedrückte Zeit mit $\frac{150 k}{p^{\frac{3}{2}}}$ multipliciren, um die mittlere Bewegung zu erhalten, womit man die entsprechende Anomalie aus der Tafel nimmt. Im Uebrigen entspricht offenbar einem negativen Werthe von v dieselbe mittlere Bewegung und Zeit, aber negativ genommen. Die nämliche Tafel dient daher ebensowohl für negative als für positive Anomalien. Will man statt p lieber den Abstand im Peri-
(18) hele $\frac{1}{2} p = q$ benutzen, so wird die mittlere Bewegung ausgedrückt durch $\frac{k \sqrt{2812,5}}{q^{\frac{3}{2}}}$, wo der constante Factor $k \sqrt{2812,5}$ gleich wird: 0,912 279 061 und dessen Logarithmus = 9,960 1277069. Hat man die Anomalie v gefunden,

so wird der radius vector durch die schon oben erwähnte Formel $r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$ bestimmt.*)

20.

Durch Differentiation der Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^3 = 2\,tkp^{-\frac{3}{2}}$, erhält man, wenn alle Grössen v, t, p als veränderliche behandelt werden,

$$\frac{\mathrm{d}v}{2\cos\frac{1}{2}v^4} = 2kp^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t - 3\,tkp^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}p, \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}v = \frac{k\sqrt{p}}{rr}\,\mathrm{d}t - \frac{3\,tk}{2\,rr\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p$$

Wünscht man die Veränderungen der Anomalie v in Secunden auszudrücken, so müssen auch beide Theile von $\mathrm{d}v$ auf diese Weise ausgedrückt werden, d. h. man muss für k den im Art. 6 gegebenen Werth $3548''188$ annehmen. Wenn nun überdies für p eingeführt wird $\frac{1}{2}p = q$, so erhält die Formel die Gestalt

$$\mathrm{d}v = \frac{k\sqrt{2q}}{rr}\,\mathrm{d}t - \frac{3\,kt}{rr\sqrt{2\,q}}\,\mathrm{d}q,$$

wobei die constanten Logarithmen $\log k\sqrt{2} = 3{,}700\,521\,5724$; $\log 3\,k\sqrt{\frac{1}{2}} = 3{,}876\,612\,8315$ zur Anwendung kommen.

Ferner wird durch die Differentiation der Gleichung

$$r = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2} \quad \text{erhalten} \quad \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}p}{p} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v\,\mathrm{d}v,$$

oder wenn man $\mathrm{d}v$ durch $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}p$ ausdrückt:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{3\,kt\operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{2\,rr\sqrt{p}}\right)\mathrm{d}p + \frac{k\sqrt{p}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{rr}\,\mathrm{d}t.$$

Der Coefficient von $\mathrm{d}p$ geht, wenn man für t den Werth aus v substituirt, über in $\frac{1}{p} - \frac{3\,p\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2}{4\,rr} - \frac{p\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^4}{4\,rr} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2 - \frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2\right)$ $= \frac{\cos v}{2\,r}$; der Coefficient von $\mathrm{d}t$ aber wird $= \frac{k\sin v}{r\sqrt{p}}$; hieraus folgt $\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\cos v\,\mathrm{d}p + \frac{k\sin v}{\sqrt{p}}\,\mathrm{d}t$ oder, wenn man q für p einführt,

$$\mathrm{d}r = \cos v\,\mathrm{d}q + \frac{k\sin v}{\sqrt{2\,q}}\,\mathrm{d}t \qquad (19)$$

Der hier anzuwendende constante Logarithmus ist $\log k\sqrt{\frac{1}{2}} = 8{,}085\,066\,4436$.

---

*) Eine zu diesem Artikel gehörende Bemerkung von Gauss in Nr. 474 der Astronomischen Nachrichten siehe Anhang. Anmerkung des Uebersetzers.

21.

In der Hyperbel würden φ und E imaginäre Grössen werden, und man muss, um solche zu vermeiden, an deren Stelle andere Hülfsgrössen einführen. Den Winkel, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$ ist, bezeichneten wir schon oben mit ψ und fanden den radius vector $= \frac{p}{2e\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$ Die Factoren in dem Nenner dieses Bruches, $\cos\frac{1}{2}(v-\psi)$ und $\cos\frac{1}{2}(v+\psi)$, werden einander gleich, wenn $v=0$ ist, der zweite verschwindet bei dem grössten positiven Werthe von v, der erste aber bei dem grössten negativen Werthe. Setzt man daher $\frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = u$, so wird $u=1$ im Perihel; es wächst in infinitum, während v sich seinem Grenzwerthe $180^0-\psi$ nähert; dagegen nimmt es in infinitum ab, wenn v zu seinem anderen Grenzwerthe $-(180^0-\psi)$ zurückkehrt; so dass den entgegengesetzten Werthen für v die reciproken Werthe von u, oder, was dasselbe ist, solche Werthe entsprechen, deren Logarithmen complementäre sind.

Dieser Quotient u kann sehr bequem in der Hyperbel als Hülfsgrösse angewandt werden; und mit ungefähr gleicher Concinnität kann an seiner Stelle der Winkel fungiren, dessen Tangente $=\operatorname{tang}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ ist, und den wir zur Verfolgung der Analogie mit der Ellipse, durch $\frac{1}{2}F$ bezeichnen wollen.

Auf diese Weise sammelt man leicht folgende Relationen zwischen den Grössen v, r, u, F, wobei wir $a=-b$ setzen, so dass b als positive Grösse herauskommt:

I. $b = p\operatorname{cotang}\psi^2$

II. $r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{p\cos\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$

III. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}F = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi = \frac{u-1}{u+1}$

IV. $u = \frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}F}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}F} = \operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}F)$

V. $\frac{1}{\cos F} = \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) = \frac{1+\cos\psi\cos v}{2\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{e+\cos v}{1+e\cos v}$

Wenn man von der Gleichung V auf beiden Seiten 1 abzieht, so folgt:

$$\text{VI.}\quad \sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \sin\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{p}{(e-1)\cos F}} = \sin\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{(e+1)b}{\cos F}} \tag{20}$$

$$= \tfrac{1}{2}(u-1)\sqrt{\frac{p}{(e-1)u}} = \tfrac{1}{2}(u-1)\sqrt{\frac{(e+1)b}{u}}$$

In ähnlicher Weise wird, wenn man auf beiden Seiten 1 addirt:

$$\text{VII.}\quad \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{p}{(e+1)\cos F}} = \cos\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{(e-1)b}{\cos F}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{\frac{p}{(e+1)u}} = \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{\frac{(e-1)b}{u}}$$

Dividirt man VI durch VII, so kommt man zu III zurück; die Multiplication ergiebt:

$$\text{VIII.}\quad r\sin v = p\,\mathrm{cotang}\,\psi\,\mathrm{tang}\,F = b\,\mathrm{tang}\,\psi\,\mathrm{tang}\,F$$

$$= \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{cotang}\,\psi\left(u-\frac{1}{u}\right) = \tfrac{1}{2}b\,\mathrm{tang}\,\psi\left(u-\frac{1}{u}\right)$$

Aus Combination der Gleichungen II und V leitet sich leicht ab:

$$\text{IX.}\quad r\cos v = b\left(e-\frac{1}{\cos F}\right) = \tfrac{1}{2}b\left(2e-u-\frac{1}{u}\right)$$

$$\text{X.}\quad r = b\left(\frac{e}{\cos F}-1\right) = \tfrac{1}{2}b\left(e\left(u+\frac{1}{u}\right)-2\right)$$

22.

Aus Differentiation der Formel IV folgt (wenn man ψ als beständige Grösse ansieht) $\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(v+\psi)-\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(v-\psi)\right)dv = \frac{r\,\mathrm{tang}\,\psi}{p}\,dv$; hieraus $rrdv = \frac{pr}{u\,\mathrm{tang}\,\psi}\,du$; oder, falls für r der Werth aus X substituirt wird:

$$rrdv = bb\,\mathrm{tang}\,\psi\left(\tfrac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{uu}\right)-\frac{1}{u}\right)du$$

Integrirt man hierauf so, dass das Integral im Perihel verschwindet, so resultirt:

$$\int rrdv = bb\,\mathrm{tang}\,\psi\left(\tfrac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right) = kt\sqrt{p}\,.\sqrt{(1+\mu)} = kt\,\mathrm{tang}\,\psi\sqrt{b}\,.\sqrt{(1+\mu)}$$

Hier ist der Logarithme ein hyperbolischer; will man daher Logarithmen aus dem Brigg'schen Systeme, oder allgemein aus einem Systeme anwenden, dessen Modulus $= \lambda$ ist, und die Masse μ (von der wir annehmen, dass sie für einen in der Hyperbel einherziehenden Körper unbestimmbar sei) vernachlässigen, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\text{XI.}\quad \tfrac{1}{2}\lambda e\frac{uu-1}{u}-\log u=\frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}}$$

(21) oder durch Einführung von F,

$$\lambda e \operatorname{tang} F-\log\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}F)=\frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn bei der Anwendung Brigg'sche Logarithmen vorausgesetzt werden, so haben wir $\log\lambda = 9{,}637\,7843\,113$ und $\log\lambda k = 7{,}873\,3657\,527$, aber man kann eine etwas grössere Genauigkeit erreichen, wenn die hyperbolischen Logarithmen unmittelbar angewandt werden. Hyperbolische Logarithmen der Tangenten werden in mehren Tafel-Sammlungen angetroffen, z. B. in der Schulze'schen, und in noch grösserer Ausdehnung bei „*Benjamin Ursinus, grosser logarithmischer Canon der Dreiecke, Cöln 1624,*" wo sie von 10 zu 10 Secunden fortgehen. Uebrigens zeigt die Formel XI, dass den reciproken Werthen von u, oder den entgegengesetzten Werthen von F und v, auch entgegengesetzte Werthe von t entsprechen, weshalb gleiche Theile der Hyperbel die auf beiden Seiten gleich weit vom Perihel abstehen, in gleichen Zeiten beschrieben werden.

