Erstes Buch.

Allgemeine Relationen unter den Grössen, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmt werden.

Erster Abschnitt.

Relationen, die einen einzelnen Ort in der Bahn betreffen.

1.

Wir wollen die Bewegungen der Himmelskörper in diesem Werke nur insoweit betrachten, als solche von der Anziehungskraft der Sonne abhängig sind. Ausgeschlossen bleiben daher hier alle secundären Planeten, ingleichen die Störungen, welche die Primären wechselseitig auf sich ausüben, sowie auch alle rotatorischen Bewegungen. Die bewegten Körper selbst wollen wir als mathematische Punkte betrachten und voraussetzen, dass alle Bewegungen nach Massgabe der nachfolgenden Gesetze vor sich gehen, welche daher als die Grundlage aller Untersuchungen im gegenwärtigen Werke anzusehen sind.

I. Die Bewegung eines jeden Himmelskörpers geschieht beständig in der nämlichen Ebene, in welcher zugleich der Mittelpunkt der Sonne liegt.

II. Der von dem Körper beschriebene Linienzug ist ein Kegelschnitt, der seinen Brennpunkt im Mittelpunkte der Sonne hat.

III. Die Bewegung in jenem Linienzuge geht in der Weise vor sich, dass die in verschiedenen Zeitabschnitten um die Sonne beschriebenen Flächenräume diesen Zeitabschnitten proportional sind. Drückt man daher Zeiten und Flächenräume durch Zahlen aus, so ergiebt jeder Flächenraum, wenn man ihn durch die Zeit, innerhalb deren er beschrieben wurde, dividirt, einen unveränderlichen Quotienten.

IV. Für die verschiedenen, um die Sonne sich bewegenden Körper stehen die Quadrate dieser Quotienten im zusammengesetzten*) Verhältnisse der den Bahnen entsprechenden Parameter und der Summen der Sonnenmasse und der Massen der bewegten Körper.

Bezeichnet also $2p$ den Parameter der Bahn, in welcher der Körper einherzieht; μ die Stoffmenge dieses Körpers (die Masse Sonne $= 1$ gesetzt); $\frac{1}{2}g$ die Fläche, welche der Körper in der Zeit t um die Sonne beschreibt;

(2) so wird $\dfrac{g}{t\sqrt{p}.\sqrt{(1+\mu)}}$ eine Constante für alle Himmelskörper bilden.

Da es also gleichgültig ist, welchen Himmelskörper man zur Bestimmung dieser constanten Zahl benutzt, so wollen wir letztere aus der Bewegung der Erde ableiten, und dabei deren mittlere Entfernung von der Sonne zur Distanz-Einheit annehmen. Die Einheit der Zeit soll stets der mittlere Sonnentag sein. Bezeichnet man ferner mit π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises, so wird der Flächenraum der ganzen, von der Erde beschriebenen Ellipse offenbar sein $= \pi\sqrt{p}$, welcher daher $= \frac{1}{2}g$ zu setzen ist, wenn man für t das siderische Jahr annimmt, wodurch unsere Constante $= \dfrac{2\pi}{t\sqrt{(1+\mu)}}$ wird. Um den numerischen Werth dieser Constante, die wir im Folgenden mit k bezeichnen wollen, zu ermitteln, setzen wir nach der neuesten Bestimmung das siderische Jahr, oder $t = 365{,}256\,3835$, die Masse der Erde oder $\mu = \dfrac{1}{354710} = 0{,}000\,002\,8192$; dadurch wird erhalten:

$\log 2\pi$	0,798 179 8684
compl. $\log t$	7,437 402 1852
compl. $\log \sqrt{(1+\mu)}$	9,999 999 3878
$\log k$	8,235 581 4414
$k =$	0,017 202 09895

*) Das in der lateinischen Handschrift gebrauchte Wort „in ratione inversa“ soll heissen: „in ratione composita“, cfr. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, B. I, p. 17, wo die Worte in einem Briefe von Gauss an Schumacher vom 14. December 1809 lauten:

„Herrn . . . bitte ich mich zu empfehlen und für die Anzeige des ärgerlichen Schreibfehlers „zu danken. In der deutschen Handschrift steht nicht im umgekehrten, sondern bloss im „zusammengesetzten Verhältniss; das erste Blatt der lateinischen Handschrift habe ich

2.

Die so eben erörterten Gesetze, weichen von den durch Kepler entdeckten nur in der Weise ab, dass sie in einer Form gegeben sind, die eine Anwendung auf alle Arten von Kegelschnitten gestattet, und dass dabei der Einwirkung des bewegten Körpers auf die Sonne, wovon der Factor $\sqrt{(1+\mu)}$ abhängt, Rechnung getragen ist. Wenn wir diese Gesetze als Erscheinungen betrachten, die aus unzähligen und unzweifelhaften Beobachtungen sich ergeben haben, so lehrt die Geometrie, welche Einwirkung von der Sonne auf die um Letztere bewegten Körper ausgeübt werden muss, um jene Erscheinungen beständig hervorzubringen. Auf diese Weise findet sich, dass die Einwirkung der Sonne auf die um sie laufenden Körper ganz so ausgeübt wird, als ob eine Anziehungskraft, deren Stärke dem Quadrate der Entfernung wechselseitig proportional wäre, die Körper gegen den Mittelpunkt der Sonne hintriebe. Geht man daher umgekehrt von der Annahme einer solchen Anziehungskraft als von einem Principe aus, so können jene Erscheinungen als nothwendige Folgen daraus abgeleitet werden. Hier mag eine blosse Erwähnung der Gesetze genügen, und es wird um so weniger erforderlich sein, an diesem Orte bei ihrem Zusammenhange mit dem Princip der Schwere zu verweilen, da seit dem grossen Newton noch mehre andere Schriftsteller jene Materie behandelt haben, und unter diesen Laplace in seinem vollendeten Werke „*Mécanique Céleste*“ in einer Weise, die (3)
nichts zu wünschen übrig lässt.

3.

Die Untersuchungen der Bewegungen der Himmelskörper, so weit solche in Kegelschnitten vor sich gehen, erfordern keineswegs eine vollständige Theorie dieser Art von Curven, und es wird daher eine einzige allgemeine Gleichung genügen, aus der wir Alles ableiten. Es erscheint deshalb

---

„verlegt und weiss also nicht, ob durch einen Druck- oder Schreibfehler inversa statt com-„posita gesetzt ist, doch wohl das Letztere, ob ich gleich nicht begreife, wie es zugegangen ist.“

Anmerkung des Uebersetzers.

sachgemäss, gerade die Gleichung auszuwählen, auf welche wir als eine charakteristische bei Erforschung der zufolge des Attractionsgesetzes beschriebenen Curve Bezug nehmen. Wenn wir nämlich irgend einen Ort des Körpers in seiner Bahn bezeichnen durch die Abstände x und y von zwei geraden Linien, die in der Ebene der Bahn gezogen sind und im Mittelpunkte der Sonne d. h. in dem einen der beiden Brennpunkte der Curve unter rechten Winkeln sich schneiden; und wenn wir ausserdem die Entfernung eines Körpers von der Sonne (stets positiv genommen) mit r benennen, so haben wir zwischen r, x, y die lineäre Gleichung $r + \alpha x + \beta y = \gamma$; in welcher α, β, γ beständige Grössen ausdrücken, und zwar γ eine Grösse, die ihrer Natur nach stets positiv ist. Indem wir nun die Lage der geraden Linien, auf welche die Abstände x und y sich beziehen, verändern (eine Lage die an und für sich ganz willkürlich ist, wenn es nur dabei bleibt, dass sich die Linien unter rechten Winkeln schneiden), so wird dadurch offenbar die Form der Gleichung und der Werth von γ nicht geändert, während α und β immer andere und wieder andere Werthe erlangen und man sieht, dass jene Lage so bestimmt werden kann, dass $\beta = 0$ wird, α aber wenigstens nicht negativ. — Schreibt man solchergestalt für α und γ beziehungsweise e und p, so nimmt obige Gleichung die Gestalt an $r + ex = p$. Die gerade Linie, auf welche in diesem Falle die Abstände y bezogen werden, heisst die Apsidenlinie, p der halbe Parameter, e die Excentricität, und der betreffende Kegelschnitt wird mit dem Namen Ellipse, Parabel oder Hyperbel bezeichnet, je nachdem e kleiner als die Einheit, gleich der Einheit, oder grösser als die Einheit ist.

Uebrigens sieht man leicht, dass die Lage der Apsidenlinie durch die vorgetragenen Bedingungen vollständig bestimmt ist, den einzigen Fall ausgenommen, wo sowohl α als β schon an und für sich $= 0$ waren. In diesem Falle wird stets $r = p$, auf welche geraden Linien die Abstände x und y auch bezogen werden. Indem daher e ebenfalls $= 0$ ist, so wird die Curve (die dann ein Kreis ist) nach unserer Begriffsbestimmung dem Genus der Ellipsen beizuzählen sein, hat aber das Eigenthümliche, dass die Lage der Apsiden gänzlich willkürlich bleibt, wenn man anders jene Bezeichnung auch auf diesen Fall auszudehnen belieben sollte.

4.

Für den Abstand x wollen wir jetzt den Winkel v einführen, der zwischen der Apsidenlinie und der geraden Linie (radius vector) enthalten ist, die von der Sonne nach dem Orte des Körpers führt, und zwar möge dieser Winkel von derjenigen Seite der Apsidenlinie beginnen, wo die Abstände x positiv sind. Auch werde angenommen, dass dieser Winkel nach derjenigen (4)
Gegend hin wachse, wohin die Bewegung des Körpers gerichtet ist. Auf diese Weise wird $x = r\cos v$, und demnach unsere Formel $r = \frac{p}{1+e\cos v}$, woraus sich folgende Schlüsse unmittelbar ableiten lassen:

I. Für $v = 0$ wird der Werth des radius vector ein Kleinstes, nämlich $r = \frac{p}{1+e}$; dieser Punkt heisst das Perihel.

II. Den entgegengesetzten Werthen von v entsprechen gleiche Werthe von r; die Apsidenlinie theilt daher den Kegelschnitt in zwei gleiche Theile.

III. In der Ellipse wächst von $v = 0$ an r beständig, bis es den grössten Werth $\left(r = \frac{p}{1-e}\right)$ im Aphel erreicht, für welches $v = 180^0$. Nach Passirung des Aphels nimmt r auf dieselbe Weise wieder ab, wie es früher gewachsen war, bis es für $v = 360^0$ das Perihel von Neuem berührt. Derjenige Theil der Apsidenlinie, welcher an dieser Stelle vom Perihel und an jener vom Aphel begrenzt wird, heisst die grosse Axe. Es wird daher die grosse Halbaxe, welche auch die mittlere Entfernung genannt wird, $= \frac{p}{1-ee}$. Der Abstand des inmitten der Axe belegenen Punktes (des Mittelpunkts der Ellipse) vom Brennpunkte ist $= \frac{ep}{1-ee} = ea$, wobei a die grosse Halbaxe bezeichnet.

IV. Dagegen existirt in der Parabel eigentlich kein Aphel, sondern r wächst über alle Grenzen hinaus, je näher v an $+180^0$ oder -180^0 herankommt. Für $v = \pm 180^0$ wird der Werth von r unendlich, was anzeigt, dass die Curve von der Apsidenlinie in dem, dem Perihele gegenüber liegenden Theile nicht geschnitten wird. Es kann daher im eigentlichen Sinne hier von einer grossen Axe, oder von einem Mittelpunkte der Curve nicht die Rede sein; aber nach der gewöhnlichen Manier der Analysis wird durch Erweiterung der für die Ellipse erfundenen Formeln der grossen Axe ein unendlicher Werth beigelegt, und der Mittelpunkt der Curve wird in unendliche Entfernung vom Brennpunkte gesetzt.

V. In der Hyperbel schliesslich wird v in noch engere Grenzen eingezwängt, nämlich innerhalb $v = -(180^0 - \psi)$ und $v = +(180^0 - \psi)$; wo ψ einen Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$. Denn während v sich einem dieser Grenzwerthe nähert, wächst r in's Unendliche fort; und wenn für v einer dieser Grenzwerthe selbst angenommen würde, so würde der Werth von r als ein unendlicher herauskommen, was anzeigt, dass die Hyperbel von einer geraden Linie, die gegen die Apsidenlinie unter einem Winkel von $180^0 - \psi$ oberhalb oder unterhalb geneigt ist, überall nicht geschnitten wird. Für die solchergestalt ausgeschlossenen Werthe, nämlich von $180^0 - \psi$ bis zu $180^0 + \psi$, weist unsere Formel dem r einen negativen Werth an; denn die gerade Linie, die unter einem solchen Winkel gegen die Apsidenlinie geneigt ist, schneidet
(5) selbst zwar die Hyperbel nicht, wenn sie jedoch rückwärts verlängert wird, so trifft sie das andere Stück der Hyperbel, welches bekanntlich von dem ersten Stücke überall getrennt und gegen denjenigen Brennpunkt hin, welchen die Sonne einnimmt, convex ist. Aber in unserer Untersuchung — welche, wie schon erwähnt, auf der Voraussetzung beruht, dass r positiv genommen werden soll, — nehmen wir auf dieses zweite Stück der Hyperbel keine Rücksicht, worin nur ein solcher Himmelskörper einherziehen könnte, auf den die Sonne nicht attractiv, sondern nach denselben Gesetzen repulsiv wirken würde. Im eigentlichen Sinne des Worts giebt es daher auch in der Hyperbel kein Aphel. Als das Analogon des Aphels könnte derjenige Punkt des abgekehrten Stücks genommen werden, welcher auf der Apsidenlinie liegt und welcher den Werthen $v = 180^0$, $r = -\frac{p}{e-1}$ entspricht. Will man daher wie bei der Ellipse den Werth des Ausdrucks $\frac{p}{1-ee}$ auch hier, wo er negativ sich ergiebt, die halbe grosse Axe der Hyperbel nennen, so zeigt diese Grösse die Entfernung

des bereits erwähnten Punktes vom Perihel und zugleich seine Lage an, welche in der Ellipse die entgegengesetzte Stelle einnimmt. Ebenso erhält hier $\frac{ep}{1-ee}$ d. h. der Abstand des mittleren Punktes zwischen diesen beiden Punkten (Centrums der Hyperbel) vom Brennpunkte einen negativen Werth wegen der entgegengesetzten Lage.

5.

Der Winkel v, welcher in der Parabel zwischen den Grenzen -180^0 und $+180^0$, für die Hyperbel innerhalb $-(180^0-\psi)$ und $+(180^0-\psi)$ eingeschlossen ist, bei der Ellipse aber den ganzen Kreis in stets erneuten Perioden durchläuft, heisst die wahre Anomalie des bewegten Körpers. Bislang pflegten zwar fast alle Astronomen die wahre Anomalie in der Ellipse nicht vom Perihel, sondern vom Aphel an zu zählen, gegen die Analogie der Parabel und der Hyperbel, in denen es kein Aphel giebt, und man daher vom Perihel anfangen musste. Wir haben indess um so weniger Bedenken getragen, eine Analogie zwischen allen Arten von Kegelschnitten herzustellen, da die neusten französischen Astronomen dazu mit dem Beispiele vorangegangen sind.

Im Uebrigen ist es mitunter dienlich, die Form des Ausdrucks $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ etwas zu ändern. Vorzüglich merke man sich folgende Formeln:

$$r = \frac{p}{1+e-2e\sin\frac{1}{2}v^2} = \frac{p}{1-e+2e\cos\frac{1}{2}v^2}$$

$$r = \frac{p}{(1+e)\cos\frac{1}{2}v^2+(1-e)\sin\frac{1}{2}v^2}$$

In der Parabel hat man daher: $r = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2}$; in der Hyperbel aber ist folgender Ausdruck besonders bequem:

$$r = \frac{p\cos\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}.$$

6.

(6) Wir wollen jetzt zur Vergleichung der „Bewegung" mit der „Zeit" schreiten. Wenn man, wie in Art. 1, den innerhalb der Zeit t um die Sonne beschriebenen Flächenraum $= \frac{1}{2}g$ setzt, die Masse des bewegten Körpers $= \mu$ (die Sonnenmasse $= 1$ gesetzt), so haben wir: $g = kt\sqrt{p}\,.\sqrt{(1+\mu)}$. Das Differential des Flächenraums aber wird $= \frac{1}{2}rrdv$, woraus hervorgeht: $kt\sqrt{p}\,.\sqrt{(1+\mu)} = \int rrdv$, wobei dies Integral so genommen wird, dass es für $t = 0$ verschwindet. Diese Integration muss für die verschiedenen Arten von Kegelschnitten auf verschiedene Weise behandelt werden, weshalb wir das Einzelne getrennt betrachten, und den Anfang mit der Ellipse machen wollen.

Da r aus v mittelst eines Bruches bestimmt wird, dessen Nenner aus zwei Gliedern besteht, so wollen wir vor allen Dingen diese Unbequemlichkeit durch Einführung einer neuen Grösse für v beseitigen. Zu diesem Zwecke setzen wir $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}E$, wonach die letzte Formel im vorhergehenden Artikel für r giebt

$$r = \frac{p\cos\frac{1}{2}E^2}{(1+e)\cos\frac{1}{2}v^2} = p\left(\frac{\cos\frac{1}{2}E^2}{1+e} + \frac{\sin\frac{1}{2}E^2}{1-e}\right) = \frac{p}{1-ee}(1-e\cos E).$$

Ferner wird $\frac{dE}{\cos\frac{1}{2}E^2} = \frac{dv}{\cos\frac{1}{2}v^2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ und daher: $dv = \frac{pdE}{r\sqrt{(1-ee)}}$; hieraus $rrdv = \frac{rpdE}{\sqrt{(1-ee)}} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}(1-e\cos E)\,dE$ und wenn man integrirt:

$$kt\sqrt{p}\,.\sqrt{(1+\mu)} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}(E - e\sin E) + \text{Const.}$$

Wenn wir daher die Zeit vom Durchgange durch das Perihel an beginnen lassen, wo $v = 0$, $E = 0$ und daher auch Constans $= 0$, so haben wir, weil $\frac{p}{1-ee} = a$,

$$E - e\sin E = \frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Bei dieser Gleichung muss der Hülfswinkel E, welcher die excentrische Anomalie heisst, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden. Offenbar aber lässt sich dieser Winkel in Graden etc. beibehalten, wenn man nur auch $e \sin E$ und $\frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ auf dieselbe Art ausdrückt; diese Grössen werden in Bogensecunden erhalten, wenn man sie durch die Zahl 206264,81 multiplicirt. Der Multiplication der letzteren Grösse bleibt man überhoben, falls man sogleich die Grösse k in Secunden dargestellt anwendet, und daher setzen wir an Stelle des früheren Werthes $k = 3548'', 18761$, dessen $\log = 3{,}550\,006\,5746$. — Auf diese Weise ausgedrückt heisst die Grösse $\frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ die mittlere Anomalie, die daher im Verhältniss der Zeit wächst und zwar täglich um das Augment $\frac{k\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$, welches man die (7) mittlere tägliche Bewegung (motus medius diurnus) nennt. — Die mittlere Anomalie bezeichnen wir durch M.

7.

Im Perihele sind daher die wahre Anomalie, die excentrische Anomalie und die mittlere Anomalie $= 0$. — Indem nun von hieran die wahre Anomalie wächst, so werden auch die excentrische und die mittlere jedoch so vermehrt, dass die excentrische kleiner bleibt, als die wahre, und die mittlere kleiner als die excentrische, bis zum Aphel, wo alle drei zugleich $= 180^{\circ}$ werden; von hieran aber bis zum Perihel ist die excentrische immer grösser als die wahre, und die mittlere Anomalie grösser als die excentrische, bis im Perihel alle drei $= 360^{\circ}$ werden, oder was auf dasselbe herauskommt, alle wiederum $= 0$. Im Allgemeinen ist klar, dass, wenn einer wahren Anomalie v eine excentrische E und eine mittlere M entspricht, dann einer wahren von $360^{\circ}-v$ eine excentrische von $360^{\circ}-E$ und eine mittlere von $360^{\circ}-M$ entspricht. Der Unterschied zwischen der wahren Anomalie und der mittleren $v-M$ heisst die Gleichung des Mittelpunkts (aequatio centri), welche daher vom Perihel bis zum Aphel positiv, vom Aphel bis zum Perihel negativ ist, im Perihele und Aphele selbst aber verschwindet. Da nun also v und M den vollen Kreis von 0 bis zu 360° in der nämlichen Zeit durchlaufen, so wird die Zeit eines einmaligen Umlaufs, welche auch die periodische Zeit (tempus periodicum) heisst, in Tagen ausgedrückt gefunden, wenn man 360°

durch die tägliche Bewegung $\frac{k\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$ dividirt; woraus man sieht, dass für die verschiedenen, um die Sonne revolvirenden Körper die Quadrate der periodischen Umlaufszeiten den Cuben der mittleren Entfernungen proportional sind, in soweit es erlaubt ist, deren Massen, oder vielmehr die Ungleichheit der Massen zu vernachlässigen.

8.

Nun wollen wir die bemerkenswerthesten Relationen zwischen den Anomalien und dem radius vector sammeln, deren Ableitung Niemandem, der nur mittelmässig in der trigonometrischen Analyse bewandert ist, Schwierigkeiten darbieten kann. Die Formeln werden concinner, wenn man für e den Winkel einführt, dessen Sinus $= e$ ist. Wird dieser Winkel mit φ bezeichnet, so hat man: $\sqrt{(1-ee)}=\cos\varphi$; $\sqrt{(1+e)}=\cos(45^0-\frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$; $\sqrt{(1-e)}=\cos(45^0+\frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=\operatorname{tang}(45^0-\frac{1}{2}\varphi)$; $\sqrt{(1+e)}+\sqrt{(1-e)}=2\cos\frac{1}{2}\varphi$; $\sqrt{(1+e)}-\sqrt{(1-e)}=2\sin\frac{1}{2}\varphi$. — Die vorzüglichsten Relationen zwischen a, p, r, e, φ,
(8) v, E, M sind folgende:

I. $p=a\cos\varphi^2$

II. $r=\frac{p}{1+e\cos v}$

III. $r=a(1-e\cos E)$

IV. $\cos E=\frac{\cos v+e}{1+e\cos v}$; oder $\cos v=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}$

V. $\sin\frac{1}{2}E=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos E)}=\sin\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e\cos v}}=\sin\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r(1-e)}{p}}=$
$\sin\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a(1+e)}}$

VI. $\cos\frac{1}{2}E=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos E)}=\cos\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1+e}{1+e\cos v}}=\cos\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r(1+e)}{p}}=$
$\cos\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}$

VII. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}E=\operatorname{tang}\frac{1}{2}v\operatorname{tang}(45^0-\frac{1}{2}\varphi)$

VIII. $\sin E = \dfrac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \dfrac{r \sin v}{a \cos \varphi}$

IX. $r \cos v = a(\cos E - e) = 2\, a \cos(\tfrac{1}{2} E + \tfrac{1}{2} \varphi + 45^0) \cos(\tfrac{1}{2} E - \tfrac{1}{2} \varphi - 45^0)$

X. $\sin \tfrac{1}{2}(v - E) = \sin \tfrac{1}{2} \varphi \sin v \sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin \tfrac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

XI. $\sin \tfrac{1}{2}(v + E) = \cos \tfrac{1}{2} \varphi \sin v \sqrt{\dfrac{r}{p}} = \cos \tfrac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

XII. $M = E - e \sin E$.

9.

Verlängert man ein, aus irgend einem Punkte der Ellipse auf die Apsidenlinie gefälltes Perpendikel rückwärts, bis es einen aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit dem Halbmesser $= a$ beschriebenen Kreis trifft, so wird die Neigung desjenigen Halbmessers, der dem Einschneidepunkte entspricht, gegen die Apsidenlinie (ähnlich verstanden, wie vorhin für die wahre Anomalie) der excentrischen Anomalie gleich sein, wie sich ohne Mühe aus der Gleichung IX im vorhergehenden Artikel ableiten lässt. Man sieht ferner, dass $r \sin v$ den Abstand eines jeden Punktes der Ellipse von der Apsidenlinie bezeichnet; und da dieser Abstand nach Gleichung VIII $= a \cos \varphi \sin E$ ist, so wird er seinen grössten Werth bei $E = 90^0$ erreichen, d. h. im Mittelpunkte der Ellipse. Dieser grösste Abstand, der $= a \cos \varphi = \dfrac{p}{\cos \varphi} = \sqrt{ap}$ heisst die *halbe kleine Axe*. Im Brennpunkte der Ellipse, d. h. für $v = 90^0$, wird jener Abstand offenbar $= p$, oder gleich dem halben Parameter.

10. (9)

Die Gleichungen des Art. 8 enthalten Alles, was zur Berechnung der excentrischen Anomalie und der mittleren aus der wahren, oder der excentrischen und der wahren aus der mittleren erforderlich ist. Um die excentrische aus der wahren abzuleiten, bedient man sich gewöhnlich der Formel VII. Gemeiniglich jedoch empfiehlt es sich, zu diesem Zwecke die Gleichung X zu benutzen, besonders sobald die Excentricität nicht zu gross ist, in welchem

Falle E mit grösserer Schärfe aus X berechnet werden kann, als aus VII. Ausserdem hat man bei Anwendung der Gleichung X den Logarithmus des Sinus von E, der in XII gebraucht wird, sofort durch die Gleichung VIII, welcher bei Anwendung von VII erst aus den Tafeln genommen werden müsste; wenn daher bei jener Methode der fragliche Logarithmus gleichfalls den Tafeln entnommen wird, so erlangt man dadurch eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung. Derartige Rechnungsprüfungen und Bestätigungen sind stets überaus schätzbar, und uns bei denselben Raths zu erholen, wird daher bei allen in diesem Werke abzuhandelnden Methoden, da wo es bequem geschehen kann, unsere eifrige Sorge sein. Zur besseren Erläuterung fügen wir ein vollständig berechnetes Beispiel hinzu:

Gegeben sei $v = 310^\circ\, 55'\, 29''\, 64$, $\varphi = 14^\circ\, 12'\, 1''\, 87$, $\log r = 0{,}330\,7640$; Gesucht werden: p, a, E und M.

$$\begin{array}{ll}
\log \sin \varphi \ldots\ldots\ldots & 9{,}389\,7262 \\
\log \cos v \ldots\ldots\ldots & 9{,}816\,2877 \\
\hline
 & 9{,}206\,0139 \quad \text{woraus } e \cos v = 0{,}160\,6993 \\
\hline
\log (1 + e \cos v) \ldots & 0{,}064\,7197 \\
\log r \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}330\,7640 \\
\hline
\log p \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}395\,4837 \\
\log \cos \varphi^2 \ldots\ldots\ldots & 9{,}973\,0448 \\
\hline
\log a \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}422\,4389 \\
\hline
\log \sin v \ldots\ldots\ldots & 9{,}878\,2740 \; n^{*)} \\
\log \sqrt{\frac{p}{r}} \ldots\ldots\ldots & 0{,}032\,3598.5 \\
\hline
 & 9{,}845\,9141.5\,n \\
\log \sin \frac{1}{2} \varphi \ldots\ldots & 9{,}092\,0395 \\
\hline
\log \sin \frac{1}{2}(v - E) & 8{,}937\,9536.5\,n
\end{array}$$

also $\frac{1}{2}(v - E) = -4^\circ\, 58'\, 22''\, 94$; $v - E = -9^\circ\, 56'\, 45''\, 88$; $E = 320^\circ\, 52'\, 15''\, 52$

---

*) Der dem Logarithmus beigefügte Buchstab n deutet an, dass die ihm entsprechende Zahl eine negative ist.

Ferner wird

$\log e$	9,389 7262
$\log 206\,264{,}8$ ...	5,314 4251
$\log e$ in Sec.	4,704 1513
$\log \sin E$	9,800 0767 n
	4,504 2280 n

Rechnung für $\log \sin E$ nach Formel VIII. (10)

$\log \dfrac{r}{p} \sin v$	9,813 5543 n
$\log \cos \varphi$	9,986 5224
$\log \sin E$	9,800 0767 n

also $e \sin E$ in Sec. $= 31932''\,14 = 8^\circ\,52'\,12''\,14$

und $M = 329^\circ\,44'\,27''\,66$. — Rechnung nach Formel VII für E:

$\frac{1}{2} v = 155^\circ\,27'\,44''\,82$

$45^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 37^\circ\,53'\,59''\,065$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$	9,659 4579 n
$\log \operatorname{tang} (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$	9,891 2427
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} E$	9,550 7006 n

woraus $\frac{1}{2} E = 160^\circ\,26'\,7''\,76$ und $E = 320^\circ\,52'\,15''\,52$, wie oben.

11.

Die umgekehrte, unter dem Namen des Kepler'schen Problems berühmte Aufgabe, nämlich aus der mittleren Anomalie die wahre und den radius vector zu finden, kommt weit häufiger zur Frage. Die Astronomen pflegen die Gleichung des Mittelpunktes durch eine unendliche, nach den Sinussen der Winkel M, $2M$, 3 M etc. fortschreitende Reihe darzustellen, wobei die einzelnen Coefficienten der Sinusse ebenfalls Reihen sind, die nach den Potenzen der Excentricität in's Unendliche fortlaufen. Ich habe es um so weniger für nothwendig erachtet, mich bei dieser von mehrern Schriftstellern entwickelten Formel für die Gleichung des Mittelpunktes hier aufzuhalten, weil sie, wenigstens nach meinem Urtheile, für den praktischen Gebrauch, namentlich wenn die Excentricität nicht sehr klein ist, viel weniger geeignet ist, als die indirecte Methode, welche ich daher in der Form, die mir die bequemste scheint, etwas näher erörtern will.

Die Gleichung XII, $E = M + e \sin E$, die transcendent ist und eine directe Auflösung nicht zulässt, wird durch Versuche aufgelöst, indem man mit einem genäherten Werthe von E beginnt, der durch geeignete, so oft wiederholte Methoden corrigirt wird, bis er jener Gleichung genau Genüge thut, d. h. entweder mit aller der Genauigkeit, welche die Sinustafeln zulassen, oder doch mit der, welche dem vorgesteckten Ziele entspricht. Wenn nun

jene Correctionen nicht blindlings, sondern nach einer sicheren und bestimmten Norm angestellt werden, so besteht kaum ein wesentlicher Unterschied zwischen einer solchen indirecten Methode und der Auflösung durch Reihen, wenn nicht darin, dass bei jener der erste Werth der Unbekannten einigermaassen willkürlich ist, was eher für einen Gewinn gelten kann, da ein schicklich ausgewählter Werth es erlaubt, die Verbesserungen ausserordentlich zu beschleunigen. Setzen wir voraus, dass ε ein genäherter Werth von E sei, und x die jenem hinzuzufügende (in Secunden ausgedrückte) Verbesserung, so dass der Werth
(11) $E = \varepsilon + x$ unserer Gleichung genau Genüge thut. Man berechne $e \sin \varepsilon$ in Secunden durch Logarithmen, und bemerke bei dieser Ausführung zugleich aus den Tafeln die Aenderung von $\log \sin \varepsilon$ für $1''$ durch die Variation von ε, sowie die Veränderung des $\log e \sin \varepsilon$ für die Aenderung einer Einheit in der Zahl $e \sin \varepsilon$; diese Veränderungen mögen ohne Rücksicht auf die Zeichen λ, μ sein, wobei es kaum nöthig ist, daran zu erinnern, dass dabei jeder Logarithmus durch gleich viele Decimalstellen ausgedrückt vorausgesetzt wird. Wenn nun schon ε dem wahren Werthe von E bereits so nahe kommt, dass man die Veränderungen des Logarithmus des Sinus von ε bis zu $\varepsilon + x$, und die Veränderungen des Logarithmus der Zahl von $e \sin \varepsilon$ bis zu $e \sin(\varepsilon + x)$ als einförmige annehmen kann, so lässt sich offenbar setzen: $e \sin(\varepsilon + x) = e \sin \varepsilon \pm \frac{\lambda x}{\mu}$, wobei das obere Zeichen für den ersten und vierten Quadranten, das untere für den zweiten und dritten gilt. — Es sei daher $\varepsilon + x = M + e \sin(\varepsilon + x)$, so wird $x = \frac{\mu}{\mu \mp \lambda}(M + e \sin \varepsilon - \varepsilon)$ und der wahre Werth von E, oder von $\varepsilon + x = M + e \sin \varepsilon \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda}(M + e \sin \varepsilon - \varepsilon)$ wobei die Zeichen in angegebener Weise bestimmt werden. Uebrigens sieht man leicht, dass ohne Rücksicht auf das Zeichen $\mu : \lambda = 1 : e \cos \varepsilon$ und daher immer μ grösser als λ, woraus geschlossen wird, dass im ersten und letzten Quadranten $M + e \sin \varepsilon$ zwischen ε und $\varepsilon + x$, dass aber im zweiten und dritten $\varepsilon + x$ zwischen ε und $M + e \sin \varepsilon$ liegt; eine Regel, welche uns der Beachtung der Zeichen überhebt. Weicht der vorausgesetzte Werth von ε noch zu sehr von der Wahrheit ab, als dass die vorhin erwähnte Voraussetzung genau genug sein sollte, so wird man wenigstens durch diese Methode einen viel

näheren Werth finden, mit welchem man die nämliche Operation noch einmal und so oft es nöthig scheint, zu wiederholen hat. Es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn der Unterschied des ersten Werthes für ε vom wahren, als eine Grösse der ersten Ordnung angesehen wird, der Fehler des neuen Werthes zur zweiten Ordnung gehört und durch Wiederholung der Operation zur vierten, achten etc. Ordnung heruntergebracht wird. Desto kleiner überdies die Excentricität ist, desto schneller werden die successiven Verbesserungen convergiren.

12.

Ein genäherter Werth für E, von welchem man bei der Rechnung ausgehen kann, wird gemeiniglich zur Hand sein, besonders falls die Aufgabe für mehre Werthe von M zu lösen ist, von denen einige schon absolvirt sind. In Ermangelung aller anderen Hülfsmittel constirt aber wenigstens soviel, dass E zwischen den Grenzen M und $M \pm e$ liegen muss (wo e die in Secunden ausgedrückte Excentricität bezeichnet und wobei das obere Zeichen im ersten und zweiten Quadranten, das untere im dritten und vierten genommen wird). Es kann daher für den Anfangswerth von E entweder M, oder ein Werth angenommen werden, der nach irgend welcher Schätzung vermehrt oder vermindert ist. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass die erste Rechnung, sobald man (12)
von einem wenig genauen Werthe ausgeht, keine ängstliche Genauigkeit erfordert, und dass kleinere Logarithmentafeln, z. B. die von Lalande, völlig ausreichen. Ausserdem kann man zur Bequemlichkeit der Rechnung immer solche Werthe für ε wählen, deren Sinus aus den Tafeln selbst ohne Interpolation sich entnehmen lässt, z. B. in Minuten oder in vollen Zehnern der Secunden, je nachdem die angewandten Tafeln in Minuten, oder von zehn zu zehn Secunden fortschreiten. Uebrigens kann Jeder leicht diejenigen Modificationen entwickeln, welche jene Vorschriften für den Fall erleiden, dass die Winkel in der neuen Decimaleintheilung ausgedrückt sind.

13.

Beispiel: Es sei die Excentricität dieselbe wie im Beispiel zu Art. 10. $M = 332^\circ\, 28'\, 54''\, 77$. Hier ist daher $\log e$ in Secunden $= 4{,}704\,1513$ und deshalb $e = 50600'' = 14^0\ 3'\ 20''$. Da nun hier E kleiner sein muss als M, so setzen wir zur ersten Rechnung $\varepsilon = 326^0$, wofür man aus den kleinern Tafeln erhält:

$\log \sin \varepsilon \ldots\ldots 9{,}747\,56\ n,$ Veränderung für $1' \ldots 19$, also $\lambda = 0{,}312$

$\log e$ in Sec. . $4{,}704\,15$

$4{,}451\,71\ n$

hieraus $e \sin \varepsilon = -28295'' = -7^0\ 51'\ 35''$ Veränderung des Logarithmus für eine Tafeleinheit, die hier $10''$ begleicht, $\ldots 15{,}25$; also $\mu = 1{,}525$

$M + e \sin \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 324\ \ 37\ \ 20$

Differirt von ε um $1^0\ 22'\ 40'' = 4960''$, folglich $\frac{0{,}312}{1{,}213} \times 4960''$ $= 1276'' = 21'\ 16''$. Hiermit wird der verbesserte Werth von $E = 324^0\ 37'\ 20'' - 21'\ 16'' = 324^0\ 16'\ 4''$, mit welchem man die Rechnung nach grösseren Tafeln wiederholt.

$\log \sin \varepsilon \ldots 9{,}766\,4112\ n$ $\lambda = 29{,}25$

$\log e \ldots\ldots 4{,}704\,1513$

$4{,}470\,5625\ n$ $\mu = 146$

$e \sin \varepsilon = -29550''\ 34 = -8^0\ 12'\ 30''\ 34$

$M + e \sin \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots 324^0\ 16'\ 24''\ 43$

Differirt von ε um $\ldots\ldots\ldots\ldots - 20''\ 43$. Multiplicirt man diese Differenz durch $\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{29{,}25}{116{,}75}$, so erhält man $-5''\ 12$ und daher ist der aufs Neue verbesserte Werth für $E = 324^0\ 16'\ 24''\ 43 + 5''\ 12 = 324^0\ 16'\ 29''\ 55$, innerhalb $0''\ 01$ genau.

(13)

14.

Zur Bestimmung der wahren Anomalie und des radius vector aus der excentrischen Anomalie geben die Gleichungen des Art. 8 mehre Methoden an die Hand, von denen wir die vorzüglichsten erläutern wollen.

I. Nach der gewöhnlichen Methode wird v durch die Gleichung VII und dann r durch die Gleichung II bestimmt. Auf diese Weise steht das Beispiel des vorhergehenden Artikels, wenn man den für p in Art. 10 gegebenen Werth beibehält, so:

$\frac{1}{2} E = 162^\circ\, 8'\, 14''\, 75.$	$\log e \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}389\,7262$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} E \ldots\ldots\ldots 9{,}508\,2198\, n$	$\log \cos v \ldots\ldots\ldots 9{,}849\,6597$
$\log \operatorname{tang} (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \ldots 9{,}891\,2427$	$9{,}239\,3859$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}616\,9771\, n$	$e \cos v \quad = 0{,}173\,5345$
$\frac{1}{2} v = 157^\circ\, 30'\, 41''\, 50$	$\log p \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}395\,4837$
$v = 315 \quad 1\;23{,}00$	$\log (1 + e \cos v) \ldots 0{,}069\,4959$
	$\log r \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}325\,9878$

II. Kürzer ist folgende Methode, wenn mehre Orte zu berechnen sind, für welche man die constanten Logarithmen der Grössen $\sqrt{a(1+e)}$, $\sqrt{a(1-e)}$ nur einmal zu berechnen braucht. Aus den Gleichungen V und VI erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} = \sin \tfrac{1}{2} E \sqrt{a(1+e)}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} = \cos \tfrac{1}{2} E \sqrt{a(1-e)}$$

wodurch $\frac{1}{2} v$ und $\log \sqrt{r}$ schnell bestimmt werden. Im Allgemeinen wird allerdings — sobald man $P \sin Q = A$, $P \cos Q = B$ hat — Q durch die Formel $\operatorname{tang} Q = \frac{A}{B}$ gefunden, und dann ist hiernach $P = \frac{A}{\sin Q}$ oder $P = \frac{B}{\cos Q}$ Die Erstere wendet man an, wenn $\sin Q$ grösser als $\cos Q$ ist; die zweite, wenn $\cos Q$ grösser als $\sin Q$ ist. Gemeiniglich schliessen die Aufgaben, bei welchen man zu solchen Gleichungen gelangt, (wie dieselben denn in diesem Werke sehr häufig vorkommen) die Bedingung in sich, dass P eine positive Grösse sein muss, und dann wird der Zweifel, ob Q innerhalb 0° bis 180°, oder von 180°—360° zu nehmen ist, von selbst beseitigt. Ohne das Vorhandensein einer solchen Bedingung aber bleibt diese Bestimmung unserem Ermessen überlassen.

In unserem Beispiele haben wir $e = 0{,}245\,3162$,

$\log \sin \frac{1}{2} E \ldots\ldots 9{,}486\,7632$	$\log \cos \frac{1}{2} E \ldots\ldots 9{,}978\,5434\, n$
$\log \sqrt{a(1+e)} \ldots 0{,}258\,8593$	$\log \sqrt{a(1-e)} \ldots 0{,}150\,1020$

Hieraus (14)

$$\left.\begin{aligned} &\log \sin \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} \ldots 9{,}745\,6225 \\ &\log \cos \tfrac{1}{2} v \sqrt{r} \ldots 0{,}128\,6454\, n \end{aligned}\right\} \text{woraus } \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = 9{,}616\,9771\, n$$

$$\tfrac{1}{2} v = 157^\circ\, 30'\, 41''\, 50$$
$$v = 315 \quad 1\;23{,}00$$

$\log \cos \frac{1}{2} v \ldots\ldots 9{,}965\,6515\, n$

$\log \sqrt{r} \ldots\ldots\ldots 0{,}162\,9939$

$\log r \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}325\,9878$

III. Diesen Methoden fügen wir eine dritte hinzu, welche beinahe ebenso kurz, als die zweite, dieser aber da, wo die äusserste Genauigkeit verlangt wird, meistens vorzuziehen ist. Zuerst wird nämlich r durch die Gleichung III, und sodann v aus X bestimmt. Unser auf diese Weise behandeltes Beispiel steht dann so:

$\log e$	9,389 7262	$\log \sin E$	9,766 3366 n
$\log \cos E$	9,909 4637	$\log \sqrt{(1-e\cos E)}$	9,951 7744
	9,299 1899		9,814 5622 n
$e \cos E =$	0,199 1544	$\log \sin \frac{1}{2}\varphi$	9,092 0395
$\log a$	0,422 4389	$\log \sin \frac{1}{2}(v-E)$	8,906 6017 n
$\log (1-e\cos E)$	9,903 5488	$\frac{1}{2}(v-E)$	$= -4^0\ 37'\ 33''\ 24$
$\log r$	0,325 9877	$v-E$	$= -9\ \ 15\ \ 6\ \ 48$
		v	$= 315\ \ 1\ \ 23\ \ 02$

Zur Prüfung der Rechnung ist die Formel VIII oder XI sehr bequem, vorzüglich wenn v und r durch die dritte Methode bestimmt sind. Hier folgt die Rechnung:

$\log \frac{a}{r} \sin E$	9,862 7878 n	$\log \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$	9,814 5622 n
$\log \cos \varphi$	9,986 5224	$\log \cos \frac{1}{2}\varphi$	9,996 6567
	9,849 3102 n		9,811 2189 n
$\log \sin v$	9,849 3102 n	$\log \sin \frac{1}{2}(v+E)$	9,811 2189 n

15.

Da die mittlere Anomalie M, wie wir gesehen haben, durch v und φ vollständig bestimmt wird, und ebenso v durch M und φ, so ist klar, dass, wenn alle drei Grössen zugleich als veränderliche betrachtet werden, unter ihren differentialen Aenderungen eine Bedingungsgleichung Statt finden müsse, deren Erforschung nicht überflüssig erscheint. Indem man zuerst die Gleichung VII im Art. 8 differentiirt, erhält man $\frac{\mathrm{d}E}{\sin E} = \frac{\mathrm{d}v}{\sin v} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$; differentiirt man nun auch die Gleichung XII, so folgt $\mathrm{d}M = (1-e\cos E)\,\mathrm{d}E - \sin E \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi$. Eliminirt man aus diesen Differentialgleichungen $\mathrm{d}E$, so resultirt

$$\mathrm{d}M = \frac{\sin E(1-e\cos E)}{\sin v}\,\mathrm{d}v - \left(\sin E\cos\varphi + \frac{\sin E(1-e\cos E)}{\cos\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \qquad (15)$$

oder, falls man für $\sin E$ und für $1-e\cos E$ ihre Werthe aus den Gleichungen VIII und III substituirt:

$$\mathrm{d}M = \frac{rr}{aa\cos\varphi}\,\mathrm{d}v - \frac{r(r+p)\sin v}{aa\cos\varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

oder endlich, wenn man jeden Coefficienten nur durch v und φ ausdrückt:

$$\mathrm{d}M = \frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v)^2}\,\mathrm{d}v - \frac{(2+e\cos v)\sin v\cos\varphi^2}{(1+e\cos v)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

Betrachtet man umgekehrt v als eine Function der Grössen M und φ, so erhält die Gleichung folgende Form:

$$\mathrm{d}v = \frac{aa\cos\varphi}{rr}\,\mathrm{d}M + \frac{(2+e\cos v)\sin v}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

oder durch Einführung von E statt v

$$\mathrm{d}v = \frac{aa\cos\varphi}{rr}\,\mathrm{d}M + \frac{aa}{rr}(2-e\cos E-ee)\sin E\,\mathrm{d}\varphi.$$

16.

Der radius vector r wird durch v und φ oder durch M und φ noch nicht vollständig bestimmt, sondern hängt derselbe überdies von p oder von a ab. Sein Differential besteht daher aus drei Gliedern. Durch Differentiation der Gleichung II im Art. 8 erhält man

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{e\sin v}{1+e\cos v}\,\mathrm{d}v - \frac{\cos\varphi\cos v}{1+e\cos v}\,\mathrm{d}\varphi$$

Setzt man hier $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}a}{a} - 2\operatorname{tang}\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, (was aus der Differentiation der Gleichung I folgt) und drückt zufolge des vorhergehenden Artikels $\mathrm{d}v$ durch $\mathrm{d}M$ und $\mathrm{d}\varphi$ aus, so folgt nach den nöthigen Reductionen

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{a}{r}\operatorname{tang}\varphi\sin v\,\mathrm{d}M - \frac{a}{r}\cos\varphi\cos v\,\mathrm{d}\varphi, \text{ oder}$$

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{a}\mathrm{d}a + a\operatorname{tang}\varphi\sin v\,\mathrm{d}M - a\cos\varphi\cos v\,\mathrm{d}\varphi$$

Uebrigens beruhen diese, sowie die im vorhergehenden Artikel entwickelten Formeln auf der Annahme, dass v, φ und M oder vielmehr $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}M$ in Theilen des Radius dargestellt werden. Will man also die Veränderungen der Winkel v, φ, M in Secunden ausdrücken, so muss man entweder diejenigen Theile der Formeln, welche dv, $d\varphi$ oder dM enthalten, durch 206264,8 dividiren, oder diejenigen, welche dr, dp oder da enthalten, durch dieselbe Zahl multipliciren. Es werden daher die Formeln des vorhergehenden Artikels, welche in dieser Beziehung homogen sind, einer Aenderung nicht bedürfen.

17.

(16) Wir wollen noch Einiges über die Untersuchung der grössten Mittelpunktsgleichung hinzufügen. Zuvörderst ist von selbst klar, dass der Unterschied zwischen der excentrischen und mittleren Anomalie ein Grösstes ist für $E = 90^0$, wo er gleich e (in Graden u. s. w. ausgedrückt) ist; der radius vector in diesem Punkte ist $= a$; woraus $v = 90^0 + \varphi$ und so ist die ganze Gleichung des Mittelpunkts $= \varphi + e$, welche jedoch hier nicht ein Grösstes ist, weil der Unterschied zwischen v und E noch über φ hinaus anwachsen kann. Dieser Unterschied wird ein Grösstes für $d(v - E) = 0$, oder für $dv = dE$, wo die Exentricität offenbar als constant anzusehen ist. Da im Allgemeinen $\frac{dv}{\sin v} = \frac{dE}{\sin E}$, so erhellt bei dieser Annahme, dass in dem Punkte, wo die Differenz zwischen v und E ein Grösstes ist, $\sin v = \sin E$ sein muss; wodurch man aus den Gleichungen VIII und III erhält: $r = a \cos\varphi$; $e \cos E = 1 - \cos\varphi$, oder $\cos E = + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$. Ebenso wird gefunden: $\cos v = - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$, weshalb sein wird*): $v = 90^0 + \text{arc.} \sin \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$, $E = 90^0 - \text{arc.} \sin \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$, hieraus ferner $\sin E = \sqrt{(1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2)} = \frac{\sqrt{\cos\varphi}}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$; so dass die ganze Gleichung des Mittelpunkts in diesem Punkte wird $= 2\, \text{arc.} \sin \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi + 2 \sin\frac{1}{2}\varphi \sqrt{\cos\varphi}$, wobei der zweite Theil in Graden etc. ausgedrückt ist. In demjenigen Punkte endlich, wo die ganze Gleichung des Mittelpunktes ein Grösstes ist, muss $dv = dM$ werden und daher nach Art. 15, $r = a\sqrt{\cos\varphi}$; hiernach wird

$$\cos v = -\frac{1 - \cos\varphi^{\frac{3}{2}}}{e}, \quad \cos E = \frac{1 - \sqrt{\cos\varphi}}{e} = \frac{1 - \cos\varphi}{e\,(1 + \sqrt{\cos\varphi})} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \sqrt{\cos\varphi}},$$

*) Auf diejenigen Maxima, die zwischen dem Aphel und dem Perihel liegen, braucht man keine Rücksicht zu nehmen, da sie offenbar von den zwischen Perihel und Aphel belegenen nur in den Zeichen verschieden sind.

durch welche Formel man E mit der äussersten Genauigkeit bestimmen kann. Wenn E gefunden ist, so wird mittelst der Gleichungen X und XII die Gleichung des Mittelpunktes

$$= 2 \,\text{arc.}\sin \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi \sin E}{\sqrt[4]{\cos\varphi}} + e \sin E.$$

Bei dem Ausdrucke der grössten Mittelpunktsgleichung durch eine, nach den Potenzen der Excentricität fortschreitende Reihe, die mehre Schriftsteller abgehandelt haben, will ich mich hier nicht aufhalten. Als Beispiel wollen wir einen Conspectus der drei hier betrachteten Maxima für die Juno hinzufügen, deren Excentricität nach den neuesten Elementen = 0,255 4996 angenommen ist.

Maximum	E	$E-M$	$v-E$	$v-M$
$E-M$	90° 0′ 0″	14° 38′ 20″ 57	14° 48′ 11″ 48	29° 26′ 32″ 05
$v-E$	82 32 9	14 30 54 01	14 55 41 79	29 26 35 80
$v-M$	86 14 40	14 36 27 39	14 53 49 57	29 20 16 96

18.

In der Parabel würden die excentrische Anomalie, die mittlere Anomalie und die mittlere Bewegung = 0 werden, und hier können also diese Begriffsbestimmungen nicht zur Vergleichung der Bewegung mit der Zeit dienen. Jedoch bedürfen wir bei der Parabel zur Integrirung von $rr\,\mathrm{d}v$ eines Hülfswinkels überall nicht; denn es wird (17)

$$rr\mathrm{d}v = \frac{pp\,\mathrm{d}v}{4\cos\frac{1}{2}v^4} = \frac{pp\,\mathrm{d}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}v}{2\cos\frac{1}{2}v^2} = \tfrac{1}{2}pp\,(1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2)\,\mathrm{d}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v,$$

und daher: $\int rr\mathrm{d}v = \frac{1}{2}pp\,(\text{tang}\,\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\text{tang}\,\frac{1}{2}v^3) + \text{const.}$ Wenn man die Zeit vom Durchgange durch das Perihel zu zählen beginnt, so wird die Constante = 0 und man hat daher

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3 = \frac{2tk\sqrt{(1+\mu)}}{p^{\frac{3}{2}}}$$

durch welche Formel man t aus v und v aus t ableiten kann, sobald p und μ bekannt sind. Statt p pflegt bei parabolischen Elementen der radius vector im Perihele, der $= \frac{1}{2}p$ ist, angewandt und die Masse überhaupt vernachlässigt zu werden. Schwerlich wird es jemals möglich sein, die Masse eines solchen Körpers, dessen Bahn als Parabel berechnet wird, zu bestimmen und in Wahrheit scheinen die Cometen nach den neusten und besten Beobachtungen eine so geringe Dichtigkeit und Masse zu besitzen, dass letztere als unmerklich angesehen und mit Sicherheit vernachlässigt werden kann.

19.

Die Auflösung der Aufgabe: aus der wahren Anomalie die Zeit abzuleiten und noch vielmehr die Auflösung des umgekehrten Problems, kann bedeutend durch eine Hülfstafel erleichtert werden, welche in sehr vielen astronomischen Büchern sich findet. Die bei weitem bequemste aber ist die Barker'sche Tafel, welche auch dem ausgezeichneten Werke von Olbers (Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen, Weimar 1797) angehängt ist. Dieselbe enthält für alle wahren Anomalien von 0 bis 180° von fünf zu fünf Minuten den Werth des Ausdruckes $75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + 25 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v^3$ unter dem Namen mittlere Bewegung (motus medius). Wird daher die Zeit verlangt, welche der wahren Anomalie v entspricht, so braucht man nur die mit dem Argumente v aus der Tafel genommene mittlere Bewegung durch $\frac{150k}{p^{\frac{3}{2}}}$ zu dividiren, welche Grösse die mittlere tägliche Bewegung (motus medius diurnus) heisst; wenn dagegen aus der Zeit die wahre Anomalie berechnet werden soll, so muss man die in Tagen ausgedrückte Zeit mit $\frac{150k}{p^{\frac{3}{2}}}$ multipliciren, um die mittlere Bewegung zu erhalten, womit man die entsprechende Anomalie aus der Tafel nimmt. Im Uebrigen entspricht offenbar einem negativen Werthe von v dieselbe mittlere Bewegung und Zeit, aber negativ genommen. Die nämliche Tafel dient daher ebensowohl für negative als für positive Anomalien. Will man statt p lieber den Abstand im Peri-
(18) hele $\frac{1}{2} p = q$ benutzen, so wird die mittlere Bewegung ausgedrückt durch $\frac{k \sqrt{2812,5}}{q^{\frac{3}{2}}}$, wo der constante Factor $k \sqrt{2812,5}$ gleich wird: 0,912 279 061 und dessen Logarithmus = 9,960 1277069. Hat man die Anomalie v gefunden,

so wird der radius vector durch die schon oben erwähnte Formel $r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$ bestimmt.*)

20.

Durch Differentiation der Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^3 = 2\,tkp^{-\frac{3}{2}}$, erhält man, wenn alle Grössen v, t, p als veränderliche behandelt werden,

$$\frac{\mathrm{d}v}{2\cos\frac{1}{2}v^4} = 2kp^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t - 3\,tkp^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}p, \text{ oder } \mathrm{d}v = \frac{k\sqrt{p}}{rr}\mathrm{d}t - \frac{3tk}{2rr\sqrt{p}}\mathrm{d}p$$

Wünscht man die Veränderungen der Anomalie v in Secunden auszudrücken, so müssen auch beide Theile von $\mathrm{d}v$ auf diese Weise ausgedrückt werden, d. h. man muss für k den im Art. 6 gegebenen Werth $3548''188$ annehmen. Wenn nun überdies für p eingeführt wird $\frac{1}{2}p = q$, so erhält die Formel die Gestalt

$$\mathrm{d}v = \frac{k\sqrt{2q}}{rr}\,\mathrm{d}t - \frac{3kt}{rr\sqrt{2q}}\,\mathrm{d}q,$$

wobei die constanten Logarithmen $\log k\sqrt{2} = 3{,}700\,521\,5724$; $\log 3k\sqrt{\frac{1}{2}} = 3{,}876\,612\,8315$ zur Anwendung kommen.

Ferner wird durch die Differentiation der Gleichung

$$r = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2} \quad \text{erhalten} \quad \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}p}{p} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v\,\mathrm{d}v,$$

oder wenn man $\mathrm{d}v$ durch $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}p$ ausdrückt:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{3kt\operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{2rr\sqrt{p}}\right)\mathrm{d}p + \frac{k\sqrt{p}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{rr}\,\mathrm{d}t.$$

Der Coefficient von $\mathrm{d}p$ geht, wenn man für t den Werth aus v substituirt, über in $\frac{1}{p} - \frac{3p\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2}{4rr} - \frac{p\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^4}{4rr} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2 - \frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2\right)$ $= \frac{\cos v}{2r}$; der Coefficient von $\mathrm{d}t$ aber wird $= \frac{k\sin v}{r\sqrt{p}}$; hieraus folgt $\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\cos v\,\mathrm{d}p$ $+ \frac{k\sin v}{\sqrt{p}}\,\mathrm{d}t$ oder, wenn man q für p einführt,

$$\mathrm{d}r = \cos v\,\mathrm{d}q + \frac{k\sin v}{\sqrt{2q}}\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

Der hier anzuwendende constante Logarithmus ist $\log k\sqrt{\frac{1}{2}} = 8{,}085\,066\,4436$.

---

*) Eine zu diesem Artikel gehörende Bemerkung von Gauss in Nr. 474 der Astronomischen Nachrichten siehe Anhang. Anmerkung des Uebersetzers.

21.

In der Hyperbel würden φ und E imaginäre Grössen werden, und man muss, um solche zu vermeiden, an deren Stelle andere Hülfsgrössen einführen. Den Winkel, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$ ist, bezeichneten wir schon oben mit ψ und fanden den radius vector $= \frac{p}{2e\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$ Die Factoren in dem Nenner dieses Bruches, $\cos\frac{1}{2}(v-\psi)$ und $\cos\frac{1}{2}(v+\psi)$, werden einander gleich, wenn $v = 0$ ist, der zweite verschwindet bei dem grössten positiven Werthe von v, der erste aber bei dem grössten negativen Werthe. Setzt man daher $\frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = u$, so wird $u = 1$ im Perihel; es wächst in infinitum, während v sich seinem Grenzwerthe $180^0 - \psi$ nähert; dagegen nimmt es in infinitum ab, wenn v zu seinem anderen Grenzwerthe $-(180^0 - \psi)$ zurückkehrt; so dass den entgegengesetzten Werthen für v die reciproken Werthe von u, oder, was dasselbe ist, solche Werthe entsprechen, deren Logarithmen complementäre sind.

Dieser Quotient u kann sehr bequem in der Hyperbel als Hülfsgrösse angewandt werden; und mit ungefähr gleicher Concinnität kann an seiner Stelle der Winkel fungiren, dessen Tangente $= \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ ist, und den wir zur Verfolgung der Analogie mit der Ellipse, durch $\frac{1}{2}F$ bezeichnen wollen.

Auf diese Weise sammelt man leicht folgende Relationen zwischen den Grössen v, r, u, F, wobei wir $a = -b$ setzen, so dass b als positive Grösse herauskommt:

I. $b = p \operatorname{cotang}\psi^2$

II. $r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{p\cos\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$

III. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}F = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi = \frac{u-1}{u+1}$

IV. $u = \frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}F}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}F} = \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}F)$

V. $\frac{1}{\cos F} = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}) = \frac{1+\cos\psi\cos v}{2\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{e+\cos v}{1+e\cos v}$

Wenn man von der Gleichung V auf beiden Seiten 1 abzieht, so folgt:

$$\text{VI.}\quad \sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \sin\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{p}{(e-1)\cos F}} = \sin\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{(e+1)b}{\cos F}} \qquad (20)$$

$$= \tfrac{1}{2}(u-1)\sqrt{\frac{p}{(e-1)u}} = \tfrac{1}{2}(u-1)\sqrt{\frac{(e+1)b}{u}}$$

In ähnlicher Weise wird, wenn man auf beiden Seiten 1 addirt:

$$\text{VII.}\quad \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{r} = \cos\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{p}{(e+1)\cos F}} = \cos\tfrac{1}{2}F\sqrt{\frac{(e-1)b}{\cos F}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{\frac{p}{(e+1)u}} = \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{\frac{(e-1)b}{u}}$$

Dividirt man VI durch VII, so kommt man zu III zurück; die Multiplication ergiebt:

$$\text{VIII.}\quad r\sin v = p\,\text{cotang}\,\psi\,\text{tang}\,F = b\,\text{tang}\,\psi\,\text{tang}\,F$$

$$= \tfrac{1}{2}p\,\text{cotang}\,\psi\left(u-\frac{1}{u}\right) = \tfrac{1}{2}b\,\text{tang}\,\psi\left(u-\frac{1}{u}\right)$$

Aus Combination der Gleichungen II und V leitet sich leicht ab:

$$\text{IX.}\quad r\cos v = b\left(e-\frac{1}{\cos F}\right) = \tfrac{1}{2}b\left(2e-u-\frac{1}{u}\right)$$

$$\text{X.}\quad r = b\left(\frac{e}{\cos F}-1\right) = \tfrac{1}{2}b\left(e\left(u+\frac{1}{u}\right)-2\right)$$

22.

Aus Differentiation der Formel IV folgt (wenn man ψ als beständige Grösse ansieht) $\frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\left(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(v+\psi)-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(v-\psi)\right)dv = \frac{r\,\text{tang}\,\psi}{p}dv$; hieraus $rrdv = \frac{pr}{u\,\text{tang}\,\psi}du$; oder, falls für r der Werth aus X substituirt wird:

$$rrdv = bb\,\text{tang}\,\psi\left(\tfrac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{uu}\right)-\frac{1}{u}\right)du$$

Integrirt man hierauf so, dass das Integral im Perihel verschwindet, so resultirt:

$$\int rrdv = bb\,\text{tang}\,\psi\left(\tfrac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right) = kt\sqrt{p}\,.\sqrt{(1+\mu)} = kt\,\text{tang}\,\psi\sqrt{b}\,.\sqrt{(1+\mu)}$$

Hier ist der Logarithme ein hyperbolischer; will man daher Logarithmen aus dem Brigg'schen Systeme, oder allgemein aus einem Systeme anwenden, dessen Modulus $= \lambda$ ist, und die Masse μ (von der wir annehmen, dass sie für einen in der Hyperbel einherziehenden Körper unbestimmbar sei) vernachlässigen, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

XI. $\frac{1}{2}\lambda e \frac{uu-1}{u} - \log u = \frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}}$

(21) oder durch Einführung von F,

$$\lambda e \operatorname{tang} F - \log \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}F) = \frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn bei der Anwendung Brigg'sche Logarithmen vorausgesetzt werden, so haben wir $\log\lambda = 9{,}637\,7843\,113$ und $\log\lambda k = 7{,}873\,3657\,527$, aber man kann eine etwas grössere Genauigkeit erreichen, wenn die hyperbolischen Logarithmen unmittelbar angewandt werden. Hyperbolische Logarithmen der Tangenten werden in mehren Tafel-Sammlungen angetroffen, z. B. in der Schulze'schen, und in noch grösserer Ausdehnung bei „*Benjamin Ursinus, grosser logarithmischer Canon der Dreiecke, Cöln 1624,*" wo sie von 10 zu 10 Secunden fortgehen. Uebrigens zeigt die Formel XI, dass den reciproken Werthen von u, oder den entgegengesetzten Werthen von F und v, auch entgegengesetzte Werthe von t entsprechen, weshalb gleiche Theile der Hyperbel die auf beiden Seiten gleich weit vom Perihel abstehen, in gleichen Zeiten beschrieben werden.

23.

Benutzt man, um die Zeit aus der wahren Anomalie zu finden, die Hülfsgrösse u, so wird deren Werth am bequemsten durch die Gleichung IV bestimmt, worauf die Formel II sofort ohne neue Rechnung p aus r, oder r aus p giebt. Ist alsdann u gefunden, so giebt Formel XI die Grösse $\frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}}$, welche der mittleren Anomalie in der Ellipse analog ist, und mit N bezeichnet werde, und hieraus ergiebt sich die seit dem Durchgange durch's Perihel verflossene Zeit. Da der erstere Theil von N, nämlich $\frac{\lambda e(uu-1)}{2u}$ durch die Formel VIII $= \frac{\lambda r \sin v}{b \sin\psi}$ wird, so kann die doppelte Berechnung dieser Grösse zur Prüfung der Schärfe dienen, oder es lässt sich, wenn man dies vorzieht, N ohne u in folgender Weise bestimmen:

XII. $N = \frac{\lambda \operatorname{tang}\psi \sin v}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)} - \log\frac{\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$

Beispiel. Es sei $e = 1{,}261\,8820$ oder $\psi = 37^\circ\,35'\,0''$; $v = 18^\circ\,51'\,0''$; $\log r = 0{,}033\,3585$. Dann steht die Rechnung für u, p, b, N, t so:

$\log\cos\frac{1}{2}(v-\psi)$	9,994 1706
$\log\cos\frac{1}{2}(v+\psi)$	9,945 0577
woraus $\log u$	0,049 1129
u =	1,119 7289
uu =	1,253 7928

$\log r$	0,033 3585
$\log 2e$	0,402 0488
$\log p$	0,374 6356
$\log \operatorname{cotang} \psi^2$	0,227 4244
$\log b$	0,602 0600
$\log \frac{r}{b}$	9,431 2985
$\log\sin v$	9,509 3258
$\log\lambda$	9,637 7843
Compl. $\log\sin\psi$	0,214 7309
	8,793 1395
Erster Theil von N =	0,062 1069
$\log u$ =	0,049 1129
N =	0,012 9940
$\log\lambda k$	7,873 3658
$\frac{3}{2}\log b$	0,903 0900

Die andere Rechnung (22)

$\log(uu-1)$	0,404 4793
Compl. $\log u$	9,950 8871
$\log\lambda$	9,637 7843
$\log\frac{1}{2}e$	9,799 9888
	8,793 1395
$\log N$	8,113 7429
Differenz	6,970 2758
$\log t$	1,143 4671
t =	13,91448

24.

Soll die Rechnung, mit hyperbolischen Logarithmen geführt werden, so empfiehlt es sich, dabei die durch Gleichung III zu bestimmende Hülfsgrösse F zu brauchen, und hieraus N durch XI zu suchen; der halbe Parameter wird aus dem radius vector, oder wechselsweise dieser aus jenem mittelst Formel VIII berechnet; der zweite Theil von N kann auf doppelte Weise ermittelt werden, nämlich durch die Formel: $\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}F)$ oder durch $\log \operatorname{hyp} \cos\frac{1}{2}(v-\psi) - \log \operatorname{hyp} \cos\frac{1}{2}(v+\psi)$. Im Uebrigen ist es klar, dass die Grösse N hier, wo $\lambda = 1$ ist, im Verhältnisse von $1:\lambda$ grösser heraus kommt, als bei der Anwendung von Brigg'schen Logarithmen. Unser, auf diese Weise behandeltes Beispiel steht dann so:

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$	9,531 8179		
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}v$	9,220 1009		
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}F$	8,751 9188	$\frac{1}{2}F = 3^0\, 13'\, 58''\, 12$	
$\log e$	0,101 0188		
$\log \operatorname{tang} F$	9,054 3366		
	9,155 3554	$C. \log hyp \cos \frac{1}{2}(v - \psi) =$	0,013 42266
$e \operatorname{tang} F =$	0,143 00638	$C. \log hyp \cos \frac{1}{2}(v + \psi) =$	0,126 50930
$\log hyp \operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}F) =$	0,113 08666	Differenz $=$	0,113 08664
$N =$	0,029 91972	$\log N$	8,475 9575
$\log k$	8,235 5814	Differenz	7,332 4914
$\frac{3}{2}\log b$	0,903 0900		
		$\log t$	1,143 4661
		$t =$	13,91445

25.

(23) Zur Auflösung der umgekehrten Aufgabe, aus der Zeit die wahre Anomalie und den radius vector zu bestimmen — wird zuerst aus $N = \lambda k b^{-\frac{3}{2}} t$ durch Gleichung XI die Hülfsgrösse u oder F ermittelt. Die Auflösung dieser transcendenten Gleichung geschieht durch Versuche, welche durch ähnliche Kunstgriffe abgekürzt werden können, wie die in Art. 11 auseinandergesetzten. Wir setzen uns darüber hinweg, dies näher noch zu erklären; denn es scheint uns nicht der Mühe werth, diese Vorschriften ebenso ängstlich auszufeilen, als die für die Ellipse, da der Fall der hyperbolischen Bewegung in den Himmelsräumen vielleicht kaum jemals sich zuträgt, und da ausserdem alle Fälle, die vielleicht eintreten sollten, durch eine andere, weiter unten auseinanderzusetzende Methode sich erledigen lassen. Nachdem man F oder u gefunden hat, wird daraus v durch Formel III, und sodann r aus II oder VIII bestimmt; bequemer werden noch v und r zugleich mittelst der Formel VI und VII eruirt, und zur Prüfung der Rechnung kann man die eine oder die andere der übrigen Formeln benutzen.

26.

Beispiel. Wenn e und b so wie im vorhergehenden Beispiele bleiben, und $t = 65{,}41236$ ist, werden gesucht: v und r. Bei Brigg'schen Logarithmen hat man

$\log t$	1,815 6598
$\log \lambda k b^{-\frac{3}{2}}$	6,970 2758
$\log N$	8,785 9356; $N = 0{,}061\,08514$.

Hieraus findet sich, dass der Gleichung

$N = \lambda e \operatorname{tang} F - \log\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2} F)$ Genüge geleistet wird durch $F = 25^0\,24'\,27''\,66$; woraus nach Formel III:

$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}F$	9,353 0120
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$	9,531 8179
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}v$	9,821 1941 also $\frac{1}{2}v = 33^0\,31'\,29''\,89$; $v = 67^0\,2'\,59''\,78$.

Darnach hat man ferner:

$\mathrm{C.}\log\cos\frac{1}{2}(v+\psi)$	0,213 7476	Differenz	0,199 2279
$\mathrm{C.}\log\cos\frac{1}{2}(v-\psi)$	0,014 5197	$\log\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}F)$ ..	0,199 2280
$\log\frac{p}{2e}$	9,972 5868		
$\log r$	0,200 8541		

27.

Wird die Gleichung IV so differentiirt, dass u, v, ψ zugleich als veränderliche behandelt werden, so kommt

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\sin\psi\,\mathrm{d}v + \sin v\,\mathrm{d}\psi}{2\cos\frac{1}{2}(v-\psi)\cos\frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{r\operatorname{tang}\psi}{p}\,\mathrm{d}v + \frac{r\sin v}{p\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi \tag{24}$$

Differentiirt man ebenso Gleichung XI, so ergiebt sich unter den differentialen Veränderungen der Grössen u, ψ, N folgende Relation:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\lambda} = \left(\tfrac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{uu}\right) - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{(uu-1)\sin\psi}{2u\cos\psi^2}\,\mathrm{d}\psi, \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\lambda} = \frac{r}{bu}\,\mathrm{d}u + \frac{r\sin v}{b\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

und hieraus erhalten wir, wenn $\mathrm{d}u$ mittelst der vorhergehenden Gleichung eliminirt wird:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\lambda}=\frac{rr}{bb\,\mathrm{tang}\,\psi}\,\mathrm{d}v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r\sin v}{b\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi,\ \text{oder}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{bb\,\mathrm{tang}\,\psi}{\lambda rr}\,\mathrm{d}N-\left(\frac{b}{r}+\frac{b}{p}\right)\frac{\sin v\,\mathrm{tang}\,\psi}{\cos\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{bb\,\mathrm{tang}\,\psi}{\lambda rr}\,\mathrm{d}N-\left(1+\frac{p}{r}\right)\frac{\sin v}{\sin\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

28.

Wird Gleichung X differentiirt, und alles r, b, e, u dabei als veränderlich behandelt, auch für $\mathrm{d}e=\frac{\sin\psi}{\cos\psi^2}\,\mathrm{d}\psi$ substituirt, und zugleich $\mathrm{d}u$ mit Hülfe der zufolge des vorhergehenden Artikels zwischen $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}\psi$ bestehenden Gleichung eliminirt, so folgt:

$$\mathrm{d}r=\frac{r}{b}\,\mathrm{d}b+\frac{bb\,e\,(uu-1)}{2\lambda ur}\,\mathrm{d}N$$
$$+\frac{b}{2\cos\psi^2}\left\{\left(u+\frac{1}{u}\right)\sin\psi-\left(u-\frac{1}{u}\right)\sin v\right\}\mathrm{d}\psi$$

Der Coefficient von $\mathrm{d}N$ geht durch Gleichung VIII über in $\frac{b\sin v}{\lambda\sin\psi}$; der Coefficient $\mathrm{d}\psi$ aber, wenn man aus Gleichung IV, $u(\sin\psi-\sin v)=\sin(\psi-v)$; $\frac{1}{u}(\sin\psi+\sin v)=\sin(\psi+v)$ setzt, wird verändert in: $\frac{b\sin\psi\cos v}{\cos\psi^2}=\frac{p\cos v}{\sin\psi}$, so dass man hat

$$\mathrm{d}r=\frac{r}{b}\,\mathrm{d}b+\frac{b\sin v}{\lambda\sin\psi}\,\mathrm{d}N+\frac{p\cos v}{\sin\psi}\,\mathrm{d}\psi$$

In so fern man N als eine Function von b und t betrachtet, wird $\mathrm{d}N=\frac{N}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{3}{2}\cdot\frac{N}{b}\,\mathrm{d}b$. Bei Substituirung dieses Werthes werden $\mathrm{d}r$ und ebenso im vorhergehenden Artikel $\mathrm{d}v$, durch $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}\psi$ ausgedrückt erhalten. Uebrigens muss das, was schon oben erwähnt, auch hier wiederholt werden,
(25) nämlich, dass wenn die Veränderungen der Winkel u und ψ nicht in Theilen des Radius, sondern in Secunden ausgedrückt genommen werden, entweder alle Glieder, die $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\psi$ enthalten, durch 206 264,8 zu dividiren, oder die übrigen durch diese Zahl zu multipliciren sind.

29.

Da die in der Ellipse angewandten Hülfsgrössen φ, E, M in der Hyperbel imaginäre Werthe erhalten, so wird es nützlich sein, deren Verbindung mit den reellen Grössen, die wir gebraucht haben, zu erforschen; wir fügen daher die vorzüglichsten Relationen hinzu, und bezeichnen die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ mit i.

$$\sin\varphi = e = \frac{1}{\cos\psi}$$

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = i\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = i \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = -\frac{i}{\sin\psi}$$

$$\cos\varphi = i\operatorname{tang}\psi$$

$$\varphi = 90^0 + i\log(\sin\varphi + i\cos\varphi) = 90^0 - i\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\psi)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = i\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}F = \frac{i(u-1)}{u+1}$$

$$\frac{1}{\sin E} = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = -i\operatorname{cotang}F \text{ oder}$$

$$\sin E = i\operatorname{tang}F = \frac{i(uu-1)}{2u}$$

$$\operatorname{cotang}E = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = -\frac{i}{\sin F} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang}E = i\sin F = \frac{i(uu-1)}{uu+1}$$

$$\cos E = \frac{1}{\cos F} = \frac{uu+1}{2u};\ iE = \log(\cos E + i\sin E) = \log\frac{1}{u}$$

$$E = i\log u = i\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}F)$$

$$M = E - e\sin E = i\log u - \frac{ie(uu-1)}{2u} = -\frac{iN}{\lambda}$$

Die Logarithmen in diesen Formeln sind hyperbolische.

30.

Da sämmtliche, aus den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln (26) genommenen Zahlen eine absolute Genauigkeit nicht zulassen, sondern bis auf einen gewissen Grad nur genähert sind, so kann durch alle mit ihrer Hülfe angestellten Rechnungen die Wahrheit nur genähert bekannt werden. In sehr vielen Fällen geben zwar die gewöhnlichen Tafeln, die bis auf die siebente Stelle sicher sind (d. h. von der Wahrheit nirgends mehr oder weniger als eine halbe Einheit der siebenten Decimalziffer abweichen) eine mehr als hinreichende Genauigkeit, so dass die unvermeidlichen Irrthümer von keiner Bedeutung sind. Nichtsdestoweniger kann es in besonderen Fällen vorkommen, dass die Fehler der Tafeln einen so verstärkten Einfluss äussern, dass man sich von einer sonst sehr guten Methode lossagen und eine andere wählen muss. Derartige Fälle können auch in den bis jetzt auseinandergesetzten Rechnungen passiren. Es wird daher am Platze sein, hier einige Untersuchungen über den Grad der Genauigkeit anzustellen, welchen die gewöhnlichen Tafeln bei diesen Rechnungen erlauben. Da aber hier nicht der Ort ist, dieses für den praktischen Rechner sehr wichtige Argument zu erschöpfen, so wollen wir die Untersuchung so weit führen, dass es für unsere Zwecke genügt und dass jeder, dem daran liegt, sie weiter ausfeilen und auf andere Operationen ausdehnen kann.

31.

Jeder Logarithme, Sinus, Tangente etc. (oder überhaupt jede aus den Tafeln entnommene irrationale Grösse) ist einem Irrthume unterworfen, der bis auf eine halbe Einheit der letzten Stelle steigen kann. Wir bezeichnen diese Grenze des Irrthums mit ω, die daher in den gewöhnlichen Tafeln $= 0{,}000\,00005$ wird. Wenn ein Logarithmus etc. nicht unmittelbar aus den Tafeln genommen werden kann, sondern durch Interpolation gefunden werden muss, so kann der Irrthum aus einem doppelten Grunde noch etwas grösser werden. Erstens nämlich pflegt, so oft der Proportionaltheil nicht ein Ganzes (wenn man dabei die letzte Stelle als Einheit ansieht) ist, dafür das nächst grössere oder kleinere Ganze genommen zu werden. Man sieht leicht, dass aus diesem Grunde der Irrthum sogar bis aufs Doppelte vermehrt werden könne. Auf diese Vermehrung des Irrthums nehmen wir aber hier überhaupt keine Rücksicht, da nichts im Wege steht, dem Proportionaltheile noch die eine oder die andere Decimalstelle hinzuzufügen und es ist ohne Weiteres klar, dass der interpolirte Logarithmus, wenn der Proportionaltheil vollkommen genau wäre, keinem grösseren Irrthume unterworfen sein könne, als die unmittelbar in den Tafeln stehenden Logarithmen, insoweit es erlaubt ist, deren Aenderungen als gleichförmige zu

betrachten. Die zweite Vermehrung des Irrthums entsteht daraus, dass eben letztere Voraussetzung nicht in aller Strenge wahr ist. Aber auch diese Vermehrung vernachlässigen wir, da die Wirkung der zweiten und höheren Differenzen (27)
in nahezu allen Fällen von keiner Bedeutung ist (vorzüglich wenn für die trigonometrischen Grössen die vortrefflichen Taylor'schen Tafeln angewandt werden), und mit leichter Mühe könnte man diesem Umstande Rechnung tragen, wo jene Wirkung vielleicht etwas grösser sein sollte. Wir setzen daher für alle Fälle den grössten unvermeidlichen Irrthum der Tafeln $= \omega$, wenn nämlich das Argument (d. h. die Zahl deren Logarithmus, oder der Winkel dessen Sinus etc. verlangt wird) völlig genau ist. Ist aber das Argument selbst nur näherungsweise bekannt, und nimmt man an, dass dessen grösstmöglichem Irrthume die logarithmische u. s. w. Veränderung ω' entspreche (welche durch Differentialrechnung sich bestimmen lässt), so kann der grösste Fehler des aus den Tafeln berechneten Logarithmen bis auf $\omega + \omega'$ steigen.

Umgekehrt ist, wenn mit Hülfe der Tafeln das einem gegebenen Logarithmus entsprechende Argument berechnet wird, der grösste Irrthum desselben derjenigen Veränderung gleich, welche der Veränderung ω im Logarithmus dann entspricht, wenn letzterer genau gegeben ist, oder welche der Veränderung des Logarithmus $\omega + \omega'$ entspricht, falls der Logarithmus selbst bis zum Belaufe von ω' fehlerhaft sein kann. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass ω und ω' das nämliche Vorzeichen erhalten müssen.

Wenn mehre, nur innerhalb gewisser Grenzen genaue Grössen addirt werden, so wird der grösste Irrthum der Summe gleich sein der Summe der einzelnen grössten, mit dem nämlichen Zeichen versehenen Irrthümer; weshalb denn auch bei der Subtraction von nur genähert richtigen Grössen, der grösste Irrthum in der Differenz gleich der Summe der einzelnen grössten Irrthümer sein wird. Bei der Multiplication oder Division einer nicht absolut genauen Grösse wird der grösste Irrthum in demselben Verhältnisse vermehrt oder vermindert, wie die Grösse selbst.

32.

Wir gehen nun zu der Anwendung dieser Grundsätze auf die nützlichsten der oben entwickelten Operationen über.

I. Wenn man bei der elliptischen Bewegung zur Berechnung der wahren Anomalie aus der excentrischen die Formel VII des Art. 8 anwendet, und voraussetzt, dass φ und E als genau gelten, so kann beim $\log \operatorname{tang} (45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ und beim $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} E$ der Irrthum ω begangen werden und mithin in der Differenz $= \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$ der Irrthum 2ω; also wird der grösste, bei Bestimmung des Winkels $\frac{1}{2} v$ zu begehende Irrthum sein $\frac{3\omega \, d \frac{1}{2} v}{d \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v} = \frac{3\omega \sin v}{2\lambda}$, wobei λ den modulus der zu dieser Berechnung angewandten Logarithmen bedeutet. — Der Irrthum daher, dem die wahre Anomalie v unterworfen, wird in Secunden ausgedrückt $= \frac{3\omega \sin v}{\lambda} 206\,265'' = 0''0712 \sin v$, wenn Brigg'sche siebenstellige
(28) Logarithmen angewendet werden, so dass man immer innerhalb $0''07$ über den Werth von v gewiss sein kann; bei Benutzung kleinerer nur fünfstelliger Tafeln kann der Irrthum bis auf $7''12$ gehen.

II. Wird $e \cos E$ mit Hülfe von Logarithmen berechnet, so ist ein Irrthum möglich bis zu $\frac{3\omega e \cos E}{\lambda}$; und demselben Irrthum wird auch die Grösse $1 - e \cos E$ oder $\frac{r}{a}$ unterworfen sein. Bei Berechnung des Logarithmus dieser Grösse kann mithin der Irrthum steigen bis auf $(1 + \delta)\omega$, wo δ die positiv genommene Grösse $\frac{3 e \cos E}{1 - e \cos E}$ bezeichnet. Bis zu derselben Grenze $(1 + \delta)\omega$ geht der beim $\log r$ mögliche Irrthum, wenn nämlich der $\log a$ als genau gegeben angesehen wird. So oft die Excentricität klein ist, so ist die Grösse δ immer in enge Grenzen eingeschlossen, wenn aber e wenig von Eins verschieden ist, so bleibt $1 - e \cos E$ sehr klein, so lange E klein ist; es kann daher dann δ zu einem nicht zu vernachlässigenden Betrage anwachsen, weshalb in diesem Falle die Formel III des Art. 8 weniger geeignet sein würde. — Die Grösse δ lässt sich auch so ausdrücken: $\frac{3(a-r)}{r} = \frac{3e(\cos v + e)}{1 - ee}$; eine Formel, die noch klarer zeigt, wann man den Irrthum $(1 + \delta)\omega$ vernachlässigen darf.

III. Wendet man die Formel X des Art. 8 zur Berechnung der wahren Anomalie aus der excentrischen an, so ist $\log \sqrt{\frac{a}{r}}$ dem Irrthume $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta)\omega$

unterworfen, und folglich $\log \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$ dem Irrthume $(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\delta)\,\omega$; hieraus wird der grösste, bei Bestimmung des Winkels $v - E$ oder v mögliche Irrthum gefunden zu: $\frac{\omega}{\lambda}(7+\delta)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(v - E)$, oder in Secunden ausgedrückt und mit Anwendung von siebenstelligen Logarithmen $= (0''166 + 0''024\,\delta)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(v - E)$. Bei mässiger Excentricität werden δ und $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(v - E)$ kleine Grössen sein, weshalb diese Methode eine grössere Genauigkeit gestattet, als die unter I betrachtete, dagegen wird letztere dann vorzuziehen sein, wenn die Excentricität recht gross ist und nahe an die Einheit herankommt, wo δ und $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(v - E)$ recht beträchtliche Werthe erlangen können. Es lässt sich daher durch unsere Formeln stets leicht entscheiden, welcher von den beiden Methoden der Vorzug gebührt.

IV. Bei Bestimmung der mittleren Anomalie aus der excentrischen vermittelst der Formel XII im Art. 8 kann der Irrthum der mit Logarithmen berechneten Grösse $e \sin E$, und deshalb auch der Anomalie M, bis auf $\frac{3\,\omega\, e \sin E}{\lambda}$ steigen, und ist die Grenze dieses Irrthums, wenn man sie in Secunden ausgedrückt verlangt, mit $206\,265''$ zu multipliciren. Hieraus schliesst man leicht, dass bei der umgekehrten Aufgabe, wo E aus M durch Versuche bestimmt wird, dies E um die Grösse

$$\frac{3\,\omega\, e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}M} \cdot 206\,265'' = \frac{3\,\omega\, e\, a \sin E}{\lambda r} \cdot 206\,265'' \qquad (29)$$

selbst dann fehlerhaft sein kann, wenn auch der Gleichung $E - e \sin E = M$ mit aller durch die Tafeln gestatteten Genauigkeit Genüge geleistet ist.

Die wahre, aus der mittleren berechnete Anomalie kann also aus zwei Gründen fehlerhaft sein (wenn wir nämlich die mittlere als genau betrachten), erstens wegen des bei der Berechnung von v aus E begangenen Irrthums, der, wie wir gesehen haben, stets von geringer Bedeutung ist, und zweitens deshalb, weil der Werth der excentrischen Anomalie selbst schon fehlerhaft sein konnte. Die Einwirkung dieses letzteren Grundes wird bestimmt durch das Product des in E begangenen Irrthums mit $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}E}$, welches Product wird

$$= \frac{3\,\omega\, e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}M} \cdot 206\,265'' = \frac{3\,\omega\, e\, a \sin v}{\lambda r} \cdot 206\,265'' = \left(\frac{e \sin v + \frac{1}{2} ee \sin 2v}{1 - ee}\right) 0''0712$$

bei Anwendung von sieben Stellen. Dieser Irrthum, der für kleine Werthe von e stets mässig bleibt, kann sehr gross werden, sobald e von der Einheit wenig verschieden ist, wie die nachfolgende Tafel zeigt, die für einige Werthe von e den grössten Werth jenes Ausdrucks darstellt.

e	grösster Irrthum	e	grösster Irrthum	e	grösster Irrthum
0,90	0″42	0,94	0″73	0,98	2″28
0,91	0,48	0,95	0,89	0,99	4,59
0,92	0,54	0,96	1,12	0,999	46,23
0,93	0,62	0,97	1,50		

V. In der hyperbolischen Bewegung kann, wenn v nach Formel III des Art. 21 aus genau bekanntem F und ψ berechnet wird, der Irrthum bis zu $\frac{3\,\omega \sin v}{\lambda}.206\,265''$ steigen; wenn es aber durch die Formel $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \frac{u-1}{(u+1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}$ berechnet wird und u sowohl als ψ genau bekannt sind, so wird die Grenze des Irrthums um $\frac{1}{3}$ grösser werden, nämlich $= \frac{4\,\omega \sin v}{\lambda}.\,206\,265'' = 0''09 \sin v$ (bei sieben Stellen).