23.

Benutzt man, um die Zeit aus der wahren Anomalie zu finden, die Hülfsgrösse u, so wird deren Werth am bequemsten durch die Gleichung IV bestimmt, worauf die Formel II sofort ohne neue Rechnung p aus r, oder r aus p giebt. Ist alsdann u gefunden, so giebt Formel XI die Grösse $\frac{\lambda kt}{b^{\frac{3}{2}}}$, welche der mittleren Anomalie in der Ellipse analog ist, und mit N bezeichnet werde, und hieraus ergiebt sich die seit dem Durchgange durch's Perihel verflossene Zeit. Da der erstere Theil von N, nämlich $\frac{\lambda e(uu-1)}{2u}$ durch die Formel VIII $=\frac{\lambda r\sin v}{b\sin\psi}$ wird, so kann die doppelte Berechnung dieser Grösse zur Prüfung der Schärfe dienen, oder es lässt sich, wenn man dies vorzieht, N ohne u in folgender Weise bestimmen:

$$\text{XII.}\quad N=\frac{\lambda\operatorname{tang}\psi\sin v}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}-\log\frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$$

Beispiel. Es sei $e = 1{,}261\,8820$ oder $\psi = 37^\circ\,35'\,0''$; $v = 18^\circ\,51'\,0''$; $\log r = 0{,}033\,3585$. Dann steht die Rechnung für u, p, b, N, t so:

$\log \cos \frac{1}{2}(v - \psi)$	9,994 1706	woraus $\log u$	0,049 1129
$\log \cos \frac{1}{2}(v + \psi)$	9,945 0577	$u =$	1,119 7289
$\log r$	0,033 3585	$uu =$	1,253 7928
$\log 2e$	0,402 0488		
$\log p$	0,374 6356		
$\log \operatorname{cotang} \psi^2$	0,227 4244		
$\log b$	0,602 0600	Die andere Rechnung	(22)
$\log \frac{r}{b}$	9,431 2985	$\log (uu - 1)$	0,404 4793
$\log \sin v$	9,509 3258	Compl. $\log u$	9,950 8871
$\log \lambda$	9,637 7843	$\log \lambda$	9,637 7843
Compl. $\log \sin \psi$	0,214 7309	$\log \frac{1}{2} e$	9,799 9888
	8,793 1395		8,793 1395
Erster Theil von $N =$	0,062 1069		
$\log u =$	0,049 1129		
$N =$	0,012 9940	$\log N$	8,113 7429
$\log \lambda k$	7,873 3658	Differenz	6,970 2758
$\frac{3}{2} \log b$	0,903 0900		
		$\log t$	1,143 4671
		$t =$	13,91448

24.

Soll die Rechnung, mit hyperbolischen Logarithmen geführt werden, so empfiehlt es sich, dabei die durch Gleichung III zu bestimmende Hülfsgrösse F zu brauchen, und hieraus N durch XI zu suchen; der halbe Parameter wird aus dem radius vector, oder wechselsweise dieser aus jenem mittelst Formel VIII berechnet; der zweite Theil von N kann auf doppelte Weise ermittelt werden, nämlich durch die Formel: $\log \text{hyp} \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} F)$ oder durch $\log \text{hyp} \cos \frac{1}{2}(v - \psi) - \log \text{hyp} \cos \frac{1}{2}(v + \psi)$. Im Uebrigen ist es klar, dass die Grösse N hier, wo $\lambda = 1$ ist, im Verhältnisse von $1 : \lambda$ grösser heraus kommt, als bei der Anwendung von Brigg'schen Logarithmen. Unser, auf diese Weise behandeltes Beispiel steht dann so:

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$	9,531 8179		
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}v$	9,220 1009		
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}F$	8,751 9188	$\frac{1}{2}F =$	$3^{\circ}\,13'\,58''\,12$
$\log e$	0,101 0188		
$\log \operatorname{tang} F$	9,054 3366		
	9,155 3554	$\mathrm{C.}\log \operatorname{hyp} \cos \frac{1}{2}(v-\psi) =$	0,013 42266
$e \operatorname{tang} F =$	0,143 00638	$\mathrm{C.}\log \operatorname{hyp} \cos \frac{1}{2}(v+\psi) =$	0,126 50930
$\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^{\circ}+\frac{1}{2}F) =$	0,113 08666	Differenz $=$	0,113 08664
$N =$	0,029 91972	$\log N$	8,475 9575
$\log k$	8,235 5814	Differenz	7,332 4914
$\frac{3}{2}\log b$	0,903 0900		
		$\log t$	1,143 4661
		$t =$	13,91445

25.

(23) Zur Auflösung der umgekehrten Aufgabe, aus der Zeit die wahre Anomalie und den radius vector zu bestimmen — wird zuerst aus $\mathrm{N} = \lambda k b^{-\frac{3}{2}} t$ durch Gleichung XI die Hülfsgrösse u oder F ermittelt. Die Auflösung dieser transcendenten Gleichung geschieht durch Versuche, welche durch ähnliche Kunstgriffe abgekürzt werden können, wie die in Art. 11 auseinandergesetzten. Wir setzen uns darüber hinweg, dies näher noch zu erklären; denn es scheint uns nicht der Mühe werth, diese Vorschriften ebenso ängstlich auszufeilen, als die für die Ellipse, da der Fall der hyperbolischen Bewegung in den Himmelsräumen vielleicht kaum jemals sich zuträgt, und da ausserdem alle Fälle, die vielleicht eintreten sollten, durch eine andere, weiter unten auseinanderzusetzende Methode sich erledigen lassen. Nachdem man F oder u gefunden hat, wird daraus v durch Formel III, und sodann r aus II oder VIII bestimmt; bequemer werden noch v und r zugleich mittelst der Formel VI und VII eruirt, und zur Prüfung der Rechnung kann man die eine oder die andere der übrigen Formeln benutzen.

26.

Beispiel. Wenn e und b so wie im vorhergehenden Beispiele bleiben, und $t = 65{,}41236$ ist, werden gesucht: v und r. Bei Brigg'schen Logarithmen hat man

$\log t \ldots\ldots\ldots 1{,}815\,6598$
$\log \lambda k b^{-\frac{3}{2}} \ldots\ldots 6{,}970\,2758$

$\log N \ldots\ldots\ldots 8{,}785\,9356$; $N = 0{,}061\,08514$.

Hieraus findet sich, dass der Gleichung

$N = \lambda e \operatorname{tang} F - \log\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2} F)$ Genüge geleistet wird durch $F = 25^0\,24'\,27''\,66$; woraus nach Formel III:

$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}F \ldots\ldots 9{,}353\,0120$
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi \ldots\ldots 9{,}531\,8179$

$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}v \ldots\ldots 9{,}821\,1941$ also $\frac{1}{2}v = 33^0\,31'\,29''\,89$; $v = 67^0\,2'\,59''\,78$.

Darnach hat man ferner:

$\left.\begin{array}{l} \text{C.}\log\cos\frac{1}{2}(v+\psi) \ldots\ldots 0{,}213\,7476 \\ \text{C.}\log\cos\frac{1}{2}(v-\psi) \ldots\ldots 0{,}014\,5197 \end{array}\right\}$ Differenz $\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}199\,2279$

$\log\frac{p}{2e} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}972\,5868$ $\quad$ $\log\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}F) \ldots 0{,}199\,2280$

$\log r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}200\,8541$

27.

Wird die Gleichung IV so differentiirt, dass u, v, ψ zugleich als veränderliche behandelt werden, so kommt

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\sin\psi\,\mathrm{d}v + \sin v\,\mathrm{d}\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{r\operatorname{tang}\psi}{p}\,\mathrm{d}v + \frac{r\sin v}{p\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi \tag{24}$$

Differentiirt man ebenso Gleichung XI, so ergiebt sich unter den differentialen Veränderungen der Grössen u, ψ, N folgende Relation:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\lambda} = \left(\tfrac{1}{2}e\left(1 + \frac{1}{uu}\right) - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{(uu-1)\sin\psi}{2u\cos\psi^2}\,\mathrm{d}\psi, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\lambda} = \frac{r}{bu}\,\mathrm{d}u + \frac{r\sin v}{b\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

und hieraus erhalten wir, wenn $\mathrm{d}u$ mittelst der vorhergehenden Gleichung eliminirt wird:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\lambda} = \frac{rr}{bb\operatorname{tang}\psi}\,\mathrm{d}v + \left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r\sin v}{b\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi, \text{ oder}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{bb\operatorname{tang}\psi}{\lambda rr}\,\mathrm{d}N - \left(\frac{b}{r}+\frac{b}{p}\right)\frac{\sin v\operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

$$= \frac{bb\operatorname{tang}\psi}{\lambda rr}\,\mathrm{d}N - \left(1+\frac{p}{r}\right)\frac{\sin v}{\sin\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

28.