VI. Wird vermittelst der Formel XI des Art. 22 die Grösse $\frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}} = N$ mit Hülfe Brigg'scher Logarithmen berechnet, und gelten e und u, oder e und F als genau bekannt, so wird der erste Theil dem Irrthume $\frac{5(uu-1)e\omega}{2u}$ unterworfen sein, wenn er in der Form $\frac{\lambda e(u-1)(u+1)}{2u}$, oder dem Irrthume
(30) $\frac{3(uu+1)e\omega}{2u}$, wenn er in der Form von $\frac{1}{2}\lambda e u - \frac{\lambda e}{2u}$ berechnet ist, oder dem Irrthume $3e\omega \operatorname{tang} F$, wenn die Form $\lambda e \operatorname{tang} F$ benutzt ist, falls man dabei den in $\log \lambda$ oder $\log \frac{1}{2}\lambda$ begangenen Irrthum vernachlässigt. Im ersten Falle kann der Irrthum auch durch $5e\omega \operatorname{tang} F$, im zweiten durch $\frac{3e\omega}{\cos F}$ ausgedrückt werden, woraus man sieht, dass im dritten Falle der Irrthum immer der kleinste von allen ist, er aber im ersten und zweiten grösser sein wird, je nachdem u oder $\frac{1}{2}u$ grösser oder kleiner als 2, oder je nachdem $\pm F$ grösser oder kleiner als $36^0\,52'$ ist. Der zweite Theil von N wird aber stets dem Irrthum ω unterworfen sein.

VII. Umgekehrt ist klar, dass, wenn u oder F aus N durch Versuche bestimmt wird, u dem Irrthume $(\omega \pm 5\,e\,\omega \operatorname{tang} F)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N}$ oder

$\left(\omega + \frac{3e\omega}{\cos F}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N}$ unterworfen sein werde, je nachdem man das erste Glied in dem Werthe für N entweder in Factoren oder in Theile zerlegt anwendet; F aber unterliegt dem Irrthume $(\omega \pm 3e\omega \operatorname{tang} F)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}N}$. — Die oberen Zeichen gelten nach dem Perihele, die unteren vor dem Perihele. Substituirt man daher hier $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}N}$ für $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N}$ oder für $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}N}$, so ergiebt sich der Einfluss dieses Irrthums auf die Bestimmung von v, der deshalb sein wird:

$$\frac{bb \operatorname{tang}\psi(1 \pm 5e \operatorname{tang} F)\,\omega}{\lambda rr} \quad \text{oder} \quad \frac{bb \operatorname{tang}\psi(1+3e\sec F)\,\omega}{\lambda rr},$$

falls die Hülfsgrösse u angewendet ist. — Braucht man dagegen F, so wird diese Einwirkung

$$= \frac{bb \operatorname{tang}\psi(1 \pm 3e \operatorname{tang} F)\,\omega}{\lambda rr} = \frac{\omega}{\lambda}\left\{\frac{(1+e\cos v)^2}{\operatorname{tang}\psi^3} \pm \frac{3e\sin v(1+e\cos v)}{\operatorname{tang}\psi^2}\right\}.$$

Der Factor 206 265″ muss hinzugefügt werden, um den Irrthum in Secunden auszudrücken. Offenbar kann dieser Irrthum nur dann als beträchtlich sich ergeben, wenn der Winkel ψ klein, oder e um ein Weniges grösser als 1 ist. Hier folgen die grössten Werthe dieses dritten Ausdrucks für einige Werthe von e bei Benutzung siebenstelliger Decimalen:

e	grösster Irrthum
1,3	0″34
1,2	0,54
1,1	1,31
1,05	3,03
1,01	34,41
1,001	1064,65

Diesem, aus einem irrthümlichen Werthe von F oder u entstandenen Irrthume (31)
muss man noch den in V bestimmten Irrthum hinzufügen, um die ganze Unsicherheit von v zu erhalten.

VIII. Wenn die Gleichung XI im Art. 22 mit Hülfe hyperbolischer Logarithmen aufgelöst, und dabei F als Hülfsgrösse gebraucht wird, so findet man die Wirkung des bei dieser Operation in der Bestimmung von v möglichen Irrthums durch eine ähnliche Betrachtung

$$= \frac{(1+e\cos v)^2\,\omega'}{\operatorname{tang}\psi^3} \pm \frac{3e\sin v(1+e\cos v)\,\omega}{\lambda \operatorname{tang}\psi^2},$$

wobei ω' die grösste Unsicherheit in den Tafeln der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Der zweite Theil dieses Ausdruckes ist identisch mit dem zweiten Theil des in VII behandelten Ausdruckes, der erste Theil aber ist im Verhältnisse von $\lambda\omega' : \omega$ kleiner, als der erste in jenem Ausdrucke, d. h. im Verhältnisse von 1 zu 23, wenn man die Ursinus'sche Tafel allenthalben als bis zur achten Stelle sicher oder $\omega' = 0{,}0000\,0000\,5$ voraussetzen dürfte.

33.

Die oben behuf Bestimmung der wahren Anomalie aus der Zeit*) oder umgekehrt auseinandergesetzten Methoden erlauben daher nicht alle wünschenswerthe Schärfe bei denjenigen Kegelschnitten, deren Excentricität von der Einheit nur wenig verschieden ist, d. h. bei Ellipsen und Hyperbeln, die der Parabel sehr nahe kommen, und es würden mithin die unvermeidlichen Irrthümer, die sich steigern, je mehr die Bahn zur Aehnlichkeit mit der Parabel neigt, zuletzt alle Grenzen überschreiten. Die mehr als siebenstelligen Tafeln würden diesen Irrthum zwar vermindern, ihn aber nicht aufheben und auch nicht verhindern, dass er nicht alles Maass dann überschreitet, sobald die Bahn gar zu nahe an die Parabel herankommt. Ausserdem werden in diesem Falle die obigen Methoden recht beschwerlich, weil ein Theil derselben indirecte, häufig wiederholte Versuche erfordert, und das Widrige dieser Unbequemlichkeit wird durch Anwendung grösserer Tafeln noch vermehrt.

Es wird deshalb sicher nicht überflüssig sein, eine besondere Methode zu bearbeiten, durch welche man in solchem Falle jene Unsicherheit vermeiden, und allein mit Hülfe der gewöhnlichen Tafeln eine hinreichende Genauigkeit erlangen kann.

(32) 34.

Die gewöhnliche Methode, durch welche man jenen Unbequemlichkeiten eine Abhülfe zu schaffen pflegt, stützt sich auf folgende Grundsätze. Es möge

*) Da die Zeit den Factor $a^{\frac{3}{2}}$ oder $b^{\frac{3}{2}}$ enthält, so wird der bei M oder N begangene Irrthum um so erheblicher vermehrt, je grösser $a = \frac{p}{1-ee}$ oder $b = \frac{p}{ee-1}$ wird.

in einer Ellipse oder Hyperbel, deren Excentricität e, halber Parameter p und daher Abstand im Perihel $= \frac{p}{1+e} = q$ ist, der Zeit nach dem Perihele t, die wahre Anomalie v entsprechen; es entspreche ferner derselben Zeit in der Parabel (deren halber Parameter $= 2q$, oder deren Abstand im Perihel $= q$) die wahre Anomalie w, und die Masse μ soll in beiden Fällen entweder vernachlässigt werden oder gleich sein, so hat man offenbar:

$$\int \frac{pp\,\mathrm{d}v}{(1+e\cos v)^2} : \int \frac{4qq\,\mathrm{d}w}{(1+\cos w)^2} = \sqrt{p} : \sqrt{2q},$$

wenn die Integrale mit $v = 0$ und $w = 0$ beginnen, oder

$$\int \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}v}{(1+e\cos v)^2\sqrt{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}w}{(1+\cos w)^2}.$$

Wenn man $\frac{1-e}{1+e}$ mit α, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v$ mit ϑ bezeichnet, so wird das erstere Integral gefunden $=$

$$\sqrt{(1+\alpha)}.\left(\vartheta + \tfrac{1}{3}\vartheta^3(1-2\alpha) - \tfrac{1}{5}\vartheta^5(2\alpha - 3\alpha\alpha) + \tfrac{1}{7}\vartheta^7(3\alpha\alpha - 4\alpha^3) - \text{etc.}\right)$$

das zweite $= \operatorname{tang}\frac{1}{2}w + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}w^3$. Aus dieser Gleichung lässt sich mit Hülfe unendlicher Reihen leicht w aus α und v, oder v aus α und w bestimmen. Statt α kann man auch, falls man das vorzieht, $1-e = \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \delta$ einführen. Da für $\alpha = 0$ oder $\delta = 0$, offenbar $v = w$ wird, so erhalten diese Reihen folgende Form:

$$w = v + \delta v' + \delta\delta v'' + \delta^3 v''' + \text{etc.}$$
$$v = w + \delta w' + \delta\delta w'' + \delta^3 w''' + \text{etc.}$$

wo v', v'', v''' etc. Functionen von v; und w', w'', w''' etc. Functionen von w sind. Ist δ eine sehr kleine Grösse, so werden diese Reihen schnell convergiren und wenige Glieder hinreichen, um w aus v, oder v aus w zu bestimmen. Aus w wird t, oder w aus t auf dieselbe, schon oben für die parabolische Bewegung erklärte Weise gefunden.

35.

Die analytischen Ausdrücke der drei ersten Coefficienten der zweiten Reihe w', w'', w''' hat Bessel entwickelt, und zugleich für die numerischen Werthe der beiden ersten w', w'' eine Tafel hinzugefügt, die nach einzelnen

Graden des Argumentes w construirt ist (von Zach Monatl. Correspondenz, vol. XII, p. 197). Für den ersten Coefficienten w' gab es schon früher eine
(33) von Simpson berechnete Tafel, die dem oben erwähnten Werke von Olbers angehängt ist. In sehr vielen Fällen kann durch diese Methode mit Hülfe der Bessel'schen Tafel die wahre Anomalie aus der Zeit mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden; was noch zu wünschen übrig bleibt, reducirt sich etwa auf folgende Momente:

I. Bei der umgekehrten Aufgabe, nämlich bei Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie, muss man seine Zuflucht zu einer gleichsam indirecten Methode nehmen und w aus v durch Versuche ableiten. Um dieser Unbequemlichkeit zu begegnen, müsste die erstere Reihe auf dieselbe Weise behandelt werden, wie die zweite, und da man leicht sieht, dass $-v'$ dieselbe Function von v ist, als w' von w, so dass eine Tafel für w' nur mit geänderten Zeichen für v' dienen könnte, so würde nur noch eine Tafel für v'' erforderlich sein, damit jede der beiden Aufgaben mit gleicher Schärfe gelöst werden könnte.

II. Es können in der That bisweilen Fälle vorkommen, wo zwar die Excentricität von der Einheit wenig abweicht, so dass die obigen allgemeinen Methoden keine hinreichende Genauigkeit gewähren, wo jedoch diese Abweichung noch zu stark ist, als dass man die Einwirkung der dritten und höheren Potenzen von δ bei der besonderen vorhin dargestellten Methode mit Sicherheit vernachlässigen dürfte. Namentlich bei der hyperbolischen Bewegung sind solche Fälle möglich, wo, man mag nun jene Methoden oder diese anwenden, ein Irrthum von mehren Secunden sich nicht vermeiden lässt, wenn man nur die gewöhnlichen siebenstelligen Tafeln braucht. Mögen nun auch derartige Fälle in der Praxis selten eintreten, so könnte es doch als ein Mangel erscheinen, wenn nicht in allen Fällen die wahre Anomalie innerhalb $0''1$ oder wenigstens $0''2$ sicher sich bestimmen liesse, falls nicht grössere Tafeln benutzt werden, die jedoch bekanntlich ziemlich selten sind. Ich hoffe daher, man werde die Auseinandersetzung einer besonderen Methode nicht für gänzlich überflüssig halten, deren ich mich schon lange bedient habe, und die sich auch in der Hinsicht empfiehlt, weil sie keineswegs auf Excentricitäten beschränkt ist, die nur wenig von der Einheit abweichen, sondern mindestens in dieser Hinsicht eine allgemeine Anwendung erlaubt.

36.

Bevor ich mit Auseinandersetzung dieser Methode beginne, wird es angemessen sein, zu bemerken, dass die Unsicherheit der obigen allgemeinen Methoden bei den zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigenden Bahnen von selbst aufhört, sobald E oder F zu einer beträchtlichen Grösse anwachsen, was zwar erst in grossen Entfernungen von der Sonne Statt findet. Um dies zu zeigen, wollen wir den grössten in der Ellipse möglichen Irrthum, den wir im Art. 32, IV.

$$= \frac{3\,\omega\, e\, a \sin v}{\lambda r} \,.\, 206\,265''$$

fanden, so ausdrücken

$$\frac{3\,\omega\, e \sqrt{(1-ee)}\,.\sin E}{\lambda(1-e\cos E)^2} \,.\, 206\,265'',$$

woraus von selbst erhellt, dass der Irrthum stets in enge Grenzen eingeschlossen (34) ist, sobald E einen beträchtlichen Werth erreicht, oder sobald $\cos E$ sich von der Einheit mehr entfernt, wie gross auch die Excentricität sein möge. Dies wird noch deutlicher durch die folgende Tafel erscheinen, in welcher ich den grössten numerischen Werth jener Formel für einige bestimmte Werthe (mit sieben Decimalen) berechnet habe:

$E = 10^0$	Grösster Irrthum $= 3''04$
20	0,76
30	0,34
40	0,19
50	0,12
60	0,08

Auf ähnliche Weise verhält sich die Sache in der Hyperbel, wie sogleich klar wird, wenn der in Art. 32, VII gegebene Ausdruck unter die Form gebracht wird

$$\frac{\omega \cos F(\cos F + 3\,e \sin F)\sqrt{(ee-1)}}{\lambda(e-\cos F)^2}\; 206\,265''.$$

Die grössten Werthe dieses Ausdruckes für einige bestimmte Werthe von F zeigt folgende Tafel:

F	u		Grösster Irrthum
10^0	1,192	0,839	8″66
20	1,428	0,700	1,38
30	1,732	0,577	0,47
40	2,144	0,466	0,22
50	2,747	0,364	0,11
60	3,732	0,268	0,06
70	5,671	0,176	0,02

So oft daher E oder F über 40^0 oder 50^0 hinausgeht (ein Fall der jedoch in wenig von der Parabel verschiedenen Bahnen nicht leicht vorkommen wird, weil die in solchen Bahnen einherziehenden Himmelskörper in so grossen Entfernungen von der Sonne sich meistens unserem Blicke entziehen), so wird kein Grund zur Verlassung der allgemeinen Methode vorliegen. Uebrigens würden auch in einem solchen Falle die im Art. 34 behandelten Reihen zu langsam convergiren. Es kann also keineswegs als ein Mangel der jetzt auseinanderzusetzenden Methode gelten, wenn sie vorzugsweise solchen Fällen angepasst ist, wo E oder F mässige Werthe nicht überschreiten.

37.

(35) Ich nehme die bei der elliptischen Bewegung zwischen der excentrischen Anomalie und der Zeit bestehende Gleichung

$$E - e\sin E = \frac{kt\sqrt{(1+\mu)}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

wieder vor, wobei E in Theilen des Radius ausgedrückt sein soll. Den Factor $\sqrt{(1+\mu)}$ will ich von jetzt an vernachlässigen, da, wenn je ein Fall eintreten sollte, wo man seine Berechnung in der Gewalt hätte und solche der Mühe werth sein sollte, das Zeichen t nicht die Zeit selbst nach dem Perihele, sondern diese Zeit durch $\sqrt{(1+\mu)}$ multiplicirt ausdrücken müsste.

Ich setze ferner den Abstand im Perihele $= q$ und führe für E und für $\sin E$ die Grössen $E - \sin E$ und $E - \frac{1}{10}(E - \sin E) = \frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E$ ein.

Den Grund, weshalb ich vorzugsweise diese Bezeichnung wähle, wird der aufmerksame Leser von selbst aus dem Nachfolgenden entnehmen. Auf diese Weise nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$(1-e)\left(\tfrac{9}{10}E+\tfrac{1}{10}\sin E\right)+\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{9}{10}e\right)(E-\sin E)=kt\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}}$$

So lange E als eine kleine Grösse der ersten Ordnung angesehen wird, so wird $\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E = E-\frac{1}{60}E^3+\frac{1}{1200}E^5-$ etc. eine Grösse der ersten Ordnung sein, dagegen $E-\sin E=\frac{1}{6}E^3-\frac{1}{120}E^5+\frac{1}{5040}E^7-$ etc. eine Grösse der dritten Ordnung. Setzt man daher

$$\frac{6(E-\sin E)}{\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E}=4A,\quad \frac{\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E}{2\sqrt{A}}=B,$$

so wird $4A=E^2-\frac{1}{30}E^4-\frac{1}{5040}E^6-$ etc. eine Grösse der zweiten Ordnung und $B=1+\frac{3}{2800}E^4-$ etc. von der Einheit um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden sein. Unsere Gleichung wird daher:

$$B\left(2(1-e)A^{\frac{1}{2}}+\tfrac{2}{15}(1+9e)A^{\frac{3}{2}}\right)=kt\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Durch die gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln kann man zwar $\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E$ mit hinreichender Genauigkeit berechnen, nicht aber $E-\sin E$, sobald E ein kleiner Winkel ist, und es können mithin auf diesem Wege die Grössen A und B nicht hinreichend genau bestimmt werden. Dieser Schwierigkeit würde aber eine besondere Tafel Abhülfe schaffen, welcher man mit dem Argumente E entweder B oder den $\log B$ entnehmen könnte. Die zur Construction einer solchen Tafel nothwendigen Hülfsmittel werden sich jedem auch nur mittelmässig in der Analysis Bewanderten leicht darbieten. Mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{9E+\sin E}{20B}=\sqrt{A}$$

lässt auch $\sqrt{A}$ und sodann durch Formel [1] t mit aller wünschenswerthen Schärfe sich bestimmen.

Hier folgt ein Probestück einer solchen Tafel, welche wenigstens die (36)
langsame Zunahme des $\log B$ zeigen wird; es würde überflüssig sein, diese Tafel in grösserer Ausdehnung zu bearbeiten, denn weiter unten will ich Tafeln von einer weit bequemeren Form beschreiben:

E	$\log B$	E	$\log B$	E	$\log B$
0^0	0,000 0000	25^0	0,000 0168	50^0	0,000 2675
5	00	30	0349	55	3910
10	04	35	0645	60	5526
15	22	40	1099		
20	69	45	1758		

38.

Es wird nicht nutzlos sein, das im vorhergehenden Artikel Vorgetragene durch ein Beispiel zu erläutern.

Die wahre Anomalie angenommen zu $= 100^0$, die Excentricität $=$ 0,967 64567, $\log q = 9{,}765\,6500$. Die Rechnung für E, B, A und t ist also:

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \ldots\ldots 0{,}076\,1865$

$\log \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \ldots\ldots 9{,}107\,9927$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} E \ldots\ldots 9{,}184\,1792$, mithin $\frac{1}{2} E = 8^0\, 41'\, 19''\, 32$ und $E = 17^0\, 22'\, 38''\, 64$. Diesem Werthe von E entspricht der $\log B = 0{,}000\,0040$; ferner findet sich in Theilen des radius $E = 0{,}303\,2928$, $\sin E = 0{,}298\,6643$, und daher $\frac{9}{20} E + \frac{1}{20} \sin E = 0{,}151\,4150$, dessen $\log = 9{,}180\,1689$ und daher $\log A^{\frac{1}{2}} =$ 9,180 1649. Hieraus wird mittelst Formel [1] des vorhergehenden Artikels abgeleitet

$$\log \frac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{(1-e)}} \ldots\ldots 2{,}458\,9614 \qquad \log \frac{2B(1+9e)}{15k}\left(\frac{q}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots 3{,}760\,1038$$

$$\log A^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}180\,1649 \qquad \log A^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7{,}540\,4947$$

$$\log 43{,}56386 \quad = 1{,}639\,1263 \qquad \log 19{,}98014 \quad = 1{,}300\,5985$$

$$\begin{array}{r} 19{,}98014 \\ \hline 63{,}54400 = t \end{array}$$

Behandelt man dasselbe Beispiel nach der gewöhnlichen Methode, so findet sich $e \sin E$ in Secunden $= 59610''\, 79 = 16^0\, 33'\, 30''\, 79$ und daher die mittlere Anomalie $= 0^0\, 49'\, 7''\, 85 = 2947''\, 85$. Hieraus und aus $\log k\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} =$ 1,666 4302 wird t abgeleitet $= 63{,}54410$. Der Unterschied, der hier nur der

$\frac{1}{10000}$ Theil eines Tages ist, kann leicht, wenn die Irrthümer conspiriren, um (37)
das Drei- oder Vierfache grösser herauskommen.

Uebrigens sieht man, dass allein mit Hülfe einer solchen Tafel für $\log B$ auch die umgekehrte Aufgabe in aller Schärfe sich lösen lässt, wenn man E durch wiederholte Versuche bestimmt, so dass der daraus berechnete Werth von t mit der Voraussetzung übereinkommt. Diese Operation würde jedoch sehr beschwerlich sein, weshalb wir jetzt zeigen wollen, auf welche Weise man eine Hülfstafel viel bequemer einrichten, alle vage Versuche überhaupt vermeiden und die ganze Rechnung auf eine durchaus concinne und rasche Zahlendarlegung zurückführen kann, die nichts zu wünschen übrig lässt.

39.

Offenbar liesse sich etwa die Hälfte der behuf jener Versuche erforderlichen Arbeit sparen, wenn man eine derartig eingerichtete Tafel besässe, dass daraus der $\log B$ unmittelbar mit dem Argumente A zu entnehmen wäre. Dann blieben drei Operationen übrig. Als erste eine indirecte, nämlich die Bestimmung von A so, dass es der Gleichung [1] Art. 37 Genüge thut; als zweite, die Bestimmung von E aus A und B, welche direct, entweder aus der Gleichung $E = 2B\,(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}A^{\frac{3}{2}})$, oder aus $\sin E = 2B\,(A^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}A^{\frac{3}{2}})$ geschieht; als dritte, die Bestimmung von v aus E mittelst Gleichung VII, Art. 8. Die erste Operation werde ich auf eine rasche und von vagen Versuchen freie Berechnungsweise zurückführen; die zweite und dritte aber werde ich in eine einzige zusammenziehen, indem ich unserer Tafel eine neue Grösse C einfüge, wodurch wir E überhaupt nicht nöthig haben, und zugleich für den radius vector eine elegante und bequeme Formel erhalten. Ich werde das Einzelne in seiner Ordnung verfolgen.

Zuerst forme ich die Gleichung [1] so um, dass man die Barker'sche Tafel zu ihrer Auflösung benutzen kann. Zu diesem Zwecke setze ich:

$$A^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w \sqrt{\frac{5-5e}{1+9e}},$$

woraus man erhält:

$$75 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w + 25 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w^3 = \frac{75kt\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{9}{5}e)}}{2Bq^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha t}{B},$$

wobei die Constante $\frac{75k\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{9}{5}e)}}{2q^{\frac{3}{2}}}$ mit α bezeichnet ist. Wäre daher B bekannt, so würde man w sofort aus der Barker'schen Tafel nehmen können, wo sich die wahre Anomalie findet, der die mittlere Bewegung $\frac{\alpha t}{B}$ entspricht. Aus w wird A abgeleitet durch die Formel $A=\beta \operatorname{tang} \frac{1}{2}w^2$, wo die Constante $\frac{5-5e}{1+9e}$ mit β bezeichnet ist. Wenn nun auch B erst durch A mittelst
(38) unserer Hülfstafel bekannt wird, so lässt sich doch wegen seines sehr kleinen Unterschiedes von der Einheit voraussehen, dass w und A nur mit einem sehr kleinen Fehler behaftet herauskommen können, wenn im Anfange der Divisor B gänzlich vernachlässigt wird. Bestimmt man daher zuerst nur oberflächlich w und A und setzt dabei $B=1$, so wird man mit diesem genäherten Werthe von A aus unserer Hülfstafel die Grösse B finden, mit welcher man dieselbe Berechnung genauer wiederholt. Gemeiniglich wird dem so verbesserten Werthe von A ganz derselbe Werth von B entsprechen, der bei der ersten Annäherung gefunden war, so dass, — ausgenommen in den Fällen, wo der Werth von E schon recht beträchtlich war, — eine neue Wiederholung der Operation überflüssig erscheint. Auch wird es wohl kaum der Bemerkung bedürfen, dass falls vielleicht schon anfänglich ein genäherter Werth von B anderswoher bekannt geworden ist (was stets geschieht, wenn bei der Berechnung von mehren, nicht weit von einander entfernten Orten, der eine oder der andere schon seine Erledigung gefunden hat), man es vorziehen wird, diesen sogleich bei der ersten Annäherung zu benutzen. Auf solche Weise wird ein geschickter Rechner sehr häufig nicht einmal eine einzige Wiederholung der Rechnung nöthig haben. Diese äusserst schnelle Annäherung habe ich dadurch erlangt, dass B von Eins nur um eine Differenz der vierten Ordnung sich entfernt, die überdies mit einem sehr kleinen numerischen Coefficienten multiplicirt ist. Man sieht, wie jener Vortheil schon dadurch vorbereitet ist, dass wir die Grössen $E-\sin E$, $\frac{9}{10}E+\frac{1}{10}\sin E$ anstatt der Grössen E und $\sin E$ eingeführt haben.

40.

Da zur dritten Operation, nämlich zur Bestimmung der wahren Anomalie, der Winkel E selbst nicht erforderlich ist, sondern nur $\operatorname{tang}\frac{1}{2}E$ oder vielmehr $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}E$, so hätte jene Operation mit der zweiten bequem verbunden werden können, wenn unsere Tafel unmittelbar den Logarithmus der Grösse $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}E}{\sqrt{A}}$ lieferte, die von Eins um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist. Ich will jedoch lieber unsere Tafel etwas anders einrichten, um durch eine kleine Ausdehnung die Interpolation doch noch viel bequemer zu erhalten. Schreibt man der Kürze wegen T für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}E^2$, so wird der im Art. 37 behandelte Werth von A, $\frac{15(E-\sin E)}{9E+\sin E}$ leicht umgeformt in

$$A=\frac{T-\frac{6}{5}T^2+\frac{9}{7}T^3-\frac{12}{9}T^4+\frac{15}{11}T^5-\text{etc.}}{1-\frac{6}{15}T+\frac{7}{25}T^2-\frac{8}{35}T^3+\frac{9}{45}T^4-\text{etc.}}$$

wo das Gesetz der Progression klar ist. Hieraus wird durch Umkehrung der Reihen abgeleitet:

$$\frac{A}{T}=1-\frac{4}{5}A+\frac{8}{175}A^2+\frac{8}{525}A^3+\frac{1896}{336875}A^4+\frac{28744}{13138125}A^5+\text{etc.}$$

Setzt man also $\frac{A}{T}=1-\frac{4}{5}A+C$, so wird C eine Grösse der vierten Ordnung (39) sein, durch deren Aufnahme in unsere Tafel, wir sogleich von A auf v mittelst der Formel:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{A}{1-\frac{4}{5}A+C}}=\frac{\gamma\operatorname{tang}\frac{1}{2}w}{\sqrt{(1-\frac{4}{5}A+C)}}$$

übergehen können, wobei ich durch γ die Constante $\sqrt{\frac{5+5e}{1+9e}}$ bezeichne. Auf diese Weise gewinnen wir zugleich eine sehr bequeme Berechnung für den radius vector. Es wird nämlich (Art. 8, VI)

$$r=\frac{q\cos\frac{1}{2}E^2}{\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{q}{(1+T)\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{(1-\frac{4}{5}A+C)q}{(1+\frac{1}{5}A+C)\cos\frac{1}{2}v^2}$$

41.

Jetzt erübrigt nur noch die Zurückführung der umgekehrten Aufgabe (nämlich die Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie) auf eine raschere Berechnungsart. Zu diesem Zwecke will ich der Tafel eine neue Columne für T hinzufügen. Es möge daher zuerst T aus v mittelst der Formel $T = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v^2$ berechnet werden; sodann wird aus der Tafel mit dem Argumente T sowohl A, als $\log B$ entnommen, oder (was genauer, ja auch bequemer ist) C und $\log B$ und hieraus A nach der Formel $A = \frac{(1+C)T}{1+\frac{4}{5}T}$; zuletzt wird aus A und B die Grösse t mittelst der Formel [1] Art. 37 bestimmt. Will man auch hier die Barker'sche Tafel zu Hülfe nehmen (was jedoch bei dieser umgekehrten Aufgabe die Rechnung weniger erleichtert) so ist es nicht erforderlich, auf A Rücksicht zu nehmen, sondern man erhält sofort

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} v}{\gamma} \sqrt{\frac{1+C}{1+\frac{4}{5}T}}$$

und hieraus die Zeit t, wenn man die der wahren Anomalie w in der Barker'schen Tafel entsprechende mittlere Bewegung mit $\frac{B}{\alpha}$ multiplicirt.

42.

Eine Tafel, wie solche in dem Obigen geschildert ist, habe ich in einer schicklichen Ausdehnung construirt und sie diesem Werke angefügt (Tafel I). Auf die Ellipse bezieht sich allein der erstere Theil; den zweiten, die hyperbolische Bewegung umfassenden Theil, will ich weiter unten erklären. Das Argument der Tafel, welches die Grösse A ist, schreitet durch einzelne Tausend-
(40) theile von 0 bis 0,300 fort; es folgen $\log B$ und C, welche Grössen man als in 10 Milliontheilen, oder als zu sieben Decimalen ausgedrückt ansehen muss, denn die ersten Ziffern, die den bezeichnenden Zahlen vorangehen, sind weggelassen. Die vierte Columne endlich enthält die Grösse T erst auf fünf, dann auf sechs Stellen berechnet, eine Genauigkeit die völlig

ausreicht, da diese Columne nur zu dem Zwecke erforderlich ist, um die dem Argumente T entsprechenden Werthe von $\log B$ und C zu erhalten, falls man nach Anleitung des vorhergehenden Artikels t aus v bestimmen will. Da das umgekehrte Problem (nämlich die Bestimmung von v und r aus t) sehr viel häufiger vorkommt und überall ohne Hülfe der Grösse T gelöst wird, so zog ich vor, lieber die Grösse A zum Argumente der Tafel zu wählen, als T, welches sonst fast ein ebenso passendes Argument gewesen sein und selbst die Construction der Tafel noch etwas erleichtert haben würde. Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass alle Zahlen der Tafel ursprünglich bis auf zehn Stellen berechnet worden sind, und dass daher die hier beibehaltenen sieben Stellen allenthalben volles Zutrauen verdienen. Ich kann mich aber bei der für diese Arbeit benutzten analytischen Methode hier nicht aufhalten, da deren vollständige Entwickelung zu sehr von dem abführen würde, was dies Werk darstellen soll. Uebrigens reicht die der Tafel gegebene Ausdehnung für alle Fälle vollkommen hin, wo es vortheilhaft ist, die oben auseinandergesetzte Methode zu befolgen, da man, wie vorhin gezeigt, sich bequemer Weise der künstlichen Methoden enthalten kann, wenn A die Grenze von 0,03 überschreitet, dem dann $T = 0{,}392\,374$, oder $E = 64^0\,7'$ entspricht.

43.

Zur mehren Erläuterung der vorhergehenden Untersuchungen wollen wir ein Beispiel der vollständigen Berechnung der wahren Anomalie und des radius vector aus der Zeit hinzufügen, und zu diesem Ende die Zahlen des Art. 38 wieder vornehmen. Wir haben also $e = 0{,}967\,64567$; $\log q = 9{,}765\,6500$; $t = 63{,}544\,00$, woraus man zuerst die Constanten ableitet: $\log \alpha = 0{,}305\,2357$; $\log \beta = 8{,}221\,7364$; $\log \gamma = 0{,}002\,8755$.

Hiernach ist $\log \alpha t = 2{,}108\,3102$, dem in der Barker'schen Tafel der genäherte Werth $w = 99^0\,6'$ entspricht, woraus $A = 0{,}022\,923$ folgt, und aus unserer Tafel $\log B = 0{,}000\,0040$. Also wird das verbesserte Argument, mit welchem man in die Barker'sche Tafel einzugehen hat $= \log \frac{\alpha t}{B} = 2{,}108\,3062$, dem $w = 99^0\,6'\,13''\,14$ entspricht. — Dann steht die weitere Rechnung so:

(41)

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w^2 \ldots 0{,}138\,5934$

$\log \beta \ldots\ldots\ldots 8{,}221\,7364$

$\log A \ldots\ldots\ldots 8{,}360\,3298$

$A = 0{,}022\,92608$

hieraus $\log B$ ganz wie oben;

$C = 0{,}000\,0242$

$1 - \frac{4}{5}A + C = 0{,}981\,6833$

$1 + \frac{1}{5}A + C = 1{,}004\,6094$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w \ldots\ldots\ldots 0{,}069\,2967$

$\log \gamma \ldots\ldots\ldots 0{,}002\,8755$

$\frac{1}{2}$ Comp. $\log (1 - \frac{4}{5}A + C) \ldots 0{,}004\,0143$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \ldots\ldots\ldots 0{,}076\,1865$

$\frac{1}{2} v = 50^{0}\,0'\,0''$

$v = 100^{0}\,0'\,0''$

$\log q \ldots\ldots\ldots 9{,}765\,6500$

2 Comp. $\log \cos \frac{1}{2} v \ldots\ldots\ldots 0{,}383\,8650$

$\log (1 - \frac{4}{5}A + C) \ldots\ldots\ldots 9{,}991\,9714$

Comp. $\log (1 + \frac{1}{5}A + C) \ldots 9{,}998\,0028$

$\log r \ldots\ldots\ldots 0{,}139\,4892$

Wenn bei dieser Berechnung der Factor B gänzlich vernachlässigt worden wäre, so würde die wahre Anomalie nur mit dem kleinen Irrthum $0''1$ (zu gross) behaftet herausgekommen sein.

44.

Die hyperbolische Bewegung kann ich um so kürzer absolviren, als dieselbe der oben für die elliptische Bewegung vorgetragenen Methode ganz analog zu behandeln ist. Die Gleichung zwischen der Zeit t und der Hülfsgrösse u lässt sich auf folgende Form bringen:

$$(e-1)\left(\tfrac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\tfrac{9}{10}\log u\right)+\left(\tfrac{1}{10}+\tfrac{9}{10}e\right)\left(\tfrac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right)=kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}},$$

wo die Logarithmen hyperbolische sind, und $\frac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{9}{10}\log u$ eine Grösse der ersten Ordnung, $\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u$ eine Grösse der dritten Ordnung, sobald $\log u$ als eine kleine Grösse der ersten Ordnung betrachtet wird. Setzt man also

$$\frac{6\left(\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right)}{\frac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{9}{10}\log u}=4A,\quad \frac{\frac{1}{20}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{9}{10}\log u}{2\sqrt{A}}=B,$$

so wird A eine Grösse der zweiten Ordnung sein, B aber von der Einheit um eine Differenz der vierten Ordnung verschieden. Unsere Gleichung erhält dann folgende Form:

$$B\left(2\,(e-1)\,A^{\frac{1}{2}}+\tfrac{2}{15}(1+9\,e)\,A^{\frac{3}{2}}\right)=kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

welche der Gleichung [1] des Art. 37 ganz analog ist. Setzt man sodann ferner $\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2=T$, so wird T von der zweiten Ordnung sein, und durch (42)
die Methode der unendlichen Reihen gefunden werden:

$$\frac{A}{T}=1+\tfrac{4}{5}A+\tfrac{8}{175}A^2-\tfrac{8}{525}A^3+\tfrac{1896}{336875}A^4-\tfrac{28744}{13138125}A^5+\text{etc.}$$

Deshalb wird, wenn man $\frac{A}{T}=1+\frac{4}{5}A+C$ setzt, C eine Grösse der vierten Ordnung und $A=\dfrac{(1+C)\,T}{1-\frac{4}{5}T}$ sein. Endlich folgt für den radius vector aus der Gleichung VII Art. 21 leicht

$$r=\frac{q}{(1-T)\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{(1+\frac{4}{5}A+C)\,q}{(1-\frac{1}{5}A+C)\cos\frac{1}{2}v^2}.$$

45.

Der nachfolgende Theil der ersten, diesem Werke angefügten Tafel bezieht sich, wie wir schon oben erinnert haben, auf die hyperbolische Bewegung und liefert für das Argument A (das beiden Theilen der Tafel gemeinsam ist) den Logarithmen von B und die Grösse C auf sieben Decimalstellen (wobei die vorangehenden Ziffern weggelassen sind), die Grösse T aber auf fünf und dann auf sechs Stellen. Dieser Theil ist ganz wie der frühere bis auf $A=0{,}300$ ausgedehnt, dem ein $T=0{,}241\,207$, $u=2{,}930$ oder $=0{,}341$, $F=\pm 52^\circ\,19'$ entspricht. Eine weitere Ausdehnung wäre überflüssig gewesen (Art. 36).

Hier folgt die Anordnung für die Rechnung sowohl zur Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie als umgekehrt. Bei ersterer Aufgabe wird T durch die Formel $T=\frac{e-1}{e+1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^2$ erhalten; aus T giebt unsere Tafel

$\log B$ und C, womit $A = \frac{(1+C)T}{1-\frac{4}{5}T}$. Hieraus endlich wird mittelst der Formel [2] des vorhergehenden Artikels t gefunden.

Bei letzterer Aufgabe werden zuerst die Logarithmen der Constanten

$$\alpha = \frac{75k\sqrt{(\frac{1}{5}+\frac{9}{5}e)}}{2q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\beta = \frac{5e-5}{1+9e}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{5e+5}{1+9e}}$$

berechnet. Dann wird A aus t ganz in der Weise wie bei der elliptischen Bewegung bestimmt, nämlich so, dass der mittleren Bewegung $\frac{\alpha t}{B}$ in der Barker'schen Tafel die wahre Anomalie w entspricht und $A = \beta \operatorname{tang} \frac{1}{2}w^2$ wird; wobei freilich zuerst ein genäherter Werth für A (unter Vernachlässigung oder, wenn dazu Hülfsmittel vorhanden, unter Schätzung des Factors B) berechnet werden muss. Hieraus giebt dann unsere Tafel einen genäherten Werth von B, mit welchem man die Operation wiederholt. Der solchergestalt für B sich ergebende neue Werth wird kaum jemals einer merklichen Verbesserung bedürfen und daher keine Wiederholung der Rechnung nöthig sein. Nach Ver-
(43) besserung des Werths von A wird C aus der Tafel genommen, wodurch man dann hat:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}v = \frac{\gamma \operatorname{tang} \frac{1}{2}w}{\sqrt{(1+\frac{4}{5}A+C)}}, \quad r = \frac{(1+\frac{4}{5}A+C)q}{(1-\frac{1}{5}A+C)\cos\frac{1}{2}v^2}.$$

Hieraus sieht man, dass unter den Formeln für die elliptische und hyperbolische Bewegung nur der Unterschied besteht, dass β, A und T in der hyperbolischen Bewegung als negative Grössen behandelt werden.

46.

Auch die hyperbolische Bewegung wollen wir durch einige Beispiele, wozu wir die Zahlen den Artikeln 23 und 26 entnehmen, erläutern.

I. Gegeben $e = 1{,}261\,8820$; $\log q = 0{,}020\,1657$; $v = 18^\circ\,51'\,0''$. Gesucht t. Man hat

$2 \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$	8,440 2018	$\log T$	7,503 8375
$\log \frac{e-1}{e+1}$	9,063 6357	$\log 1 + C$	0,000 0002
		$\text{C.} \log (1 - \frac{4}{5} T)$	0,001 1099
$\log T$	7,503 8375	$\log A$	7,504 9476

$$T = 0{,}003\,19034$$
$$\log B = 0{,}000\,0001$$
$$C = 0{,}000\,0005$$

$\log \frac{2 B q^{\frac{3}{2}}}{k \sqrt{(e-1)}}$	2,386 6444	$\log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{e-1}\right)^{\frac{3}{2}}$	2,884 3582
$\log A^{\frac{1}{2}}$	8,752 4738	$\log A^{\frac{3}{2}}$	6,257 4214
$\log 13{,}77584$	$= 1{,}139\,1182$	$\log 0{,}138605$	$= 9{,}141\,7796$

$$\begin{array}{r} 13{,}77584 \\ 0{,}13861 \\ \hline 13{,}91445 = t. \end{array}$$

II. Wenn e und q wie vorher bleiben, t gegeben ist $= 65{,}412\,36$, und v und r gesucht werden, so findet man die Logarithmen der Constanten

$$\log \alpha = 9{,}975\,8345$$
$$\log \beta = 9{,}025\,1649$$
$$\log \gamma = 9{,}980\,7646.$$

Ferner ergiebt sich $\log \alpha t = 1{,}791\,4943$, und so durch die Barker'sche Tafel der genäherte Werth für $w = 70^\circ\,31'\,44''$, woraus $A = 0{,}052\,983$. Diesem A entspricht in unserer Tafel $\log B = 0{,}000\,0207$; daher $\log \frac{\alpha t}{B} = 1{,}791\,4736$ und der verbesserte Werth von $w = 70^\circ\,31'\,36''\,86$. Im Uebrigen steht die Rechnung so:

(44)

$2\log\tan\frac{1}{2}w$	9,698 9398	$\log\tan\frac{1}{2}w$	9,849 4699
$\log\beta$	9,025 1649	$\log\gamma$	9,980 7646
$\log A$	8,724 1047	$\frac{1}{2}\,\mathrm{C.}\log(1+\frac{4}{5}A+C)$	9,990 9602
$A\ =$	0,052 97911	$\log\tan\frac{1}{2}v$	9,821 1947
$\log B$ wie vorher,		$\frac{1}{2}v\ =$	$33^\circ\,31'\,30''\,02$
$C\ =$	0,000 1252	$v\ =$	67 3 0,04
$1+\frac{4}{5}A+C=$	1,042 5085	$\log q$	0,020 1657
$1-\frac{1}{5}A+C=$	0,989 5294	$2\,\mathrm{C.}\log\cos\frac{1}{2}v$	0,158 0378
		$\log(1+\frac{4}{5}A+C)$	0,018 0796
		$\mathrm{C.}\log(1-\frac{1}{5}A+C)$	0,004 5713
		$\log r$	0,200 8544

Hierfür hatten wir früher gefunden (Art. 26) $v=67^\circ\,2'\,59''\,78$, $\log r=0{,}200\,8541$, was weniger genau ist, indem eigentlich $v=67^\circ\,3'\,0''\,00$ hätte herauskommen müssen, mit welchem angenommenen Werthe der Werth für t durch grössere Tafeln berechnet worden war.

Zweiter Abschnitt. (45)

Relationen, die einen einzelnen Ort im Raume betreffen.

47.

Im ersten Abschnitte ist über die Bewegung der Himmelskörper in ihren Bahnen gehandelt, ohne dass Rücksicht auf die Lage genommen wäre, welche diese Bahnen im Raume einnehmen. Zur Bestimmung dieser Lage, wodurch man in den Stand gesetzt ist, die Beziehung der Orte eines Himmelskörpers auf irgend welche andere Punkte des Raumes anzugeben, wird offenbar sowohl die Lage der Bahnebene in Beziehung auf irgend eine bekannte Ebene erfordert (z. B. die Ebene der Erdbahn, *Ecliptik*), als die Lage der Apsiden in jener Ebene. Da Obiges am zweckmässigsten auf sphärische Trigonometrie zurückgeführt wird, so wollen wir uns eine, mit beliebigem Halbmesser um die Sonne als Mittelpunkt beschriebene Kugeloberfläche denken, auf der jede durch die Sonne gehende Ebene einen grössten Kreis, jede aus der Sonne gezogene gerade Linie aber einen Punkt zeichnet. Wenn Ebenen und gerade Linien nicht durch die Sonne selbst hindurchführen, so legen wir ihnen parallel Ebenen und gerade Linien durch die Sonne, und stellen uns vor, dass die den Letzteren auf der Kugeloberfläche entsprechenden grössten Kreise und Punkte auch erstere darstellen; auch kann man sich die Kugel mit einem sogenannten unendlich grossen Halbmesser beschrieben denken, auf welcher die parallelen Ebenen und geraden Linien ebenso dargestellt werden.

Fällt daher die Ebene der Bahn nicht mit der Ebene der Ecliptik zusammen, so schneiden sich die jenen Ebenen entsprechenden grössten Kreise (die wir einfach „Bahn“ und „Ecliptik“ nennen wollen) in zwei Punkten, welche *Knoten* heissen. In dem einen Knoten wird der aus der Sonne gesehene Körper aus der südlichen Gegend durch die Ecliptik in die nördliche übergehen, in dem anderen Knoten wird er aus letzterer in die

erstere zurückkehren. Ersterer heisst der aufsteigende, letzterer der niedersteigende Knoten. Die Lage der Knoten in der Ecliptik bezeichnet man durch ihren, nach Ordnung der Zeichen gezählten Abstand vom mittleren Frühlings-Aequinoxe (Länge). Es sei, in Fig. 1, ☊ der aufsteigende Knoten, $A☊B$ ein Theil der Ecliptik, $C☊D$ ein Theil der Bahn; die Bewegung der Erde und des Himmelskörpers mögen in der Richtung von A nach B und von C nach D vor sich gehen, so ist klar, dass der sphärische Winkel, den $☊D$ mit $☊B$ bildet, von $0°$ bis $180°$, aber hierüber nicht hinaus, anwachsen kann, ohne dass ☊ aufhört der aufsteigende Knoten zu sein. Diesen Winkel nennt man die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik. Wenn die Lage der Bahnebene durch die Länge des aufsteigenden Knotens und durch die Neigung der Bahn bestimmt ist, so wird nur noch der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten erfordert. Diesen Abstand zählt man nach der Richtung der Bewegung, und nimmt ihn deshalb negativ oder zwischen $180°$ und $360°$ an, wenn das Perihel von der Ecliptik nach Süden belegen ist. Man merke sich noch die folgenden Ausdrücke: Die Länge eines jeden Punktes in dem Kreise der Bahn, wird von demjenigen Punkte an gezählt, der vom aufsteigenden Knoten ebensoweit
(46) rückwärts in der Bahn absteht, als das Frühlings-Aequinox von demselben Punkte rückwärts in der Ecliptik absteht. Hiernach wird die Länge des Perihels die Summe der Länge des Knotens und des Abstandes des Perihels vom Knoten sein; die wahre Länge des Körpers in der Bahn aber ist $=$ der Summe der wahren Anomalie und der Länge des Perihels. Mittlere Länge endlich nennt man die Summe der mittleren Anomalie und der Länge des Perihels. Dieser letztere Ausdruck kann offenbar nur in elliptischen Bahnen Statt finden.

48.

Um daher den Ort eines Himmelskörpers im Raume für jeden Augenblick angeben zu können, muss man in der elliptischen Bahn Folgendes kennen:

I. Die mittlere Länge für einen bestimmten, an sich willkürlichen Zeitpunkt, den man mit „Epoche“ bezeichnet; mit demselben Namen wird auch bisweilen diese Länge selbst belegt. Gemeiniglich wählt man für die Epoche den Anfang eines Jahres, nämlich den Mittag des ersten Januars in einem

Schaltjahre, oder den Mittag des vorhergehenden 31. Decembers im gemeinen Jahre.

II. Die mittlere Bewegung innerhalb eines gewissen Zeitraumes, z. B. in einem mittleren Sonnentage, oder in 365, $365\frac{1}{4}$, 36525 Tagen.

III. Die halbe grosse Axe, die zwar weggelassen werden könnte, wenn des Körpers Masse entweder bekannt, oder zu vernachlässigen ist, indem sie bereits durch die mittlere Bewegung (Art. 7) gegeben ist; der Bequemlichkeit wegen pflegt jedoch beides stets angegeben zu werden.

IV. Excentricität. V. Länge des Perihels. VI. Länge des aufsteigenden Knotens. VII. Neigung der Bahn.

Diese sieben Momente heissen die *Elemente* der Bewegung des Körpers.

In der Parabel oder Hyperbel vertritt die Zeit des Periheldurchganges die Stelle des ersten Elementes. Anstatt II dient dabei das, was in dieser Art von Kegelschnitten der mittleren täglichen Bewegung analog ist (siehe Art. 19; in der hyperbolischen Bewegung die Grösse $\lambda k b^{-\frac{3}{2}}$ Art. 23). In der Hyperbel können die übrigen Elemente ebenso beibehalten werden, in der Parabel aber, wo die grosse Axe unendlich und die Excentricität $= 1$ ist, wird an Stelle des dritten und vierten Elementes nur der Abstand im Perihele aufgeführt.

49.

Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche wird die Neigung der Bahn, welche ich von 0 bis 180° zähle, nur bis 90° ausgedehnt, und wenn der Winkel der Bahn mit dem Bogen ΩB (Fig. 1) einen rechten Winkel überschreitet, so wird der Winkel der Bahn mit dem Bogen ΩA (der dessen Complement zu 180° ist) als Neigung der Bahn betrachtet. In einem solchen Falle muss man dann hinzufügen, dass die Bewegung *retrograd* ist (gleich (47)
als wenn in unserer Figur $E\Omega F$ einen Theil der Bahn darstellt), um ihn vom andern Falle, wo die Bewegung *direct* genannt wird, zu unterscheiden. Die Länge in der Bahn pflegt dann so gezählt zu werden, dass sie im aufsteigenden Knoten mit der Länge dieses Punktes in der Ecliptik übereinkommt, in der Richtung ΩF aber *abnimmt*; der Anfangspunkt, von welchem die Längen gegen

die Ordnung der Bewegung in der Richtung ☊F gezählt werden, steht also ebenso weit vom ☊ ab, als das Frühlings-Aequinox von demselben ☊ in der Richtung ☊A. Es wird deshalb in diesem Falle die Länge des Perihels gleich sein der um den Abstand des Perihels vom Knoten verminderten Länge des Knotens. Auf diese Weise wird jeder der beiden Sprachgebräuche leicht in den anderen verwandelt, ich ziehe aber den meinigen deshalb vor, weil man sich dabei über die Unterscheidung der directen und rückläufigen Bewegung hinwegsetzen, und in beiden Fällen stets dieselben Formeln anwenden kann, während der gewöhnliche Gebrauch häufig doppelte Rechnungsvorschriften erfordert.

50.

Die einfachste Art, um die Lage irgend eines Punktes an der Oberfläche der Himmelskugel in Beziehung auf die Ecliptik zu bestimmen, ergiebt sich durch seinen Abstand von der Ecliptik (Breite) und durch den Abstand des Punktes, wo die Ecliptik von einem auf sie gefällten Perpendikel geschnitten wird, vom Aequinox (Länge). Die Breite wird von beiden Seiten der Ecliptik an bis zu 90° gezählt, und wird in der nördlichen Region als positiv, in der südlichen als negativ betrachtet. Es mögen daher dem heliocentrischen Orte eines Himmelskörpers, d. h. der Projection einer von der Sonne nach dem Körper auf der Himmelskugel gezogenen geraden Linie, die Länge λ und die Breite β entsprechen. Es sei ferner u die Entfernung des heliocentrischen Orts vom aufsteigenden Knoten (welche das Argument der Breite genannt wird), i die Neigung der Bahn, ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens, so hat man zwischen i, u, β, λ — ☊, welche Grössen Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sind, folgende Relationen, die, wie man sich leicht überzeugt, ohne alle Einschränkung gelten:

$$\text{I.} \quad \operatorname{tang}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tang} u$$
$$\text{II.} \quad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega)$$
$$\text{III.} \quad \sin\beta = \sin i \sin u$$
$$\text{IV.} \quad \cos u = \cos\beta \cos(\lambda - \Omega).$$

Sind daher i und u gegebene Grössen, so wird daraus λ — ☊ mittelst der Gleichung I bestimmt, und sodann β mittelst II oder III, wenn nämlich β sich nicht zu sehr $\pm 90°$ nähert; die Formel IV kann zur Prüfung der

Rechnung dienen. Uebrigens lehren die Formeln I und IV, dass $\lambda - \Omega$ und u immer in demselben Quadranten liegen, so lange i zwischen 0^0 und 90^0 liegt; dagegen gehören $\lambda - \Omega$ und $360^0 - u$ zu denselben Quadranten, sobald i zwischen 90^0 und 180^0 liegt, oder wenn nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche die Bewegung rückläufig ist. Die Zweideutigkeit, welche die Bestim- (48)
mung von $\lambda - \Omega$ aus der Tangente nach Formel I zurücklässt, wird also hierdurch von selbst aufgehoben.

Folgende Formeln leitet man leicht aus Combination der vorhergehenden ab:

$$\text{V.} \quad \sin(u - \lambda + \Omega) = 2\sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{VI.} \quad \sin(u - \lambda + \Omega) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i \sin\beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{VII.} \quad \sin(u - \lambda + \Omega) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i \operatorname{tang}\beta \cos u$$

$$\text{VIII.} \quad \sin(u + \lambda - \Omega) = 2\cos\tfrac{1}{2}i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{IX.} \quad \sin(u + \lambda - \Omega) = \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}i \sin\beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{X.} \quad \sin(u + \lambda - \Omega) = \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}i \operatorname{tang}\beta \cos u.$$

Der Winkel $u - \lambda + \Omega$ (wenn i innerhalb 90^0), oder $u + \lambda - \Omega$ (wenn i über 90^0), heisst gemeiniglich die Reduction auf die Ecliptik; er ist nämlich der Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge λ und der Länge in der Bahn, die nach gewöhnlichem Sprachgebrauche ist: $\Omega \pm u$ (nach dem meinigen $\Omega + u$). Sobald die Neigung der Bahn klein oder wenig von 180^0 verschieden ist, so kann man diese Reduction als eine Grösse der zweiten Ordnung betrachten, und in diesem Falle ist es vorzuziehen, β zuerst durch Formel III und dann λ aus VII oder X zu berechnen, wodurch man grössere Schärfe als mittelst Formel I erlangen kann.

Wenn man ein Perpendikel von dem Orte des Körpers im Raume, auf die Ebene der Ecliptik fällt, so heisst der Abstand des Einschneidepunktes von der Sonne die curtirte Distanz. Bezeichnet man also letztere mit r', den radius vector aber mit r, so hat man

$$\text{XI.} \quad r' = r\cos\beta.$$

51.

Behuf eines Beispiels will ich die in den Artt. 13 und 14 angefangene Berechnung (wozu die Zahlen vom Planeten Juno genommen waren) weiter fortsetzen. Wir fanden oben: wahre Anomalie $= 315^\circ\, 1'\, 23''\, 02$, den Logarithmus des radius vector $= 0{,}325\,9877$; nun sei $i = 13^\circ\, 6'\, 44''\, 10$, Abstand des Perihels vom Knoten $= 241^\circ\, 10'\, 20''\, 57$, und daher $u = 196^\circ\, 11'\, 43''\, 59$; endlich sei $\Omega = 171^\circ\, 7'\, 48''\, 73$. Hieraus erhält man:

$\log \operatorname{tang} u \ldots\ldots 9{,}463\,0573$	$\log \sin(\lambda - \Omega) \ldots\ldots 9{,}434\,8691\, n$
$\log \cos i \ldots\ldots 9{,}988\,5266$	$\log \operatorname{tang} i \ldots\ldots 9{,}367\,2305$
$\log \operatorname{tang}(\lambda - \Omega) \ldots 9{,}451\,5839$	$\log \operatorname{tang} \beta \ldots\ldots 8{,}802\,0996\, n$
$\lambda - \Omega \quad = \quad 195^\circ\, 47'\, 40''\, 25$	$\beta \quad = -3^\circ\, 37'\, 40''\, 02$
$\lambda \quad = \quad 6\;\; 55\;\; 28{,}98$	$\log \cos \beta \ldots\ldots 9{,}999\,1289$
$\log r \ldots\ldots 0{,}325\,9877$	$\log \cos(\lambda - \Omega) \ldots\ldots 9{,}983\,2852\, n$
$\log \cos \beta \ldots\ldots 9{,}999\,1289$	$9{,}982\,4141\, n$
$\log r' \ldots\ldots 0{,}325\,1166$	$\log \cos u \ldots\ldots 9{,}982\,4141\, n.$

(49) Die Rechnung nach den Formeln III und VII würde so stehen:

$\log \sin u \ldots\ldots 9{,}445\,4714\, n$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} i \ldots\ldots 9{,}060\,4259$
$\log \sin i \ldots\ldots 9{,}355\,7570$	$\log \operatorname{tang} \beta \ldots\ldots 8{,}802\,0995\, n$
$\log \sin \beta \ldots\ldots 8{,}801\,2284\, n$	$\log \cos u \ldots\ldots 9{,}982\,4141\, n$
$\beta = -3^\circ\, 37'\, 40''\, 02$	$\log \sin(u - \lambda + \Omega) \ldots 7{,}844\,9395$
	$u - \lambda + \Omega \quad = \quad 0^\circ\, 24'\, 3''\, 34$
	$\lambda - \Omega \quad = \quad 195\;\; 47\;\; 40{,}25.$

52.

Betrachtet man i und u als veränderliche Grössen, so giebt die Differentiation der Gleichung III im Art. 50:

$$\operatorname{cotang} \beta\, d\beta = \operatorname{cotang} i\, d i + \operatorname{cotang} u\, d u, \text{ oder}$$

$$\text{XII.} \quad d\beta = \sin(\lambda - \Omega)\, d i + \sin i \cos(\lambda - \Omega)\, d u.$$

Ebenso erhält man durch Differentiation der Gleichung I:

$$\text{XIII.} \quad d(\lambda - \Omega) = -\operatorname{tang} \beta \cos(\lambda - \Omega)\, d i + \frac{\cos i}{\cos \beta^2}\, d u.$$

Schliesslich folgt aus Differentiation der Gleichung XI:

$\mathrm{d}r' = \cos\beta\,\mathrm{d}r - r\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$, oder

XIV. $\mathrm{d}r' = \cos\beta\,\mathrm{d}r - r\sin\beta\sin(\lambda - \Omega)\,\mathrm{d}i - r\sin\beta\sin i\cos(\lambda - \Omega)\,\mathrm{d}u$.

In dieser letzten Gleichung muss man entweder die Glieder, welche $\mathrm{d}i$ und $\mathrm{d}u$ enthalten, mit $206\,265''$ dividiren, oder die übrigen mit dieser Zahl multipliciren, wenn man die Aenderungen von i und u als in Secunden ausgedrückt annimmt.

53.

Die Lage eines Punktes im Raume wird sehr bequem durch die Abstände bestimmt, welche er von drei, sich einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen einnimmt. Wählt man zu einer dieser Ebenen die Ebene der Ecliptik, und bezeichnet mit z den Abstand des Himmelskörpers von dieser Ebene, der positiv genommen wird im nördlichen, negativ im südlichen Theile, so hat man offenbar $z = r'\operatorname{tang}\beta = r\sin\beta = r\sin i\sin u$. Die beiden übrigen Ebenen, welche ebenfalls als durch die Sonne gelegt gedacht werden, projiciren an der Himmelskugel grösste Kreise, welche die Ecliptik unter rechten Winkeln schneiden, deren Pole daher in der Ecliptik selbst liegen und 90^0 von einander abstehen. Denjenigen Pol einer jeden Ebene, auf dessen Seite die Abstände als positive gezählt werden, nenne ich den **positiven Pol**. Es mögen mithin N und $N + 90^0$ die Längen der positiven Pole bezeichnen, und die Abstände von den ihnen entsprechenden Ebenen sollen beziehungsweise x und y sein. Man hat dann offenbar:

$$x = r'\cos(\lambda - N) = r\cos\beta\cos(\lambda - \Omega)\cos(N - \Omega) + r\cos\beta\sin(\lambda - \Omega)\sin(N - \Omega) \quad (50)$$
$$y = r'\sin(\lambda - N) = r\cos\beta\sin(\lambda - \Omega)\cos(N - \Omega) - r\cos\beta\cos(\lambda - \Omega)\sin(N - \Omega).$$

Diese Werthe gehen über in

$$x = r\cos(N - \Omega)\cos u + r\cos i\sin(N - \Omega)\sin u$$
$$y = r\cos i\cos(N - \Omega)\sin u - r\sin(N - \Omega)\cos u.$$

Wird folglich der positive Pol der Ebene der x in den aufsteigenden Knoten selbst gestellt, so dass $N = \Omega$ ist, so hat man für die Coordinaten x, y, z die sehr einfachen Ausdrücke:

$$x = r\cos u,$$
$$y = r\cos i\sin u,$$
$$z = r\sin i\sin u.$$

Wenn aber diese Voraussetzung nicht Statt findet, so kann man doch den obigen Formeln eine ungefähr ebenso bequeme Gestalt durch Einführung von vier Hülfsgrössen a, b, A, B geben, die so bestimmt werden, dass

$$\begin{aligned}
\cos(N - ☊) &= a \sin A \\
\cos i \sin(N - ☊) &= a \cos A \\
-\sin(N - ☊) &= b \sin B \\
\cos i \cos(N - ☊) &= b \cos B
\end{aligned}$$

(siehe Art. 14, II). Dann ist offenbar

$$\begin{aligned}
x &= r a \sin(u + A) \\
y &= r b \sin(u + B) \\
z &= r \sin i \sin u.
\end{aligned}$$

54.

Die in dem Vorangehenden erklärten Relationen der Bewegung zur Ecliptik bleiben offenbar ganz die nämlichen, wenn an Stelle der Ecliptik irgend eine andere Ebene gesetzt wird, falls nur die Lage der Bahnebene gegen diese Ebene bekannt ist. Jedoch muss man dann die Ausdrücke Länge und Breite weglassen. Es bietet sich also die Aufgabe dar: *Aus der bekannten Lage der Bahnebene und einer anderen neuen Ebene gegen die Ecliptik die Lage der Bahnebene gegen diese neue Ebene herzuleiten.* Es seien $n☊$, $☊☊'$, $n☊'$ Theile grösster Kreise, welche von der Ebene der Ecliptik, von der Bahnebene und von der neuen Ebene an der Himmelskugel projicirt werden (Fig. 2). Damit die Neigung des zweiten Kreises gegen den dritten und der Ort des aufsteigenden Knotens ohne Zweideutigkeit angegeben werden könne, muss im dritten Kreise eine von zwei Richtungen ausgewählt werden, die derjenigen analog ist, welche bei der Ecliptik die Ordnung der Zeichen ist. In unserer Figur soll diese Richtung von n nach $☊'$ gehen. Ausserdem muss von beiden Halbkugeln, welche der Kreis $n☊'$ von einander trennt, die
(51) eine als der nördlichen, die andere als der südlichen Halbkugel analog angenommen werden. Diese Halbkugeln aber sind schon von selbst unterschieden, in soweit stets dasjenige als nördlich angesehen wird, was Jemandem, der in einem Kreise nach Ordnung der Zeichen vorschreitet, zur Rechten liegt (nämlich auf der i n n e r n Kugelfläche, welche unsere Figur vorstellt). In der Figur sind daher

☊, n, ☊′ die aufsteigenden Knoten des zweiten Kreises auf dem ersten, des dritten auf dem ersten, und des zweiten auf dem dritten; $180^0 - n$☊☊′, ☊n☊′, n☊′☊ sind die Neigungen des zweiten gegen den ersten, des dritten gegen den ersten, des zweiten gegen den dritten. Es hängt mithin unsere Aufgabe von der Auflösung eines sphärischen Dreiecks ab, wo aus einer Seite und den anliegenden Winkeln das Uebrige gefunden werden muss. Ich übergehe hier die hinreichend bekannten gewöhnlichen Vorschriften der sphärischen Trigonometrie zur Behandlung dieses Falles, brauche dagegen zur grösseren Bequemlichkeit eine andere Methode, die aus gewissen Gleichungen, welche vergeblich in unseren trigonometrischen Büchern gesucht werden, abgeleitet ist.

Diese Gleichungen, die wir später häufig benutzen werden, sind die folgenden, wobei a, b, c die Seiten und A, B, C die diesen Seiten respective gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks bezeichnen:

$$\text{I.}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}$$

$$\text{III.}\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A}$$

Obgleich ich den Beweis dieser Sätze der Kürze halber hier übergehen muss, so kann doch ein Jeder deren Wahrheit leicht bestätigt finden in Dreiecken, in denen weder die Seiten noch die Winkel über 180^0 hinausgehen. Wenn man die Idee des sphärischen Dreiecks in der grössten Allgemeinheit auffasst, so dass weder Seiten noch Winkel durch irgend welche Grenzen beschränkt werden (was viele ausgezeichnete Vortheile gewährt, jedoch zuvor einiger Erläuterungen bedarf) so können Fälle eintreten, wo in allen vorhergehenden Gleichungen das Zeichen geändert werden muss: weil aber die frühern Zeichen offenbar wiederhergestellt werden, sobald einer der Winkel oder eine der Seiten um 360^0 vermehrt oder vermindert wird, so kann man die oben gebrauchten Zeichen stets sicher beibehalten, es mag nun aus der Seite und den anliegenden Winkeln, oder aus dem Winkel und den anliegenden Seiten das Uebrige bestimmt werden; denn stets gehen aus unseren Formeln entweder für die gesuchten Stücke die Werthe selbst hervor, oder solche, die

von den wahren um 360^0 verschieden, ihnen also gleich geltend sind. Eine vollständigere Erklärung dieses Gegenstandes will ich bis zu einer andern Gelegenheit aufsparen. Dass aber meine Vorschriften, die ich auf jene For-
(52) meln sowohl bei Lösung unserer Aufgabe als bei andern Gelegenheiten gestützt habe, in allen Fällen eine allgemeine Gültigkeit besitzen, liesse sich einstweilen mit Hülfe einer strengen Induction d. h. durch vollständige Aufzählung aller Fälle unschwer erweisen.

55.

Bezeichnet man wie oben die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ecliptik mit Ω, die Neigung mit i; ferner die Länge des aufsteigenden Knotens der neuen Ebene in der Ecliptik mit n, deren Neigung mit ε; den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahn in der neuen Ebene vom aufsteigenden Knoten der neuen Ebene in der Ecliptik (den Bogen $n\Omega'$ in Fig. 2) mit Ω'; die Neigung der Bahn gegen die neue Ebene mit i'; schliesslich den Bogen von Ω bis Ω' nach der Richtung der Bewegung mit Δ; — so werden die Seiten unseres sphärischen Dreiecks $\Omega - n$, Ω', Δ, und die gegenüberstehenden Winkel i', $180^0 - i$, ε. Man hat also nach den Formeln des vorhergehenden Artikels:

$$\sin\tfrac{1}{2}i'\sin\tfrac{1}{2}(\Omega'+\Delta) = \sin\tfrac{1}{2}(\Omega-n)\sin\tfrac{1}{2}(i+\varepsilon)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i'\cos\tfrac{1}{2}(\Omega'+\Delta) = \cos\tfrac{1}{2}(\Omega-n)\sin\tfrac{1}{2}(i-\varepsilon)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\sin\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Delta) = \sin\tfrac{1}{2}(\Omega-n)\cos\tfrac{1}{2}(i+\varepsilon)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i'\cos\tfrac{1}{2}(\Omega'-\Delta) = \cos\tfrac{1}{2}(\Omega-n)\cos\tfrac{1}{2}(i-\varepsilon).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$ und $\sin\frac{1}{2}i'$; die beiden übrigen $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$ und $\cos\frac{1}{2}i'$; aus $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$ und $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$ entwickeln sich Ω' und Δ; aus $\sin\frac{1}{2}i'$ oder $\cos\frac{1}{2}i'$ (deren Uebereinstimmung zur Prüfung der Rechnung dient) ergiebt sich i'. Die Zweideutigkeit, ob $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$ und $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$ zwischen 0 und 180^0, oder zwischen 180^0 und 360^0 zu nehmen ist, wird dadurch gehoben, dass sowohl $\sin\frac{1}{2}i'$ als $\cos\frac{1}{2}i'$ positiv werden müssen, weil der Natur der Sache nach i' innerhalb 180^0 fallen muss.

56.

Ein Beispiel zu den vorhergehenden Vorschriften. Sei $☊ = 172^\circ 28' 13''7$, $i = 34^\circ 38' 1''1$. Sodann sei die neue Ebene dem Aequator parallel und daher $n = 180^\circ$, der Winkel ε (Schiefe der Ecliptik) $= 23^\circ 27' 55''8$, so hat man:

$☊ - n = -\ 7^\circ 31' 46''3$	$\frac{1}{2}(☊ - n) = -\ 3^\circ 45' 53''15$
$i + \varepsilon = 58\ \ 5\ 56{,}9$	$\frac{1}{2}(i + \varepsilon) = 29^\circ\ \ 2\ 58{,}45$
$i - \varepsilon = 11\ 10\ \ 5{,}3$	$\frac{1}{2}(i - \varepsilon) = 5\ 35\ \ 2{,}65$
$\log\sin\frac{1}{2}(☊ - n) \ldots\ldots 8{,}817\,3026\,n$	$\log\cos\frac{1}{2}(☊ - n) \ldots\ldots 9{,}999\,0618$
$\log\sin\frac{1}{2}(i + \varepsilon) \ldots\ldots 9{,}686\,2484$	$\log\sin\frac{1}{2}(i - \varepsilon) \ldots\ldots 8{,}988\,1405$
$\log\cos\frac{1}{2}(i + \varepsilon) \ldots\ldots 9{,}941\,6108$	$\log\cos\frac{1}{2}(i - \varepsilon) \ldots\ldots 9{,}997\,9342.$

Hieraus folgt (53)

$\log\sin\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(☊' + \Delta) \ldots 8{,}503\,5510\,n$	$\log\cos\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(☊' - \Delta) \ldots 8{,}758\,9134\,n$
$\log\sin\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(☊' + \Delta) \ldots 8{,}987\,2023$	$\log\cos\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(☊' - \Delta) \ldots 9{,}996\,9960$
woraus $\frac{1}{2}(☊' + \Delta) = 341^\circ 49' 19''01$	woraus $\frac{1}{2}(☊' - \Delta) + 356^\circ 41' 31''43$
$\log\sin\frac{1}{2}i' \ldots\ldots\ldots 9{,}009\,4368$	$\log\cos\frac{1}{2}i' \ldots\ldots\ldots 9{,}997\,7202.$

Wir erhalten daher $\frac{1}{2}i' = 5^\circ 51' 56''445$; $i' = 11^\circ 43' 52''89$; $☊' = 338^\circ 30' 50''43$; $\Delta = -14^\circ 52' 12''42$.

Uebrigens entspricht der Punkt n an der Himmelskugel offenbar dem Herbstaequinox. Es wird deshalb der Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahn im Aequator vom Frühlings-Aequinox (dessen gerade Aufsteigung) $= 158^\circ 30' 50''43$.

Zur Erläuterung des Art. 53 will ich dieses Beispiel noch weiter fortsetzen und die Formeln für die Coordinaten in Beziehung auf die drei durch die Sonne gelegten Ebenen entwickeln, deren eine dem Aequator parallel sei, während die positiven Pole der beiden übrigen Ebenen in der Rectascension 0° und 90° liegen sollen; die Abstände von diesen Ebenen seien resp. z, x, y. Bezeichnet man nun ausserdem den Abstand des heliocentrischen Orts an der Himmelskugel von den Punkten $☊$ und $☊'$ beziehungsweise mit u und u', so ist $u' = u - \Delta = u + 14^\circ 52' 12''42$; und Dasjenige, was im Art. 53 mit i, $N - ☊$, u ausgedrückt wurde, wird hier sein: i', $180^\circ - ☊'$, u'. So erhält man aus den dort gegebenen Formeln:

$\log a \sin A \ldots\ldots\ 9{,}968\,7197\,n$	$\log b \sin B \ldots\ldots\ 9{,}563\,8058$
$\log a \cos A \ldots\ldots\ 9{,}554\,6380\,n$	$\log b \cos B \ldots\ldots\ 9{,}959\,5519\,n$
also $A = 248^\circ\,55'\,22''97$	also $B = 158^\circ\,5'\,54''97$
$\log a \ldots\ldots\ldots\ 9{,}998\,7923$	$\log b \ldots\ldots\ldots\ 9{,}992\,0848.$

Man hat daher:

$$x = ar\sin(u' + 248^\circ\,55'\,22''97) = ar\sin(u + 263^\circ\,47'\,35''39)$$
$$y = br\sin(u' + 158\quad 5\ 54{,}97) = br\sin(u + 172\ \ 58\quad 7{,}39)$$
$$z = cr\sin u' \qquad\qquad\qquad = cr\sin(u + \ \ 14\ \ 52\ 12{,}42)$$

wo $\log c = \log\sin i' = 9{,}308\,1870$.

Eine andere Auflösung dieses hier behandelten Problems findet man in von Zach, Monatliche Correspondenz, Band IX, S. 385.*)

57.

Es kann mithin der Abstand eines Himmelskörpers von irgend einer durch die Sonne gehenden Ebene auf die Form $kr\sin(v + K)$ zurückgeführt werden, wobei v die wahre Anomalie bezeichnet, und wo k der Sinus der Neigung der Bahn gegen diese Ebene, K der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten der Bahn in derselben Ebene ist. Soweit nun die Lage
(54) der Bahnebene, und der Apsidenlinie in letzterer, sowie die Lage der Ebene, auf welche die Abstände sich beziehen, als constant gelten können, werden auch k und K constant sein. Meist jedoch wird jene Methode in einem solchen Falle benutzt werden, wo, wenn auch die Störungen vernachlässigt werden, welche die erste und zweite Voraussetzung stets etwas afficiren, wenigstens die dritte Voraussetzung unzulässig ist. Letzteres tritt ein, sobald die Abstände auf die Ebene des Aequators bezogen werden, oder auf eine den Aequator unter rechtem Winkel in gegebener Rectascension schneidende Ebene. Denn da die Lage des Aequators wegen Praecession der Aequinoctien und überher wegen der Nutation (wenn von seiner wahren, nicht von seiner mittleren Lage die Rede ist) veränderlich ist, so werden in diesem Falle auch k und K Veränderungen, allerdings langsamen, unterworfen sein. Die Berechnung dieser Veränderungen kann ohne Schwierigkeit durch Differentialformeln bewerkstelligt

*) Vergl. Anhang Seite 53 folgende. *Anmerkung des Uebersetzers.*

werden; der Kürze wegen mag es aber hier genügen, die differentialen Veränderungen von i, $☊'$, Δ anzuführen, in soweit solche von den Aenderungen des $☊ - n$ und des ε abhängen.

$$\mathrm{d}i' = \sin\varepsilon \sin ☊' \,\mathrm{d}(☊ - n) - \cos ☊' \,\mathrm{d}\varepsilon$$
$$\mathrm{d}☊' = \frac{\sin i \cos \Delta}{\sin i'} \mathrm{d}(☊ - n) + \frac{\sin ☊'}{\operatorname{tang} i'} \mathrm{d}\varepsilon$$
$$\mathrm{d}\Delta = \frac{\sin\varepsilon \cos ☊'}{\sin i'} \mathrm{d}(☊ - n) + \frac{\sin ☊'}{\sin i'} \mathrm{d}\varepsilon.$$

Sobald es sich übrigens nur darum handelt, in Beziehung auf solche veränderliche Ebenen mehre Orte eines Himmelskörpers zu berechnen, die innerhalb eines mässigen Zeitraumes (z. B. eines Jahres) liegen, so wird es gemeiniglich am Bequemsten sein, die Grössen a, A, b, B, c, C für zwei Epochen, zwischen welche jene Orte fallen, zu ermitteln, und ihre Veränderungen für die angenommenen einzelnen Zeitpunkte daraus mittelst einfacher Interpolation abzuleiten.

58.

Unsere Formeln für Abstände von gegebenen Ebenen enthalten v und r; und sobald man vorher diese Grössen aus der Zeit bestimmen muss, so kann dadurch ein Theil der Operationen noch abgekürzt, und die Arbeit merklich erleichtert werden. Denn man kann jene Abstände durch eine sehr einfache Formel sofort aus der excentrischen Anomalie in der Ellipse, oder aus der Hülfsgrösse F oder u in der Hyperbel herleiten, so dass es der Berechnung der wahren Anomalie und des radius vector überall nicht bedarf. Es wird nämlich verändert der Ausdruck $kr\sin(v + K)$

I. für die Ellipse (unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Artikels 8) in:

$$ak\cos\varphi\cos K \sin E + ak\sin K(\cos E - e).$$

Bestimmt man also l, L, λ durch folgende Gleichungen:

$$ak\sin K = l\sin L \qquad (55)$$
$$ak\cos\varphi\cos K = l\cos L$$
$$-eak\sin K = -el\sin L = \lambda,$$

so geht dieser Ausdruck über in: $l\sin(E + L) + \lambda$, wo l, L, λ constant sein werden, so lange man k, K, e als constant annehmen darf; wenn Letzteres nicht angeht, so gilt über die Berechnung jener Aenderungen Dasselbe, was im vorhergehenden Artikel bemerkt ist.

Als Beispiel wollen wir die Umformung des im Artikel 56 für x gefundenen Ausdrucks hinzufügen, wo die Länge des Perihels $= 121^\circ 17' 34''4$, $\varphi = 14^\circ 13' 31''97$, $\log a = 0{,}442\,3790$ gesetzt ist. Es wird mithin der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Ecliptik $= 308^\circ 49' 20''7 = u - v$; hieraus $K = 212^\circ 36' 56''09$. Man hat also:

$\log ak$	0,441 1713	$\log l \sin L$	0,172 7600 n
$\log \sin K$	9,731 5887 n	$\log l \cos L$	0,353 1154 n
$\log ak \cos\varphi$	0,427 6456	$L =$	$213^\circ 25' 51''30$
$\log \cos K$	9,925 4698 n	$\log l =$	0,431 6627
		$\log \lambda =$	9,563 2352
		$\lambda =$	+ 0,365 7929.

II. In der Hyperbel geht die Formel $kr \sin(v+K)$ nach Art. 21 über in: $\lambda + \mu \operatorname{tang} F + \nu \operatorname{secans} F$, wenn man dabei setzt: $ebk \sin K = \lambda$, $bk \operatorname{tang}\psi \cos K = \mu$, $-bk \sin K = \nu$; offenbar kann man auch diesen Ausdruck auf die Form bringen $\frac{n \sin(F+N) + \nu}{\cos F}$. — Wenn an Stelle von F die Hülfsgrösse u angewendet ist, so geht der Ausdruck $kr \sin(v+K)$ nach Art. 21 über in: $\alpha + \beta u + \frac{\gamma}{u}$, wo α, β, γ durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$\alpha = \lambda = ebk \sin K$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(\nu + \mu) = -\tfrac{1}{2} ebk \sin(K - \psi)$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\nu - \mu) = -\tfrac{1}{2} ebk \sin(K + \psi).$$

III. In der Parabel, wo die wahre Anomalie aus der Zeit unmittelbar abgeleitet wird, bleibt nichts Anderes übrig, als für den radius vector seinen Werth zu substituiren. Bezeichnet dann q den Abstand im Perihel, so wird der Ausdruck $kr \sin(v+K) = \frac{qk \sin(v+K)}{\cos \frac{1}{2} v^2}$.

59.

Die zur Bestimmung der Abstände von, durch die Sonne gelegten Ebenen gegebenen Vorschriften lassen sich offenbar auch für die Abstände

der Erde anwenden, wobei aber nur die einfachsten Fälle vorzukommen pflegen. — Es seien R der Abstand der Erde von der Sonne, L die heliocentrische Länge der Erde (die von der geocentrischen Länge der Sonne (56)
180^0 verschieden ist) und endlich X, Y, Z die Abstände der Erde von drei Ebenen, die sich in der Sonne unter rechten Winkeln schneiden. Falls nun

I. die Ebene der Z die Ecliptik selbst ist, und die Länge der Pole der übrigen Ebenen, von welchen die Abstände X und Y sind, resp. mit N und $N + 90^0$ bezeichnet werden, so ist

$$X = R\cos(L - N); \quad Y = R\sin(L - N); \quad Z = 0.$$

II. Wenn die Ebene der Z dem Aequator parallel ist, und die Rectascensionen der Pole der übrigen Ebenen, von welchen die Abstände X und Y sind, resp. zu 0 und 90^0 angenommen werden, so hat man, wenn ε die Schiefe der Ecliptik bezeichnet:

$$X = R\cos L; \quad Y = R\cos\varepsilon\sin L; \quad Z = R\sin\varepsilon\sin L.$$

Die Herausgeber der neuesten Sonnentafeln, v. Zach und de Lambre, haben angefangen, auch auf die Breite der Sonne Rücksicht zu nehmen, eine Grösse, die von den Störungen der übrigen Planeten und des Mondes herrührt und kaum eine einzige Secunde erreichen kann. Bezeichnet nun B die heliocentrische Breite der Erde, welche stets der Breite der Sonne gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt ist, so hat man

im Falle I.	im Falle II.
$X = R\cos B\cos(L - N)$	$X = R\cos B\cos L$
$Y = R\cos B\sin(L - N)$	$Y = R\cos B\cos\varepsilon\sin L - R\sin B\sin\varepsilon$
$Z = R\sin B$	$Z = R\cos B\sin\varepsilon\sin L + R\sin B\cos\varepsilon.$

Für $\cos B$ kann hier immer sicher Eins, und der Winkel B in Theilen des Radius ausgedrückt für $\sin B$ gesetzt werden.

Die so gefundenen Coordinaten werden auf den Mittelpunkt der Erde bezogen. Wenn ξ, η, ζ die Abstände eines beliebigen Punktes auf der Erdoberfläche von drei Ebenen sind, die durch den Mittelpunkt der Erde gelegt und den durch die Sonne gelegten parallel sind, so werden die Abstände jenes Punktes von den durch die Sonne gehenden Ebenen offenbar sein

$$X + \xi; \quad Y + \eta; \quad Z + \zeta$$

und die Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ werden in beiden Fällen auf folgende Weise leicht bestimmt. Es sei ϱ der Halbmesser der Erdkugel (oder der

Sinus der mittleren Horizontalparallaxe der Sonne), λ die Länge desjenigen Punktes der Himmelskugel, wo sich die gerade aus dem Centrum der Erde nach dem Oberflächenpunkte gezogene Linie projicirt, β dessen Breite, α Rectascension, δ Declination, so hat man

im Falle I.	im Falle II.
$\xi = \varrho \cos\beta \cos(\lambda - N)$	$\xi = \varrho \cos\delta \cos\alpha$
$\eta = \varrho \cos\beta \sin(\lambda - N)$	$\eta = \varrho \cos\delta \sin\alpha$
$\zeta = \varrho \sin\beta$	$\zeta = \varrho \cos\delta.$

(57) Dieser Punkt der Himmelskugel entspricht offenbar dem Zenith des Orts auf der Oberfläche (wenn nämlich die Erde als eine Kugel betrachtet wird), weshalb seine gerade Aufsteigung mit der Rectascension der Mitte des Himmels, oder mit der in Bogen verwandelten Sternzeit übereinkommt, sowie die Declination mit der Polhöhe. — Falls es der Mühe werth wäre, dabei der sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen, so müsste man für δ die verbesserte Polhöhe und für ϱ den wahren Abstand des Orts vom Mittelpunkte der Erde anwenden, welche nach bekannten Vorschriften gefunden werden. Aus α und δ werden Länge und Breite λ und β durch bekannte, auch weiter unten abgehandelte Regeln hergeleitet. Uebrigens ist klar, dass λ mit der Länge des Nonagesimus und $90^0 - \beta$ mit dessen Höhe übereinkommen.

60.

Wenn x, y, z Abstände eines Himmelskörpers von drei, in der Sonne unter rechten Winkeln sich schneidenden Ebenen bezeichnen; X, Y, Z Abstände der Erde (sei es deren Mittelpunktes oder eines Punktes auf der Oberfläche) von denselben Ebenen; so ist klar, dass $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ die Abstände des Himmelskörpers von drei Ebenen sein werden, die jenen parallel durch die Erde gelegt sind, und dass diese Abstände die nämliche Relation zu dem Abstande des Körpers von der Erde und zu seinem geocentrischen Orte*) d. h. zur Lage der geraden Projectionslinie, die von der Erde nach dem Körper an der Himmelskugel gezogen wird, haben, welche x, y, z zum Abstande von der Sonne und zum heliocentrischen Orte besitzen. Es sei nun Δ der Abstand des

*) Im weiteren Sinne; denn eigentlich wird dieser Ausdruck auf den Fall bezogen, wo die Gerade aus dem Mittelpunkte der Erde gezogen wird.

Himmelskörpers von der Erde. Man stelle sich vor, dass an der Himmelskugel ein Perpendikel von dem geocentrischen Orte auf denjenigen grössten Kreis gefällt sei, welcher der Ebene der „z“ Abstände entspricht, und es sei a der Abstand des Perpendikel-Einschnitts vom positiven Pole des grössten Kreises, welcher der „x“ Ebene entspricht; endlich sei b die Länge dieses Perpendikels, oder der Abstand des geocentrischen Orts von dem den „z“ Distanzen entsprechenden grössten Kreise; — dann wird b die geocentrische Breite oder Declination sein, je nachdem die Ebene der „z“ Distanzen die Ecliptik oder der Aequator ist; dagegen ist $a+N$ die geocentrische Länge oder Rectascension, wenn N im ersten Falle die Länge, im zweiten Falle die Rectascension des Pols der Ebene der „x“ Distanzen bedeutet. —

Man hat deshalb

$$x-X=\Delta\cos b\cos a$$
$$y-Y=\Delta\cos b\sin a$$
$$z-Z=\Delta\sin b.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben a und $\Delta\cos b$, welche letztere (stets positive) Grösse durch Combination mit der dritten Gleichung b und Δ liefert.

61. (58)

Wir haben in dem Vorangehenden eine überaus leichte Methode zur Bestimmung des geocentrischen Orts eines Himmelskörpers in Beziehung auf die Ecliptik oder den Aequator gegeben, es mag nun dieser Ort von der Parallaxe resp. der Nutation befreit oder hiemit behaftet sein. — Denn, was die Nutation betrifft, so liegt der ganze Unterschied darin, ob man die mittlere oder wahre Lage des Aequators wählt, und deshalb zählt man die Längen im ersten Falle vom mittleren Aequinox, im zweiten vom wahren, sowie man in jenem Falle die mittlere, in diesem aber die wahre Schiefe der Ecliptik braucht. Uebrigens ist von selbst klar, dass, je mehr Abkürzungen man bei der Coordinaten-Berechnung einführt, man desto mehr präliminare Operationen vornehmen muss. Es wird deshalb die Vorzüglichkeit der oben zur unmittelbaren Ableitung der Coordinaten aus der excentrischen Anomalie aufgestellten Methode besonders dann sich offenbaren, wenn viele geocentrische Orte zu bestimmen sind. Wenn man dagegen nur einen oder recht wenige geocentrische Orte zu berechnen hat, so würde es sich keineswegs der Mühe lohnen, die Arbeit der Berechnung so vieler Hülfsgrössen zu unternehmen. In einem derartigen Falle wird es sich vielmehr empfehlen, die gewöhnliche Methode nicht zu verlassen, nach welcher aus der excentrischen Anomalie die wahre und der radius vector, hieraus der heliocentrische Ort in Rücksicht auf die Ecliptik, hieraus geocentrische Länge und Breite, und endlich Rectascension und Declination gefunden werden. Damit hier nichts zu mangeln scheine, will ich die beiden letzteren Operationen noch kurz erklären.