Wird Gleichung X differentiirt, und alles r, b, e, u dabei als veränderlich behandelt, auch für $\mathrm{d}e = \frac{\sin\psi}{\cos\psi^2}\,\mathrm{d}\psi$ substituirt, und zugleich $\mathrm{d}u$ mit Hülfe der zufolge des vorhergehenden Artikels zwischen $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}\psi$ bestehenden Gleichung eliminirt, so folgt:

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{b}\,\mathrm{d}b + \frac{bb\,e\,(uu-1)}{2\lambda ur}\,\mathrm{d}N$$

$$+\frac{b}{2\cos\psi^2}\left\{\left(u+\frac{1}{u}\right)\sin\psi - \left(u-\frac{1}{u}\right)\sin v\right\}\mathrm{d}\psi$$

Der Coefficient von $\mathrm{d}N$ geht durch Gleichung VIII über in $\frac{b\sin v}{\lambda\sin\psi}$; der Coefficient $\mathrm{d}\psi$ aber, wenn man aus Gleichung IV, $u(\sin\psi - \sin v) = \sin(\psi - v)$; $\frac{1}{u}(\sin\psi + \sin v) = \sin(\psi + v)$ setzt, wird verändert in: $\frac{b\sin\psi\cos v}{\cos\psi^2} = \frac{p\cos v}{\sin\psi}$, so dass man hat

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{b}\,\mathrm{d}b + \frac{b\sin v}{\lambda\sin\psi}\,\mathrm{d}N + \frac{p\cos v}{\sin\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

In so fern man N als eine Function von b und t betrachtet, wird $\mathrm{d}N = \frac{N}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\cdot\frac{N}{b}\,\mathrm{d}b$. Bei Substituirung dieses Werthes werden $\mathrm{d}r$ und ebenso im vorhergehenden Artikel $\mathrm{d}v$, durch $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}\psi$ ausgedrückt erhalten. Uebrigens muss das, was schon oben erwähnt, auch hier wiederholt werden,
(25) nämlich, dass wenn die Veränderungen der Winkel u und ψ nicht in Theilen des Radius, sondern in Secunden ausgedrückt genommen werden, entweder alle Glieder, die $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\psi$ enthalten, durch 206 264,8 zu dividiren, oder die übrigen durch diese Zahl zu multipliciren sind.

29.

Da die in der Ellipse angewandten Hülfsgrössen φ, E, M in der Hyperbel imaginäre Werthe erhalten, so wird es nützlich sein, deren Verbindung mit den reellen Grössen, die wir gebraucht haben, zu erforschen; wir fügen daher die vorzüglichsten Relationen hinzu, und bezeichnen die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ mit i.

$$\sin\varphi = e = \frac{1}{\cos\psi}$$

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = i\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = i\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = -\frac{i}{\sin\psi}$$

$$\cos\varphi = i\operatorname{tang}\psi$$

$$\varphi = 90^0 + i\log(\sin\varphi + i\cos\varphi) = 90^0 - i\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\psi)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = i\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}F = \frac{i(u-1)}{u+1}$$

$$\frac{1}{\sin E} = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = -i\operatorname{cotang}F \text{ oder}$$

$$\sin E = i\operatorname{tang}F = \frac{i(uu-1)}{2u}$$

$$\operatorname{cotang}E = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = -\frac{i}{\sin F} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang}E = i\sin F = \frac{i(uu-1)}{uu+1}$$

$$\cos E = \frac{1}{\cos F} = \frac{uu+1}{2u};\ iE = \log(\cos E + i\sin E) = \log\frac{1}{u}$$

$$E = i\log u = i\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}F)$$

$$M = E - e\sin E = i\log u - \frac{ie(uu-1)}{2u} = -\frac{iN}{\lambda}$$

Die Logarithmen in diesen Formeln sind hyperbolische.

30.

Da sämmtliche, aus den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln (26) genommenen Zahlen eine absolute Genauigkeit nicht zulassen, sondern bis auf einen gewissen Grad nur genähert sind, so kann durch alle mit ihrer Hülfe angestellten Rechnungen die Wahrheit nur genähert bekannt werden. In sehr vielen Fällen geben zwar die gewöhnlichen Tafeln, die bis auf die siebente Stelle sicher sind (d. h. von der Wahrheit nirgends mehr oder weniger als eine halbe Einheit der siebenten Decimalziffer abweichen) eine mehr als hinreichende Genauigkeit, so dass die unvermeidlichen Irrthümer von keiner Bedeutung sind. Nichtsdestoweniger kann es in besonderen Fällen vorkommen, dass die Fehler der Tafeln einen so verstärkten Einfluss äussern, dass man sich von einer sonst sehr guten Methode lossagen und eine andere wählen muss. Derartige Fälle können auch in den bis jetzt auseinandergesetzten Rechnungen passiren. Es wird daher am Platze sein, hier einige Untersuchungen über den Grad der Genauigkeit anzustellen, welchen die gewöhnlichen Tafeln bei diesen Rechnungen erlauben. Da aber hier nicht der Ort ist, dieses für den praktischen Rechner sehr wichtige Argument zu erschöpfen, so wollen wir die Untersuchung so weit führen, dass es für unsere Zwecke genügt und dass jeder, dem daran liegt, sie weiter ausfeilen und auf andere Operationen ausdehnen kann.

31.

Jeder Logarithme, Sinus, Tangente etc. (oder überhaupt jede aus den Tafeln entnommene irrationale Grösse) ist einem Irrthume unterworfen, der bis auf eine halbe Einheit der letzten Stelle steigen kann. Wir bezeichnen diese Grenze des Irrthums mit ω, die daher in den gewöhnlichen Tafeln $= 0{,}000\,00005$ wird. Wenn ein Logarithmus etc. nicht unmittelbar aus den Tafeln genommen werden kann, sondern durch Interpolation gefunden werden muss, so kann der Irrthum aus einem doppelten Grunde noch etwas grösser werden. Erstens nämlich pflegt, so oft der Proportionaltheil nicht ein Ganzes (wenn man dabei die letzte Stelle als Einheit ansieht) ist, dafür das nächst grössere oder kleinere Ganze genommen zu werden. Man sieht leicht, dass aus diesem Grunde der Irrthum sogar bis aufs Doppelte vermehrt werden könne. Auf diese Vermehrung des Irrthums nehmen wir aber hier überhaupt keine Rücksicht, da nichts im Wege steht, dem Proportionaltheile noch die eine oder die andere Decimalstelle hinzuzufügen und es ist ohne Weiteres klar, dass der interpolirte Logarithmus, wenn der Proportionaltheil vollkommen genau wäre, keinem grösseren Irrthume unterworfen sein könne, als die unmittelbar in den Tafeln stehenden Logarithmen, insoweit es erlaubt ist, deren Aenderungen als gleichförmige zu

betrachten. Die zweite Vermehrung des Irrthums entsteht daraus, dass eben letztere Voraussetzung nicht in aller Strenge wahr ist. Aber auch diese Vermehrung vernachlässigen wir, da die Wirkung der zweiten und höheren Differenzen (27)
in nahezu allen Fällen von keiner Bedeutung ist (vorzüglich wenn für die trigonometrischen Grössen die vortrefflichen Taylor'schen Tafeln angewandt werden), und mit leichter Mühe könnte man diesem Umstande Rechnung tragen, wo jene Wirkung vielleicht etwas grösser sein sollte. Wir setzen daher für alle Fälle den grössten unvermeidlichen Irrthum der Tafeln $= \omega$, wenn nämlich das Argument (d. h. die Zahl deren Logarithmus, oder der Winkel dessen Sinus etc. verlangt wird) völlig genau ist. Ist aber das Argument selbst nur näherungsweise bekannt, und nimmt man an, dass dessen grösstmöglichem Irrthume die logarithmische u. s. w. Veränderung ω' entspreche (welche durch Differentialrechnung sich bestimmen lässt), so kann der grösste Fehler des aus den Tafeln berechneten Logarithmen bis auf $\omega + \omega'$ steigen.

Umgekehrt ist, wenn mit Hülfe der Tafeln das einem gegebenen Logarithmus entsprechende Argument berechnet wird, der grösste Irrthum desselben derjenigen Veränderung gleich, welche der Veränderung ω im Logarithmus dann entspricht, wenn letzterer genau gegeben ist, oder welche der Veränderung des Logarithmus $\omega + \omega'$ entspricht, falls der Logarithmus selbst bis zum Belaufe von ω' fehlerhaft sein kann. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass ω und ω' das nämliche Vorzeichen erhalten müssen.

Wenn mehre, nur innerhalb gewisser Grenzen genaue Grössen addirt werden, so wird der grösste Irrthum der Summe gleich sein der Summe der einzelnen grössten, mit dem nämlichen Zeichen versehenen Irrthümer; weshalb denn auch bei der Subtraction von nur genähert richtigen Grössen, der grösste Irrthum in der Differenz gleich der Summe der einzelnen grössten Irrthümer sein wird. Bei der Multiplication oder Division einer nicht absolut genauen Grösse wird der grösste Irrthum in demselben Verhältnisse vermehrt oder vermindert, wie die Grösse selbst.

32.

Wir gehen nun zu der Anwendung dieser Grundsätze auf die nützlichsten der oben entwickelten Operationen über.

I. Wenn man bei der elliptischen Bewegung zur Berechnung der wahren Anomalie aus der excentrischen die Formel VII des Art. 8 anwendet, und voraussetzt, dass φ und E als genau gelten, so kann beim log tang $(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ und beim log tang $\frac{1}{2}E$ der Irrthum ω begangen werden und mithin in der Differenz $=$ log tang $\frac{1}{2}v$ der Irrthum 2ω; also wird der grösste, bei Bestimmung des Winkels $\frac{1}{2}v$ zu begehende Irrthum sein $\frac{3\,\omega\,\mathrm{d}\frac{1}{2}v}{\mathrm{d}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}v} = \frac{3\,\omega\sin v}{2\lambda}$, wobei λ den modulus der zu dieser Berechnung angewandten Logarithmen bedeutet. — Der Irrthum daher, dem die wahre Anomalie v unterworfen, wird in Secunden ausgedrückt $= \frac{3\,\omega\sin v}{\lambda}\,206\,265'' = 0''0712 \sin v$, wenn Brigg'sche siebenstellige
(28) Logarithmen angewendet werden, so dass man immer innerhalb $0''07$ über den Werth von v gewiss sein kann; bei Benutzung kleinerer nur fünfstelliger Tafeln kann der Irrthum bis auf $7''12$ gehen.