62.

Es sei des Himmelskörpers heliocentrische Länge $=\lambda$, Breite $=\beta$; die geocentrische Länge $=l$, Breite $=b$, Abstand von der Sonne r, von der Erde Δ; endlich die heliocentrische Länge der Erde $=L$, Breite $=B$, Abstand von der Sonne $=R$. Da wir nun nicht $B=0$ setzen, so kann man unsere Formeln auch auf den Fall anwenden, wo die heliocentrischen und geocentrischen Orte nicht auf die Ecliptik, sondern auf irgend eine andere Ebene bezogen werden; nur fallen dann die Benennungen Länge und Breite weg; ausserdem kann man sogleich die Parallaxe berücksichtigen, sobald der heliocentrische Ort der Erde nicht auf deren Mittelpunkt, sondern auf einen Ort an ihrer Oberfläche unmittelbar bezogen wird. Ich setze ferner $r\cos\beta = r'$, $\Delta\cos b = \Delta'$, $R\cos B = R'$. Bezieht man jetzt den Ort des Himmelskörpers und der Erde im Raume auf drei Ebenen, deren eine die Ecliptik ist, während die Pole der zweiten und dritten in der Länge N und $N+90^0$ liegen, so ergeben sich sofort folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
r'\cos(\lambda-N) - R'\cos(L-N) &= \Delta'\cos(l-N)\\
r'\sin(\lambda-N) - R'\sin(L-N) &= \Delta'\sin(l-N)\\
r'\operatorname{tang}\beta \qquad - R'\operatorname{tang}B \qquad &= \Delta'\operatorname{tang}b,
\end{aligned}$$

(59) wobei der Winkel N ganz willkürlich ist. Die erste und zweite Gleichung bestimmen zugleich $l-N$ und Δ', woraus die dritte b giebt; aus b und Δ' wird Δ erhalten. Damit die Rechnung so bequem wie möglich ausfalle, bestimme ich den willkürlichen Winkel N auf folgende drei Arten:

I. Indem wir $N = L$ setzen, machen wir $\frac{r'}{R'}\sin(\lambda - L) = P$, $\frac{r'}{R'}\cos(\lambda - L) - 1 = Q$; dann wird $l - L$, $\frac{\Delta'}{R'}$ und b durch folgende Formeln gefunden:

$$\operatorname{tang}(l - L) = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{\Delta'}{R'} = \frac{P}{\sin(l - L)} = \frac{Q}{\cos(l - L)}$$

$$\operatorname{tang} b = \frac{\frac{r'}{R'}\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang} B}{\frac{\Delta'}{R'}}.$$

II. Wenn man $N = \lambda$ setzt, wird

$$\frac{R'}{r'}\sin(\lambda - L) = P,\ 1 - \frac{R'}{r'}\cos(\lambda - L) = Q$$

und dann ist: $\operatorname{tang}(l - \lambda) = \frac{P}{Q}$

$$\frac{\Delta'}{r'} = \frac{P}{\sin(l - \lambda)} = \frac{Q}{\cos(l - \lambda)}$$

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang}\beta - \frac{R'}{r'}\operatorname{tang} B}{\frac{\Delta'}{r'}}.$$

III. Wenn $N = \frac{1}{2}(\lambda + L)$, so werden l und Δ' durch die Gleichungen gefunden:

$$\operatorname{tang}\left(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L)\right) = \frac{r' + R'}{r' - R'}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\lambda - L)$$

$$\Delta' = \frac{(r' + R')\sin\frac{1}{2}(\lambda - L)}{\sin\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right)} = \frac{(r' - R')\cos\frac{1}{2}(\lambda - L)}{\cos\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right)}$$

und sodann b durch die oben gegebene Gleichung. Der Logarithmus des Bruches $\frac{r' + R'}{r' - R'}$ wird bequem berechnet, wenn man $\frac{R'}{r'} = \operatorname{tang}\zeta$ setzt, wodurch $\frac{r' + R'}{r' - R'} = \operatorname{tang}(45^0 + \zeta)$ wird. Auf diese Weise ist die Methode III zur Bestimmung von l noch etwas kürzer, als I und II, für die übrigen Operationen aber sind diese jener vorzuziehen.

(60) **63.**

Als Beispiel will ich die im Art. 51 bis zum heliocentrischen Orte geführte Rechnung weiter fortsetzen. Es möge jenem Orte die heliocentrische Länge der Erde $24^\circ 19' 49''05 = L$ entsprechen und $\log R = 9{,}998\,0979$; die Breite B setze ich $= 0$. Man hat also $\lambda - L = -17^\circ 24' 20''07$, $\log R' = \log R$, und daher nach der zweiten Methode:

$\log \frac{R'}{r'}$ 9,672 9813	$\log(1-Q)$ 9,652 6258
$\log \sin(\lambda - L)$ ..... 9,475 8653 n	$1-Q$ 0,449 3925
$\log \cos(\lambda - L)$ 9,979 6445	Q 0,550 6075
$\log P$ .... 9,148 8466 n	
$\log Q$ 9,740 8421	
Hieraus $l - \lambda = -14^\circ 21' 6''75$	mithin $l = 352^\circ 34' 22''23$
$\log \frac{\varDelta'}{r'}$ 9,754 6117	$\log \varDelta'$ 0,079 7283
$\log \operatorname{tang} \beta$ .... 8,802 0996 n	$\log \cos b$ 9,997 3144
$\log \operatorname{tang} b$ .... 9,047 4879 n	$\log \varDelta$ 0,082 4139
$b = -6^\circ 21' 55''07$	

Nach der dritten Methode hat man aus $\log \zeta = 9{,}672\,9813$, $\zeta = 25^\circ 13' 6''31$ und daher

$\log \operatorname{tang}(45^\circ + \zeta)$ 0,444 1091
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\lambda - L)$ .... 9,184 8938 n
$\log \operatorname{tang}(l - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}L)$ .. 9,629 0029 n

$$\left.\begin{aligned} l - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}L &= -23^\circ\ \ 3'\,16''79 \\ \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}L &= 15\ \ 37\ \ 39{,}015 \end{aligned}\right\} \text{ daraus } l = 352^\circ 34' 22''225.$$

64.

In Beziehung auf die Aufgabe des Artikels 62 füge ich noch folgende Bemerkungen hinzu.

I. Setzt man in der dort erwähnten zweiten Gleichung $N = \lambda$, $N = L$, $N = l$, so erhält man:

$R' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - \lambda)$; $r' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - L)$; $r' \sin(l - \lambda) = R' \sin(l - L)$. Die erste oder zweite Gleichung dient zur bequemen Rechnungsprüfung, wenn die Methode I oder II des Art. 62 angewandt ist. So erhalten wir in unserem Beispiele:

$$
\begin{array}{ll}
\log\sin(\lambda - L) \ldots 9{,}475\,8653\,n & \qquad l - L = -31^\circ 45' 26''82 \\
\log\dfrac{\Delta'}{r'} \ldots\ldots\ldots\ldots 9{,}754\,6117 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 9{,}721\,2536\,n & \\
\log\sin(l - L) \ldots 9{,}721\,2536\,n &
\end{array}
$$

II. Die Sonne und zwei Punkte in der Ebene der Ecliptik, welche Projectionen des Himmelskörperorts und des Erdorts sind, bilden ein ebenes Dreieck, dessen Seiten Δ', R', r' sind und die gegenüberstehenden Winkel entweder $\lambda - L$, $l - \lambda$, $180^\circ - l + L$; oder $L - \lambda$, $\lambda - l$, $180^\circ - L + l$. Aus diesem Grundsatze folgen die in I erwähnten Relationen von selbst. (61)

III. Die Sonne, der wahre Ort des Himmelskörpers im Raume, und der wahre Ort der Erde bilden ein anderes Dreieck, dessen Seiten Δ, R, r sind. Werden die letzteren respective gegenüberstehenden Winkel mit S, T, $180^\circ - S - T$ bezeichnet, so ist $\frac{\sin S}{\Delta} = \frac{\sin T}{R} = \frac{\sin(S+T)}{r}$. Die Ebene dieses Dreiecks projicirt auf der Himmelskugel einen grössten Kreis, in welchem der heliocentrische Ort der Erde, der heliocentrische Ort des Himmelskörpers und des letzteren geocentrischer Ort liegen, und zwar so, dass der Abstand des zweiten vom ersten, des dritten vom zweiten, des dritten vom ersten, nach derselben Richtung gezählt, respective sind S, T, $S+T$.

IV. Entweder aus den bekannten differentialen Veränderungen der Stücke des ebenen Dreiecks, oder ebenso leicht aus den Formeln des Art. 62, kann man folgende Differential-Gleichungen herleiten:

$$d\,l = \frac{r' \cos(\lambda - l)}{\Delta'}\, d\lambda + \frac{\sin(\lambda - l)}{\Delta'}\, d r'$$

$$d\Delta' = -r' \sin(\lambda - l)\, d\lambda + \cos(\lambda - l)\, d r'$$

$$d b = \frac{r' \cos b \sin b \sin(\lambda - l)}{\Delta'}\, d\lambda + \frac{r' \cos b^2}{\Delta' \cos\beta^2}\, d\beta + \frac{\cos b^2}{\Delta'}\big(\tang\beta - \cos(\lambda - l)\tang b\big)\, d r',$$

wo die Glieder, welche dr', $d\Delta'$ enthalten, mit 206 265 zu multipliciren, oder die übrigen hiemit zu dividiren sind, wenn die Aenderungen der Winkel in Secunden ausgedrückt werden.

V. Die umgekehrte Aufgabe, also die Bestimmung des heliocentrischen Orts aus dem geocentrischen, ist der oben vorgetragenen Aufgabe vollständig analog, weshalb es überflüssig sein würde, darüber noch ein Mehres beizubringen. Denn alle Formeln des Art. 62 gelten auch für jene Aufgabe, nur dass alle Grössen, welche auf den heliocentrischen Ort des Himmelskörpers sich beziehen, mit denjenigen Analogen vertauscht werden, welche auf den geocentrischen Bezug haben, mithin für L, B respective $L+180^0$, $-B$ gesetzt, oder, was dasselbe ist, für den heliocentrischen Ort der Erde der geocentrische der Sonne genommen wird.

65.

Mag es auch in dem Falle, wo aus gegebenen Elementen nur sehr wenige geocentrische Orte bestimmt werden sollen, kaum der Mühe werth sein, alle obigen Kunstgriffe anzuwenden, durch welche man von der excentrischen Anomalie sogleich zur geocentrischen Länge und Breite, und so zur
(62) Rectascension und Declination übergehen kann, weil die hieraus hervorgehenden Abkürzungen von der Menge der vorher zu berechnenden Hülfsgrössen absorbirt werden würden, — so wird doch stets die Zusammenziehung der Reduction auf die Ecliptik mit der Berechnung der geocentrischen Länge und Breite einen nicht zu verachtenden Vortheil gewähren. Wenn nämlich für die Ebene der „z“ Coordinaten die Ecliptik selbst gewählt wird, die Pole der Coordinaten-Ebenen x und y aber in die Länge ☊ und 90^0+☊ gestellt werden, so lassen sich die Coordinaten sehr leicht ohne alle weitere Hülfsgrössen bestimmen. Man hat nämlich:

$x = r\cos u$	$X = R'\cos(L-\Omega)$	$x-X = \Delta'\cos(l-\Omega)$
$y = r\cos i\sin u$	$Y = R'\sin(L-\Omega)$	$y-Y = \Delta'\sin(l-\Omega)$
$z = r\sin i\sin u$	$Z = R'\operatorname{tang} B$	$z-Z = \Delta'\operatorname{tang} b.$

Ist $B=0$, so ist $R'=R$, $Z=0$. Nach diesen Formeln wird unser Beispiel durch folgende Zahlen absolvirt: $L-\Omega = 213^0\,12'\,0''32$.

$\log r$	$0{,}325\,9877$	$\log R'$	$9{,}998\,0979$
$\log\cos u$	$9{,}982\,4141\,n$	$\log\cos(L-\Omega)$ ..	$9{,}922\,6027\,n$
$\log\sin u$	$9{,}445\,4714\,n$	$\log\sin(L-\Omega)$ ..	$9{,}738\,4353\,n$
$\log x$	$0{,}308\,4018\,n$	$\log X$	$9{,}920\,7006\,n$
$\log r\sin u$	$9{,}771\,4591\,n$		
$\log\cos i$	$9{,}988\,5266$		
$\log\sin i$	$9{,}355\,7570$		
$\log y$	$9{,}759\,9857\,n$	$\log Y$	$9{,}736\,5332\,n$
$\log z$	$9{,}127\,2161\,n$	$Z=$	0

Daraus folgt

$\log(x-X)$	$0{,}079\,5906\,n$		
$\log(y-Y)$	$8{,}480\,7165\,n$		
daraus $(l-\Omega)=$	$181^{0}\,26'\,33''49$	$l=$	$352^{0}\,34'\,22''22$
$\log\Delta'$	$0{,}079\,7283$		
$\log\operatorname{tang} b$	$9{,}047\,4878\,n$	$b=$	$-\;6^{0}\,21'\,55''06$

66.

Aus der Länge und Breite eines Punktes an der Himmelskugel werden dessen gerade Aufsteigung und Abweichung durch Auflösung eines sphärischen Dreiecks bestimmt, welches von jenem Punkte und den Nordpolen der Ecliptik und des Aequators gebildet wird. Ist daher $\varepsilon=$ Schiefe der Ecliptik, $l=$ Länge, $b=$ Breite, $\alpha=$ Rectascension, $\delta=$ Declination, so sind die Seiten des Dreiecks $=\varepsilon$, $90^{0}-b$, $90^{0}-\delta$. Für die der zweiten und dritten Seite gegenüberstehenden Winkel kann man annehmen: $90^{0}+\alpha$, $90^{0}-l$ (wenn man nämlich die Idee eines sphärischen Dreiecks in grösster Allgemeinheit auffasst). Den dritten, der Seite ε gegenüberstehenden Winkel setze ich (63)
$=90^{0}-E$. Man hat daher mittelst der Formeln des Art. 54

$$\sin(45^{0}-\tfrac{1}{2}\delta)\sin\tfrac{1}{2}(E+\alpha)=\sin(45^{0}+\tfrac{1}{2}l)\sin\big(45^{0}-\tfrac{1}{2}(\varepsilon+b)\big)$$
$$\sin(45^{0}-\tfrac{1}{2}\delta)\cos\tfrac{1}{2}(E+\alpha)=\cos(45^{0}+\tfrac{1}{2}l)\cos\big(45^{0}-\tfrac{1}{2}(\varepsilon-b)\big)$$
$$\cos(45^{0}-\tfrac{1}{2}\delta)\sin\tfrac{1}{2}(E-\alpha)=\cos(45^{0}+\tfrac{1}{2}l)\sin\big(45^{0}-\tfrac{1}{2}(\varepsilon-b)\big)$$
$$\cos(45^{0}-\tfrac{1}{2}\delta)\cos\tfrac{1}{2}(E-\alpha)=\sin(45^{0}+\tfrac{1}{2}l)\cos\big(45^{0}-\tfrac{1}{2}(\varepsilon+b)\big).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(E+\alpha)$ und $\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\delta)$; die beiden letzten $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ und $\cos(45^\circ-\frac{1}{2}\delta)$. Aus $\frac{1}{2}(E+\alpha)$ und $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ erhält man zugleich α und E. Aus $\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\delta)$ oder $\cos(45^\circ-\frac{1}{2}\delta)$, deren Uebereinstimmung zugleich zur Prüfung der Rechnung dient, wird $45^\circ-\frac{1}{2}\delta$ und hieraus δ bestimmt. Die Bestimmung der Winkel $\frac{1}{2}(E+\alpha)$, $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ aus ihren Tangenten ist deshalb keiner Zweideutigkeit unterworfen, weil sowohl der Sinus als der Cosinus des Winkels $45^\circ-\frac{1}{2}\delta$ positiv herauskommen muss.

Die differentialen Veränderungen der Grössen α, δ werden aus den Veränderungen von l und b nach bekannten Grundsätzen auf folgende Weise gefunden:

$$d\alpha = \frac{\sin E \cos b}{\cos\delta}\,dl - \frac{\cos E}{\cos\delta}\,db$$

$$d\delta = \cos E \cos b\, dl + \sin E\, db.$$

67.

Eine andere Methode zur Auflösung der im vorhergehenden Artikel behandelten Aufgabe wird durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
\cos\varepsilon \sin l &= \sin\varepsilon \operatorname{tang} b + \cos l \operatorname{tang}\alpha \\
\sin\delta &= \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l \\
\cos b \cos l &= \cos\alpha \cos\delta.
\end{aligned}$$

Man bestimme einen Hülfswinkel ϑ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin l}, \quad \text{so hat man}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos(\varepsilon+\vartheta)\operatorname{tang} l}{\cos\vartheta}$$

$$\operatorname{tang}\delta = \sin\alpha \operatorname{tang}(\varepsilon+\vartheta).$$

Zur Prüfung der Rechnung lässt sich diesen Gleichungen noch hinzufügen:

$$\cos\delta = \frac{\cos b \cos l}{\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad \cos\delta = \frac{\cos(\varepsilon+\vartheta)\cos b \sin l}{\cos\vartheta \sin\alpha}.$$

Die Zweideutigkeit in der Bestimmung von α durch die zweite Gleichung wird dadurch beseitigt, dass $\cos\alpha$ und $\cos l$ dieselben Vorzeichen haben müssen.

(64) Diese Methode führt weniger rasch zum Ziele, wenn ausser α und δ auch E ermittelt werden soll. — Die bequemste Formel zur Bestimmung

dieses Winkels wird dann sein $\cos E = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos b} = \frac{\sin\varepsilon\cos l}{\cos\delta}$. Inzwischen kann durch diese Formel E dann nicht mit Schärfe berechnet werden, wenn $\pm\cos E$ nur wenig von der Einheit verschieden ist; ausserdem bleibt es zweifelhaft, ob E zwischen 0 und 180^0, oder zwischen 180^0 und 360^0 genommen werden muss. Die erstere Unbequemlichkeit ist selten von irgend welcher Bedeutung, besonders weil zur Berechnung der differentialen Verhältnisse die grösste Schärfe des Werthes von E nicht erforderlich ist; der gedachte Zweifel aber kann mit Hülfe der Gleichung $\cos b\cos\delta\sin E = \cos\varepsilon - \sin b\sin\delta$ leicht gelöst werden, welche zeigt, dass E zwischen 0 und 180^0, oder 180^0 und 360^0 genommen werden muss, je nachdem $\cos\varepsilon$ grösser oder kleiner als $\sin b\sin\delta$ ist. Offenbar bedarf es auch nicht einmal dieser Prüfung, sobald einer der beiden Winkel b, δ die Grenze von $66^0 32'$ nicht überschreitet; denn dann wird $\sin E$ stets positiv. Im Uebrigen könnte dieselbe Gleichung in dem schon oben angedeuteten Falle zur genaueren Bestimmung von E gebraucht werden, wenn es der Mühe werth sein sollte.

68.

Die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, also die Bestimmung von Länge und Breite aus Rectascension und Declination stützt sich auf dasselbe sphärische Dreieck. Die obigen Formeln werden diesem Zwecke angepasst durch einfache Vertauschung von b mit δ, und von l mit $-\alpha$. Wegen des häufigen Gebrauchs will ich auch diese Formeln hersetzen:

Nach der Methode des Art. 66 hat man

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}(E-l) = \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin\left(45^0 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right)$$
$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}(E-l) = \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos\left(45^0 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\right)$$
$$\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}b)\sin\tfrac{1}{2}(E+l) = \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin\left(45^0 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\right)$$
$$\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}(E+l) = \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos\left(45^0 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right).$$

Bestimmt man dagegen wie bei der andern Methode im Art. 67 den Hülfswinkel ζ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin\alpha},$$ so hat man

$$\operatorname{tang} l = \frac{\cos(\zeta - \varepsilon)\operatorname{tang}\alpha}{\cos\zeta}$$
$$\operatorname{tang} b = \sin l \operatorname{tang}(\zeta - \varepsilon).$$

(65) Zur Prüfung der Rechnung dient:

$$\cos b = \frac{\cos\delta\cos\alpha}{\cos l} = \frac{\cos(\zeta-\varepsilon)\cos\delta\sin\alpha}{\cos\zeta\sin l}.$$

Zur Bestimmung von E dienen dann ebenso wie im vorhergehenden Artikel die Gleichungen

$$\cos E = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos b} = \frac{\sin\varepsilon\cos l}{\cos\delta}$$
$$\cos b\cos\delta\sin E = \cos\varepsilon - \sin b\sin\delta.$$

Die differentialen Aenderungen von l und b ergeben sich durch die Formeln:

$$\mathrm{d}l = \frac{\sin E\cos\delta}{\cos b}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\cos E}{\cos b}\,\mathrm{d}\delta$$
$$\mathrm{d}b = -\cos E\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha + \sin E\,\mathrm{d}\delta.$$

69.

Als Beispiel wollen wir aus der Rectascension $355^\circ 43' 45'' 30 = \alpha$, der Declination $-8^\circ 47' 25'' 0 = \delta$, der Schiefe der Ecliptik $23^\circ 27' 59'' 26 = \varepsilon$ die Länge und Breite berechnen. Es ist also $45^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 222^\circ 51' 52'' 65$, $45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta) = 37^\circ 39' 42'' 87$, $45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) = 28^\circ 52' 17'' 87$. Hieraus ferner

$\log\cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$	9,865 0820 n	$\log\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$	9,832 6803 n
$\log\sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta))$	9,786 0418	$\log\sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta))$	9,683 8112
$\log\cos(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta))$	9,898 5222	$\log\cos(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta))$	9,942 3572

$\log\sin(45^\circ - \frac{1}{2}b)\sin\frac{1}{2}(E-l)$ .... 9,651 1238 n

$\log\sin(45^\circ - \frac{1}{2}b)\cos\frac{1}{2}(E-l)$ .... 9,775 0375 n

daher $\frac{1}{2}(E-l) = 216^\circ 56' 5'' 39$; $\log\sin(45^\circ - \frac{1}{2}b) = 9{,}872\,3171$

$\log\cos(45^\circ - \frac{1}{2}b)\sin\frac{1}{2}(E+l)$ .... 9,516 4915 n

$\log\cos(45^\circ - \frac{1}{2}b)\cos\frac{1}{2}(E+l)$ .... 9,763 6042 n

daher $\frac{1}{2}(E+l) = 209^\circ 30' 49'' 94$; $\log\cos(45^\circ - \frac{1}{2}b) = 9{,}823\,9669.$

Es wird folglich $E = 426^\circ 26' 55'' 33$, $l = -7^\circ 25' 15'' 45$, oder, was auf dasselbe herauskommt, $E = 66^\circ 26' 55'' 33$ und $l = 352^\circ 34' 44'' 55$. Den Winkel $45^\circ - \frac{1}{2}b$

erhält man durch den Logarithmus des Sinus $= 48^\circ 10' 58''12$, aus dem Logarithmus des Cosinus $= 48^\circ 10' 58''17$, aus der Tangente (deren Logarithmus den Unterschied jener bildet) $= 48^\circ 10' 58''14$; hieraus $b = -6^\circ 21' 56''28$.

Nach der zweiten Methode steht die Rechnung so: (66)

$\log \operatorname{tang} \delta$	$9{,}189\,3062\,n$	$\mathrm{C.}\log \cos \zeta$	$0{,}362\,6190$
$\log \sin \alpha$	$8{,}871\,9792\,n$	$\log \cos(\zeta - \varepsilon)$	$9{,}878\,9703$
$\log \operatorname{tang} \zeta$	$0{,}317\,3270$	$\log \operatorname{tang} \alpha$	$8{,}873\,1869\,n$
ζ	$= 64^\circ 17' 6''83$	$\log \operatorname{tang} l$	$9{,}114\,7762\,n$
$\zeta - \varepsilon$	$= 40\ \ 49\ \ 7{,}57$	l	$= 352^\circ 34' 44''50$
		$\log \sin l$	$9{,}111\,1232\,n$
		$\log \operatorname{tang}(\zeta - \varepsilon)$	$9{,}936\,3874$
		$\log \operatorname{tang} b$	$9{,}047\,5106\,n$
		b	$= -6^\circ 21' 56''26$

Zur Bestimmung des Winkels E hat man die doppelte Rechnung:

$\log \sin \varepsilon$	$9{,}600\,1144$	$\log \sin \varepsilon$	$9{,}600\,1144$
$\log \cos \alpha$	$9{,}998\,7924$	$\log \cos l$	$9{,}996\,3470$
$\mathrm{C.}\log \cos b$	$0{,}002\,6859$	$\mathrm{C.}\log \cos \delta$	$0{,}005\,1313$
$\log \cos E$	$9{,}601\,5927$	$\log \cos E$	$9{,}601\,5927$

woraus $E = 66^\circ 26' 55''35$.

70.

Um Alles beisammen zu haben, was zur Berechnung der geocentrischen Orte erforderlich ist, muss noch Einiges über Parallaxe und Aberration hinzugefügt werden. Ich habe zwar schon oben eine Methode gegeben, wonach der von der Parallaxe afficirte, d. h. der einem Punkte auf der Erdoberfläche entsprechende Ort, unmittelbar und mit grösster Leichtigkeit zu bestimmen ist. Da aber bei der gewöhnlichen, in den Artt. 62 und folgenden behandelten Methode der geocentrische Ort auf den Mittelpunkt der Erde bezogen zu werden pflegt, in welchem Falle er von der Parallaxe befreit heisst, so muss noch eine besondere Methode zur Bestimmung der Parallaxe, welche der Unterschied zwischen beiden Orten ist, hinzugefügt werden.

Es seien deshalb die geocentrische Länge und Breite eines Himmelskörpers in Bezug auf den Erdmittelpunkt λ und β, und in Bezug auf irgend einen Punkt an der Erdoberfläche l und b; der Abstand des Körpers von dem Erdmittelpunkte $= r$, von dem Erdoberflächenpunkte $= \Delta$; es entspreche endlich an der Himmelskugel dem Zenith dieses Punktes die Länge L, die Breite B und der Halbmesser der Erde sei $= R$. Von selbst ist schon klar, dass alle Gleichungen des Art. 62 auch hier Statt finden; aber man kann sie bedeutend abkürzen, da hier R eine Grösse ausdrückt, die im Vergleiche mit r und Δ fast verschwindet. Uebrigens werden dieselben Gleichungen offenbar auch dann gelten, wenn λ, l, L, statt der Längen die Rectascensionen, und β, b, B statt der Breiten die Declinationen bedeuten. In diesem Falle sind
(67) $l-\lambda$, $b-\beta$ Rectascensions- und Declinations-Parallaxen, in jenem aber Längen- und Breiten-Parallaxen. Wenn man R als eine Grösse der ersten Ordnung betrachtet, so werden $l-\lambda$, $b-\beta$, $\Delta-r$ von derselben Ordnung sein, und wenn man die höheren Ordnungen vernachlässigt, so leitet man aus den Formeln des Art. 62 leicht ab:

$$\text{I.} \quad l-\lambda = \frac{R\cos B\sin(\lambda-L)}{r\cos\beta}$$

$$\text{II.} \quad b-\beta = \frac{R\cos B\cos\beta}{r}\left(\operatorname{tang}\beta\cos(\lambda-L)-\operatorname{tang}B\right)$$

$$\text{III.} \quad \Delta-r = -R\cos B\sin\beta\left(\operatorname{cotang}\beta\cos(\lambda-L)+\operatorname{tang}B\right).$$

Nimmt man den Hülfswinkel ϑ dabei so, dass $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\operatorname{tang}B}{\cos(\lambda-L)}$, so erhalten die Gleichungen II und III folgende Form:

$$\text{II.} \quad b-\beta = \frac{R\cos B\cos(\lambda-L)\sin(\beta-\vartheta)}{r\cos\vartheta} = \frac{R\sin B\sin(\beta-\vartheta)}{r\sin\vartheta}$$

$$\text{III.} \quad \Delta-r = -\frac{R\cos B\cos(\lambda-L)\cos(\beta-\vartheta)}{\cos\vartheta} = -\frac{R\sin B\cos(\beta-\vartheta)}{\sin\vartheta}.$$

Um in I und II die Grössen $l-\lambda$ und $b-\beta$ in Secunden zu erhalten, muss für R die mittlere, in Secunden ausgedrückte Sonnenparallaxe gesetzt werden; in III aber ist für R dieselbe, mit $206\,265''$ dividirte Parallaxe zu nehmen. Endlich kann man, ohne an Genauigkeit zu verlieren, bei den Parallaxen-Werthen statt r, λ, β auch Δ, l, b anwenden, sobald bei der umgekehrten Aufgabe aus dem mit der Parallaxe behafteten Orte der von ihr freie Ort bestimmt werden soll.

Beispiel. Es sei die gerade Aufsteigung der Sonne für den Mittelpunkt der Erde $= 220^{\circ}46'44''65 = \lambda$, die Declination $= -15^{\circ}49'43''94 = \beta$, der Abstand $= 0{,}990\,4311 = r$. Ferner die in Graden ausgedrückte Sternzeit für irgend einen Ort auf der Erdoberfläche $= 78^{\circ}20'38''0 = L$, Polhöhe des Orts $= 45^{\circ}27'57''0 = B$, mittlere Sonnenparallaxe $= 8''6 = R$. Gesucht wird der von diesem Orte aus gesehene Sonnenort und sein Sonnenabstand.

$\log R$	0,934 50	$\log R$	0,934 50
$\log\cos B$	9,845 93	$\log\sin B$	9,852 99
$\mathrm{C.}\log r$	0,004 18	$\mathrm{C.}\log r$	0,004 18
$\mathrm{C.}\log\cos\beta$	0,016 79	$\mathrm{C.}\log\sin\vartheta$	0,103 17
$\log\sin(\lambda - L)$	9,785 08	$\log\sin(\beta - \vartheta)$	9,771 52 n
$\log(l - \lambda)$	0,586 48	$\log(b - \beta)$	0,666 36 n
$l - \lambda =$	$+3''86$	$b - \beta =$	$-4''64$
$l =$	$220^{\circ}46'48''51$	$b =$	$-15^{\circ}49'48''58$
$\log\tang B$	0,007 06	$\log(b - \beta)$	0,666 36 n (68)
$\log\cos(\lambda - L)$	9,899 09 n	$\log\cotang(\beta - \vartheta)$	0,135 22
$\log\tang\vartheta$	0,107 97 n	$\log r$	9,995 82
$\vartheta =$	$127^{\circ}57'0''$	$\log 1''$	4,685 57
$\beta - \vartheta =$	$-143^{\circ}46'44''$	$\log(r - \varDelta)$	5,482 97 n
		$r - \varDelta =$	$-0{,}000\,0304$
		$\varDelta =$	0,990 4615.

71.

Die Aberration der Fixsterne, sowie auch derjenige Theil der Aberration der Planeten und Cometen, welcher allein von der Bewegung der Erde herrührt, entspringt daraus, weil mit der ganzen Erde das Sehrohr bewegt wird, während der Lichtstrahl dessen optische Axe durchläuft. Der beobachtete Ort des Himmelskörpers (welcher auch der scheinbare, oder mit der Aberration afficirte genannt wird) wird bestimmt durch die Lage der optischen Axe eines Fernrohrs, welches so aufgestellt ist, dass der von dem Körper ausgegangene Lichtstrahl auf seinem Wege beide äusseren Enden dieser Axe berührt; diese Lage ist aber verschieden von der wahren Lage des Lichtstrahls im Raume. —

Wir wollen zwei Zeitmomente unterscheiden, t und t', wo der Lichtstrahl das vordere Ende (das Centrum des Objectivglases) und wo er das hintere Ende (den Brennpunkt des Objectivs) berührt. Die Orte dieser Enden im Raume sollen für den ersten Zeitpunkt a und b, für den späteren a' und b' heissen. Dann ist klar, dass die gerade Linie ab' die wahre Lage des Strahls im Raume ist, dass aber dem scheinbaren Orte die gerade Linie ab oder $a'b'$ (die man als parallel annehmen kann) entspricht. Auch sieht man ohne Weiteres, dass der scheinbare Ort von der Länge des Rohrs unabhängig ist. Der Unterschied zwischen der Lage der geraden Linien $b'a$, ba ist die Aberration, sowie solche für die Fixsterne Statt findet, und die Art ihrer Berechnung will ich als bekannt übergehen. Für die Irrsterne ist aber jener Unterschied noch nicht die vollständige Aberration, denn der Planet ändert in der Zeit, welche sein Lichtstrahl gebraucht, um auf die Erde herabzugelangen, seinen Ort, weshalb die Lage dieses Strahls nicht dem wahren geocentrischen Orte zur Zeit der Beobachtung entspricht. Wir wollen annehmen, dass der Lichtstrahl, welcher zur Zeit t das Fernrohr trifft, zur Zeit T vom Planeten ausgegangen sei; der Ort des Planeten im Raume zur Zeit T soll P heissen, zur Zeit t aber p. Endlich soll A der Ort des vorangehenden Endes der Axe des Rohrs für den Zeitpunkt T sein. — Nun ist klar,

1) dass die gerade Linie AP den wahren Ort des Planeten zur Zeit T,
2) die gerade Linie ap den wahren Ort zur Zeit t,
3) die gerade Linie ba oder $b'a'$ den scheinbaren Ort zur Zeit t oder t' (deren Unterschied als eine unendlich kleine Grösse betrachtet werden kann),
4) die gerade Linie $b'a$ denselben scheinbaren, von der Aberration der Fixsterne befreiten Ort

zeigen.

(69) Die Punkte P, a, b' liegen schon in einer geraden Linie, und die Theile Pa, ab' werden den Zwischenzeiten $t - T$, $t' - t$ proportional sein, wenn die Bewegung des Lichtes mit gleichförmiger Schnelligkeit vor sich geht. Das Zeit-Intervall $t' - T$ ist wegen der erstaunlichen Geschwindigkeit des Lichtes stets sehr klein, und man darf annehmen, dass in dieser Zwischenzeit die Bewegung der Erde geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich geht: also werden auch A, a, a' in gerader Richtung liegen und die Theile

Aa, aa' auch den Intervallen $t-T$, $t'-t$ proportional sein. Hieraus schliesst man leicht, dass die Geraden AP, $b'a'$ Parallellinien sind, und daher der erste Ort mit dem dritten identisch ist.

Die Zeit $t-T$ wird das Product des Abstandes Pa in 493 Zeitsecunden sein, innerhalb derer das Licht den mittleren Abstand der Erde von der Sonne durchläuft, welchen wir dabei als Einheit annehmen. Bei dieser Berechnung darf man statt der Distanz Pa auch PA oder pa annehmen, da der Unterschied von keiner Bedeutung sein kann.

Aus diesen Grundsätzen folgen drei Methoden, den scheinbaren Ort eines Planeten oder Cometen für einen beliebigen Zeitpunkt t zu bestimmen, von denen bald die eine, bald die andere den Vorzug verdient.

I. Man ziehe von der angenommenen Zeit die Zeit ab, welche das Licht gebraucht, um vom Planeten bis zur Erde zu gelangen. So erhält man die reducirte Zeit T, für welche der wahre, nach gewöhnlicher Art berechnete Ort mit dem scheinbaren Orte für die Zeit t identisch sein wird. Zur Berechnung der Reduction der Zeit $t-T$ muss die Entfernung des Planeten von der Erde bekannt sein. Gemeiniglich werden zu diesem Zwecke bequeme Hülfsmittel nicht fehlen, z. B. eine, wenn auch nur flüchtig gerechnete Ephemeride, widrigenfalls es hinreichen würde, den wahren Abstand für die Zeit t in gewöhnlicher Art aber ohne zu grosse Schärfe durch vorläufige Rechnung zu bestimmen.

II. Man berechne für die angenommene Zeit t den wahren Ort und die Entfernung, hieraus die Reduction der Zeit $t-T$ und hieraus mit Hülfe der täglichen Bewegung (in Länge und Breite, oder Rectascension und Declination) die Reduction des wahren Orts auf die Zeit T.

III. Man berechne den heliocentrischen Ort der Erde zwar für die Zeit t, den heliocentrischen Ort des Planeten aber für die Zeit T; sodann aus Combination derselben auf gewohnte Weise den geocentrischen Ort des Planeten, der um die Fixstern-Aberration vermehrt (die man auf bekannte Weise ableitet oder aus den Tafeln nimmt) den verlangten scheinbaren Ort liefern wird.

Die zweite Methode, die gewöhnlich angewandt zu werden pflegt, empfiehlt sich vor den übrigen zwar dadurch, dass es dabei der doppelten Rechnung zur Bestimmung der Entfernung nicht bedarf, leidet aber an der

Unzuträglichkeit, dass man sie nur anwenden kann, wenn mehre benachbarte Orte entweder berechnet, oder aus den Beobachtungen schon bekannt sind, indem man sonst die tägliche Bewegung nicht als gegeben ansehen kann.

(70) Die Unbequemlichkeit der ersten und dritten Methode wird gänzlich gehoben, wenn mehre einander benachbarte Orte zu berechnen sind. Denn wenn nur erst für einige der letzteren die Abstände bekannt geworden sind, so kann man sehr bequem und mit hinreichender Schärfe auf die nächstfolgenden Abstände durch die gewöhnlichen Hülfsmittel schliessen. Wenn übrigens der Abstand bekannt ist, so ist die erste Methode deshalb der dritten gemeiniglich vorzuziehen, weil es dabei der Fixstern-Aberration nicht bedarf. Muss man aber zu einer doppelten Berechnung seine Zuflucht nehmen, so empfiehlt die dritte Methode sich dadurch, dass bei der zweiten Rechnung der Ort der Erde wenigstens beibehalten werden kann.

Schon von selbst bietet sich das für die umgekehrte Aufgabe Erforderliche dar, d. h. für die Bestimmung des wahren Orts aus dem scheinbaren. Nach der ersten Methode behält man nämlich den Ort selbst unverändert bei, aber die Zeit t, welcher der angenommene Ort als scheinbarer entspricht, verwandelt man in die reducirte Zeit T, welcher derselbe Ort als wahrer Ort entsprechen wird. — Nach der Methode II behält man die Zeit t bei, aber dem angenommenen Orte fügt man die Bewegung in der Zeit $t - T$ hinzu, als ob man ihn auf eine Zeit $t + (t - T)$ reduciren wollte. — Nach der Methode III betrachtet man den angenommenen, von der Fixstern-Aberration befreiten Ort als wahren Ort für die Zeit T, aber der wahre, der Zeit t entsprechende Erdort wird beibehalten, als ob er zu jener gehörte. Die Nützlichkeit der dritten Methode wird im zweiten Buche deutlicher erhellen.

Der Vollständigkeit halber bemerke ich noch, dass der Ort der Sonne von der Aberration ganz so afficirt wird, wie der Ort eines Planeten. Da aber sowohl der Abstand von der Erde, als die tägliche Bewegung sehr nahe constant sind, so erhält auch die Aberration einen nahezu beständigen und der mittleren Bewegung der Sonne während 493 Zeitsecunden gleichen Werth, mithin $= 20''25$, welche Grösse man von der wahren Länge abziehen muss, um die scheinbare zu erhalten. Der genaue Werth der Aberration steht im zusammengesetzten Verhältnisse des Abstandes und der täglichen Bewegung, oder, was auf eins herauskommt, dieser Werth verhält sich verkehrt wie der

Abstand. Es müsste deshalb jener mittlere Werth in der Erdferne um 0″34 vermindert, in der Erdnähe aber um eben so viel vermehrt werden. Uebrigens schliessen unsere Sonnentafeln die constante Aberration —20″25 bereits ein. Man muss mithin, um die wahre Länge zu erhalten, zu der Tafellänge 20″25 addiren.

72.

Den Schluss dieser Abtheilung sollen einige Aufgaben bilden, welche bei der Bestimmung der Planeten- und Cometen-Bahnen häufig angewandt werden. Zuerst wollen wir auf die Parallaxe zurückkommen. Wie der beobachtete Ort von ihr befreit wird, lehrt Art. 70. Da eine solche Reduction auf den Mittelpunkt der Erde, eine wenigstens genäherte Kenntniss des Abstandes des Planeten von der Erde voraussetzt, so kann dieselbe nicht vorgenommen werden, wenn die Bahn des beobachteten Planeten noch gänzlich unbekannt ist. Aber auch in diesem Falle kann man wenigstens denselben Zweck erreichen, um dessentwillen die Reduction auf den Erdmittelpunkt unternommen wird, deshalb nämlich, weil, da dieser Mittelpunkt in der Ebene der Ecliptik liegt (71)
(oder doch angenommen wird, dass er dort liege), hierdurch mehre der Formeln eine grössere Einfachheit und Concinnität erhalten, als wenn die Beobachtung auf einen Punkt ausserhalb der Ebene der Ecliptik bezogen würde. In dieser Beziehung bildet es daher keinen Unterschied, ob die Beobachtung auf den Mittelpunkt der Erde, oder auf irgend einen Punkt in der Ebene der Ecliptik reducirt wird. Es ist klar, dass wenn zu diesem Zwecke der Punkt des Einschnitts der Ebene der Ecliptik mit einer geraden, vom Planeten nach dem wahren Beobachtungsorte gezogenen Linie gewählt wird, die Beobachtung selbst keiner weiteren Reduction bedarf, da der Planet aus allen Punkten jener geraden Linie auf gleiche Weise gesehen*) wird. Deshalb ist es gestattet, diesen Punkt gleichsam als fingirten Beobachtungsort dem wahren Orte zu substituiren. Die Lage jenes Punktes wird auf folgende Weise bestimmt.

---

*) Wenn die äusserste Genauigkeit erforderlich sein sollte, so müsste man die Zwischenzeit, innerhalb deren das Licht vom wahren Beobachtungsorte nach dem fingirten (oder umgekehrt) gelangt, zu der angenommenen Zeit addiren oder davon subtrahiren, wenn es sich um Orte handelt, die mit der Aberration behaftet sind. Aber dieser Unterschied kann kaum von irgend welcher Bedeutung sein, wenn nicht die Breite sehr klein ist.

Es sei die Länge des Himmelskörpers $= \lambda$, Breite $= \beta$, Abstand $= \Delta$, alles in Beziehung auf den wahren Ort der Beobachtung auf der Erdoberfläche, dessen Zenith die Länge l und die Breite b entsprechen. Ferner sei π der Halbmesser der Erde, L die heliocentrische Länge des Mittelpunkts der Erde, $B =$ dessen Breite, $R =$ dessen Abstand von der Sonne; endlich sei L' die heliocentrische Länge des fingirten Ortes, R' dessen Abstand von der Sonne, $\Delta + \delta$ dessen Abstand vom Himmelskörper. Dann ergeben sich ohne Weiteres folgende Gleichungen, wobei N einen willkürlichen Winkel bezeichnet:

$$R' \cos(L'-N) + \delta \cos\beta \cos(\lambda - N) = R \cos B \cos(L-N) + \pi \cos b \cos(l-N)$$
$$R' \sin(L'-N) + \delta \cos\beta \sin(\lambda - N) = R \cos B \sin(L-N) + \pi \cos b \sin(l-N)$$
$$\delta \sin\beta = R \sin B + \pi \sin b.$$

Setzt man daher

I. $(R \sin B + \pi \sin b) \operatorname{cotang} \beta = \mu$, so wird

II. $R' \cos(L'-N) = R \cos B \cos(L-N) + \pi \cos b \cos(l-N) - \mu \cos(\lambda - N)$

III. $R' \sin(L'-N) = R \cos B \sin(L-N) + \pi \cos b \sin(l-N) - \mu \sin(\lambda - N)$

IV. $\delta = \dfrac{\mu}{\cos\beta}.$

Aus den Gleichungen II und III kann R' und L', aus IV aber das Zeitintervall bestimmt werden, was zur Beobachtungszeit hinzuzulegen und in Secunden $= 493\,\delta$ sein wird.

Diese Gleichungen sind genau und allgemein und sie können auch dann angewandt werden, wenn statt der Ebene der Ecliptik der Aequator gesetzt wird, und L, L', λ, l Rectascensionen, B, β, b Declinationen bedeuten. Aber in dem hier vorzugsweise behandelten Falle, wo nämlich der fingirte Ort in der Ecliptik belegen sein muss, gestattet die Kleinheit der Grössen B, π, $L'-L$ noch einige Abkürzung der vorhergehenden Formeln. Es kann nämlich statt π die mittlere Sonnenparallaxe genommen werden, B statt $\sin B$, Eins
(72) statt $\cos B$ und $\cos(L'-L)$, $L'-L$ statt $\sin(L'-L)$. Macht man so $N = L$, so nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

I. $\mu = (RB + \pi \sin b) \operatorname{cotang} \beta$

II. $R' = R + \pi \cos b \cos(l-L) - \mu \cos(\lambda - L)$

III. $L' - L = \dfrac{\pi \cos b \sin(l-L) - \mu \sin(\lambda - L)}{R'}.$

Eigentlich müssen hier zwar B, π, $L'-L$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden; aber man sieht, dass, wenn man jene Winkel in Secunden ausdrückt, die Gleichungen I und III ohne Aenderung beibehalten werden können, für II aber gesetzt werden muss:

$$R' = R + \frac{\pi \cos b \cos(l-L) - \mu \cos(\lambda - L)}{206\,265''}.$$

Uebrigens kann in Formel III für den Nenner R' ohne merklichen Irrthum stets R genommen werden. Die Reduction der Zeit wird aber beim Ausdrucke der Winkel in Secunden $= \dfrac{493^s . \mu}{206\,265'' . \cos\beta}$.

73.

Beispiel: Es sei $\lambda = 354^\circ 44' 54''$, $\beta = -4^\circ 59' 32''$, $l = 24^\circ 29'$, $b = 46^\circ 53'$, $L = 12^\circ 28' 54''$, $B = +0''49$, $R = 0{,}998\,8839$, $\pi = 8''60$; so steht die Rechnung wie folgt:

$\log R$	9,999 51	$\log \pi$	0,934 50
$\log B$	9,690 20	$\log \sin b$	9,863 30
$\log BR$	9,689 71	$\log \pi \sin b$	0,797 80

Hieraus $\log(BR + \pi \sin b)$	0,830 40
$\log \operatorname{cotang} \beta$	1,058 73 n
$\log \mu$	1,889 13 n

$\log \pi$	0,934 50	$\log \mu$	1,889 13 n
$\log \cos b$	9,834 73	$\log 1''$	4,685 57
$\log 1''$	4,685 57	$\log \cos(\lambda - L)$	9,978 86
$\log \cos(l - L)$	9,990 40		6,553 56 n
	5,445 20	N. Z. =	$-0{,}000\,3577$
N. Z. =	$+0{,}000\,0279$		

Hieraus erhält man $R' = R + 0{,}000\,3856 = 0{,}999\,2695$. Ferner ist (73)

$\log \pi \cos b$	0,769 23	$\log \mu$	1,889 13 n
$\log \sin(l - L)$	9,317 94	$\log \sin(\lambda - L)$	9,483 71 n
Compl. $\log R'$	0,000 32	Compl. $\log R'$	0,000 32
	0,087 49		1,373 16
N. Z. =	$+1''22$	N. Z. =	$+23''61$

Hieraus erhält man $L' = L - 22''39$. Zuletzt hat man

$\log \mu$	$1{,}889\,13\,n$
$C.\log 206\,265$	$4{,}685\,57$
$\log 493$	$2{,}692\,85$
$C.\log\cos\beta$	$0{,}001\,65$
	$9{,}269\,20\,n$,

und daher die Reduction der Zeit $= -0^s186$ und deshalb von keiner Bedeutung.

74.

Eine andere Aufgabe: *aus dem geocentrischen Orte eines Himmelskörpers und der Lage der Bahnebene dessen heliocentrischen Ort in der Bahn abzuleiten* — ist der vorstehenden in so weit verwandt, als sie ebenfalls abhängig ist von dem Einschnitte einer geraden, zwischen der Erde und dem Himmelskörper gezogenen Linie mit einer der Lage nach gegebenen Ebene. Die Auflösung wird sehr bequem aus den Formeln des Art. 65 erhalten, wo die Bezeichnung der Charaktere folgende war:

L Länge der Erde, R ihr Abstand von der Sonne; die Breite B setze ich $= 0$ (da der Fall, wo sie nicht $= 0$ ist, auf diesen leicht mittelst des Artikels 72 zurückgeführt werden kann), woraus dann $R' = R$; $l =$ geocentrische Länge des Himmelskörpers, b dessen Breite, Δ sein Abstand von der Erde, r Abstand von der Sonne, u Argument der Breite, Ω Länge des aufsteigenden Knotens, i Neigung der Bahn.

So hat man die Gleichungen:

$$\text{I.}\quad r\cos u - R\cos(L-\Omega) = \Delta\cos b\cos(l-\Omega)$$

$$\text{II.}\quad r\cos i\sin u - R\sin(L-\Omega) = \Delta\cos b\sin(l-\Omega)$$

$$\text{III.}\quad r\sin i\sin u = \Delta\sin b.$$

Multiplicirt man die Gleichung I mit $\sin(L-\Omega)\sin b$, die Gleichung II mit $-\cos(L-\Omega)\sin b$, III mit $-\sin(L-l)\cos b$, so wird, nach Addirung der Producte,

$$\cos u\sin(L-\Omega)\sin b - \sin u\cos i\cos(L-\Omega)\sin b - \sin u\sin i\sin(L-l)\cos b = 0,$$

woraus dann

$$\text{IV.}\quad \operatorname{tang} u = \frac{\sin(L-\Omega)\sin b}{\cos i\cos(L-\Omega)\sin b + \sin i\sin(L-l)\cos b}.$$

Multiplicirt man aber I mit $\sin(l - \Omega)$, II mit $-\cos(l - \Omega)$, so wird, nach (74)
Addition der Producte,

$$\text{V.}\quad r = \frac{R \sin(L - l)}{\sin u \cos i \cos(l - \Omega) - \cos u \sin(l - \Omega)}.$$

Die Zweideutigkeit in Bestimmung von u aus Gleichung IV wird von selbst durch Gleichung III gehoben, die zeigt, dass u zwischen 0 und 180°, oder zwischen 180° und 360° genommen werden müsse, je nachdem die Breite b positiv oder negativ ist. Ist aber $b = 0$, so zeigt die Gleichung V, dass $u = 0$, oder $u = 180^0$ gesetzt werden muss, je nachdem $\sin(L - l)$ und $\sin(l - \Omega)$ verschiedene Zeichen haben, oder dieselben Zeichen.

Die numerische Berechnung der Formeln IV und V kann auf verschiedene Weise durch Einführung von Hülfswinkel abgekürzt werden. Z. B.

setzt man $\dfrac{\operatorname{tang} b \cos(L - \Omega)}{\sin(L - l)} = \operatorname{tang} A$, so wird $\operatorname{tang} u = \dfrac{\sin A \operatorname{tang}(L - \Omega)}{\sin(A + i)}$;

setzt man $\dfrac{\operatorname{tang} i \sin(L - l)}{\cos(L - \Omega)} = \operatorname{tang} B$, so wird $\operatorname{tang} u = \dfrac{\cos B \sin b \operatorname{tang}(L - \Omega)}{\sin(B + b)\cos i}$.

Ganz ebenso erhält die Gleichung V durch Einführung eines Hülfswinkels, dessen Tangente $= \cos i \operatorname{tang} u$ oder $= \dfrac{\operatorname{tang}(l - \Omega)}{\cos i}$ ist, eine concinnere Form. So wie wir die Formel V aus Combination der Gleichungen I und II erhielten, so gelangen wir durch Combination der Gleichungen II und III zu folgender:

$$r = \frac{R \sin(L - \Omega)}{\sin u (\cos i - \sin i \sin(l - \Omega) \operatorname{cotang} b)}$$

und ebenso durch Combination der Gleichungen I und III zu

$$r = \frac{R \cos(L - \Omega)}{\cos u - \sin u \sin i \cos(l - \Omega) \operatorname{cotang} b}.$$

Beide lassen sich auf gleiche Weise wie V durch Einführung von Hülfswinkeln noch einfacher machen. Auflösungen, die aus dem Vorstehenden resultiren, findet man gesammelt und durch ein Beispiel erläutert in von Zach, Monatliche Correspondenz, Band V, S. 540*), weshalb ich deren weitere Entwicklung hier übergehe. Wenn ausser u und r auch der Abstand Δ bestimmt werden soll, so kann dies durch Gleichung III geschehen.

---

*) Der vollständige Abdruck dieser hier citirten Abhandlung von Gauss findet sich im Anhange, Seite 42—45. *Anmerkung des Uebersetzers.*

75.

Eine andere Auflösung der vorhergehenden Aufgabe stützt sich auf den im Art. 64 III vorgetragenen Satz, dass der heliocentrische Ort der Erde, sowie der geocentrische Ort des Himmelskörpers und dessen heliocentrischer Ort in einem und demselben grössten Kreise der Kugel liegen. Es seien in Fig. 3 jene Orte beziehungsweise T, G, H; ferner ☊ der Ort des aufsteigenden Knotens;
(75) ☊T, ☊H Theile der Ecliptik und der Bahn; GP ein auf die Ecliptik aus G herabgelassenes Loth, was daher gleich b ist. Hieraus und aus dem Bogen $PT = L - l$ wird der Winkel T und der Bogen TG bestimmt. Dann sind in dem sphärischen Dreiecke ☊HT gegeben der Winkel ☊ $= i$, der Winkel T und die Seite ☊$T = L -$ ☊, woraus die beiden übrigen Seiten ☊$H = u$ und TH abgeleitet werden. Endlich wird $HG = TG - TH$ und $r = \frac{R \sin TG}{\sin HG}$, $\Delta = \frac{R \sin TH}{\sin HG}$.

76.

Im Art. 52 habe ich gezeigt, wie die differentialen Veränderungen der heliocentrischen Länge und Breite und des curtirten Abstandes durch die Veränderung des Argumentes der Breite u, der Neigung i und des Radius vector r ausgedrückt werden können, und hernach (Art. 64, IV) habe ich aus jenen die Veränderungen der geocentrischen Länge und Breite l, b abgeleitet. Durch Combination jener Formeln werden daher $\mathrm{d}l$ und $\mathrm{d}b$ durch $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}i$, d☊, $\mathrm{d}r$ ausgedrückt erhalten. Es ist aber der Mühe werth, zu zeigen, wie man auch bei dieser Rechnung der Reduction des heliocentrischen Orts auf die Ecliptik überhoben bleiben kann, ebenso wie ich im Art. 65 den geocentrischen Ort unmittelbar aus dem heliocentrischen Orte *in der Bahn* abgeleitet habe. Zur grösseren Vereinfachung der Formeln, will ich die Breite der Erde vernachlässigen, da sie wenigstens bei den Differential-Formeln keinen merklichen Einfluss haben kann. Es dienen also hier folgende Formeln, bei denen der Kürze wegen ω für $l -$ ☊ und, wie oben, Δ' für $\Delta \cos b$ geschrieben ist:

$$\Delta' \cos\omega = r\cos u - R\cos(L - \Omega) = \xi$$
$$\Delta' \sin\omega = r\cos i \sin u - R\sin(L - \Omega) = \eta$$
$$\Delta' \operatorname{tang} b = r\sin i \sin u = \zeta.$$

Aus Differentiation derselben erhält man:

$$\cos\omega \,.\, \mathrm{d}\Delta' - \Delta' \sin\omega \,.\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\xi$$
$$\sin\omega \,.\, \mathrm{d}\Delta' + \Delta' \cos\omega \,.\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\eta$$
$$\operatorname{tang} b \,.\, \mathrm{d}\Delta' + \frac{\Delta}{\cos b}\mathrm{d}b = \mathrm{d}\zeta$$

und hieraus durch Elimination

$$\mathrm{d}\omega = \frac{-\sin\omega \,.\, \mathrm{d}\xi + \cos\omega \,.\, \mathrm{d}\eta}{\Delta'}$$
$$\mathrm{d}b = \frac{-\cos\omega\sin b \,.\, \mathrm{d}\xi - \sin\omega\sin b \,.\, \mathrm{d}\eta + \cos b \,.\, \mathrm{d}\zeta}{\Delta}.$$

Wenn in diesen Formeln für ξ, η, ζ ihre Werthe gehörig substituirt werden, so erhält man $\mathrm{d}\omega$ und $\mathrm{d}b$ durch $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}i$, $\mathrm{d}\Omega$ ausgedrückt. Dann werden, da $\mathrm{d}l = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\Omega$ ist, die partiellen Differentiale von l, b sich so verhalten:

$$\text{I.}\quad \Delta' \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\right) = -\sin\omega\cos u + \cos\omega\sin u\cos i \tag{76}$$
$$\text{II.}\quad \frac{\Delta'}{r}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u}\right) = \sin\omega\sin u + \cos\omega\cos u\cos i$$
$$\text{III.}\quad \frac{\Delta'}{r}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}i}\right) = -\cos\omega\sin u\sin i$$
$$\text{IV.}\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\Omega}\right) = 1 + \frac{R}{\Delta'}\cos(L - \Omega - \omega) = 1 + \frac{R}{\Delta'}\cos(L - l)$$
$$\text{V.}\quad \Delta\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r}\right) = -\cos\omega\cos u\sin b - \sin\omega\sin u\cos i\sin b + \sin u\sin i\cos b$$
$$\text{VI.}\quad \frac{\Delta}{r}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\right) = \cos\omega\sin u\sin b - \sin\omega\cos u\cos i\sin b + \cos u\sin i\cos b$$
$$\text{VII.}\quad \frac{\Delta}{r}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}i}\right) = \sin\omega\sin u\sin i\sin b + \sin u\cos i\cos b$$
$$\text{VIII.}\quad \frac{\Delta}{R}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\Omega}\right) = \sin b\sin(L - \Omega - \omega) = \sin b\sin(L - l).$$

Die Formeln IV und VIII erscheinen hier bereits in einer für die Rechnung sehr bequemen Form. Die Formeln I, III und V aber können durch naheliegende Substitutionen concinner redigirt werden, nämlich:

$$\text{I}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{R}{r\Delta'}\sin(L-l)$$

$$\text{III}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}i}\right) = -\cos\omega\,\mathrm{tang}\,b$$

$$\text{V}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{R}{r\Delta}\cos(L-l)\sin b = -\frac{R}{r\Delta'}\cos(L-l)\sin b\cos b.$$

Endlich können auch die übrigen Formeln II, VI, VII durch Einführung gewisser Hülfswinkel noch vereinfacht werden, was auf folgende Weise sehr bequem geschieht.

Man bestimme die Hülfswinkel M, N durch die Formeln $\mathrm{tang}\,M = \frac{\mathrm{tang}\,\omega}{\cos i}$, $\mathrm{tang}\,N = \sin\omega\,\mathrm{tang}\,i = \mathrm{tang}\,M\cos\omega\sin i$. Dann wird zugleich

$$\frac{\cos M^2}{\cos N^2} = \frac{1+\mathrm{tang}\,N^2}{1+\mathrm{tang}\,M^2} = \frac{\cos i^2 + \sin\omega^2\sin i^2}{\cos i^2 + \mathrm{tang}\,\omega^2} = \cos\omega^2.$$

Die Beseitigung der Zweideutigkeit bei Bestimmung von M und N aus den Tangenten kann nach Willkür und daher auch so geschehen, dass man

$$\frac{\cos M}{\cos N} = +\cos\omega,\quad \text{mithin}\ \frac{\sin N}{\sin M} = +\sin i$$

nimmt. Sodann gehen die Formeln II, VI und VII in folgende über:

(77)

$$\text{II}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{r\sin\omega\cos(M-u)}{\Delta'\sin M}$$

$$\text{VI}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{r}{\Delta}\Big\{\cos\omega\sin i\cos(M-u)\cos(N-b) + \sin(M-u)\sin(N-b)\Big\}$$

$$\text{VII}^*.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}i}\right) = \frac{r\sin u\cos i\cos(N-b)}{\Delta\cos N}.$$

Diese Transformationen werden in Beziehung auf die Formeln II und VII Jedem klar sein. Bezüglich der Formel VI aber scheint eine Erläuterung am Platze. Wenn man nämlich bei Formel VI zuerst für u setzt: $M-(M-u)$, so erhält man:

$$\frac{\Delta}{r}\left(\frac{db}{du}\right) = \cos(M-u)\Big\{\cos\omega\,\sin M\sin b - \sin\omega\,\cos i\cos M\sin b + \sin i\cos M\cos b\Big\}$$
$$-\sin(M-u)\Big\{\cos\omega\cos M\sin b + \sin\omega\cos i\sin M\sin b - \sin i\sin M\cos b\Big\}.$$

Nun ist

$\cos\omega\sin M = \cos i^2\cos\omega\sin M + \sin i^2\cos\omega\sin M = \sin\omega\cos i\cos M + \sin i^2\cos\omega\sin M$;

weshalb der erstere Theil jenes Ausdruckes übergeht in:

$$\sin i\cos(M-u)\Big\{\sin i\cos\omega\sin M\sin b + \cos M\cos b\Big\}$$
$$= \sin i\cos(M-u)\Big\{\cos\omega\sin N\sin b + \cos\omega\cos N\cos b\Big\} = \cos\omega\sin i\cos(M-u)\cos(N-b).$$

Ebenso wird $\cos N = \cos\omega^2 \cos N + \sin\omega^2 \cos N = \cos\omega \cos M + \sin\omega \cos i \sin M$; wodurch der zweite Theil des Ausdrucks übergeht in:

$$-\sin(M-u)\left\{\cos N \sin b - \sin N \cos b\right\} = \sin(M-u)\sin(N-b).$$

Hieraus folgt sofort der Ausdruck VI*. —

Der Hülfswinkel M kann auch zur Transformation der Formel I benutzt werden, die nach dessen Einführung die Gestalt annimmt:

$$\text{I}^{**}.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\sin\omega \sin(M-u)}{\Delta' \sin M},$$

aus deren Vergleichung mit Formel I* folgt:

$$-R\sin(L-l)\sin M = r\sin\omega\sin(M-u);$$

wonach dann auch der Formel II* die etwas einfachere Form zugetheilt werden kann:

$$\text{II}^{**}.\quad \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}u}\right) = -\frac{R}{\Delta'}\sin(L-l)\,\mathrm{cotang}(M-u).$$

Um die Formel VI* noch mehr zusammenzuziehen, muss man einen neuen Hülfswinkel einführen, was auf doppelte Weise geschehen kann, indem (78)
man nämlich entweder $\mathrm{tang}\,P = \dfrac{\mathrm{tang}(M-u)}{\cos\omega \sin i}$, oder $\mathrm{tang}\,Q = \dfrac{\mathrm{tang}(N-b)}{\cos\omega\sin i}$ setzt, wodurch man dann erhält:

$$\text{VI}^{**}.\quad \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{r\sin(M-u)\cos(N-b-P)}{\Delta\sin P} = \frac{r\sin(N-b)\cos(M-u-Q)}{\Delta\sin Q}.$$

Uebrigens sind die Hülfsgrössen M, N, P, Q nicht rein fictiv, und es lässt sich leicht angeben, was einer jeden an der Himmelskugel entspricht, so dass auf diese Weise mehren der vorstehenden Gleichungen noch eine elegantere Darstellung durch Bogen und Winkel an der Kugel gegeben werden könnte. Ich verweile dabei um so weniger, da sie bei der numerischen Berechnung die oben behandelten Formeln nicht überflüssig machen können.

77.

Das in dem vorangehenden Artikel Entwickelte enthält in Verbindung mit dem, was in den Artikeln 15, 16, 20, 27, 28 für die einzelnen Arten der Kegelschnitte gesagt worden, Alles, was zur Berechnung derjenigen differentialen Veränderungen erforderlich ist, die im geocentrischen Orte durch Veränderungen der einzelnen Elemente entstehen. Zur besseren Erläuterung dieser Vorschriften wollen wir das in den Artt. 13, 14, 51, 63, 65 tractirte Beispiel wieder vornehmen. Zuerst will ich nach Anleitung des vorhergehenden Artikels dl und db durch dr, du, di, dΩ ausdrücken, wobei die Rechnung so steht:

$\log\tang\omega$ 8,401 13	$\log\sin\omega$ .... 8,400 99 n	$\log\tang(M-u)$ 9,419 32 n
$\log\cos i$ 9,988 53	$\log\tang i$ 9,367 23	$\log\cos\omega\sin i$ ... 9,355 62 n
$\log\tang M$ 8,412 60	$\log\tang N$ ..... 7,768 22 n	$\log\tang P$ 0,063 70
$M = 1^\circ 28' 52''$	$N = 179^\circ 39' 50''$	$P = 49^\circ 11' 13''$
$M-u = 165\ 17\ 8$	$N-b = 186\ 1\ 45$	$N-b-P = 136\ 50\ 32$

I*	II**	III*
$\log\sin(L-l)$ ... 9,721 25	(*) 9,639 62	$\log\cos\omega$ .... 9,999 86 n
$\log R$ 9,998 10	$\log\cot(M-u)$ 0,580 68 n	$\log\tang b$ .... 9,047 49 n
C. $\log\Delta'$ 9,920 27	$\log\left(\frac{dl}{du}\right)$ 0,220 30	$\log\left(\frac{dl}{di}\right)$ .... 9,047 35 n
(*) 9,639 62		
C. $\log r$ 9,674 01		
$\log\left(\frac{dl}{dr}\right)$ 9,313 63		

(79)

IV	V*	VI**
$\log\frac{R}{\Delta'}$ 9,918 37	(**) 9,847 93	$\log\frac{r}{\Delta}$ .... 0,243 57 n
$\log\cos(L-l)$ .. 9,929 56	$\log\sin b\cos b$ .. 9,042 12 n	$\log\sin(M-u)$ .. 9,404 84
(**) 9,847 93	C. $\log r$ 9,674 01	$\log\cos(N-b-P)$ 9,863 01 n
$=\log\left(\frac{dl}{d\Omega}-1\right)$	$\log\left(\frac{db}{dr}\right)$ 8,564 06	C. $\log\sin P$ 0,120 99
		$\log\left(\frac{db}{du}\right)$ .... 9,632 41 n

VII*	VIII
$\log r\sin u\cos i$ .. 9,759 99 n	(*) 9,639 62
$\log\cos(N-b)$ .. 9,997 59 n	$\log\sin b\cos b$ .. 9,042 12 n
C. $\log\Delta$ 9,917 59	$\log\left(\frac{db}{d\Omega}\right)$ ...... 8,681 74 n
C. $\log\cos N$ ..... 0,000 01 n	
$\log\left(\frac{db}{di}\right)$ .... 9,675 18 n	

Die Zusammenstellung dieser Werthe ergiebt

$$dl = +0{,}205\,89\,dr + 1{,}660\,73\,du - 0{,}111\,52\,di + 1{,}704\,58\,d\Omega$$
$$db = +0{,}036\,65\,dr - 0{,}428\,95\,du - 0{,}473\,35\,di - 0{,}048\,05\,d\Omega.$$

Kaum bedarf es wohl der schon häufig wiederholten Bemerkung, dass entweder die Aenderungen $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}i$, $\mathrm{d}\Omega$ in Theilen des Radius auszudrücken, oder die Coefficienten von $\mathrm{d}r$ mit $206\,265''$ zu multipliciren sind, wenn erstere in Secunden verstanden werden.

Bezeichnet man nun die Länge des Perihels (die in unserem Beispiele $= 52^\circ\,18'\,9''30$ ist) mit Π und die wahre Anomalie mit v, so ist die Länge in der Bahn $= u + \Omega = v + \Pi$, und daher $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v + \mathrm{d}\Pi - \mathrm{d}\Omega$, und wenn man diesen Werth in die vorangehenden Formeln substituirt, so erhält man $\mathrm{d}l$ und $\mathrm{d}b$ durch $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\Pi$, $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}i$ ausgedrückt. Es erübrigt daher nur, $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}v$ nach Anleitung der Artikel 15 und 16 durch die differentialen Aenderungen der elliptischen Elemente darzustellen. (Bei der folgenden Rechnung bedeutet das Symbol M nicht mehr unseren Hülfswinkel, sondern — wie im ersten Abschnitte — die mittlere Anomalie.)

In dem Beispiele des Art. 14 war $\log\frac{r}{a} = 9{,}903\,55 = \log\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a}\right)$ (80)

$\log\frac{aa}{rr}$ 0,192 90	$\log a$ 0,422 44
$\log\cos\varphi$ 9,986 52	$\log\operatorname{tang}\varphi$ 9,403 20
$\log\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}M}\right)$ 0,179 42	$\log\sin v$ .... 9,849 31 n
$2 - e\cos E$ = 1,800 85	$\log\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}M}\right)$ .... 6,674 95 n
ee = 0,060 18	$\log a$ 0,422 44
1,740 67	$\log\cos\varphi$ 9,986 52
$\log$ 0,240 72	$\log\cos v$ 9,849 66
$\log\frac{aa}{rr}$ 0,192 90	$\log\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)$ .... 0,258 62 n
$\log\sin E$ .... 9,766 34 n	
$\log\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\right)$ .... 0,199 96 n	

Hieraus erhält man

$$\mathrm{d}v = +1{,}511\,54\,\mathrm{d}M - 1{,}584\,75\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}r = -9{,}473\,10\,\mathrm{d}M - 1{,}813\,93\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}800\,85\,\mathrm{d}a$$

und nach Substitution dieser Werthe in die früheren Formeln folgt:

$$\mathrm{d}l = +2{,}412\,87\,\mathrm{d}M - 3{,}005\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}164\,88\,\mathrm{d}a + 1{,}660\,73\,\mathrm{d}\Pi$$
$$- 0{,}111\,52\,\mathrm{d}i + 0{,}043\,85\,\mathrm{d}\Omega$$
$$\mathrm{d}b = -0{,}665\,72\,\mathrm{d}M + 0{,}613\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}029\,25\,\mathrm{d}a - 0{,}428\,95\,\mathrm{d}\Pi$$
$$- 0{,}473\,35\,\mathrm{d}i + 0{,}380\,90\,\mathrm{d}\Omega.$$

Nimmt man an, dass die Zeit, welcher der berechnete Ort entspricht, um n Tage von der Epoche entfernt ist, und wird die mittlere Länge für die Epoche mit N, die tägliche Bewegung mit $\daleth$ bezeichnet, so ist $M = N + n\daleth - \Pi$, und daher $\mathrm{d}M = \mathrm{d}N + n\,\mathrm{d}\daleth - \mathrm{d}\Pi$. In unserem Beispiele ist die dem berechneten Orte entsprechende Zeit = October 17,415 07 des Jahres 1804 im Meridiane von Paris. Wenn mithin für die Epoche der Beginn des Jahres 1805 gesetzt wird, so ist $n = -74{,}584\,93$; die für jene Epoche gesetzte mittlere Länge war $= 41^{0}\,52'\,21''61$ und die tägliche Bewegung $= 824''7988$. Substituirt man nun in die eben gefundenen Formeln für $\mathrm{d}M$ seinen Werth, so verhalten sich die durch die alleinigen Veränderungen der Elemente ausgedrückten differentialen Veränderungen des geocentrischen Orts, wie folgt:

$$\mathrm{d}l = 2{,}412\,87\,\mathrm{d}N - 179{,}96\,\mathrm{d}\daleth - 0{,}752\,14\,\mathrm{d}\Pi - 3{,}005\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}164\,88\,\mathrm{d}a$$
$$- 0{,}111\,52\,\mathrm{d}i + 0{,}043\,85\,\mathrm{d}\Omega$$
$$\mathrm{d}b = -0{,}665\,72\,\mathrm{d}N + 49{,}65\,\mathrm{d}\daleth + 0{,}236\,77\,\mathrm{d}\Pi + 0{,}613\,31\,\mathrm{d}\varphi + 0{,}029\,35\,\mathrm{d}a$$
$$- 0{,}473\,35\,\mathrm{d}i + 0{,}380\,90\,\mathrm{d}\Omega.$$

(81) Wird des Himmelskörpers Masse entweder vernachlässigt, oder wenigstens als bekannt angesehen, so sind $\daleth$ und a von sich gegenseitig abhängig, und somit kann man entweder $\mathrm{d}\daleth$ oder $\mathrm{d}a$ aus den Formeln eliminiren. Da nämlich, nach Art. 6, $\daleth a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{(1+\mu)}$, so ist $\frac{\mathrm{d}\daleth}{\daleth} = -\frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{d}a}{a}$, in welcher Formel, wenn $\mathrm{d}\daleth$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden soll, man auch $\daleth$ ebenso ausdrücken muss. Auf diese Weise ist unserem Beispiele

$\log\daleth$	2,916 35
$\log 1''$	4,685 57
$\log\frac{3}{2}$	0,176 09
C. $\log a$	9,577 56
$\log\frac{\mathrm{d}\daleth}{\mathrm{d}a}$	7,355 57 n,

oder $\mathrm{d}\daleth = -0{,}002\,2676\,\mathrm{d}a$ und $\mathrm{d}a = -440{,}99\,\mathrm{d}\daleth$, und durch Substitution dieses Werthes in unsere Formeln ergiebt sich endlich als letzte Form:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l &= 2{,}412\,87\,\mathrm{d}N - 252{,}67\,\mathrm{d}7 - 0{,}752\,14\,\mathrm{d}\Pi - 3{,}005\,31\,\mathrm{d}\varphi \\ &\quad - 0{,}111\,52\,\mathrm{d}i + 0{,}043\,85\,\mathrm{d}\Omega \\ \mathrm{d}b &= -0{,}665\,72\,\mathrm{d}N + 36{,}71\,\mathrm{d}7 + 0{,}236\,77\,\mathrm{d}\Pi + 0{,}613\,31\,\mathrm{d}\varphi \\ &\quad - 0{,}473\,35\,\mathrm{d}i + 0{,}380\,90\,\mathrm{d}\Omega. \end{aligned}$$

Bei Entwickelung dieser Formeln haben wir vorausgesetzt, dass sämmtliche Aenderungen $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}7$, $\mathrm{d}\Pi$, $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}i$, $\mathrm{d}\Omega$ in Theilen des Radius ausgedrückt seien; offenbar aber werden wegen der Homogeneität aller Theile dieselben Formeln auch dann gelten, wenn alle jene Aenderungen in Secunden ausgedrückt sind.*)

---

*) Wegen der bei mehren Zahlen des Art. 77 vorgenommenen Aenderungen vergl. die Andeutung im Druckfehler-Verzeichnisse der lateinischen Ausgabe, sowie den Ergänzungsband zu den Astronom. Nachrichten, pag. 181. *Anmerkung des Uebersetzers.*

(82)

Dritter Abschnitt.

Relationen zwischen mehren Orten in der Bahn.

78.

Die vergleichende Betrachtung zweier oder mehrer Orte eines Himmelskörpers in der Bahn sowohl als im Raume, gewährt eine so grosse Menge eleganter Vorlagen, dass man damit leicht einen ganzen Band füllen könnte. Mein Zweck geht aber nicht dahin, dies fruchtbare Argument zu erschöpfen, sondern hauptsächlich dahin, hieraus einen umfangreichen Apparat von Hülfsmitteln zu schaffen für Auflösung der grossen Aufgabe der Bestimmung unbekannter Bahnen aus den Beobachtungen. Unter Vernachlässigung Dessen, was hierbei zu fremdartig sein würde, will ich daher Alles desto sorgfältiger entwickeln, was auf irgend eine Weise zu diesem Zwecke führen kann. Den Untersuchungen selbst will ich einige trigonometrische Betrachtungen vorausschicken, auf welche ich wegen ihres häufigen Gebrauchs öfter zurückkommen muss:

I. Wenn A, B, C irgend welche Winkel bezeichnen, so hat man

$$\sin A \sin(C-B) + \sin B \sin(A-C) + \sin C \sin(B-A) = 0$$
$$\cos A \sin(C-B) + \cos B \sin(A-C) + \cos C \sin(B-A) = 0.$$

II. Wenn zwei Grössen p und P aus Gleichungen bestimmt werden sollen wie

$$p \sin(A-P) = a$$
$$p \sin(B-P) = b,$$

so geschieht das allgemein mit Hülfe der Formeln

$$p \sin(B-A) \sin(H-P) = b \sin(H-A) - a \sin(H-B)$$
$$p \sin(B-A) \cos(H-P) = b \cos(H-A) - a \cos(H-B),$$

wobei H ein willkürlicher Winkel ist. Hieraus leitet man (Art. 14, II) den Winkel $H-P$ ab und $p \sin(B-A)$; und hieraus P und p. Gemeiniglich pflegt die Bedingung hinzugefügt zu sein, dass p eine positive Grösse sein muss, wodurch die Zweideutigkeit in Bestimmung des Winkels $H-P$ durch seine Tangente entschieden wird. Fehlt aber diese Bedingung, so kann man die Entscheidung nach Belieben treffen. Zur Bequemlichkeit der Rechnung pflegt man den willkürlichen Winkel H entweder $= A$ oder $= B$ oder $= \frac{1}{2}(A+B)$ zu setzen. — Im ersten Falle sind die Gleichungen zur Bestimmung von P und p folgende:

$$p \sin(A-P) = a$$
$$p \cos(A-P) = \frac{b - a\cos(B-A)}{\sin(B-A)}.$$

Im zweiten Falle sind die Gleichungen ganz analog; im dritten aber: (83)

$$p \sin(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \frac{b+a}{2\cos\frac{1}{2}(B-A)}$$
$$p \cos(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \frac{b-a}{2\sin\frac{1}{2}(B-A)}.$$

Führt man daher den Hülfswinkel ζ ein, dessen Tangente $= \frac{a}{b}$, so findet sich P durch die Formel:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \operatorname{tang}(45^\circ + \zeta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B-A)$$

und sodann p durch irgend eine der vorhergehenden Formeln, wo

$$\tfrac{1}{2}(b+a) = \sin(45^\circ+\zeta)\sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} = \frac{a\sin(45^\circ+\zeta)}{\sin\zeta\sqrt{2}} = \frac{b\sin(45^\circ+\zeta)}{\cos\zeta\sqrt{2}}$$
$$\tfrac{1}{2}(b-a) = \cos(45^\circ+\zeta)\sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} = \frac{a\cos(45^\circ+\zeta)}{\sin\zeta\sqrt{2}} = \frac{b\cos(45^\circ+\zeta)}{\cos\zeta\sqrt{2}}.$$

III. Wenn p und P aus den Gleichungen

$$p\cos(A-P) = a$$
$$p\cos(B-P) = b$$

bestimmt werden sollen, so kann Alles unter Nr. II Erklärte sofort Anwendung finden, falls man nur dort statt A und B allenthalben $90^\circ + A$, $90^\circ + B$ schreibt. Zum bequemeren Gebrauche will ich jedoch die entwickelten Formeln hersetzen. Die allgemeinen Formeln sind:

$$p\sin(B-A)\sin(H-P) = -b\cos(H-A) + a\cos(H-B)$$
$$p\sin(B-A)\cos(H-P) = b\sin(H-A) - a\sin(H-B).$$

Diese gehen daher, falls $H = A$ gesetzt wird, über in:

$$p \sin(A - P) = \frac{a \cos(B-A) - b}{\sin(B-A)}$$

$$p \cos(A - P) = a.$$

Für $H = B$ erhalten sie eine ähnliche Form. Für $H = \frac{1}{2}(A + B)$ aber werden sie:

$$p \sin(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \frac{a - b}{2 \sin \frac{1}{2}(B - A)}$$

$$p \cos(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \frac{a + b}{2 \cos \frac{1}{2}(B - A)},$$

so dass nach Einführung des Hülfswinkels ζ, dessen Tangente $= \frac{a}{b}$, entsteht:

$$\text{cotang}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \text{cotang}(\zeta - 45^\circ) \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B - A).$$

(84) Sollte man übrigens wünschen, die Grösse p unmittelbar aus a und b, ohne vorgängige Berechnung des Hülfswinkels P, zu bestimmen, so hat man die Formel

$$p \sin(B - A) = \sqrt{(aa + bb - 2\,ab \cos(B - A))},$$

sowohl bei gegenwärtiger Aufgabe, als bei II.

79.

Zur vollständigen Bestimmung eines Kegelschnitts in seiner Ebene wird Dreierlei erfordert: die Lage des Perihels, die Excentricität und der halbe Parameter. Wenn solche aus gegebenen, von einander abhängigen Grössen ermittelt werden sollen, so müssen so viele Data vorhanden sein, dass man drei, von einander unabhängige Gleichungen bilden kann. — Jeder seiner Grösse und Lage nach gegebene Radius Vector liefert eine Gleichung, und es sind deshalb zur Bahnbestimmung drei, ihrer Grösse und Lage nach gegebene Radien Vectoren erforderlich. Hat man aber nur zwei Radien Vectoren, so muss entweder ein Element schon selbst, oder wenigstens irgend eine andere Grösse gegeben sein, um daraus die dritte Gleichung construiren zu können. Hieraus entsteht eine Mannigfaltigkeit von Aufgaben, die wir jetzt der Reihe nach durchgehen wollen.

Es sollen r, r' zwei Radien Vectoren sein, die mit einer geraden, in der Ebene der Bahn aus der Sonne beliebig gezogenen Linie die Winkel N, N' nach Richtung der Bewegung bilden; es sei ferner Π der Winkel, den mit derselben geraden Linie der Radius Vector im Perihele bildet, so dass den Radien Vectoren r, r' die wahren Anomalien $N-\Pi$, $N'-\Pi$ entsprechen; endlich sei e die Excentricität, p der halbe Parameter. — Dann finden die Gleichungen Statt:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(N-\Pi)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e\cos(N'-\Pi)$$

aus denen, wenn überher eine der Grössen p, e, Π gegeben ist, die übrigen bestimmt werden können.

Setzen wir zuerst voraus, dass der halbe Parameter p gegeben sei, so erhellt, dass die Bestimmung der Grössen e und Π aus den Gleichungen

$$e\cos(N-\Pi) = \frac{p}{r} - 1$$

$$e\cos(N'-\Pi) = \frac{p}{r'} - 1$$

nach Anleitung des Satzes III im vorhergehenden Artikel geschehen kann. (85)
Man hat daher:

$$\operatorname{tang}(N-\Pi) = \operatorname{cotang}(N'-N) - \frac{r(p-r')}{r'(p-r)\sin(N'-N)}$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N' - \Pi) = \frac{(r'-r)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(N'-N)}{r'+r-\dfrac{2rr'}{p}}.$$

80.

Ist der Winkel Π gegeben, so werden e und p vermittelst folgender Gleichungen bestimmt:

$$p = \frac{rr'\big(\cos(N-\Pi) - \cos(N'-\Pi)\big)}{r\cos(N-\Pi) - r'\cos(N'-\Pi)}$$

$$e = \frac{r'-r}{r\cos(N-\Pi) - r'\cos(N'-\Pi)}.$$

Der gemeinsame Nenner in diesen Formeln lässt sich auf die Form: $a\cos(A-\Pi)$ zurückführen, so dass a und A von Π unabhängig sind. Bezeichnet dann H einen willkürlichen Winkel, so wird

$$r\cos(N-\Pi)-r'\cos(N'-\Pi)=\begin{cases}\big(r\cos(N-H)-r'\cos(N'-H)\big)\cos(H-\Pi)\\ -\big(r\sin(N-H)-r'\sin(N'-H)\big)\sin(H-\Pi)\end{cases}$$

und deshalb $= a\cos(A-\Pi)$, wenn a und A durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$r\cos(N-H)-r'\cos(N'-H)=a\cos(A-H)$$
$$r\sin(N-H)-r'\sin(N'-H)=a\sin(A-H).$$

Auf diese Weise wird:

$$p=\frac{2rr'\sin\frac{1}{2}(N'-N)\sin(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N'-\Pi)}{a\cos(A-\Pi)}$$

$$e=\frac{r'-r}{a\cos(A-\Pi)}.$$

Diese Formeln sind besonders dann bequem, falls p und e für mehre Werthe von Π zu berechnen sind, während r, r', N, N' ungeändert bleiben. Da man zur Bestimmung der Hülfsgrössen a und A, den Winkel H nach Belieben wählen kann, so ist es vortheilhaft, $H=\frac{1}{2}(N+N')$ zu setzen, wodurch die Formeln in folgende übergehen:

$$(r'-r)\cos\tfrac{1}{2}(N'-N)=-a\cos(A-\tfrac{1}{2}N-\tfrac{1}{2}N')$$
$$(r'+r)\sin\tfrac{1}{2}(N'-N)=-a\sin(A-\tfrac{1}{2}N-\tfrac{1}{2}N')$$

Ist daher der Winkel A durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}(A-\tfrac{1}{2}N-\tfrac{1}{2}N')=\frac{r'+r}{r'-r}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(N'-N)$$

bestimmt, so hat man sofort:

$$e=-\frac{\cos(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N')}{\cos\frac{1}{2}(N'-N)\cos(A-\Pi)},$$

(86) wobei sich die Berechnung des Logarithmus der Grösse $\frac{r'+r}{r'-r}$ durch den schon häufig erklärten Kunstgriff abkürzen lässt.

81.

Wenn die Excentricität e gegeben ist, so wird der Winkel Π durch folgende Gleichung gefunden:

$$\cos(A-\Pi)=-\frac{\cos(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N')}{e\cos\frac{1}{2}(N'-N)},$$

nachdem der Hülfswinkel A vermittelst der Gleichung

$$\operatorname{tang}(A - \tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{2}N') = \frac{r'+r}{r'-r}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(N'-N)$$

bestimmt ist. Die bei Bestimmung des Winkels $A - \Pi$ durch seinen Cosinus zurückbleibende Zweideutigkeit ist in der Natur der Aufgabe begründet, so dass man letzterer durch zwei verschiedene Lösungen Genüge leisten kann, wobei man anderswoher entscheiden muss, welche beizubehalten und welche zu verwerfen ist. Zu diesem Zwecke muss ein wenigstens genäherter Werth von Π bereits bekannt sein.

Nachdem Π gefunden, wird p entweder durch die Formeln:

$$p = r(1 + e\cos(N - \Pi)) = r'(1 + e\cos(N' - \Pi)),$$ oder durch

$$p = \frac{2rr'e\sin\frac{1}{2}(N'-N)\sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi)}{r'-r}$$ berechnet.

82.