II. Wird $e\cos E$ mit Hülfe von Logarithmen berechnet, so ist ein Irrthum möglich bis zu $\frac{3\,\omega\,e\cos E}{\lambda}$; und demselben Irrthum wird auch die Grösse $1 - e\cos E$ oder $\frac{r}{a}$ unterworfen sein. Bei Berechnung des Logarithmus dieser Grösse kann mithin der Irrthum steigen bis auf $(1+\delta)\,\omega$, wo δ die positiv genommene Grösse $\frac{3\,e\cos E}{1 - e\cos E}$ bezeichnet. Bis zu derselben Grenze $(1+\delta)\,\omega$ geht der beim $\log r$ mögliche Irrthum, wenn nämlich der $\log a$ als genau gegeben angesehen wird. So oft die Excentricität klein ist, so ist die Grösse δ immer in enge Grenzen eingeschlossen, wenn aber e wenig von Eins verschieden ist, so bleibt $1 - e\cos E$ sehr klein, so lange E klein ist; es kann daher dann δ zu einem nicht zu vernachlässigenden Betrage anwachsen, weshalb in diesem Falle die Formel III des Art. 8 weniger geeignet sein würde. — Die Grösse δ lässt sich auch so ausdrücken: $\frac{3\,(a-r)}{r} = \frac{3\,e\,(\cos v + e)}{1 - ee}$; eine Formel, die noch klarer zeigt, wann man den Irrthum $(1+\delta)\,\omega$ vernachlässigen darf.

III. Wendet man die Formel X des Art. 8 zur Berechnung der wahren Anomalie aus der excentrischen an, so ist $\log\sqrt{\frac{a}{r}}$ dem Irrthume $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta)\,\omega$

unterworfen, und folglich $\log \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$ dem Irrthume $(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\delta)\,\omega$; hieraus wird der grösste, bei Bestimmung des Winkels $v - E$ oder v mögliche Irrthum gefunden zu: $\frac{\omega}{\lambda}(7 + \delta) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - E)$, oder in Secunden ausgedrückt und mit Anwendung von siebenstelligen Logarithmen $= (0''166 + 0''024\,\delta) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - E)$. Bei mässiger Excentricität werden δ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - E)$ kleine Grössen sein, weshalb diese Methode eine grössere Genauigkeit gestattet, als die unter I betrachtete, dagegen wird letztere dann vorzuziehen sein, wenn die Excentricität recht gross ist und nahe an die Einheit herankommt, wo δ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(v - E)$ recht beträchtliche Werthe erlangen können. Es lässt sich daher durch unsere Formeln stets leicht entscheiden, welcher von den beiden Methoden der Vorzug gebührt.

IV. Bei Bestimmung der mittleren Anomalie aus der excentrischen vermittelst der Formel XII im Art. 8 kann der Irrthum der mit Logarithmen berechneten Grösse $e \sin E$, und deshalb auch der Anomalie M, bis auf $\frac{3\,\omega\, e \sin E}{\lambda}$ steigen, und ist die Grenze dieses Irrthums, wenn man sie in Secunden ausgedrückt verlangt, mit $206\,265''$ zu multipliciren. Hieraus schliesst man leicht, dass bei der umgekehrten Aufgabe, wo E aus M durch Versuche bestimmt wird, dies E um die Grösse $\frac{3\,\omega\, e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}M} \cdot 206\,265'' = \frac{3\,\omega\, e\, a \sin E}{\lambda r} \cdot 206\,265''$ (29) selbst dann fehlerhaft sein kann, wenn auch der Gleichung $E - e \sin E = M$ mit aller durch die Tafeln gestatteten Genauigkeit Genüge geleistet ist.

Die wahre, aus der mittleren berechnete Anomalie kann also aus zwei Gründen fehlerhaft sein (wenn wir nämlich die mittlere als genau betrachten), erstens wegen des bei der Berechnung von v aus E begangenen Irrthums, der, wie wir gesehen haben, stets von geringer Bedeutung ist, und zweitens deshalb, weil der Werth der excentrischen Anomalie selbst schon fehlerhaft sein konnte. Die Einwirkung dieses letzteren Grundes wird bestimmt durch das Product des in E begangenen Irrthums mit $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}E}$, welches Product wird

$$= \frac{3\,\omega\, e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}M} \cdot 206\,265'' = \frac{3\,\omega\, e\, a \sin v}{\lambda r} \cdot 206\,265'' = \left(\frac{e \sin v + \frac{1}{2} ee \sin 2v}{1 - ee}\right) 0''0712$$

bei Anwendung von sieben Stellen. Dieser Irrthum, der für kleine Werthe von e stets mässig bleibt, kann sehr gross werden, sobald e von der Einheit wenig verschieden ist, wie die nachfolgende Tafel zeigt, die für einige Werthe von e den grössten Werth jenes Ausdrucks darstellt.

e	grösster Irrthum	e	grösster Irrthum	e	grösster Irrthum
0,90	0″42	0,94	0″73	0,98	2″28
0,91	0,48	0,95	0,89	0,99	4,59
0,92	0,54	0,96	1,12	0,999	46,23
0,93	0,62	0,97	1,50		

V. In der hyperbolischen Bewegung kann, wenn v nach Formel III des Art. 21 aus genau bekanntem F und ψ berechnet wird, der Irrthum bis zu $\frac{3\omega \sin v}{\lambda}.206\,265''$ steigen; wenn es aber durch die Formel $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \frac{u-1}{(u+1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}$ berechnet wird und u sowohl als ψ genau bekannt sind, so wird die Grenze des Irrthums um $\frac{1}{3}$ grösser werden, nämlich $= \frac{4\omega \sin v}{\lambda}.206\,265'' = 0''09 \sin v$ (bei sieben Stellen).

VI. Wird vermittelst der Formel XI des Art. 22 die Grösse $\frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}} = N$ mit Hülfe Brigg'scher Logarithmen berechnet, und gelten e und u, oder e und F als genau bekannt, so wird der erste Theil dem Irrthume $\frac{5(uu-1)e\omega}{2u}$ unterworfen sein, wenn er in der Form $\frac{\lambda e(u-1)(u+1)}{2u}$, oder dem Irrthume
(30) $\frac{3(uu+1)e\omega}{2u}$, wenn er in der Form von $\frac{1}{2}\lambda eu - \frac{\lambda e}{2u}$ berechnet ist, oder dem Irrthume $3e\omega \operatorname{tang} F$, wenn die Form $\lambda e \operatorname{tang} F$ benutzt ist, falls man dabei den in $\log \lambda$ oder $\log \frac{1}{2}\lambda$ begangenen Irrthum vernachlässigt. Im ersten Falle kann der Irrthum auch durch $5e\omega \operatorname{tang} F$, im zweiten durch $\frac{3e\omega}{\cos F}$ ausgedrückt werden, woraus man sieht, dass im dritten Falle der Irrthum immer der kleinste von allen ist, er aber im ersten und zweiten grösser sein wird, je nachdem u oder $\frac{1}{2}u$ grösser oder kleiner als 2, oder je nachdem $\pm F$ grösser oder kleiner als $36^0\,52'$ ist. Der zweite Theil von N wird aber stets dem Irrthum ω unterworfen sein.

VII. Umgekehrt ist klar, dass, wenn u oder F aus N durch Versuche bestimmt wird, u dem Irrthume $(\omega \pm 5e\omega \operatorname{tang} F)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N}$ oder

$\left(\omega + \frac{3e\omega}{\cos F}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N}$ unterworfen sein werde, je nachdem man das erste Glied in dem Werthe für N entweder in Factoren oder in Theile zerlegt anwendet; F aber unterliegt dem Irrthume $(\omega \pm 3e\omega \operatorname{tang} F)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}N}$. — Die oberen Zeichen gelten nach dem Perihele, die unteren vor dem Perihele. Substituirt man daher hier $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}N}$ für $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N}$ oder für $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}N}$, so ergiebt sich der Einfluss dieses Irrthums auf die Bestimmung von v, der deshalb sein wird:

$$\frac{bb \operatorname{tang}\psi(1 \pm 5e \operatorname{tang} F)\omega}{\lambda rr} \text{ oder } \frac{bb \operatorname{tang}\psi(1 + 3e \sec F)\omega}{\lambda rr},$$

falls die Hülfsgrösse u angewendet ist. — Braucht man dagegen F, so wird diese Einwirkung

$$= \frac{bb \operatorname{tang}\psi(1 \pm 3e \operatorname{tang} F)\omega}{\lambda rr} = \frac{\omega}{\lambda}\left\{\frac{(1+e\cos v)^2}{\operatorname{tang}\psi^3} \pm \frac{3e\sin v(1+e\cos v)}{\operatorname{tang}\psi^2}\right\}.$$

Der Factor 206 265″ muss hinzugefügt werden, um den Irrthum in Secunden auszudrücken. Offenbar kann dieser Irrthum nur dann als beträchtlich sich ergeben, wenn der Winkel ψ klein, oder e um ein Weniges grösser als 1 ist. Hier folgen die grössten Werthe dieses dritten Ausdrucks für einige Werthe von e bei Benutzung siebenstelliger Decimalen:

e	grösster Irrthum
1,3	0″34
1,2	0,54
1,1	1,31
1,05	3,03
1,01	34,41
1,001	1064,65

Diesem, aus einem irrthümlichen Werthe von F oder u entstandenen Irrthume (31) muss man noch den in V bestimmten Irrthum hinzufügen, um die ganze Unsicherheit von v zu erhalten.

VIII. Wenn die Gleichung XI im Art. 22 mit Hülfe hyperbolischer Logarithmen aufgelöst, und dabei F als Hülfsgrösse gebraucht wird, so findet man die Wirkung des bei dieser Operation in der Bestimmung von v möglichen Irrthums durch eine ähnliche Betrachtung

$$= \frac{(1+e\cos v)^2\omega'}{\operatorname{tang}\psi^3} \pm \frac{3e\sin v(1+e\cos v)\omega}{\lambda \operatorname{tang}\psi^2},$$

wobei ω' die grösste Unsicherheit in den Tafeln der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Der zweite Theil dieses Ausdruckes ist identisch mit dem zweiten Theil des in VII behandelten Ausdruckes, der erste Theil aber ist im Verhältnisse von $\lambda\omega' : \omega$ kleiner, als der erste in jenem Ausdrucke, d. h. im Verhältnisse von 1 zu 23, wenn man die Ursinus'sche Tafel allenthalben als bis zur achten Stelle sicher oder $\omega' = 0{,}0000\,0000\,5$ voraussetzen dürfte.

33.

Die oben behuf Bestimmung der wahren Anomalie aus der Zeit*) oder umgekehrt auseinandergesetzten Methoden erlauben daher nicht alle wünschenswerthe Schärfe bei denjenigen Kegelschnitten, deren Excentricität von der Einheit nur wenig verschieden ist, d. h. bei Ellipsen und Hyperbeln, die der Parabel sehr nahe kommen, und es würden mithin die unvermeidlichen Irrthümer, die sich steigern, je mehr die Bahn zur Aehnlichkeit mit der Parabel neigt, zuletzt alle Grenzen überschreiten. Die mehr als siebenstelligen Tafeln würden diesen Irrthum zwar vermindern, ihn aber nicht aufheben und auch nicht verhindern, dass er nicht alles Maass dann überschreitet, sobald die Bahn gar zu nahe an die Parabel herankommt. Ausserdem werden in diesem Falle die obigen Methoden recht beschwerlich, weil ein Theil derselben indirecte, häufig wiederholte Versuche erfordert, und das Widrige dieser Unbequemlichkeit wird durch Anwendung grösserer Tafeln noch vermehrt.

Es wird deshalb sicher nicht überflüssig sein, eine besondere Methode zu bearbeiten, durch welche man in solchem Falle jene Unsicherheit vermeiden, und allein mit Hülfe der gewöhnlichen Tafeln eine hinreichende Genauigkeit erlangen kann.

(32)

34.

Die gewöhnliche Methode, durch welche man jenen Unbequemlichkeiten eine Abhülfe zu schaffen pflegt, stützt sich auf folgende Grundsätze. Es möge

*) Da die Zeit den Factor $a^{\frac{3}{2}}$ oder $b^{\frac{3}{2}}$ enthält, so wird der bei M oder N begangene Irrthum um so erheblicher vermehrt, je grösser $a = \frac{p}{1-ee}$ oder $b = \frac{p}{ee-1}$ wird.

in einer Ellipse oder Hyperbel, deren Excentricität e, halber Parameter p und daher Abstand im Perihel $= \frac{p}{1+e} = q$ ist, der Zeit nach dem Perihele t, die wahre Anomalie v entsprechen; es entspreche ferner derselben Zeit in der Parabel (deren halber Parameter $= 2q$, oder deren Abstand im Perihel $= q$) die wahre Anomalie w, und die Masse μ soll in beiden Fällen entweder vernachlässigt werden oder gleich sein, so hat man offenbar:

$$\int \frac{pp\,\mathrm{d}v}{(1+e\cos v)^2} : \int \frac{4qq\,\mathrm{d}w}{(1+\cos w)^2} = \sqrt{p} : \sqrt{2q},$$

wenn die Integrale mit $v = 0$ und $w = 0$ beginnen, oder

$$\int \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}v}{(1+e\cos v)^2\sqrt{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}w}{(1+\cos w)^2}.$$

Wenn man $\frac{1-e}{1+e}$ mit α, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v$ mit ϑ bezeichnet, so wird das erstere Integral gefunden =

$$\sqrt{(1+\alpha)}.\left(\vartheta + \tfrac{1}{3}\vartheta^3(1-2\alpha) - \tfrac{1}{5}\vartheta^5(2\alpha - 3\alpha\alpha) + \tfrac{1}{7}\vartheta^7(3\alpha\alpha - 4\alpha^3) - \text{etc.}\right)$$

das zweite $= \operatorname{tang}\frac{1}{2}w + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}w^3$. Aus dieser Gleichung lässt sich mit Hülfe unendlicher Reihen leicht w aus α und v, oder v aus α und w bestimmen. Statt α kann man auch, falls man das vorzieht, $1-e = \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \delta$ einführen. Da für $\alpha = 0$ oder $\delta = 0$, offenbar $v = w$ wird, so erhalten diese Reihen folgende Form:

$$w = v + \delta v' + \delta\delta v'' + \delta^3 v''' + \text{etc.}$$
$$v = w + \delta w' + \delta\delta w'' + \delta^3 w''' + \text{etc.}$$

wo v', v'', v''' etc. Functionen von v; und w', w'', w''' etc. Functionen von w sind. Ist δ eine sehr kleine Grösse, so werden diese Reihen schnell convergiren und wenige Glieder hinreichen, um w aus v, oder v aus w zu bestimmen. Aus w wird t, oder w aus t auf dieselbe, schon oben für die parabolische Bewegung erklärte Weise gefunden.

35.

Die analytischen Ausdrücke der drei ersten Coefficienten der zweiten Reihe w', w'', w''' hat Bessel entwickelt, und zugleich für die numerischen Werthe der beiden ersten w', w'' eine Tafel hinzugefügt, die nach einzelnen

Graden des Argumentes w construirt ist (von Zach Monatl. Correspondenz, vol. XII, p. 197). Für den ersten Coefficienten w' gab es schon früher eine
(33) von Simpson berechnete Tafel, die dem oben erwähnten Werke von Olbers angehängt ist. In sehr vielen Fällen kann durch diese Methode mit Hülfe der Bessel'schen Tafel die wahre Anomalie aus der Zeit mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden; was noch zu wünschen übrig bleibt, reducirt sich etwa auf folgende Momente:

I. Bei der umgekehrten Aufgabe, nämlich bei Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie, muss man seine Zuflucht zu einer gleichsam indirecten Methode nehmen und w aus v durch Versuche ableiten. Um dieser Unbequemlichkeit zu begegnen, müsste die erstere Reihe auf dieselbe Weise behandelt werden, wie die zweite, und da man leicht sieht, dass $-v'$ dieselbe Function von v ist, als w' von w, so dass eine Tafel für w' nur mit geänderten Zeichen für v' dienen könnte, so würde nur noch eine Tafel für v'' erforderlich sein, damit jede der beiden Aufgaben mit gleicher Schärfe gelöst werden könnte.

II. Es können in der That bisweilen Fälle vorkommen, wo zwar die Excentricität von der Einheit wenig abweicht, so dass die obigen allgemeinen Methoden keine hinreichende Genauigkeit gewähren, wo jedoch diese Abweichung noch zu stark ist, als dass man die Einwirkung der dritten und höheren Potenzen von δ bei der besonderen vorhin dargestellten Methode mit Sicherheit vernachlässigen dürfte. Namentlich bei der hyperbolischen Bewegung sind solche Fälle möglich, wo, man mag nun jene Methoden oder diese anwenden, ein Irrthum von mehren Secunden sich nicht vermeiden lässt, wenn man nur die gewöhnlichen siebenstelligen Tafeln braucht. Mögen nun auch derartige Fälle in der Praxis selten eintreten, so könnte es doch als ein Mangel erscheinen, wenn nicht in allen Fällen die wahre Anomalie innerhalb $0''1$ oder wenigstens $0''2$ sicher sich bestimmen liesse, falls nicht grössere Tafeln benutzt werden, die jedoch bekanntlich ziemlich selten sind. Ich hoffe daher, man werde die Auseinandersetzung einer besonderen Methode nicht für gänzlich überflüssig halten, deren ich mich schon lange bedient habe, und die sich auch in der Hinsicht empfiehlt, weil sie keineswegs auf Excentricitäten beschränkt ist, die nur wenig von der Einheit abweichen, sondern mindestens in dieser Hinsicht eine allgemeine Anwendung erlaubt.

36.

Bevor ich mit Auseinandersetzung dieser Methode beginne, wird es angemessen sein, zu bemerken, dass die Unsicherheit der obigen allgemeinen Methoden bei den zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigenden Bahnen von selbst aufhört, sobald E oder F zu einer beträchtlichen Grösse anwachsen, was zwar erst in grossen Entfernungen von der Sonne Statt findet. Um dies zu zeigen, wollen wir den grössten in der Ellipse möglichen Irrthum, den wir im Art. 32, IV.

$$= \frac{3\,\omega\, e\, a \sin v}{\lambda\, r} \,.\, 206\,265''$$

fanden, so ausdrücken

$$\frac{3\,\omega\, e \sqrt{(1-ee)} \,.\, \sin E}{\lambda\,(1-e\cos E)^2} \,.\, 206\,265'',$$

woraus von selbst erhellt, dass der Irrthum stets in enge Grenzen eingeschlossen (34)
ist, sobald E einen beträchtlichen Werth erreicht, oder sobald $\cos E$ sich von der Einheit mehr entfernt, wie gross auch die Excentricität sein möge. Dies wird noch deutlicher durch die folgende Tafel erscheinen, in welcher ich den grössten numerischen Werth jener Formel für einige bestimmte Werthe (mit sieben Decimalen) berechnet habe:

$E = 10^0$	Grösster Irrthum $= 3''04$
20	0,76
30	0,34
40	0,19
50	0,12
60	0,08

Auf ähnliche Weise verhält sich die Sache in der Hyperbel, wie sogleich klar wird, wenn der in Art. 32, VII gegebene Ausdruck unter die Form gebracht wird

$$\frac{\omega \cos F(\cos F + 3\,e \sin F)\sqrt{(ee-1)}}{\lambda\,(e-\cos F)^2}\; 206\,265''.$$

Die grössten Werthe dieses Ausdruckes für einige bestimmte Werthe von F zeigt folgende Tafel:

F	u		Grösster Irrthum
10^0	1,192	0,839	8″66
20	1,428	0,700	1,38
30	1,732	0,577	0,47
40	2,144	0,466	0,22
50	2,747	0,364	0,11
60	3,732	0,268	0,06
70	5,671	0,176	0,02

So oft daher E oder F über 40^0 oder 50^0 hinausgeht (ein Fall der jedoch in wenig von der Parabel verschiedenen Bahnen nicht leicht vorkommen wird, weil die in solchen Bahnen einherziehenden Himmelskörper in so grossen Entfernungen von der Sonne sich meistens unserem Blicke entziehen), so wird kein Grund zur Verlassung der allgemeinen Methode vorliegen. Uebrigens würden auch in einem solchen Falle die im Art. 34 behandelten Reihen zu langsam convergiren. Es kann also keineswegs als ein Mangel der jetzt auseinanderzusetzenden Methode gelten, wenn sie vorzugsweise solchen Fällen angepasst ist, wo E oder F mässige Werthe nicht überschreiten.