Nehmen wir endlich an, dass drei Radien Vectoren r, r', r'' gegeben seien, welche mit einer geraden, nach Belieben aus der Sonne in der Ebene der Bahn gezogenen Linie die Winkel N, N', N'' bilden. Man hat dann, unter Beibehaltung der übrigen Zeichen, folgende Gleichungen:

$$\text{(I)}\qquad \frac{p}{r} = 1 + e\cos(N - \Pi)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e\cos(N' - \Pi)$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e\cos(N'' - \Pi),$$

woraus sich p, Π, e auf mehre verschiedene Arten ermitteln lassen. Will man zuvörderst die Grösse p berechnen, so werden die drei Gleichungen (I) respective mit $\sin(N''-N')$, mit $-\sin(N''-N)$, mit $\sin(N'-N)$ multiplicirt und man erhält durch Addition der Producte nach dem Satze I. Art. 78

$$p = \frac{\sin(N''-N') - \sin(N''-N) + \sin(N'-N)}{\frac{1}{r}\sin(N''-N') - \frac{1}{r'}\sin(N''-N) + \frac{1}{r''}\sin(N'-N)}.$$

Dieser Ausdruck verdient eine nähere Betrachtung. Der Zähler wird (87)
offenbar:

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(N''-N')\cos\tfrac{1}{2}(N''-N') - 2\sin\tfrac{1}{2}(N''-N')\cos(\tfrac{1}{2}N'' + \tfrac{1}{2}N' - N)$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(N''-N')\sin\tfrac{1}{2}(N''-N)\sin\tfrac{1}{2}(N'-N).$$

Setzt man sodann ferner

$$r'r''\sin(N''-N')=n,\quad rr''\sin(N''-N)=n',\quad rr'\sin(N'-N)=n'',$$

so sieht man, dass $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n'$, $\frac{1}{2}n''$ die Flächen der Dreiecke sind, resp. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vector. Daraus schliesst man leicht, dass bei der neuen Formel

$$p=\frac{4\sin\frac{1}{2}(N''-N')\sin\frac{1}{2}(N''-N)\sin\frac{1}{2}(N'-N)\,.\,rr'r''}{n-n'+n''}$$

der Nenner gleich sei der doppelten Fläche des Dreiecks, welches von den Endpunkten der drei Radien Vectoren gebildet wird, d. h. welches zwischen des Himmelskörpers drei Orten im Raume enthalten ist. Falls jene drei Orte nur wenig von einander entfernt sind, so wird jene Fläche stets eine sehr kleine Grösse, und zwar von der dritten Ordnung bleiben, wenn $N'-N$, $N''-N'$ als kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden. Hieraus geht zugleich hervor, dass, falls eine oder mehre der Grössen r, r', r'', N, N', N'' mit, wenn auch nur geringen Fehlern behaftet sind, hieraus ein sehr grosser Irrthum bei Ermittelung von p entstehen kann. Es lässt daher diese Rechnungsmethode zur Bestimmung der Bahn-Dimensionen niemals grosse Schärfe zu, wenn nicht die drei heliocentrischen Orte durch beträchtliche Zwischenräume von einander entfernt sind.

Sobald übrigens der halbe Parameter p gefunden ist, so werden e und Π durch Combination von zwei irgend welcher der Gleichungen (I) vermittelst der Methode des Art. 79 bestimmt.

83.

Will man die Auflösung dieser Aufgabe lieber mit Berechnung des Winkels Π beginnen, so dient dazu folgende Methode. Man ziehe von der zweiten der Gleichungen (I) die dritte ab, von der ersten die dritte, von der ersten die zweite, wodurch folgende drei neue Gleichungen entstehen:

$$\text{(II)}\qquad \frac{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(N''-N')}=\frac{e}{p}\sin(\tfrac{1}{2}N'+\tfrac{1}{2}N''-\Pi)$$

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(N''-N)}=\frac{e}{p}\sin(\tfrac{1}{2}N+\tfrac{1}{2}N''-\Pi)$$

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}}{2\sin\frac{1}{2}(N'-N)}=\frac{e}{p}\sin(\tfrac{1}{2}N+\tfrac{1}{2}N'-\Pi).$$

Nach Satz II. Art. 78 geben irgendwelche zwei dieser Gleichungen Π und $\frac{e}{p}$, (88) woraus man durch jede der Gleichungen (I) auch e und p erhält. Wählt man die dritte, im Art. 78, II behandelte Auflösung, so giebt die Combination der ersten und dritten Gleichung folgende Rechnungsart. Nach Bestimmung des Hülfswinkels ζ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\zeta=\frac{\frac{r'}{r}-1}{1-\frac{r'}{r''}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(N''-N')}{\sin\frac{1}{2}(N'-N)},$$

ist

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}N+\tfrac{1}{2}N'+\tfrac{1}{4}N''-\Pi)=\operatorname{tang}(45^\circ+\zeta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(N''-N).$$

Durch Vertauschung des zweiten Ortes mit dem ersten oder dritten erhält man zwei andere völlig analoge Auflösungen. Da bei Anwendung dieser Methode die Formeln für $\frac{e}{p}$ etwas verwickelter ausfallen, so wird man es vorziehen, e und p durch die Methode des Art. 80 aus zwei jener Gleichungen (I) zu ermitteln. Im Uebrigen muss die Zweideutigkeit bei Bestimmung von Π mittelst der Tangente des Winkels $\frac{1}{4}N+\frac{1}{2}N'+\frac{1}{4}N''-\Pi$ so entschieden werden, dass e eine positive Grösse wird; denn es ist klar, dass man für e entgegengesetzte Werthe erhalten muss, wenn für Π Werthe genommen werden, die um 180° verschieden sind. Dagegen ist das Zeichen von p von dieser Zweideutigkeit unabhängig, und der Werth von p kann nur dann negativ herauskommen, wenn die drei gegebenen Punkte in dem von der Sonne abgewandten Theile der Hyperbel liegen, ein Fall, den ich, da er den Gesetzen der Natur zuwider ist, hier unberücksichtigt lasse.

Das, was man bei Anwendung der ersten Methode in Art. 78, II erst nach mühsamen Substitutionen erhält, kann im gegenwärtigen Falle auf folgende Art bequemer gefunden werden:

Man multiplicire von den Gleichungen (II) die erste mit $\cos\frac{1}{2}(N''-N')$, die dritte mit $\cos\frac{1}{2}(N'-N)$ und ziehe das zweite Product von dem ersten ab. Dann erhält man bei gehöriger Anwendung des Satzes I. Art. 78 [wenn man nämlich in der zweiten Formel $A=\frac{1}{2}(N''-N')$, $B=\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N''-\Pi$, $C=\frac{1}{2}(N-N')$ setzt] folgende Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(N''-N')-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(N'-N)$$
$$=\frac{e}{p}\sin\tfrac{1}{2}(N''-N)\cos(\tfrac{1}{2}N+\tfrac{1}{2}N''-\Pi).$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der zweiten der Gleichungen (II), finden sich Π und $\frac{e}{p}$ und zwar Π mittelst der Formel

(89) $$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}N+\tfrac{1}{2}N''-\Pi)=\frac{\frac{r'}{r}-\frac{r'}{r''}}{\left(1-\frac{r'}{r''}\right)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(N''-N')-\left(\frac{r'}{r}-1\right)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(N'-N)}.$$

Auch hieraus lassen sich zwei andere ganz analoge Formeln durch Vertauschung des zweiten Ortes mit dem ersten oder dritten ableiten.

84.

Da aus zwei, ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Radien Vectoren und einem Bahnelemente die ganze Bahn sich bestimmen lässt, so wird man durch jene Daten auch die Zeit ermitteln können, innerhalb deren der Himmelskörper sich von dem einen Radius Vector zum andern bewegt, wenn man die Masse des Körpers entweder vernachlässigt oder wenigstens als bekannt betrachtet: wobei wir bei der ersteren Annahme stehen bleiben wollen, auf welche die andere leicht sich reduciren lässt. Es ist also umgekehrt klar, dass, wenn zwei Radien Vectoren ihrer Grösse und Lage nach gegeben sind und auch zugleich die Zeit, innerhalb welcher der Himmelskörper den zwischen ihnen liegenden Raum beschreibt, man hieraus die ganze Bahn bestimmen kann. Jedoch wird diese, zu den wichtigsten in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper gehörende Aufgabe nicht so leicht gelöst, da der Ausdruck der Zeit durch die Elemente transcendent, und überdies äusserst complicirt ist. Diese Aufgabe ist es mithin um so mehr werth, auf das sorgfältigste abgehandelt zu werden. Es wird daher hoffentlich dem Leser nicht unangenehm sein, wenn ich ausser einer weiter unten zu gebenden Auflösungsart, die nichts zu wünschen übrig lassen dürfte, auch diejenige der Vergessenheit entreisse, welche ich, bevor jene sich darbot, häufig angewendet habe. Es ist stets nützlich, die schwierigeren Probleme auf verschiedenen Wegen in Angriff zu nehmen, und den guten Weg nicht zu verachten, wenn man auch den besseren vorzieht. Ich beginne also mit der Auseinandersetzung jener früheren Methode.

85.

Ich will die Symbole r, r', N, N', p, e, Π in derselben Bezeichnung beibehalten, die vorher damit verbunden war; den Unterschied $N'-N$ bezeichne ich mit Δ, und die Zeit, innerhalb deren der Himmelskörper sich vom ersten nach dem späteren Orte bewegt, mit t. Nun ist klar, dass, wenn ein genäherter Werth irgend einer der Grössen p, e, Π bekannt wird, auch die beiden übrigen daraus sich bestimmen lassen, und sodann die der Bewegung vom ersten nach dem zweiten Orte entsprechende Zeit mittelst der im ersten Abschnitte erklärten Methoden. Wenn diese Zeit mit der angenommenen Zeit t übereinstimmt, so ist dann schon der vorausgesetzte Werth von p, e oder Π der wahre Werth, und die ganze Bahn schon gefunden. Ist diese Uebereinstimmung nicht vorhanden, so wird die mit einem anderen, vom ersten wenig verschiedenen Werthe wiederholte Rechnung zeigen, eine wie grosse Veränderung in dem Werthe der Zeit einer geringen Aenderung in dem Werthe
von p, e, Π entspricht, woraus man durch einfache Interpolation einen ver- (90)
besserten Werth ermittelt. Bei der hiermit von Neuem wiederholten Rechnung wird man entweder eine mit der Voraussetzung völlig übereinstimmende, oder eine nur so wenig davon verschiedene Zeit erhalten, dass man mit neuen Verbesserungen die Uebereinstimmung so genau machen kann, als es nur die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zulassen.

Die Aufgabe wird also darauf zurückgeführt, dass man zeigt, wie für den Fall, wo die Bahn noch vollständig unbekannt ist, ein wenigstens genäherter

Werth einer der Grössen p, e, Π sich finden lässt. Ich will jetzt eine Methode abhandeln, wodurch der Werth von p mit so grosser Schärfe ermittelt wird, dass er wenigstens für kleine Werthe von Δ keiner Verbesserung mehr bedarf, und dass so durch die erste Rechnung die ganze Bahn schon mit der Genauigkeit, welche die gewöhnlichen Tafeln erlauben, bestimmt wird. Man wird aber schwerlich in einem anderen Falle auf diese Methode zu recurriren brauchen, als wenn Δ mässige Werthe besitzt, da die Bestimmung einer noch gänzlich unbekannten Bahn wegen der äusserst intricaten Complication des Problems kaum anders als aus Beobachtungen unternommen werden mag, die nicht zu sehr von einander entfernt sind, oder vielmehr aus solchen Beobachtungen, denen keine zu starke heliocentrische Bewegung entspricht.

86.

Bezeichnet man den der wahren Anomalie $\nu - \Pi$ entsprechenden unbestimmten oder veränderlichen Radius Vector mit ϱ, so ist die Fläche des von dem Himmelskörper innerhalb der Zeit t beschriebenen Sectors $= \frac{1}{2}\int \varrho\varrho\, \mathrm{d}\nu$, wobei dies Integral von $\nu = N$ bis zu $\nu = N'$ ausgedehnt ist, und somit $kt\sqrt{p} = \int \varrho\varrho\, \mathrm{d}\nu$ (wo k in der Bezeichnung des Art. 6 genommen wird). Durch die von Cotes entwickelten Formeln ist bereits bekannt, dass, wenn φx irgend eine Function von x ausdrückt, man einen beständig mehr genäherten Werth des (zwischen den Grenzen $x = u$ und $x = u + \Delta$ genommenen) Integrals $\int \varphi x \,.\, \mathrm{d}x$ erhält durch die Formeln

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left(\varphi u + \varphi(u+\Delta)\right)$$

$$\tfrac{1}{6}\Delta\left(\varphi u + 4\varphi(u+\tfrac{1}{2}\Delta) + \varphi(u+\Delta)\right)$$

$$\tfrac{1}{8}\Delta\left(\varphi u + 3\varphi(u+\tfrac{1}{3}\Delta) + 3\varphi(u+\tfrac{2}{3}\Delta) + \varphi(u+\Delta)\right), \text{ etc.}$$

Für unseren Zweck reicht es aus, bei den beiden ersten Formeln stehen zu bleiben.

Vermittelst der ersten Formel haben wir bei unserer Aufgabe $\int \varrho\varrho \,\mathrm{d}\nu =$ $\frac{1}{2}\varDelta(rr + r'r') = \frac{\varDelta rr'}{\cos 2\omega}$, wenn man $\frac{r'}{r} = \operatorname{tang}(45^\circ + \omega)$ setzt. Ein erster genäherter Werth für $\sqrt{p}$ wird deshalb sein $= \frac{\varDelta rr'}{kt\cos 2\omega}$, den ich $= 3\alpha$ setze.

Durch die zweite Formel erhält man genauer (91)

$$\int \varrho\varrho \,\mathrm{d}\nu = \tfrac{1}{6}\varDelta(rr + r'r' + 4RR),$$

wobei R denjenigen Radius Vector bezeichnet, welcher der in der Mitte liegenden Anomalie $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi$ entspricht. Wenn man nun p durch r, R, r', N, $N + \frac{1}{2}\varDelta$, $N + \varDelta$ nach Anleitung der Formel des Art. 82 ausdrückt, so folgt:

$$p = \frac{4\sin\frac{1}{4}\varDelta^2 \sin\frac{1}{2}\varDelta}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\sin\frac{1}{2}\varDelta - \frac{1}{R}\sin\varDelta}, \text{ und hieraus}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\varDelta}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{2\sin\frac{1}{4}\varDelta^2}{p} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{(rr'\cos 2\omega)}} - \frac{2\sin\frac{1}{4}\varDelta^2}{p}.$$

Setzt man daher

$$\frac{2\sin\frac{1}{4}\varDelta^2\sqrt{(rr'\cos 2\omega)}}{\cos\omega} = \delta, \quad \text{so wird } R = \frac{\cos\frac{1}{2}\varDelta\sqrt{(rr'\cos 2\omega)}}{\cos\omega\left(1 - \frac{\delta}{p}\right)},$$

woraus man den zweiten genäherten Werth von $\sqrt{p}$ erhält:

$$\sqrt{p} = \alpha + \frac{2\alpha\cos\frac{1}{2}\varDelta^2\cos 2\omega^2}{\cos\omega^2\left(1 - \frac{\delta}{p}\right)^2} = \alpha + \frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{\delta}{p}\right)^2},$$

wobei $2\alpha\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\varDelta\cos 2\omega}{\cos\omega}\right)^2 = \varepsilon$ gesetzt ist. Schreibt man deshalb π für $\sqrt{p}$, so wird π durch die Gleichung $(\pi - \alpha)\left(1 - \frac{\delta}{\pi\pi}\right)^2 = \varepsilon$ bestimmt, welche, gehörig entwickelt, bis zum fünften Grade steigen würde. Setzt man $\pi = q + \mu$, so dass q ein genäherter Werth von π ist, und μ eine sehr kleine Grösse, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so entsteht aus dieser Substitution

$$(q - \alpha)\left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)^2 + \mu\left\{\left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)^2 + \frac{4\delta(q - \alpha)}{q^3}\left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)\right\} = \varepsilon, \text{ oder}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon q^5 - (qq - \alpha q)(qq - \delta)^2}{(qq - \delta)(q^3 + 3\delta q - 4\alpha\delta)}, \text{ und daher}$$

$$\pi = \frac{\varepsilon q^5 + (qq-\delta)(\alpha qq + 4\delta q - 5\alpha\delta)q}{(qq-\delta)(q^3+3\delta q - 4\alpha\delta)}.$$

Bei unserer Aufgabe haben wir bereits einen genäherten Werth für π, nämlich $= 3\alpha$, der, in die vorangehende Formel für q eingeschaltet, den verbesserten Werth liefert

$$\pi = \frac{243\alpha^4\varepsilon + 3\alpha(9\alpha\alpha-\delta)(9\alpha\alpha+7\delta)}{(9\alpha\alpha-\delta)(27\alpha\alpha+5\delta)}.$$

Setzt man daher $\frac{\delta}{27\alpha\alpha} = \beta$, $\frac{\varepsilon}{(1-3\beta)\alpha} = \gamma$, so nimmt die Formel folgende

(92) Gestalt an: $\pi = \frac{\alpha(1+\gamma+21\beta)}{1+5\beta}$, und alle zur Auflösung der Aufgabe nothwendigen Operationen sind in nachstehenden fünf Formeln enthalten:

I. $\frac{r'}{r} = \operatorname{tang}(45^0 + \omega)$

II. $\frac{\varDelta rr'}{3kt\cos 2\omega} = \alpha$

III. $\frac{2\sin\frac{1}{4}\varDelta^2 \sqrt{(rr'\cos 2\omega)}}{27\alpha\alpha\cos\omega} = \beta$

IV. $\frac{2\cos\frac{1}{2}\varDelta^2\cos 2\omega^2}{(1-3\beta)\cos\omega^2} = \gamma$

V. $\frac{\alpha(1+\gamma+21\beta)}{1+5\beta} = \sqrt{p}$.

Will man etwas von der Genauigkeit dieser Formeln opfern, so lassen sich noch einfachere Ausdrücke entwickeln. — Wenn man nämlich $\cos\omega$ und $\cos 2\omega = 1$ macht und den Werth von $\sqrt{p}$ in eine nach den Potenzen von $\varDelta$ fortschreitende Reihe entwickelt, so folgt, unter Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen,

$$\sqrt{p} = \alpha\left(3 - \tfrac{1}{2}\varDelta\varDelta + \frac{\varDelta\varDelta\sqrt{rr'}}{18\alpha\alpha}\right),$$

wo $\varDelta$ in Theilen des Radius auszudrücken ist. Macht man deshalb $\frac{\varDelta rr'}{kt} = \sqrt{p'}$, so erhält man:

VI. $p = p'\left(1 - \tfrac{1}{3}\varDelta\varDelta + \frac{\varDelta\varDelta\sqrt{rr'}}{3p'}\right)$.

Entwickelt man auf ähnliche Weise $\sqrt{p}$ in eine nach den Potenzen von $\sin\varDelta$ fortschreitende Reihe und setzt dabei $\frac{rr'\sin\varDelta}{kt} = \sqrt{p''}$, so entsteht:

$$\text{VII.}\quad \sqrt{p} = \left(1 + \frac{\sin \varDelta^2 \sqrt{rr'}}{6p''}\right)\sqrt{p''}, \quad \text{oder}$$

$$\text{VIII.}\quad p = p'' + \tfrac{1}{3}\sin \varDelta^2 \sqrt{rr'}.$$

Die Formeln VII und VIII kommen mit denen überein, welche Euler in „*Theoria motus planetarum et cometarum*“ abgehandelt hat, die Formel VI aber mit der in „*Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la comète de 1769, p. 80*“ gegebenen.

87.

Nachfolgende Beispiele werden den Gebrauch der obigen Vorschriften erläutern und es lässt sich daraus zugleich der Grad der Genauigkeit schätzen.

I. Es sei $\log r = 0{,}330\,7640$, $\log r' = 0{,}322\,2239$, $\varDelta = 7^\circ\,34'\,53''73$ (93)
$= 272\,93''73$, $t = 21{,}933\,91$ Tage. Hieraus findet sich $\omega = -33'\,47''90$ und die weitere Rechnung steht dann so:

$\log \varDelta$	4,436 0629	$\frac{1}{2}\log rr' \cos 2\omega$	0,326 4519
$\log rr'$	0,652 9879	$2 \log \sin \frac{1}{4}\varDelta$	7,038 9972
C. $\log 3k$	5,972 8722	$\log \frac{2}{27}$	8,869 6662
C. $\log t$	8,658 8840	C. $\log \alpha\alpha$	0,558 2180
C. $\log \cos 2\omega$	0,000 0840	C. $\log \cos \omega$	0,000 0210
$\log \alpha$	9,720 8910	$\log \beta$	6,793 3543
		$\beta =$	0,000 621 3757
$\log 2$	0,301 0300		
$2 \log \cos \frac{1}{2}\varDelta$	9,998 0976	$1 + \gamma + 21\beta =$	3,007 4471
$2 \log \cos 2\omega$	9,999 8320	$\log$	0,478 1980
C. $\log(1 - 3\beta)$	0,000 8103	$\log \alpha$	9,720 8910
2 C. $\log \cos \omega$	0,000 0420	C. $\log(1 + 5\beta)$	9,998 6528
$\log \gamma$	0,299 8119	$\log \sqrt{p}$	0,197 7418
$\gamma =$	1,994 3982	$\log p$	0,395 4836
$21\beta =$	0,013 0489.		

Dieser Werth für $\log p$ weicht vom wahren kaum um eine Einheit in der siebenten Stelle ab. Die Formel VI giebt in diesem Beispiele $\log p = 0{,}395\,4822$, Formel VII liefert $0{,}395\,4780$; aus Formel VIII endlich folgt $0{,}395\,4754$.

II. Es sei $\log r = 0{,}428\,2792$, $\log r' = 0{,}406\,2033$, $\varDelta = 62^\circ\,55'\,16''64$, $t = 259{,}884\,77$ Tage. Daraus wird erhalten $\omega = -1^\circ\,27'\,20''14$, $\log \alpha = 9{,}748\,2348$, $\beta = 0{,}0453\,5216$, $\gamma = 1{,}681\,127$, $\log \sqrt{p} = 0{,}219\,8027$, $\log p = 0{,}439\,6054$, ein Werth, der um 187 Einheiten der siebenten Decimale kleiner als der richtige ist. Denn der wahre Werth in diesem Beispiele ist 0,439 6237; aus Formel VI findet sich 0,436 8730; aus VII 0,415 9824, aus VIII 0,405 1103. Hier sind die beiden letzten Werthe von dem wahren so sehr verschieden, dass sie nicht einmal die Stelle einer Annäherung vertreten können.

88.

Die Auseinandersetzung der zweiten Methode wird uns Gelegenheit zur Darlegung einer Menge neuer und eleganter Relationen darbieten, und da dieselben bei den verschiedenen Arten der Kegelschnitte verschiedene Gestalten annehmen, so will ich das Einzelne getrennt von einander behandeln und mit der Ellipse beginnen.

(94) Es mögen zweien Orten die wahren Anomalien v, v' entsprechen (wobei v die der Zeit nach vorangehende ist), die excentrischen Anomalien seien E und E', die Radien Vectoren r, r'; ferner sei p der halbe Parameter, $e = \sin\varphi$ die Excentricität, a die halbe grosse Axe, t die Zeit, innerhalb deren die Bewegung vom ersten zum zweiten Orte vor sich geht. Endlich setze ich

$$v' - v = 2f,\quad v' + v = 2F,\quad E' - E = 2g,\quad E' + E = 2G,\quad a\cos\varphi = \frac{p}{\cos\varphi} = b.$$

Dann werden aus Combination der Formeln V und VI Art. 8 leicht folgende Gleichungen abgeleitet:

$$[1]\qquad b\sin g = \sin f \,.\, \sqrt{rr'}$$

$$[2]\qquad b\sin G = \sin F \,.\, \sqrt{rr'}$$

$$p\cos g = \left(\cos\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v' \,.\, (1+e) + \sin\tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}v' \,.\, (1-e)\right)\sqrt{rr'},\ \text{oder}$$

$$[3]\qquad p\cos g = (\cos f + e\cos F)\sqrt{rr'},\ \text{und ebenso}$$

$$[4]\qquad p\cos G = (\cos F + e\cos f)\sqrt{rr'}.$$

Aus Combination der Gleichungen [3] und [4] entsteht ferner

$$[5]\qquad \cos f \,.\, \sqrt{rr'} = (\cos g - e\cos G)\,a$$

$$[6]\qquad \cos F \,.\, \sqrt{rr'} = (\cos G - e\cos g)\,a.$$

Durch Formel III Art. 8 erhält man

$$[7] \quad r' - r = 2ae\sin g\sin G$$

$$r' + r = 2a - 2ae\cos g\cos G = 2a\sin g^2 + 2\cos f\cos g\sqrt{rr'},$$

woraus

$$[8] \quad a = \frac{r + r' - 2\cos f\cos g\sqrt{rr'}}{2\sin g^2}.$$

Setzt man

$$[9] \quad \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2\cos f} = 1 + 2l, \text{ so ist}$$

$$[10] \quad a = \frac{2(l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

und $\sqrt{a} = \pm\frac{\sqrt{(2(l + \sin\frac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'})}}{\sin g}$, wo das obere, oder untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Die Formel XII Art. 8 liefert uns die Gleichung

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = E' - e\sin E' - E + e\sin E = 2g - 2e\sin g\cos G = 2g - \sin 2g + 2\cos f\sin g\frac{\sqrt{rr'}}{a}.$$

Substituirt man für a in diese Gleichung seinen Werth aus [10] und setzt der Kürze wegen

$$[11] \quad \frac{kt}{2^{\frac{3}{2}}\cos f^{\frac{3}{2}}(rr')^{\frac{3}{4}}} = m, \tag{95}$$

so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$[12] \quad \pm m = (l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}\right),$$

wo für m das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Wenn die heliocentrische Bewegung zwischen 180° und 360° vor sich geht, oder, allgemeiner gesprochen, wenn $\cos f$ negativ ist, so würde die Grösse m imaginär herauskommen, falls sie durch Formel [11] bestimmt wird, und l würde negativ werden. Um dies zu vermeiden, nehme ich in diesem Falle statt der Gleichungen [9] und [11] nachstehende

$$[9^*] \quad \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2\cos f} = 1 - 2L$$

$$[11^*]\quad \frac{kt}{2^{\frac{3}{2}}(-\cos f)^{\frac{3}{2}}(rr')^{\frac{3}{4}}}=M,$$

woraus man statt [10] und [12] folgende erhält:

$$[10^*]\quad a=\frac{-2(L-\sin\tfrac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

$$[12^*]\quad \pm M=-(L-\sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}}+(L-\sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3}\Big),$$

wo das zweifelhafte Zeichen ebenso wie vorher entschieden wird.

89.

Es liegt uns jetzt ein doppeltes Geschäft ob:

1) aus der transcendenten, eine directe Auflösung nicht zulassenden Gleichung [12] die unbekannte Grösse g so bequem als möglich zu bestimmen;

2) aus dem gefundenen Winkel g die Elemente selbst abzuleiten.

Bevor wir hiezu schreiten, wollen wir eine gewisse Umgestaltung angeben, mittelst deren die Berechnung der Hülfsgrösse l oder L schneller bewerkstelligt wird, und überdies mehre später zu entwickelnde Formeln auf eine elegantere Gestalt zurückgeführt werden.

Indem man nämlich den, durch die Formel $\sqrt[4]{\frac{r'}{r}}=\operatorname{tang}(45^0+\omega)$ zu bestimmenden Hülfswinkel ω einführt, wird

(96) $$\sqrt{\frac{r'}{r}}+\sqrt{\frac{r}{r'}}=2+\big(\operatorname{tang}(45^0+\omega)-\operatorname{cotang}(45^0+\omega)\big)^2=2+4\operatorname{tang}2\omega^2;$$

woraus man erhält:

$$l=\frac{\sin\frac{1}{2}f^2}{\cos f}+\frac{\operatorname{tang}2\omega^2}{\cos f},\qquad L=-\frac{\sin\frac{1}{2}f^2}{\cos f}-\frac{\operatorname{tang}2\omega^2}{\cos f}.$$

90.

Ich betrachte zuerst den Fall, wo aus Auflösung der Gleichung [12] ein nicht zu grosser Werth von g sich ergiebt, so dass man $\frac{2g-\sin 2g}{\sin g^3}$ in eine, nach den Potenzen von $\sin\frac{1}{2}g$ fortschreitende Reihe entwickeln kann. Der Zähler dieses Ausdrucks, den ich mit X bezeichne, wird

$$= \tfrac{32}{3} \sin\tfrac{1}{2}g^3 - \tfrac{16}{5} \sin\tfrac{1}{2}g^5 - \tfrac{4}{7} \sin\tfrac{1}{2}g^7 - \text{ etc.}$$

Der Nenner aber

$$= 8\sin\tfrac{1}{2}g^3 - 12\sin\tfrac{1}{2}g^5 + 3\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \text{ etc.}$$

Deshalb nimmt X die Form an:

$$\tfrac{4}{3} + \tfrac{8}{5}\sin\tfrac{1}{2}g^2 + \tfrac{64}{35}\sin\tfrac{1}{2}g^4 + \text{ etc.}$$

Um nun das Gesetz der Progression der Coefficienten zu finden, differentiire ich die Gleichung

$$X\sin g^3 = 2g - \sin 2g,$$

woraus hervorgeht:

$$3X\cos g\sin g^2 + \sin g^3 \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}g} = 2 - 2\cos 2g = 4\sin g^2.$$

Setzt man ferner

$$\sin\tfrac{1}{2}g^2 = x,$$

so wird

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}g} = \tfrac{1}{2}\sin g,$$

und daher

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{8 - 6X\cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3X(1-2x)}{2x(1-x)},$$

mithin

$$(2x - 2xx)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = 4 - (3 - 6x)X.$$

Setzt man also:

$$X = \tfrac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{ etc.}),$$

so folgt die Gleichung:

$$\tfrac{8}{3}\big(\alpha x + (2\beta - \alpha)xx + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \text{ etc.}\big) = (8 - 4\alpha)x$$
$$+ (8\alpha - 4\beta)xx + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \text{ etc.},$$

welche identisch sein muss. Hieraus bekomme ich

$$\alpha = \tfrac{6}{5},\ \beta = \tfrac{8}{7}\alpha,\ \gamma = \tfrac{10}{9}\beta,\ \delta = \tfrac{12}{11}\gamma \text{ etc.},$$

wo das Gesetz der Progression klar ist. Man hat daher

$$X = \tfrac{4}{5} + \frac{4.6}{3.5}x + \frac{4.6.8}{3.5.7}xx + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}x^3 + \frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11}x^4 + \text{ etc.}$$

Diese Reihe lässt sich in folgenden continuirten Bruch umformen: (97)

$$X = \cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \cfrac{\frac{6}{5}x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5\,.\,7}x}{1 - \cfrac{\frac{5\,.\,8}{7\,.\,9}x}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,4}{9\,.\,11}x}{1 - \cfrac{\frac{7\,.\,10}{11\,.\,13}x}{1 - \cfrac{\frac{3\,.\,6}{13\,.\,15}x}{1 - \cfrac{\frac{9\,.\,12}{15\,.\,17}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}}$$

Das Gesetz, nach welchem die Coefficienten $\frac{6}{5}$, $-\frac{2}{5\,.\,7}$, $\frac{5\,.\,8}{7\,.\,9}$, $\frac{1\,.\,4}{9\,.\,11}$ etc. fortschreiten, ist klar, denn das n^{te} Glied dieser Reihe wird, wenn n gerade ist $= \frac{n-3\,.\,n}{2n+1\,.\,2n+3}$, wenn n ungerade ist $= \frac{n+2\,.\,n+5}{2n+1\,.\,2n+3}$. Die weitere Entwickelung dieses Gegenstandes*) würde uns zu weit von unserem Zwecke entfernen. Setzt man nun

$$\cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5\,.\,7}x}{1 - \cfrac{\frac{5\,.\,8}{7\,.\,9}x}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,4}{9\,.\,11}x}{1 - \text{etc.}}}}} = x - \xi,$$

so wird $X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x-\xi)}$, und $\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X}$, oder

$$\xi = \frac{\sin g^3 - \frac{3}{4}(2g - \sin 2g)(1 - \frac{6}{5}\sin\frac{1}{2}g^2)}{\frac{9}{10}(2g - \sin 2g)}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist eine Grösse von der siebenten Ordnung, der Nenner von der dritten und daher ξ von der vierten, wenn nämlich g als Grösse der ersten, oder x als von der zweiten Ordnung betrachtet wird. Hieraus lässt sich schliessen, dass diese Formel zur genauen numerischen Berechnung von ξ nicht zweckmässig ist, sobald g keinen sehr beträchtlichen Winkel ausdrückt. Dann aber werden zu diesem Zwecke die nachfolgenden Formeln

*) Wegen des Zusatzes zu den Artt. 90 u. 100 vergleiche den Anhang. *Anmerkung des Uebersetzers.*

bequem benutzt, die von einander durch die vertauschte Ordnung der Zähler bei den gebrochenen Coefficienten verschieden sind, und deren erstere aus dem angenommenen Werthe für $x - \xi$ unschwer sich herleiten lässt. (Die Ableitung der Zweiten setzt einige weniger nahe liegende Umformungen voraus, die ich bei anderer Gelegenheit erklären will.)

$$[13]\quad \xi = \cfrac{\frac{2}{35}xx}{1 + \frac{2}{35}x - \cfrac{\frac{40}{63}x}{1 - \cfrac{\frac{4}{99}x}{1 - \cfrac{\frac{70}{143}x}{1 - \cfrac{\frac{18}{195}x}{1 - \cfrac{\frac{108}{255}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}, \qquad (98)$$

$$\text{oder}\quad \xi = \cfrac{\frac{2}{35}xx}{1 - \frac{18}{35}x - \cfrac{\frac{4}{63}x}{1 - \cfrac{\frac{40}{99}x}{1 - \cfrac{\frac{18}{143}x}{1 - \cfrac{\frac{70}{195}x}{1 - \cfrac{\frac{40}{255}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}$$

In der dritten, diesem Werke angehängten Tafel findet man für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 0,3$ (nach einzelnen Tausendtheilen) die entsprechenden Werthe von ξ in siebenstelligen Decimalen berechnet. Diese Tafel zeigt auf den ersten Blick die Kleinheit von ξ bei mässigen Werthen für g. Z. B. für $E' - E = 10^0$, oder $g = 5^0$, wo $x = 0,00195$, wird $\xi = 0,000\,0002$. Es würde überflüssig sein, diese Tafel noch weiter fortzusetzen, da dem Grenzwerthe $x = 0,3$ ein $g = 66^0\,25'$, oder $E' - E = 132^0\,50'$ entspricht. Uebrigens soll die dritte Columne der Tafel, welche diejenigen Werthe von ξ, die den negativen Werthen von x entsprechen, enthält, weiter unten erklärt werden.

91.

Die Gleichung [12], bei welcher in dem hier behandelten Falle offenbar das obere Zeichen gilt, erhält durch Einführung der Grösse ξ folgende Gestalt:

$$m = (l+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x-\xi)}.$$

Setzt man mithin $\sqrt{(l+x)} = \frac{m}{y}$, und

[14] $\frac{mm}{\frac{5}{6}+l+\xi} = h$, so folgt nach den gehörigen Reductionen

[15] $h = \frac{(y-1)yy}{y+\frac{1}{9}}.$

Kann daher h als eine bekannte Grösse angesehen werden, so wird daraus y mittelst einer cubischen Gleichung bestimmt und es wird dann sein

(99) [16] $x = \frac{mm}{yy} - l.$

Wenn nun h auch die noch unbekannte Grösse ξ in sich schliesst, so darf man doch letztere bei der ersten Annäherung vernachlässigen und $\frac{mm}{\frac{5}{6}+l}$ für h annehmen, weil wenigstens in dem hier abgehandelten Falle ξ stets eine sehr kleine Grösse ist. Hieraus leitet man durch die Gleichungen [15] und [16] y und x ab, und aus x erhält man durch Tafel III das ξ, mit dessen Hülfe die Formel [14] einen verbesserten Werth für h liefert, womit die wiederholte Rechnung verbesserte Werthe für x und y giebt. Gemeiniglich weichen diese so wenig von den vorhergehenden Werthen ab, dass, wenn ξ von Neuem aus der Tafel III genommen wird, es nicht vom ersten Werthe verschieden ist. Andernfalls muss man die Rechnung abermals wiederholen, bis sie weiter keine Aenderung zu erfahren hat. Sobald die Grösse x gefunden ist, erhält man g durch die Formel $\sin\frac{1}{2}g^2 = x$.

Diese Vorschriften beziehen sich auf den ersten Fall, wo $\cos f$ positiv ist. Im andern Falle, wo $\cos f$ negativ, setzt man $\sqrt{(L-x)} = \frac{M}{Y}$ und

[14*] $\frac{MM}{L-\frac{5}{6}-\xi} = H$, wodurch die Gleichung [12*] nach gehöriger Reduction übergeht in:

$$[15^*] \qquad H = \frac{(Y+1)\,YY}{Y-\frac{1}{9}}.$$

Durch diese cubische Gleichung kann man Y aus H bestimmen und daraus wieder x durch die Gleichung

$$[16^*] \qquad x = L - \frac{MM}{YY}.$$

Bei der ersten Annäherung wird für H der Werth $\frac{MM}{L-\frac{5}{6}}$ genommen. Mit einem hieraus für x mittelst der Gleichungen [15*] und [16*] abgeleiteten Werthe wird ξ aus der dritten Tafel genommen. Hieraus erhält man durch Formel [14*] einen verbesserten Werth von H, mit dem man die Rechnung in derselben Weise wiederholt. Endlich wird aus x der Winkel g in derselben Weise bestimmt wie im ersten Falle.

92.

Wiewohl die Gleichungen [15] und [15*] in gewissen Fällen drei reelle Wurzeln haben können, so wird es doch niemals zweifelhaft sein, welche man in unserer Aufgabe wählen muss. Denn da h offenbar eine positive Grösse ist, so lässt sich aus der Theorie der Gleichungen leicht schliessen, dass die Gleichung [15] eine einzige positive Wurzel habe, entweder nebst zwei imaginären oder nebst zwei negativen. Da nun $y = \frac{m}{\sqrt{(l+x)}}$ nothwendig eine positive Grösse (100) sein muss, so sieht man, dass hier keine Ungewissheit bleibt. — Was aber die Gleichung [15*] betrifft, so bemerke ich zuerst, dass L nothwendig grösser als Eins ist, wie sich leicht erweisen lässt, wenn die in Art. 89 gegebene Gleichung unter die Form $L = 1 + \frac{\cos\frac{1}{2}f^2}{-\cos f} + \frac{\operatorname{tang} 2\omega^2}{-\cos f}$ gebracht wird. — Setzt man ferner in der Gleichung [12*] $Y\sqrt{(L-x)}$ statt M, so erhält man $Y+1 = (L-x)X$ und daher $Y+1 > (1-x)X > \frac{4}{3} + \frac{4}{3.5}x + \frac{4.6}{3.5.7}xx + \frac{4.6.8}{3.5.7.9}x^3 + \text{etc.} > \frac{4}{3}$, und folglich $Y > \frac{1}{3}$. Setzt man also $Y = \frac{1}{3} + Y'$, so ist nothwendig Y' eine positive Grösse, die Gleichung [15*] aber geht sodann in folgende über: $Y'^3 + 2Y'Y' + (1-H)Y' + \frac{4}{27} - \frac{2}{9}H = 0$, von der sich aus der Theorie der Gleichungen leicht zeigen lässt, dass sie mehre positive Wurzeln nicht haben könne. Daraus geht hervor, dass Gleichung [15*] eine einzige Wurzel hat, die grösser als $\frac{1}{3}$ ist (wenn man wenigstens annimmt, dass die Aufgabe in der That auflösbar sein soll) und die man unter Verwerfung der übrigen in unserer Aufgabe annehmen muss.

93.

Um die Auflösung der Gleichung [15] für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fälle so bequem als möglich zu machen, füge ich im Anhange eine besondere Tafel (Tafel II) bei, welche die, den Werthen von $h = 0$ bis $h = 0{,}6$ entsprechenden Logarithmen von yy mit der grössten Sorgfalt siebenstellig berechnet liefert. Das Argument h zwischen 0 und 0,04 schreitet vor in einzelnen Zehntausendtheilen, wodurch die zweiten Differenzen von $\log yy$ verschwindend gemacht sind, so dass wenigstens in diesem Theile der Tafel die einfache Interpolation genügt. Da aber die Tafel, wenn sie allenthalben von dieser Ausdehnung hätte sein sollen, sehr umfangreich geworden sein würde, so musste sie von $h = 0{,}04$ an bis zum Schlusse nur durch die einzelnen Tausendtheile fortschreiten. In diesem zweiten Theile muss daher Rücksicht auf die zweiten Differenzen genommen werden, wenn man wenigstens Irrthümer von einigen Einheiten in der siebenten Stelle vermeiden will. Uebrigens sind die kleineren Werthe von h in der Praxis bei Weitem die häufigsten.

Die Auflösung der Gleichungen [15] und [15*] kann, wenn h die Grenze der Tafel überschreitet, unschwer durch eine indirecte Methode oder durch andere hinlänglich bekannte Methoden geschehen. Uebrigens ist noch zu bemerken, dass ein kleiner Werth von g mit einem negativen Werthe für $\cos f$ nur bei sehr excentrischen Bahnen bestehen kann, wie aus der unten in Art. 95 zu behandelnden Gleichung [20] hervorgehen wird. (Jene Gleichung zeigt, dass, wenn $\cos f$ negativ ist, φ wenigstens grösser sein müsse, als $90^0 - g$.)

94. (101)

Die in den Art. 91, 92, 93 erklärte Behandlung der Gleichungen [12] und [12*] stützt sich auf die Voraussetzung, dass der Winkel g nicht gar zu gross ist, wenigstens innerhalb der Grenze $66^0 25'$, über welche hinaus die Tafel III nicht ausgedehnt ist. So oft diese Voraussetzung keine Statt findet, so bedürfen jene Gleichungen nicht jener Kunstgriffe, sondern sie können dann in unveränderter Gestalt sicher und bequem stets durch Versuche aufgelöst werden. Sicher nämlich, weil der Werth des Ausdrucks $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ (wobei $2g$ in Theilen des Radius auszudrücken) für grössere Werthe von g mit aller Schärfe durch die trigonometrischen Tafeln sich berechnen lässt, was keineswegs geschehen kann, so lange g ein kleiner Winkel ist; bequem, weil heliocentrische Orte, die um einen so grossen Zwischenraum von einander abstehen, schwerlich jemals zur Bestimmung einer noch gänzlich unbekannten Bahn benutzt werden, und weil bei irgend einer Kenntniss der Bahn ein genäherter Werth von g fast ohne Mühe mittelst der Gleichung [1] oder [3] des Art. 88 sich ergiebt. Endlich wird aus einem genäherten Werthe von g ein verbesserter, der Gleichung [12] oder [12*] mit aller wünschenswerthen Schärfe genügender Werth stets durch wenige Versuche gefunden. Falls übrigens die beiden angenommenen heliocentrischen Orte mehr als eine ganze Revolution umfassen, so muss man bedenken, dass von der excentrischen Anomalie ebenso viele ganze Revolutionen vollendet sind, so dass die Winkel $E' - E$, $v' - v$ entweder beide zwischen 0 und 360^0 liegen, oder beide zwischen ähnlichen Vielfachen der ganzen Peripherie, und daher f und g entweder zugleich innerhalb 0 und 180^0, oder zwischen ähnlichen Vielfachen der halben Peripherie. — Wenn es endlich bei einer noch gänzlich unbekannten Bahn selbst ungewiss sein sollte, ob der Himmelskörper während des Ueberganges vom ersten Radius Vector zum zweiten nur einen Theil seines Umlaufs, oder über eine ganze oder mehre Revolutionen hinaus beschrieben hätte, so würde unsere Aufgabe niemals mehre verschiedene Auflösungen zulassen. Da inzwischen dieser Fall in der Praxis kaum je eintreten mag, so halte ich mich nicht weiter bei ihm auf.

95.