37.

(35) Ich nehme die bei der elliptischen Bewegung zwischen der excentrischen Anomalie und der Zeit bestehende Gleichung

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

wieder vor, wobei E in Theilen des Radius ausgedrückt sein soll. Den Factor $\sqrt{(1+\mu)}$ will ich von jetzt an vernachlässigen, da, wenn je ein Fall eintreten sollte, wo man seine Berechnung in der Gewalt hätte und solche der Mühe werth sein sollte, das Zeichen t nicht die Zeit selbst nach dem Perihele, sondern diese Zeit durch $\sqrt{(1+\mu)}$ multiplicirt ausdrücken müsste.

Ich setze ferner den Abstand im Perihele $= q$ und führe für E und für $\sin E$ die Grössen $E - \sin E$ und $E - \frac{1}{10}(E - \sin E) = \frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E$ ein.

Den Grund, weshalb ich vorzugsweise diese Bezeichnung wähle, wird der aufmerksame Leser von selbst aus dem Nachfolgenden entnehmen. Auf diese Weise nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$(1-e)\left(\tfrac{9}{10}E+\tfrac{1}{10}\sin E\right)+\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{9}{10}e\right)(E-\sin E)=kt\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}}$$

So lange E als eine kleine Grösse der ersten Ordnung angesehen wird, so wird $\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E=E-\frac{1}{60}E^3+\frac{1}{1200}E^5-$ etc. eine Grösse der ersten Ordnung sein, dagegen $E-\sin E=\frac{1}{6}E^3-\frac{1}{120}E^5+\frac{1}{5040}E^7-$ etc. eine Grösse der dritten Ordnung. Setzt man daher

$$\frac{6(E-\sin E)}{\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E}=4A,\quad \frac{\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E}{2\sqrt{A}}=B,$$

so wird $4A=E^2-\frac{1}{30}E^4-\frac{1}{5040}E^6-$ etc. eine Grösse der zweiten Ordnung und $B=1+\frac{3}{2800}E^4-$ etc. von der Einheit um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden sein. Unsere Gleichung wird daher:

$$B\left(2(1-e)A^{\frac{1}{2}}+\tfrac{2}{15}(1+9e)A^{\frac{3}{2}}\right)=kt\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Durch die gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln kann man zwar $\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E$ mit hinreichender Genauigkeit berechnen, nicht aber $E-\sin E$, sobald E ein kleiner Winkel ist, und es können mithin auf diesem Wege die Grössen A und B nicht hinreichend genau bestimmt werden. Dieser Schwierigkeit würde aber eine besondere Tafel Abhülfe schaffen, welcher man mit dem Argumente E entweder B oder den $\log B$ entnehmen könnte. Die zur Construction einer solchen Tafel nothwendigen Hülfsmittel werden sich jedem auch nur mittelmässig in der Analysis Bewanderten leicht darbieten. Mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{9E+\sin E}{20B}=\sqrt{A}$$

lässt auch $\sqrt{A}$ und sodann durch Formel [1] t mit aller wünschenswerthen Schärfe sich bestimmen.

Hier folgt ein Probestück einer solchen Tafel, welche wenigstens die (36)
langsame Zunahme des $\log B$ zeigen wird; es würde überflüssig sein, diese Tafel in grösserer Ausdehnung zu bearbeiten, denn weiter unten will ich Tafeln von einer weit bequemeren Form beschreiben:

E	$\log B$	E	$\log B$	E	$\log B$
0^0	0,000 0000	25^0	0,000 0168	50^0	0,000 2675
5	00	30	0349	55	3910
10	04	35	0645	60	5526
15	22	40	1099		
20	69	45	1758		

38.

Es wird nicht nutzlos sein, das im vorhergehenden Artikel Vorgetragene durch ein Beispiel zu erläutern.

Die wahre Anomalie angenommen zu $= 100^0$, die Excentricität $=$ 0,967 64567, $\log q = 9{,}765\,6500$. Die Rechnung für E, B, A und t ist also:

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \ldots\ldots 0{,}076\,1865$

$\log \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \ldots\ldots 9{,}107\,9927$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} E \ldots\ldots 9{,}184\,1792$, mithin $\frac{1}{2} E = 8^0\,41'\,19''\,32$ und $E = 17^0\,22'\,38''\,64$. Diesem Werthe von E entspricht der $\log B = 0{,}000\,0040$; ferner findet sich in Theilen des radius $E = 0{,}303\,2928$, $\sin E = 0{,}298\,6643$, und daher $\frac{9}{20} E + \frac{1}{20} \sin E = 0{,}151\,4150$, dessen $\log = 9{,}180\,1689$ und daher $\log A^{\frac{1}{2}} =$ 9,180 1649. Hieraus wird mittelst Formel [1] des vorhergehenden Artikels abgeleitet

$$\begin{array}{ll}
\log \dfrac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{(1-e)}} \ldots\ldots 2{,}458\,9614 & \log \dfrac{2B(1+9e)}{15k}\left(\dfrac{q}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots 3{,}760\,1038 \\
\log A^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}180\,1649 & \log A^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7{,}540\,4947 \\
\hline
\log 43{,}56386 \quad = 1{,}639\,1263 & \log 19{,}98014 \quad = 1{,}300\,5985 \\
\quad 19{,}98014 & \\
\quad 63{,}54400 = t &
\end{array}$$

Behandelt man dasselbe Beispiel nach der gewöhnlichen Methode, so findet sich $e \sin E$ in Secunden $= 59610''\,79 = 16^0\,33'\,30''\,79$ und daher die mittlere Anomalie $= 0^0\,49'\,7''\,85 = 2947''\,85$. Hieraus und aus $\log k\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} =$ 1,666 4302 wird t abgeleitet $= 63{,}54410$. Der Unterschied, der hier nur der

$\frac{1}{10000}$ Theil eines Tages ist, kann leicht, wenn die Irrthümer conspiriren, um (37)
das Drei- oder Vierfache grösser herauskommen.

Uebrigens sieht man, dass allein mit Hülfe einer solchen Tafel für $\log B$ auch die umgekehrte Aufgabe in aller Schärfe sich lösen lässt, wenn man E durch wiederholte Versuche bestimmt, so dass der daraus berechnete Werth von t mit der Voraussetzung übereinkommt. Diese Operation würde jedoch sehr beschwerlich sein, weshalb wir jetzt zeigen wollen, auf welche Weise man eine Hülfstafel viel bequemer einrichten, alle vage Versuche überhaupt vermeiden und die ganze Rechnung auf eine durchaus concinne und rasche Zahlendarlegung zurückführen kann, die nichts zu wünschen übrig lässt.

39.

Offenbar liesse sich etwa die Hälfte der behuf jener Versuche erforderlichen Arbeit sparen, wenn man eine derartig eingerichtete Tafel besässe, dass daraus der $\log B$ unmittelbar mit dem Argumente A zu entnehmen wäre. Dann blieben drei Operationen übrig. Als erste eine indirecte, nämlich die Bestimmung von A so, dass es der Gleichung [1] Art. 37 Genüge thut; als zweite, die Bestimmung von E aus A und B, welche direct, entweder aus der Gleichung $E = 2B\,(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}A^{\frac{3}{2}})$, oder aus $\sin E = 2B\,(A^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}A^{\frac{3}{2}})$ geschieht; als dritte, die Bestimmung von v aus E mittelst Gleichung VII, Art. 8. Die erste Operation werde ich auf eine rasche und von vagen Versuchen freie Berechnungsweise zurückführen; die zweite und dritte aber werde ich in eine einzige zusammenziehen, indem ich unserer Tafel eine neue Grösse C einfüge, wodurch wir E überhaupt nicht nöthig haben, und zugleich für den radius vector eine elegante und bequeme Formel erhalten. Ich werde das Einzelne in seiner Ordnung verfolgen.

Zuerst forme ich die Gleichung [1] so um, dass man die Barker'sche Tafel zu ihrer Auflösung benutzen kann. Zu diesem Zwecke setze ich:

$$A^{\frac{1}{2}} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w\,\sqrt{\frac{5-5e}{1+9e}},$$

woraus man erhält:

$$75\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w + 25\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w^3 = \frac{75\,kt\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{9}{5}e)}}{2\,Bq^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha t}{B},$$

wobei die Constante $\frac{75k\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{9}{5}e)}}{2q^{\frac{3}{2}}}$ mit α bezeichnet ist. Wäre daher B bekannt, so würde man w sofort aus der Barker'schen Tafel nehmen können, wo sich die wahre Anomalie findet, der die mittlere Bewegung $\frac{\alpha t}{B}$ entspricht. Aus w wird A abgeleitet durch die Formel $A = \beta \operatorname{tang} \frac{1}{2} w^2$, wo die Constante $\frac{5-5e}{1+9e}$ mit β bezeichnet ist. Wenn nun auch B erst durch A mittelst
(38) unserer Hülfstafel bekannt wird, so lässt sich doch wegen seines sehr kleinen Unterschiedes von der Einheit voraussehen, dass w und A nur mit einem sehr kleinen Fehler behaftet herauskommen können, wenn im Anfange der Divisor B gänzlich vernachlässigt wird. Bestimmt man daher zuerst nur oberflächlich w und A und setzt dabei $B = 1$, so wird man mit diesem genäherten Werthe von A aus unserer Hülfstafel die Grösse B finden, mit welcher man dieselbe Berechnung genauer wiederholt. Gemeiniglich wird dem so verbesserten Werthe von A ganz derselbe Werth von B entsprechen, der bei der ersten Annäherung gefunden war, so dass, — ausgenommen in den Fällen, wo der Werth von E schon recht beträchtlich war, — eine neue Wiederholung der Operation überflüssig erscheint. Auch wird es wohl kaum der Bemerkung bedürfen, dass falls vielleicht schon anfänglich ein genäherter Werth von B anderswoher bekannt geworden ist (was stets geschieht, wenn bei der Berechnung von mehren, nicht weit von einander entfernten Orten, der eine oder der andere schon seine Erledigung gefunden hat), man es vorziehen wird, diesen sogleich bei der ersten Annäherung zu benutzen. Auf solche Weise wird ein geschickter Rechner sehr häufig nicht einmal eine einzige Wiederholung der Rechnung nöthig haben. Diese äusserst schnelle Annäherung habe ich dadurch erlangt, dass B von Eins nur um eine Differenz der vierten Ordnung sich entfernt, die überdies mit einem sehr kleinen numerischen Coefficienten multiplicirt ist. Man sieht, wie jener Vortheil schon dadurch vorbereitet ist, dass wir die Grössen $E - \sin E$, $\frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E$ anstatt der Grössen E und $\sin E$ eingeführt haben.

40.

Da zur dritten Operation, nämlich zur Bestimmung der wahren Anomalie, der Winkel E selbst nicht erforderlich ist, sondern nur $\tang\frac{1}{2}E$ oder vielmehr $\log\tang\frac{1}{2}E$, so hätte jene Operation mit der zweiten bequem verbunden werden können, wenn unsere Tafel unmittelbar den Logarithmus der Grösse $\frac{\tang\frac{1}{2}E}{\sqrt{A}}$ lieferte, die von Eins um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist. Ich will jedoch lieber unsere Tafel etwas anders einrichten, um durch eine kleine Ausdehnung die Interpolation doch noch viel bequemer zu erhalten. Schreibt man der Kürze wegen T für $\tang\frac{1}{2}E^2$, so wird der im Art. 37 behandelte Werth von A, $\frac{15(E-\sin E)}{9E+\sin E}$ leicht umgeformt in

$$A=\frac{T-\frac{6}{5}T^2+\frac{9}{7}T^3-\frac{12}{9}T^4+\frac{15}{11}T^5-\text{etc.}}{1-\frac{6}{15}T+\frac{7}{25}T^2-\frac{8}{35}T^3+\frac{9}{45}T^4-\text{etc.}}$$

wo das Gesetz der Progression klar ist. Hieraus wird durch Umkehrung der Reihen abgeleitet:

$$\frac{A}{T}=1-\frac{4}{5}A+\frac{8}{175}A^2+\frac{8}{525}A^3+\frac{1896}{336875}A^4+\frac{28744}{13138125}A^5+\text{etc.}$$

Setzt man also $\frac{A}{T}=1-\frac{4}{5}A+C$, so wird C eine Grösse der vierten Ordnung (39) sein, durch deren Aufnahme in unsere Tafel, wir sogleich von A auf v mittelst der Formel:

$$\tang\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{A}{1-\frac{4}{5}A+C}}=\frac{\gamma\tang\frac{1}{2}w}{\sqrt{(1-\frac{4}{5}A+C)}}$$

übergehen können, wobei ich durch γ die Constante $\sqrt{\frac{5+5e}{1+9e}}$ bezeichne. Auf diese Weise gewinnen wir zugleich eine sehr bequeme Berechnung für den radius vector. Es wird nämlich (Art. 8, VI)

$$r=\frac{q\cos\frac{1}{2}E^2}{\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{q}{(1+T)\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{(1-\frac{4}{5}A+C)q}{(1+\frac{1}{5}A+C)\cos\frac{1}{2}v^2}$$

41.

Jetzt erübrigt nur noch die Zurückführung der umgekehrten Aufgabe (nämlich die Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie) auf eine raschere Berechnungsart. Zu diesem Zwecke will ich der Tafel eine neue Columne für T hinzufügen. Es möge daher zuerst T aus v mittelst der Formel $T=\frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v^2$ berechnet werden; sodann wird aus der Tafel mit dem Argumente T sowohl A, als $\log B$ entnommen, oder (was genauer, ja auch bequemer ist) C und $\log B$ und hieraus A nach der Formel $A=\frac{(1+C)T}{1+\frac{4}{5}T}$; zuletzt wird aus A und B die Grösse t mittelst der Formel [1] Art. 37 bestimmt. Will man auch hier die Barker'sche Tafel zu Hülfe nehmen (was jedoch bei dieser umgekehrten Aufgabe die Rechnung weniger erleichtert) so ist es nicht erforderlich, auf A Rücksicht zu nehmen, sondern man erhält sofort

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w=\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v}{\gamma}\sqrt{\frac{1+C}{1+\frac{4}{5}T}}$$

und hieraus die Zeit t, wenn man die der wahren Anomalie w in der Barker'schen Tafel entsprechende mittlere Bewegung mit $\frac{B}{\alpha}$ multiplicirt.

42.

Eine Tafel, wie solche in dem Obigen geschildert ist, habe ich in einer schicklichen Ausdehnung construirt und sie diesem Werke angefügt (Tafel I). Auf die Ellipse bezieht sich allein der erstere Theil; den zweiten, die hyperbolische Bewegung umfassenden Theil, will ich weiter unten erklären. Das Argument der Tafel, welches die Grösse A ist, schreitet durch einzelne Tausend-
(40) theile von 0 bis 0,300 fort; es folgen $\log B$ und C, welche Grössen man als in 10 Milliontheilen, oder als zu sieben Decimalen ausgedrückt ansehen muss, denn die ersten Ziffern, die den bezeichnenden Zahlen vorangehen, sind weggelassen. Die vierte Columne endlich enthält die Grösse T erst auf fünf, dann auf sechs Stellen berechnet, eine Genauigkeit die völlig

ausreicht, da diese Columne nur zu dem Zwecke erforderlich ist, um die dem Argumente T entsprechenden Werthe von $\log B$ und C zu erhalten, falls man nach Anleitung des vorhergehenden Artikels t aus v bestimmen will. Da das umgekehrte Problem (nämlich die Bestimmung von v und r aus t) sehr viel häufiger vorkommt und überall ohne Hülfe der Grösse T gelöst wird, so zog ich vor, lieber die Grösse A zum Argumente der Tafel zu wählen, als T, welches sonst fast ein ebenso passendes Argument gewesen sein und selbst die Construction der Tafel noch etwas erleichtert haben würde. Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass alle Zahlen der Tafel ursprünglich bis auf zehn Stellen berechnet worden sind, und dass daher die hier beibehaltenen sieben Stellen allenthalben volles Zutrauen verdienen. Ich kann mich aber bei der für diese Arbeit benutzten analytischen Methode hier nicht aufhalten, da deren vollständige Entwickelung zu sehr von dem abführen würde, was dies Werk darstellen soll. Uebrigens reicht die der Tafel gegebene Ausdehnung für alle Fälle vollkommen hin, wo es vortheilhaft ist, die oben auseinandergesetzte Methode zu befolgen, da man, wie vorhin gezeigt, sich bequemer Weise der künstlichen Methoden enthalten kann, wenn A die Grenze von 0,03 überschreitet, dem dann $T = 0{,}392\,374$, oder $E = 64^0\,7'$ entspricht.

43.

Zur mehren Erläuterung der vorhergehenden Untersuchungen wollen wir ein Beispiel der vollständigen Berechnung der wahren Anomalie und des radius vector aus der Zeit hinzufügen, und zu diesem Ende die Zahlen des Art. 38 wieder vornehmen. Wir haben also $e = 0{,}967\,64567$; $\log q = 9{,}765\,6500$; $t = 63{,}544\,00$, woraus man zuerst die Constanten ableitet: $\log \alpha = 0{,}305\,2357$; $\log \beta = 8{,}221\,7364$; $\log \gamma = 0{,}002\,8755$.

Hiernach ist $\log \alpha t = 2{,}108\,3102$, dem in der Barker'schen Tafel der genäherte Werth $w = 99^0\,6'$ entspricht, woraus $A = 0{,}022\,923$ folgt, und aus unserer Tafel $\log B = 0{,}000\,0040$. Also wird das verbesserte Argument, mit welchem man in die Barker'sche Tafel einzugehen hat $= \log \frac{\alpha t}{B} = 2{,}108\,3062$, dem $w = 99^0\,6'\,13''\,14$ entspricht. — Dann steht die weitere Rechnung so:

(41)

$\log\tang \frac{1}{2} w^2 \ldots 0{,}138\,5934$	$\log\tang \frac{1}{2} w \ldots 0{,}069\,2967$
$\log \beta \ldots 8{,}221\,7364$	$\log \gamma \ldots 0{,}002\,8755$
$\log A \ldots 8{,}360\,3298$	$\frac{1}{2}$ Comp. $\log (1 - \frac{4}{5} A + C) \ldots 0{,}004\,0143$
$A = 0{,}022\,92608$	$\log\tang \frac{1}{2} v \ldots 0{,}076\,1865$
hieraus $\log B$ ganz wie oben;	$\frac{1}{2} v = 50^0\, 0'\, 0''$
$C = 0{,}000\,0242$	$v = 100^0\, 0'\, 0''$
$1 - \frac{4}{5} A + C = 0{,}981\,6833$	$\log q \ldots 9{,}765\,6500$
$1 + \frac{1}{5} A + C = 1{,}004\,6094$	2 Comp. $\log \cos \frac{1}{2} v \ldots 0{,}383\,8650$
	$\log (1 - \frac{4}{5} A + C) \ldots 9{,}991\,9714$
	Comp. $\log (1 + \frac{1}{5} A + C) \ldots 9{,}998\,0028$
	$\log r \ldots 0{,}139\,4892$

Wenn bei dieser Berechnung der Factor B gänzlich vernachlässigt worden wäre, so würde die wahre Anomalie nur mit dem kleinen Irrthum $0''1$ (zu gross) behaftet herausgekommen sein.

44.

Die hyperbolische Bewegung kann ich um so kürzer absolviren, als dieselbe der oben für die elliptische Bewegung vorgetragenen Methode ganz analog zu behandeln ist. Die Gleichung zwischen der Zeit t und der Hülfsgrösse u lässt sich auf folgende Form bringen:

$$(e-1)\left(\tfrac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\tfrac{9}{10}\log u\right)+\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{9}{10}e\right)\left(\tfrac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right)=kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}},$$

wo die Logarithmen hyperbolische sind, und $\frac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{9}{10}\log u$ eine Grösse der ersten Ordnung, $\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u$ eine Grösse der dritten Ordnung, sobald $\log u$ als eine kleine Grösse der ersten Ordnung betrachtet wird. Setzt man also

$$\frac{6\left(\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right)}{\frac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{9}{10}\log u}=4A,\quad \frac{\frac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{9}{10}\log u}{2\sqrt{A}}=B,$$

so wird A eine Grösse der zweiten Ordnung sein, B aber von der Einheit um eine Differenz der vierten Ordnung verschieden. Unsere Gleichung erhält dann folgende Form:

$$B\left(2\,(e-1)\,A^{\frac{1}{2}}+\tfrac{2}{15}(1+9\,e)\,A^{\frac{3}{2}}\right)=kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[2]$$

welche der Gleichung [1] des Art. 37 ganz analog ist. Setzt man sodann ferner $\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2=T$, so wird T von der zweiten Ordnung sein, und durch (42) die Methode der unendlichen Reihen gefunden werden:

$$\frac{A}{T}=1+\tfrac{4}{5}A+\tfrac{8}{175}A^2-\tfrac{8}{525}A^3+\tfrac{1896}{336875}A^4-\tfrac{28744}{13138125}A^5+\text{etc.}$$

Deshalb wird, wenn man $\frac{A}{T}=1+\frac{4}{5}A+C$ setzt, C eine Grösse der vierten Ordnung und $A=\frac{(1+C)T}{1-\frac{4}{5}T}$ sein. Endlich folgt für den radius vector aus der Gleichung VII Art. 21 leicht

$$r=\frac{q}{(1-T)\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{(1+\frac{4}{5}A+C)q}{(1-\frac{1}{5}A+C)\cos\frac{1}{2}v^2}.$$

45.

Der nachfolgende Theil der ersten, diesem Werke angefügten Tafel bezieht sich, wie wir schon oben erinnert haben, auf die hyperbolische Bewegung und liefert für das Argument A (das beiden Theilen der Tafel gemeinsam ist) den Logarithmen von B und die Grösse C auf sieben Decimalstellen (wobei die vorangehenden Ziffern weggelassen sind), die Grösse T aber auf fünf und dann auf sechs Stellen. Dieser Theil ist ganz wie der frühere bis auf $A=0{,}300$ ausgedehnt, dem ein $T=0{,}241\,207$, $u=2{,}930$ oder $=0{,}341$, $F=\pm 52^\circ\,19'$ entspricht. Eine weitere Ausdehnung wäre überflüssig gewesen (Art. 36).

Hier folgt die Anordnung für die Rechnung sowohl zur Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie als umgekehrt. Bei ersterer Aufgabe wird T durch die Formel $T=\frac{e-1}{e+1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2$ erhalten; aus T giebt unsere Tafel

$\log B$ und C, womit $A = \frac{(1+C)T}{1-\frac{4}{5}T}$. Hieraus endlich wird mittelst der Formel [2] des vorhergehenden Artikels t gefunden.

Bei letzterer Aufgabe werden zuerst die Logarithmen der Constanten

$$\alpha = \frac{75k\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{9}{5}e)}}{2q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\beta = \frac{5e-5}{1+9e}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{5e+5}{1+9e}}$$

berechnet. Dann wird A aus t ganz in der Weise wie bei der elliptischen Bewegung bestimmt, nämlich so, dass der mittleren Bewegung $\frac{\alpha t}{B}$ in der Barker'schen Tafel die wahre Anomalie w entspricht und $A = \beta \operatorname{tang} \frac{1}{2}w^2$ wird; wobei freilich zuerst ein genäherter Werth für A (unter Vernachlässigung oder, wenn dazu Hülfsmittel vorhanden, unter Schätzung des Factors B) berechnet werden muss. Hieraus giebt dann unsere Tafel einen genäherten Werth von B, mit welchem man die Operation wiederholt. Der solchergestalt für B sich ergebende neue Werth wird kaum jemals einer merklichen Verbesserung bedürfen und daher keine Wiederholung der Rechnung nöthig sein. Nach Ver-
(43) besserung des Werths von A wird C aus der Tafel genommen, wodurch man dann hat:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v = \frac{\gamma \operatorname{tang} \frac{1}{2}w}{\sqrt{(1+\frac{4}{5}A+C)}}, \quad r = \frac{(1+\frac{4}{5}A+C)q}{(1-\frac{1}{5}A+C)\cos \frac{1}{2}v^2}.$$

Hieraus sieht man, dass unter den Formeln für die elliptische und hyperbolische Bewegung nur der Unterschied besteht, dass β, A und T in der hyperbolischen Bewegung als negative Grössen behandelt werden.

46.

Auch die hyperbolische Bewegung wollen wir durch einige Beispiele, wozu wir die Zahlen den Artikeln 23 und 26 entnehmen, erläutern.

I. Gegeben $e = 1{,}261\,8820$; $\log q = 0{,}020\,1657$; $v = 18^\circ\,51'\,0''$. Gesucht t. Man hat

$$\begin{array}{ll}
2\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v \ldots 8{,}440\,2018 & \log T \ldots\ldots\ldots\ldots 7{,}503\,8375 \\
\log\dfrac{e-1}{e+1} \ldots\ldots 9{,}063\,6357 & \log 1+C \ldots\ldots 0{,}000\,0002 \\
 & \text{C.}\log(1-\tfrac{4}{5}T)\ 0{,}001\,1099 \\
\hline
\log T \ldots\ldots\ldots\ldots 7{,}503\,8375 & \log A \ldots\ldots\ldots\ldots 7{,}504\,9476 \\
T = 0{,}003\,19034 & \\
\log B = 0{,}000\,0001 & \\
C = 0{,}000\,0005 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\log\dfrac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{(e-1)}} \ldots 2{,}386\,6444 & \log\dfrac{2B(1+9e)}{15k}\left(\dfrac{q}{e-1}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots 2{,}884\,3582 \\
\log A^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots 8{,}752\,4738 & \log A^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6{,}257\,4214 \\
\hline
\log 13{,}77584 \quad = 1{,}139\,1182 & \log 0{,}138605 \qquad = 9{,}141\,7796 \\
0{,}13861 & \\
\hline
13{,}91445 = t. &
\end{array}$$

II. Wenn e und q wie vorher bleiben, t gegeben ist $= 65{,}412\,36$, und v und r gesucht werden, so findet man die Logarithmen der Constanten

$$\log\alpha = 9{,}975\,8345$$
$$\log\beta = 9{,}025\,1649$$
$$\log\gamma = 9{,}980\,7646.$$

Ferner ergiebt sich $\log\alpha t = 1{,}791\,4943$, und so durch die Barker'sche Tafel der genäherte Werth für $w = 70^\circ\,31'\,44''$, woraus $A = 0{,}052\,983$. Diesem A entspricht in unserer Tafel $\log B = 0{,}000\,0207$; daher $\log\dfrac{\alpha t}{B} = 1{,}791\,4736$ und der verbesserte Werth von $w = 70^\circ\,31'\,36''\,86$. Im Uebrigen steht die Rechnung so:

(44)

$2\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}w$	9,698 9398	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}w$	9,849 4699
$\log\beta$	9,025 1649	$\log\gamma$	9,980 7646
$\log A$	8,724 1047	$\frac{1}{2}\,\mathrm{C.}\log(1+\frac{4}{5}A+C)$	9,990 9602
$A =$	0,052 97911	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}v$	9,821 1947
$\log B$ wie vorher,		$\frac{1}{2}v =$	$33^\circ\,31'\,30''02$
$C =$	0,000 1252	$v =$	67 3 0,04
$1+\frac{4}{5}A+C =$	1,042 5085	$\log q$	0,020 1657
$1-\frac{1}{5}A+C =$	0,989 5294	$2\,\mathrm{C.}\log\cos\frac{1}{2}v$	0,158 0378
		$\log(1+\frac{4}{5}A+C)$	0,018 0796
		$\mathrm{C.}\log(1-\frac{1}{5}A+C)$	0,004 5713
		$\log r$	0,200 8544

Hierfür hatten wir früher gefunden (Art. 26) $v = 67^\circ\,2'\,59''78$, $\log r = 0{,}200\,8541$, was weniger genau ist, indem eigentlich $v = 67^\circ\,3'\,0''00$ hätte herauskommen müssen, mit welchem angenommenen Werthe der Werth für t durch grössere Tafeln berechnet worden war.