Ich gehe zu dem zweiten Geschäft über, nämlich zur Bestimmung der Bahnelemente aus dem gefundenen Winkel g. Die halbe grosse Axe erhält man hier sogleich aus den Formeln [10] und [10*], statt deren man auch die folgenden anwenden kann:

$$[17] \qquad a = \frac{2mm\cos f\sqrt{rr'}}{yy\sin g^2} = \frac{kk\,tt}{4yy\,rr'\cos f^2\sin g^2}$$

$$[17^*] \qquad a = \frac{-2MM\cos f\sqrt{rr'}}{YY\sin g^2} = \frac{kk\,tt}{4\,YYrr'\cos f^2\sin g^2}.$$

(102) Die halbe kleine Axe $b = \sqrt{ap}$ findet sich aus Gleichung [1], welche, mit den vorhergehenden combinirt, giebt:

$$[18] \qquad p = \left(\frac{yrr'\sin 2f}{kt}\right)^2$$

$$[18^*] \qquad p = \left(\frac{Yrr'\sin 2f}{kt}\right)^2.$$

Jetzt wird der zwischen den beiden Radien Vectoren und dem elliptischen Bogen enthaltene elliptische Sector $= \frac{1}{2}kt\sqrt{p}$, das Dreieck aber zwischen denselben Radien Vectoren und der Chorde $= \frac{1}{2}rr'\sin 2f$. Das Verhältniss des Sectors zum Dreieck ist daher wie $y:1$ oder wie $Y:1$. Diese Bemerkung ist äusserst wichtig und erläutert zugleich in schöner Weise die Gleichungen [12] und [12*]. Denn hieraus ist klar, dass in der Gleichung [12] die Theile m, $(l+x)^{\frac{1}{2}}$, $X(l+x)^{\frac{3}{2}}$, in der Gleichung [12*] aber die Theile M, $(L-x)^{\frac{1}{2}}$, $X(L-x)^{\frac{3}{2}}$ beziehungsweise proportional sind der Sectorfläche (zwischen den Radien Vectoren und dem elliptischen Bogen), der Dreiecksfläche (zwischen den Radien Vectoren und der Chorde), der Segmentfläche (zwischen dem Bogen und der Chorde), weshalb offenbar die erste Fläche gleich ist entweder der Summe oder der Differenz der beiden übrigen, je nachdem entweder $v'-v$ zwischen 0 und 180°, oder zwischen 180° und 360° liegt. In dem Falle, wo $v'-v$ grösser als 360°, muss die Sectorfläche und die Segmentfläche als eine solche betrachtet werden, der die Fläche der ganzen Ellipse ebenso oft hinzugefügt ist, als jene Bewegung ganze Umläufe enthält.

Da $b = a\cos\varphi$ ist, so folgt aus Combination der Gleichungen [1], [10], [10*] ferner:

$$[19] \qquad \cos\varphi = \frac{\sin g \operatorname{tang} f}{2(l + \sin\frac{1}{2}g^2)}$$

$$[19^*] \qquad \cos\varphi = \frac{-\sin g \operatorname{tang} f}{2(L - \sin\frac{1}{2}g^2)},$$

woraus, wenn man für l, L ihre Werthe aus Art. 89 einschaltet, entsteht:

$$[20] \qquad \cos\varphi = \frac{\sin f \sin g}{1 - \cos f \cos g + 2 \operatorname{tang} 2\omega^2}.$$

Diese Formel ist zur genauen Berechnung der Excentricität, wenn letztere mässig ist, nicht geeignet. Man kann daraus aber leicht folgende, hiezu passendere ableiten:

$$[21] \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(f-g)^2 + \operatorname{tang} 2\omega^2}{\sin\frac{1}{2}(f+g)^2 + \operatorname{tang} 2\omega^2},$$

der man auch (durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $\cos 2\omega^2$) folgende Gestalt geben kann:

$$[22] \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(f-g)^2 + \cos\frac{1}{2}(f-g)^2 \sin 2\omega^2}{\sin\frac{1}{2}(f+g)^2 + \cos\frac{1}{2}(f+g)^2 \sin 2\omega^2}.$$

Aus beiden Formeln kann man den Winkel φ mit aller Schärfe bestimmen (wenn (103)
man will durch Einführung von Hülfswinkeln, deren Tangenten $\frac{\operatorname{tang} 2\omega}{\sin\frac{1}{2}(f-g)}$, $\frac{\operatorname{tang} 2\omega}{\sin\frac{1}{2}(f+g)}$ für die erste, oder $\frac{\sin 2\omega}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(f-g)}$, $\frac{\sin 2\omega}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(f+g)}$ für die zweite sind).

Zur Bestimmung des Winkels G lässt sich nachstehende Formel brauchen, die von selbst aus Combination der Gleichungen [5], [7] und der darauf folgenden (nicht numerirten) sich ergiebt:

$$[23] \qquad \operatorname{tang} G = \frac{(r'-r)\sin g}{(r'+r)\cos g - 2\cos f \sqrt{rr'}},$$

aus der, durch Einführung von ω, leicht sich ableiten lässt:

$$[24] \qquad \operatorname{tang} G = \frac{\sin g \sin 2\omega}{\cos 2\omega^2 \sin\frac{1}{2}(f-g) \sin\frac{1}{2}(f+g) + \sin 2\omega^2 \cos g}.$$

Die hier zurückbleibende Zweideutigkeit wird mit Hülfe der Gleichung [7] entschieden, welche lehrt, dass G innerhalb 0 und $180°$, oder innerhalb $180°$ und $360°$ genommen werden muss, je nachdem der Zähler in diesen beiden Formeln positiv oder negativ ist.

Combinirt man die Gleichung [3] mit denen, welche sofort aus der Gleichung II Art. 8 folgen, nämlich

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2e}{p}\sin f \sin F$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2}{p} + \frac{2e}{p}\cos f \cos F,$$

so resultirt daraus ohne Weiteres

$$[25] \qquad \operatorname{tang} F = \frac{(r'-r)\sin f}{2\cos g\sqrt{rr'} - (r'+r)\cos f};$$

aus der, nach Einführung des Winkels ω, folgt:

$$[26] \qquad \operatorname{tang} F = \frac{\sin f \sin 2\omega}{\cos 2\omega^2 \sin\frac{1}{2}(f-g)\sin\frac{1}{2}(f+g) - \sin 2\omega^2 \cos f}.$$

Die Zweideutigkeit wird hier ebenso wie vorher gehoben. — Nachdem die Winkel F und G gefunden, erhält man $v = F - f$, $v' = F + f$, woraus die Lage des Perihels bekannt wird, und $E = G - g$, $E' = G + g$. Endlich ist die mittlere Bewegung innerhalb der Zeit $t = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e\cos G\sin g$, wobei die Uebereinstimmung beider Ausdrücke zur Prüfung der Rechnung dient; die Epoche der mittlern Anomalie aber, welche dem zwischen den beiden Zeitannahmen in der Mitte liegenden Zeitaugenblicke entspricht, ist $G - e\sin G\cos g$, die nach Belieben auch auf irgend eine andere Zeit übertragen werden kann. Noch etwas bequemer ist es, die mittleren Anomalien für die beiden gegebenen
(104) Zeitpunkte durch die Formeln $E - e\sin E$, $E' - e\sin E'$ zu berechnen und deren Differenz im Vergleiche mit $\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}$ zur Prüfung der Rechnung zu benutzen.

96.

Die Gleichungen des vorhergehenden Artikels besitzen zwar alle wünschenswerthe Concinnität, nichtsdestoweniger aber lassen sich aus ihnen gewisse andere Formeln ableiten, durch welche die Bahnelemente noch eleganter und bequemer bestimmt werden. Inzwischen ist die Entwickelung dieser Formeln weniger bekannt. Ich nehme aus Art. 8 die folgenden Gleichungen wieder vor, die ich der Bequemlichkeit wegen durch neue Nummern auszeichne:

$$\text{I.}\quad \sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a}} = \sin\tfrac{1}{2}E\sqrt{(1+e)}$$

$$\text{II.}\quad \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{r}{a}} = \cos\tfrac{1}{2}E\sqrt{(1-e)}$$

$$\text{III.}\quad \sin\tfrac{1}{2}v'\sqrt{\frac{r'}{a}} = \sin\tfrac{1}{2}E'\sqrt{(1+e)}$$

$$\text{IV.}\quad \cos\tfrac{1}{2}v'\sqrt{\frac{r'}{a}} = \cos\tfrac{1}{2}E'\sqrt{(1-e)}.$$

Multiplicirt man I durch $\sin\frac{1}{2}(F+g)$, II durch $\cos\frac{1}{2}(F+g)$, so erhält man nach Addition der Producte

$$\cos\tfrac{1}{2}(f+g)\sqrt{\frac{r}{a}} = \sin\tfrac{1}{2}E\sin\tfrac{1}{2}(F+g)\sqrt{(1+e)} + \cos\tfrac{1}{2}E\cos\tfrac{1}{2}(F+g)\sqrt{(1-e)},$$

oder, da $\sqrt{(1+e)} = \cos\frac{1}{2}\varphi + \sin\frac{1}{2}\varphi$, $\sqrt{(1-e)} = \cos\frac{1}{2}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi$,

$$\cos\tfrac{1}{2}(f+g)\sqrt{\frac{r}{a}} = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}G + g) - \sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}(F+G).$$

Auf ganz ähnliche Art wird, wenn man III durch $\sin\frac{1}{2}(F-g)$, IV durch $\cos\frac{1}{2}(F-g)$ multiplicirt und die Producte addirt,

$$\cos\tfrac{1}{2}(f+g)\sqrt{\frac{r'}{a}} = \cos\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\tfrac{1}{2}F - \tfrac{1}{2}G - g) - \sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}(F+G).$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so entsteht:

$$\cos\tfrac{1}{2}(f+g)\left(\sqrt{\frac{r'}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}}\right) = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sin\tfrac{1}{2}(F-G),$$

oder durch Einführung des Hülfswinkels ω

$$[27]\quad \cos\tfrac{1}{2}(f+g)\,\mathrm{tang}\,2\omega = \sin\tfrac{1}{2}(F-G)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}}.$$

Durch ganz ähnliche Umformungen, deren Entwickelung ich dem kundigen (105)
Leser überlasse, findet sich

$$[28]\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(f+g)}{\cos 2\omega} = \cos\tfrac{1}{2}(F-G)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}}$$

$$[29]\quad \cos\tfrac{1}{2}(f-g)\,\mathrm{tang}\,2\omega = \sin\tfrac{1}{2}(F+G)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}}$$

$$[30]\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(f-g)}{\cos 2\omega} = \cos\tfrac{1}{2}(F+G)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}}.$$

Da die ersten Seiten in diesen vier Gleichungen bekannte Grössen sind, so wird aus [27] und [28] $\frac{1}{2}(F-G)$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} = P$, und aus [29] und

[30] ebenso $\frac{1}{2}(F+G)$ und $\sin\frac{1}{2}\varphi\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} = Q$ bestimmt. Die Zweideutigkeit bei Bestimmung der Winkel $\frac{1}{2}(F-G)$, $\frac{1}{2}(F+G)$ wird so entschieden, dass P und Q dasselbe Zeichen wie $\sin g$ erhalten. Aus P und Q wird sodann $\frac{1}{2}\varphi$, und $\sin g\sqrt[4]{\frac{aa}{rr'}} = R$ abgeleitet. Aus R lässt sich $a = \frac{RR\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$ und $p = \frac{\sin f^2\sqrt{rr'}}{RR}$ bestimmen, wenn man nicht lieber diese Grösse lediglich zur Prüfung der Rechnung brauchen will. Diese Grösse muss dann werden

$$= \pm\sqrt{\left(2\left(l+\sin\tfrac{1}{2}g^2\right)\cos f\right)} = \pm\sqrt{\left(-2\left(L-\sin\tfrac{1}{2}g^2\right)\cos f\right)}.$$

In diesem Falle lassen sich a und p sehr bequem durch folgende Formeln finden:

$$b = \frac{\sin f\sqrt{rr'}}{\sin g},\quad a = \frac{b}{\cos\varphi},\quad p = b\cos\varphi.$$

Es können auch nach Belieben zur Prüfung der Rechnung mehre Gleichungen der Art. 88 und 95 zu Hülfe genommen werden, welchen ich noch die folgenden beifüge:

$$\frac{2\operatorname{tang}2\omega}{\cos 2\omega}\sqrt{\frac{rr'}{aa}} = e\sin G\sin g$$

$$\frac{2\operatorname{tang}2\omega}{\cos 2\omega}\sqrt{\frac{pp}{rr'}} = e\sin F\sin f$$

$$\frac{2\operatorname{tang}2\omega}{\cos 2\omega} = \operatorname{tang}\varphi\sin G\sin f = \operatorname{tang}\varphi\sin F\sin g.$$

Die mittlere Bewegung endlich und die Epoche der mittleren Anomalie werden ebenso gefunden, wie im vorhergehenden Artikel.

97.

Zur Erläuterung der von Art. 88 an auseinandergesetzten Methode will ich die beiden Beispiele des Art. 87 wieder vornehmen, wobei es kaum nöthig sein wird, zu bemerken, dass die bisher mit dem Hülfswinkel ω verbundene
(106) Bezeichnung nicht mit der verwechselt werden darf, in welcher bei den Art. 86 und 87 dasselbe Zeichen angenommen war.

I. In dem ersten Beispiele haben wir $f = 3^\circ\, 47'\, 26''\, 865$, und ferner $\log \frac{r'}{r} = 9{,}991\,4599$, $\log \operatorname{tang}(45^\circ + \omega) = 9{,}997\,864975$, $\omega = -8'\, 27''006$, und daraus nach Art. 89

$\log \sin \frac{1}{2} f^2$	7,038 9972
$\log \cos f$	9,999 0488
	7,039 9484
	$= \log 0{,}001\,096\,3480$

$\log \operatorname{tang} 2\, \omega^2$	5,383 2428
$\log \cos f$	9,999 0488
	5,384 1940
	$= \log 0{,}000\,024\,2211$

also $l = 0{,}001\,120\,5691$, $\frac{5}{6} + l = 0{,}834\,4539$; ferner wird $\log kt = 9{,}576\,6974$

$2 \log kt$	9,153 3948
Comp. $\frac{3}{2} \log r r'$	9,020 5181
Comp. $\log 8 \cos f^3$	9,099 7636
$\log mm$	7,273 6765
$\log \frac{5}{6} + l$	9,921 4023
	7,352 2742.

Ein genäherter Werth von h ist daher $= 0{,}002\,25047$, dem in unserer Tafel II der $\log yy = 0{,}002\,1633$ entspricht. Man hat also $\log \frac{mm}{yy} = 7{,}271\,5132$, oder $\frac{mm}{yy} = 0{,}001\,868\,587$, woraus nach Formel [16] wird $x = 0{,}000\,748\,0179$. Es bedürfen mithin, da ξ nach Tafel III überhaupt unmerklich ist, die gefundenen Werthe von h, y, x keiner Verbesserung. Jetzt verhält sich die Bestimmung der Elemente so:

$\log x$ 6,873 9120

$\log \sin \frac{1}{2} g$ . . . . 8,436 9560, $\frac{1}{2} g = 1^\circ\, 34'\, 2''\, 0286$, $\frac{1}{2}(f+g) = 3^\circ\, 27'\, 45''\, 4611$, $\frac{1}{2}(f-g) = 19'\, 41''\, 4039$. Man hat deshalb nach Anleitung der Formeln [27], [28], [29] und [30]:

$\log \operatorname{tang} 2\, \omega$	7,691 6214 n
$\log \cos \frac{1}{2}(f+g)$	9,999 2065
$\log \cos \frac{1}{2}(f-g)$	9,999 9929
$\log P \sin \frac{1}{2}(F-G)$	7,690 8279 n
$\log P \cos \frac{1}{2}(F-G)$	8,781 0240
$\frac{1}{2}(F-G) =$	$-4^\circ\, 38'\, 41''54$
$\frac{1}{2}(F+G) =$	319 21 38,05
$F =$	314 42 56,51

Comp. $\log \cos 2\, \omega$	0,000 0052
$\log \sin \frac{1}{2}(f+g)$	8,781 0188
$\log \sin \frac{1}{2}(f-g)$	7,757 9709
$\log Q \sin \frac{1}{2}(F+G)$	7,691 6143 n
$\log Q \cos \frac{1}{2}(F+G)$	7,757 9761
$\log P = \log R \cos \frac{1}{2} \varphi$	8,782 4527
$\log Q = \log R \sin \frac{1}{2} \varphi$	7,877 8355
$\frac{1}{2} \varphi =$	$7^\circ\, 6'\, 0''935$

$v = 310^{\circ}\,55'\,29''64$	$\varphi = 14^{\circ}\,12'\,1''87$
$v' = 318\;\;30\;\;23{,}37$	$\log R$ 8,785 7960
(107) $G = 324\;\;\;0\;\;19{,}59$	Zur Prüfung der Rechnung
$E = 320\;\;52\;\;15{,}53$	$\frac{1}{2}\log 2\cos f$ 0,150 0394
$E' = 327\;\;\;8\;\;23{,}65$	$\frac{1}{2}\log(l+x) = \log\frac{m}{y}$ .. 8,635 7566
	8,785 7960

$\frac{1}{2}\log rr'$ 0,326 4939	$\log\sin\varphi$ 9,389 7262
$\log\sin f$ 8,820 2909	$\log 206\,265$ 5,314 4251
Comp. $\log\sin g$ 1,262 1765	$\log e$ in Secunden 4,704 1513
$\log b$ 0,408 9613	$\log\sin E$ .... 9,800 0767 n
$\log\cos\varphi$ 9,986 5224	$\log\sin E'$ .... 9,734 4714 n
$\log p$ 0,395 4837	$\log e\sin E$ .... 4,504 2280 n
$\log a$ 0,422 4389	$\log e\sin E'$ .... 4,438 6227 n
$\log k$ 3,550 0066	$e\sin E = -31932''14 = -8^{\circ}\,52'\,12''14$
$\frac{3}{2}\log a$ 0,633 6584	$e\sin E' = -27455{,}08 = -7\;\;37\;\;35{,}08.$
2,916 3482	Hieraus die mittlere Anomalie
$\log t$ 1,341 1160	für den ersten Ort $= 329^{\circ}\,44'\,27''67$
4,257 4642.	für den zweiten Ort $= 334\;\;45\;\;58{,}73$
	Unterschied $= 5\;\;\;1\;\;31{,}06.$

Die mittlere tägliche Bewegung ist daher $= 824''7989$, und die mittlere Bewegung innerhalb der Zeit $t = 18091''07 = 5^{\circ}\,1'\,31''07$.

II. Im zweiten Beispiele ist $f = 31^{\circ}\,27'\,38''32$, $\omega = -21'\,50''565$, $l = 0{,}086\,35659$, $\log mm = 9{,}353\,0651$, $\frac{mm}{\frac{5}{6}+l}$ oder der genäherte Werth von $h = 0{,}245\,1454$; diesem entspricht in Tafel II $\log yy$ 0,172 2663, woraus $\frac{mm}{yy} = 0{,}151\,63477$, $x = 0{,}065\,27818$, hiermit aus Tafel III ξ genommen $= 0{,}000\,2531$. Unter Anwendung dieses Werthes erhält man als verbesserte Werthe für $h = 0{,}245\,0779$, $\log yy = 0{,}172\,2303$, $\frac{mm}{yy} = 0{,}151\,64737$, $x = 0{,}065\,29078$, $\xi = 0{,}000\,2532$. Wiederholte man die Rechnung abermals mit diesem Werthe von ξ, der von dem früheren nur um eine Einheit in der siebenten Decimale differirt, so würden h, $\log yy$, x keine merkliche Aenderung erleiden, weshalb der gefundene Werth von x schon der wahre ist, und man daraus sofort zur Bestimmung der Elemente vorschreiten kann, wobei ich mich hier nicht aufhalte, da sich das Verfahren in nichts von dem vorigen Beispiele unterscheidet.

III. Es wird nicht undienlich sein, auch den andern Fall, wo $\cos f$ negativ ist, mit einem Beispiele zu erläutern.

Es sei $v'-v = 224^\circ\, 0'\, 0''$, oder $f = 112^\circ\, 0'\, 0''$, $\log r = 0{,}139\,4892$, $\log r' = 0{,}397\,8794$, $t = 206{,}809\,19$ Tage. Hieraus findet sich $\omega = +4^\circ\, 14'\, 43''78$, (108)
$L = 1{,}894\,2298$, $\log MM = 0{,}672\,4333$, der erste genäherte Werth von $\log H = 0{,}646\,7603$, woraus durch Auflösung der Gleichung [15*] erhalten wird $Y = 1{,}591\,432$ und sodann $x = 0{,}037\,037$, dem in Tafel III $\xi = 0{,}000\,0801$ entspricht. Daraus entstehen die verbesserten Werthe $\log H = 0{,}646\,7931$, $Y = 1{,}591\,5107$, $x = 0{,}037\,2195$, $\xi = 0{,}000\,0809$. Die mit letzterem Werthe von ξ wiederholte Rechnung giebt $x = 0{,}037\,2213$, ein Werth der, da ξ nun unverändert bleibt, keiner Verbesserung weiter bedarf. Sodann findet sich $\frac{1}{2}g = 11^\circ\, 7'\, 25''40$ und daraus ebenso wie im Beispiele I

$\frac{1}{2}(F-G) =$	$3^\circ\, 33'\, 53''59$	$\log P = \log R \cos \frac{1}{2}\varphi$ 9,970 0507
$\frac{1}{2}(F+G) =$	8 26 6,38	$\log Q = \log R \sin \frac{1}{2}\varphi$ 9,858 0552
$F =$	11 59 59,97	$\frac{1}{2}\varphi = 37^\circ\, 41'\, 34''27$
$v = -$	100 0 0,03	$\varphi = 75\;\, 23\;\, 8{,}54$
$v' = +$	123 59 59,97	$\log R$ 0,071 7096
$G =$	4 52 12,79	Zur Prüfung der Rechnung
$E = -$	17 22 38,01	$\log \frac{M}{Y} V - 2\cos f$ .... 0,071 7097.
$E' = +$	27 7 3,59.	

In so excentrischen Bahnen wird der Winkel φ etwas genauer aus Formel [19*] berechnet, welche in unserem Beispiele φ giebt $= 75^\circ\, 23'\, 8''57$; auch wird die Excentricität e mit grösserer Schärfe mittelst der Formel $1 - 2\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)^2$, als durch $\sin\varphi$ bestimmt; nach ihr wird $e = 0{,}967\,64630$. Durch Formel [1] findet sich ferner $\log b = 0{,}657\,6611$, daraus $\log p = 0{,}059\,5967$, $\log a = 1{,}255\,7255$, und der Logarithmus der Periheldistanz $= \log \frac{p}{1+e} = \log a(1-e) = \log b \operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = 9{,}765\,6496$.

In so sehr zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigenden Bahnen pflegt an Stelle der Epoche der mittleren Anomalie die Zeit des Durchganges durch das Perihel angegeben zu werden. Die Intervalle zwischen dieser Zeit und den, den beiden angenommenen Orten entsprechenden Zeiten können aus den bekannten Elementen durch die im Art. 41 gegebene Methode bestimmt werden, deren Differenz oder Summe (je nachdem das Perihel ausserhalb oder innerhalb der beiden gegebenen Orte liegt) zur Prüfung der Rechnung dient, da sie mit der Zeit t übereinstimmen muss.

Uebrigens waren die Zahlen dieses dritten Beispiels auf die Elemente in dem Beispiele der Art. 38 und 43 gestützt, und es hatte sogar jenes Beispiel unseren ersten Ort geliefert. Die unbedeutenden Verschiedenheiten der hier herausgebrachten Elemente rühren lediglich aus der beschränkten Genauigkeit der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln her.

(109)

98.

Die Auflösung unserer für die Ellipse in dem Vorstehenden entwickelten Aufgabe, lässt sich auf die Parabel und Hyperbel übertragen, indem man die Parabel als eine Ellipse betrachtet, in welcher a und b unendliche Grössen, $\varphi = 90^{\circ}$, endlich E, E', g, $G = 0$ sein würden; und ebenso die Hyperbel als eine Ellipse in der a negativ, und b, E, E', g, G, φ imaginäre Grössen wären. Ich will jedoch lieber mich dieser Voraussetzungen enthalten, und unsere Aufgabe für beide Arten der Kegelschnitte gesondert behandeln. Die grosse Analogie zwischen allen drei Arten wird sich so von selbst offenbaren.

Behält man in der Parabel die Symbole p, v, v', F, f, r, r', t in derselben Bezeichnung bei, worin sie oben genommen sind, so hat man aus der Theorie der parabolischen Bewegung:

$$[1] \quad \sqrt{\frac{p}{2r}} = \cos\tfrac{1}{2}(F-f)$$

$$[2] \quad \sqrt{\frac{p}{2r'}} = \cos\tfrac{1}{2}(F+f)$$

$$\frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F+f) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F-f) + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F+f)^3 - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F-f)^3$$

$$= \left\{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F+f) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F-f)\right\} \cdot \left\{1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F+f)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F-f) + \tfrac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F+f) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(F-f)\right)^2\right\}$$

$$= \frac{2\sin f\sqrt{rr'}}{p}\left\{\frac{2\cos f\sqrt{rr'}}{p} + \frac{4\sin f^2\, rr'}{3pp}\right\}, \quad \text{woraus}$$

$$[3] \quad kt = \frac{2\sin f\cos f \,.\, rr'}{\sqrt{p}} + \frac{4\sin f^3 (rr')^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{3}{2}}}.$$

Ferner wird durch Multiplication der Gleichungen [1] und [2] erhalten

$$[4] \quad \frac{p}{\sqrt{rr'}} = \cos F + \cos f$$

und aus Addition der Quadrate

$$[5] \quad \frac{p(r+r')}{2rr'} = 1 + \cos F\cos f.$$

Hieraus, nach Elimination von $\cos F$,

$$[6] \quad p = \frac{2rr'\sin f^2}{r + r' - 2\cos f\sqrt{rr'}}.$$

Wenn man daher die Gleichungen [9] und [9*] des Art. 88 auch hier annimmt, die erste für einen positiven, die zweite für einen negativen Werth von $\cos f$, so hat man

$$[7] \quad p = \frac{\sin f^2\sqrt{rr'}}{2l\cos f}$$

$$[7^*] \quad p = \frac{\sin f^2\sqrt{rr'}}{-2L\cos f}$$ (110)

und nach Einschaltung dieser Werthe in die Gleichung [3] entsteht, unter Beibehaltung der Symbole m, M in der durch die Gleichungen [11], [11*] des Art. 88 festgestellten Bezeichnung,

$$[8] \quad m = l^{\frac{1}{2}} + \tfrac{4}{3}l^{\frac{3}{2}}$$

$$[8^*] \quad M = -L^{\frac{1}{2}} + \tfrac{4}{3}L^{\frac{3}{2}}.$$

Diese Gleichungen kommen mit [12], [12*] des Art. 88 überein, wenn dort $g = 0$ gesetzt wird. Hieraus ergiebt sich, dass, falls zwei heliocentrische Orte, denen durch eine Parabel genügt wird, so behandelt werden, als ob die Bahn eine Ellipse wäre, es aus Anwendung der Vorschriften des Art. 91 sogleich resultiren muss, dass $x = 0$; umgekehrt sieht man leicht, dass, wenn durch jene Vorschriften $x = 0$ sich ergiebt, die Bahn statt der Ellipse als Parabel hervorkommt, da durch die Gleichungen [1], [16], [17], [19], [20], $b = \infty$, $a = \infty$, $\varphi = 90^0$ wird. Die Bestimmung der Elemente erledigt sich dann sehr leicht. Denn für p kann man entweder die Gleichung [7] des gegenwärtigen Artikels, oder die Gleichung [18] des Art. 95 anwenden. (Zugleich geht daraus hervor, dass y, Y in der Parabel dieselben Verhältnisse ausdrücken, wie in der Ellipse, vergl. Art. 95.) Für F aber geben die Gleichungen [1] und]2] dieses Artikels: $\operatorname{tang}\frac{1}{2}F = \frac{\sqrt{r'}-\sqrt{r}}{\sqrt{r'}+\sqrt{r}}\operatorname{cotang}\frac{1}{2}f = \sin 2\omega \operatorname{cotang}\frac{1}{2}f$, wenn der Hülfswinkel in derselben Bezeichnung wie in Art. 89 genommen wird. Bei dieser Gelegenheit bemerke ich noch, dass, wenn in die Gleichung [3] statt p sein Werth aus [6] gesetzt wird, daraus die bekannte Gleichung entsteht:

$$kt = \tfrac{1}{3}(r + r' + \cos f \,.\, \sqrt{rr'})(r + r' - 2\cos f \,.\, \sqrt{rr'})^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}.$$

99.

Auch in der Hyperbel behalte ich die Symbole p, v, v', f, F, r, r', t in derselben Bezeichnung bei, für die halbe grosse Axe, die hier negativ ist, schreibe ich aber $-\alpha$; die Excentricität e setze ich ganz wie im Art. 21 etc. $= \frac{1}{\cos\psi}$. Die dort durch u ausgedrückte Hülfsgrösse setze ich für den ersten Ort $= \frac{C}{c}$, für den zweiten Ort $= Cc$, woraus man leicht schliesst, dass c immer grösser ist als Eins, aber ceteris paribus, von Eins desto weniger verschieden ist, je weniger die beiden angenommenen Orte von einander entfernt sind. Von den in Art. 21 entwickelten Gleichungen übertrage ich die sechste und siebente in etwas veränderter Gestalt hierher.

(111) [1] $$\cos\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{C}{c}} + \sqrt{\frac{c}{C}}\right)\sqrt{\frac{(e-1)\alpha}{r}}$$

[2] $$\sin\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{C}{c}} - \sqrt{\frac{c}{C}}\right)\sqrt{\frac{(e+1)\alpha}{r}}$$

[3] $$\cos\tfrac{1}{2}v' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{Cc} + \sqrt{\frac{1}{Cc}}\right)\sqrt{\frac{(e-1)\alpha}{r'}}$$

[4] $$\sin\tfrac{1}{2}v' = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{Cc} - \sqrt{\frac{1}{Cc}}\right)\sqrt{\frac{(e+1)\alpha}{r'}};$$

woraus sofort die Folgenden sich ergeben:

$$[5]\quad \sin F = \tfrac{1}{2}\alpha\Big(C - \frac{1}{C}\Big)\sqrt{\frac{ee-1}{rr'}}$$

$$[6]\quad \sin f = \tfrac{1}{2}\alpha\Big(c - \frac{1}{c}\Big)\sqrt{\frac{ee-1}{rr'}}$$

$$[7]\quad \cos F = \Big(e\big(c + \frac{1}{c}\big) - \big(C + \frac{1}{C}\big)\Big)\frac{\alpha}{2\sqrt{rr'}}$$

$$[8]\quad \cos f = \Big(e\big(C + \frac{1}{C}\big) - \big(c + \frac{1}{c}\big)\Big)\frac{\alpha}{2\sqrt{rr'}}.$$

Ferner wird durch die Gleichung X des Art. 21:

$$\frac{r}{\alpha} = \tfrac{1}{2}e\Big(\frac{C}{c} + \frac{c}{C}\Big) - 1$$

$$\frac{r'}{\alpha} = \tfrac{1}{2}e\Big(Cc + \frac{1}{Cc}\Big) - 1$$

und hieraus

$$[9]\quad \frac{r'-r}{\alpha} = \tfrac{1}{2}e\big(C - \frac{1}{C}\big)\big(c - \frac{1}{c}\big)$$

$$[10]\quad \frac{r'+r}{\alpha} = \tfrac{1}{2}e\big(C + \frac{1}{C}\big)\big(c + \frac{1}{c}\big) - 2.$$

Die Gleichung [10] mit [8] combinirt, giebt:

$$[11]\quad \alpha = \frac{r' + r - \big(c + \frac{1}{c}\big)\cos f\,.\sqrt{rr'}}{\tfrac{1}{2}\big(c - \frac{1}{c}\big)^2}.$$

Setzt man daher ganz wie in der Ellipse

$$\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2\cos f} = 1 + 2l, \quad \text{oder} = 1 - 2L,$$

je nachdem $\cos f$ positiv oder negativ, so erhält man

$$[12]\quad \alpha = \frac{8\Big(l - \tfrac{1}{4}\big(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}}\big)^2\Big)\cos f\,.\sqrt{rr'}}{\big(c - \frac{1}{c}\big)^2} \qquad (112)$$

$$[12^*]\quad \alpha = \frac{-8\Big(L + \tfrac{1}{4}\big(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}}\big)^2\Big)\cos f\,.\sqrt{rr'}}{\big(c - \frac{1}{c}\big)^2}.$$

Die Berechnung der Grösse l oder L wird hier ebenso wie in der Ellipse vermittelst des Hülfswinkels ω angestellt. Es wird daher schliesslich aus der Gleichung XI des Art. 22 (bei Annahme hyperbolischer Logarithmen)

$$\frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}e\left(Cc - \frac{1}{Cc} - \frac{C}{c} + \frac{c}{C}\right) - \log Cc + \log\frac{C}{c}$$

$$= \tfrac{1}{2}e\left(C + \frac{1}{C}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right) - 2\log c,$$

oder, wenn C mit Hülfe der Gleichung [8] eliminirt wird,

$$\frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(c - \frac{1}{c}\right)\cos f \,.\, \sqrt{rr'}}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(cc - \frac{1}{cc}\right) - 2\log c.$$

In diese Gleichung substituire ich für α seinen Werth aus [12], [12*], führe dann das Symbol m oder M in derselben, ihm durch die Formeln [11], [11*] des Art. 88 angewiesenen Bezeichnung ein, und schreibe endlich der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2 = z, \qquad \frac{cc - \frac{1}{cc} - 4\log c}{\frac{1}{4}\left(c - \frac{1}{c}\right)^3} = Z.$$

Dann entstehen die Gleichungen:

$$[13] \quad m = (l-z)^{\frac{1}{2}} + (l-z)^{\frac{3}{2}} Z$$

$$[13^*] \quad M = -(L+z)^{\frac{1}{2}} + (L+z)^{\frac{3}{2}} Z,$$

welche nur die einzige unbekannte Grösse z enthalten, da offenbar Z eine Function von z ist, die durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$Z = \frac{(1+2z)\sqrt{(z+zz)} - \log\left(\sqrt{(1+z)} + \sqrt{z}\right)}{2(z+zz)^{\frac{3}{2}}}.$$

(113)

100.

Bei Auflösung der Gleichung [13] oder [13*] will ich zuerst den Fall gesondert betrachten, wo z keinen grossen Werth erreicht, so dass Z durch eine nach den Potenzen von z fortschreitende und schnell convergirende Reihe sich ausdrücken lässt; dann wird:

$(1+2z)\sqrt{(z+zz)} = z^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}z^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{8}z^{\frac{5}{2}}\ldots$, $\log(\sqrt{(1+z)}+\sqrt{z})=z^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}z^{\frac{5}{2}}\ldots$ und daher der Zähler von $Z=\frac{8}{3}z^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}z^{\frac{5}{2}}\ldots$; der Nenner aber wird $=2z^{\frac{3}{2}}+3z^{\frac{5}{2}}\ldots$, also $Z=\frac{4}{3}-\frac{8}{5}z\ldots$ Um das Gesetz der Progression zu finden, differentiire ich die Gleichung

$$2(z+zz)^{\frac{3}{2}}Z=(1+2z)\sqrt{(z+zz)}-\log(\sqrt{(1+z)}+\sqrt{z}),$$

woraus nach den gehörigen Reductionen folgt:

$$2(z+zz)^{\frac{3}{2}}\frac{dZ}{dz}+3Z(1+2z)\sqrt{(z+zz)}=4\sqrt{(z+zz)},$$

oder

$$(2z+2zz)\frac{dZ}{dz}=4-(3+6z)Z,$$

woraus durch ein ähnliches Verfahren wie im Art. 90 abgeleitet wird

$$Z=\frac{4}{3}-\frac{4.6}{3.5}z+\frac{4.6.8}{3.5.7}zz-\frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}z^3+\frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11}z^4-\text{etc.}$$

Man sieht, dass Z ganz in derselben Weise von $-z$ abhängt, wie oben in der Ellipse X von x, weshalb, wenn man setzt:

$$Z=\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{9}{10}(z+\zeta)}$$

auch ζ ebenso durch $-z$, wie oben ξ durch x bestimmt wird, so dass man hat:

$$[14]\qquad \zeta=\cfrac{\frac{2}{35}zz}{1-\frac{2}{35}z+\cfrac{\frac{40}{63}z}{1+\cfrac{\frac{4}{99}z}{1+\cfrac{\frac{70}{143}z}{1+\text{etc.}}}}}$$

oder

$$\zeta=\cfrac{\frac{2}{35}zz}{1+\frac{18}{35}z+\cfrac{\frac{4}{63}z}{1+\cfrac{\frac{40}{99}z}{1+\cfrac{\frac{18}{143}z}{1+\text{etc.}}}}}$$

Auf diese Weise sind die Werthe von ζ für $z = 0$ bis $z = 0{,}3$ durch die einzelnen Tausendtheile berechnet, welche die dritte Spalte der Tafel III enthält.*)

(114)

101.

Führt man die Grösse ζ ein, und setzt $\sqrt{(l-z)} = \frac{m}{y}$ oder $\sqrt{(L+z)} = \frac{M}{Y}$, sowie

$$[15] \quad \frac{mm}{\frac{5}{6}+l+\zeta} = h, \quad \text{oder}$$

$$[15^*] \quad \frac{MM}{L-\frac{5}{6}-\zeta} = H,$$

so nehmen die Gleichungen [13] und [13*] folgende Form an:

$$[16] \quad \frac{(y-1)yy}{y+\frac{1}{9}} = h$$

$$[16^*] \quad \frac{(Y+1)YY}{Y-\frac{1}{9}} = H,$$

und werden daher ganz identisch mit denen, zu welchen wir bei der Ellipse gelangten ([15], [15*] im Art. 91). Hieraus lässt sich also, insoweit h oder H als bekannt angesehen werden kann, y oder Y ableiten, und dann ist

$$[17] \quad z = l - \frac{mm}{yy}$$

$$[17^*] \quad z = \frac{MM}{YY} - L.$$

Man sieht hieraus, dass alle oben für die Ellipse beschriebenen Operationen ebenso auch für die Hyperbel gelten bis zur Ermittelung der Grössen y oder Y aus dem genäherten Werthe von h oder H; sodann aber muss die Grösse $\frac{mm}{yy} - l$ oder $L - \frac{MM}{YY}$, welche in der Ellipse positiv und in der Parabel $= 0$ werden musste, negativ in der Hyperbel werden. Durch dieses Kennzeichen wird daher die Art des Kegelschnitts bestimmt. Nach Auffindung von z giebt unsere Tafel ζ, und hieraus erhält man einen verbesserten Werth von h oder H, mit dem man die Rechnung wiederholt, bis Alles genau übereinstimmt.

---

*) Der von Gauss zu den Art. 90 und 100 gegebene Zusatz findet sich im Anhange.
Anmerkung des Uebersetzers.

Nach Ermittelung des wahren Werthes für z würde man daraus c mittelst der Formel $c = 1 + 2z + 2\sqrt{(3+zz)}$ ableiten können, aber es ist vorzuziehen, auch zu den nachfolgenden Benutzungen, den Hülfswinkel n einzuführen, wobei n aus der Gleichung $\operatorname{tang} 2n = 2\sqrt{(z+zz)}$ bestimmt wird; daraus folgt

$$c = \operatorname{tang} 2n + \sqrt{(1+\operatorname{tang} 2n^2)} = \operatorname{tang}(45^0 + n).$$

102. (115)

Da in der Hyperbel ebenso wie in der Ellipse y nothwendig positiv sein muss, so kann die Auflösung der Gleichung [16] auch hier einer Zweideutigkeit nicht unterworfen sein. (Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass in der Hyperbel ganz wie in der Ellipse zur Auflösung dieser Gleichung die Tafel II angewendet werden kann, so lange h deren Grenzen nicht überschreitet.) In Beziehung auf die Gleichung [16*] aber muss man hier etwas anders rechnen, als bei der Ellipse. Aus der Theorie der Gleichungen lässt sich leicht zeigen, dass für einen positiven Werth von H diese Gleichung (wenn sie überhaupt irgend eine reelle positive Wurzel hat) neben einer negativen Wurzel zwei positive haben müsse, welche entweder beide gleich sein werden, nämlich $= \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{6} = 0{,}20601$, oder die eine grösser, die andere kleiner als diese Grenze. (Die Grösse H kann offenbar nur dann negativ werden, wenn $\zeta > \frac{1}{6}$ wäre; einem solchen Werthe von ζ würde aber ein Werth für z, der grösser als 2,684 und der daher bei weitem die Grenzen dieser Methode überschreiten würde, entsprechen). Dass bei unserer Aufgabe (die auf der Voraussetzung beruht, dass z keine beträchtliche Grösse und wenigstens nicht grösser sei als 0,3, wenn nicht der Gebrauch der dritten Tafel vereitelt werden soll) nothwendig stets die grössere Wurzel angenommen werden müsse, werde ich auf folgende Weise zeigen. Wenn in die Gleichung [13*] für M substituirt wird: $Y\sqrt{(L+z)}$, so erhält man $Y + 1 = (L+z)Z > (1+z)Z$, oder

$$Y > \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3.5}z + \tfrac{4.6}{3.5.7}zz - \tfrac{4.6.8}{3.5.7.9}z^3 + \text{etc.},$$

woraus man leicht schliesst, dass für so kleine Werthe von z, wie wir sie hier voraussetzen, Y stets grösser werden müsse, als 0,20601.

In der That finde ich nach angestellter Rechnung, dass, wenn $(1+z)Z$ dieser Grenze gleich wird, z sein müsse $= 0{,}79858$. Ich bin aber weit davon entfernt, unsere Methode auf so grosse Werthe von z ausdehnen zu wollen.

103.

Falls z einen grösseren, die Grenze der Tafel III überschreitenden Werth erreicht, so lassen sich die Gleichungen [13], [13*] stets sicher und bequem in unveränderter Gestalt durch Versuche auflösen, und zwar aus ähnlichen Gründen, wie die in Art. 94 für die Ellipse auseinandergesetzten. In einem solchen Falle kann man die Bahnelemente wenigstens als beiläufig bekannt voraussetzen; dann aber erhält man einen genäherten Werth für n sofort durch die Formel $\operatorname{tang} 2n = \frac{\sin f\sqrt{rr'}}{a\sqrt{(ee-1)}}$, welche von selbst aus der Gleichung [6] des Art. 99 folgt. Aus n aber bekommt man z durch die Formel $z = \frac{1-\cos 2n}{2\cos 2n}$ $= \frac{\sin n^2}{\cos 2n}$, und aus dem genäherten Werthe von z wird durch wenige Versuche derjenige Werth hergeleitet, welcher der Gleichung [13] oder [13*] völlig genau Genüge leistet. Es lassen jene Gleichungen auch in folgender Form sich darstellen:

$$(116)\qquad m = \left(l - \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(l - \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\frac{\operatorname{tang} 2n}{\cos 2n} - \log\operatorname{hyp}\operatorname{tang}(45^\circ + n)}{\operatorname{tang} 2n^3} \right\}$$

$$M = -\left(L + \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(L + \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\frac{\operatorname{tang} 2n}{\cos 2n} - \log\operatorname{hyp}\operatorname{tang}(45^\circ + n)}{\operatorname{tang} 2n^3} \right\}$$

und kann solchergestalt, mit Beiseitelassung von z, sofort der wahre Werth für n herausgebracht werden.

104.

Es erübrigt noch, aus z, n oder c die Elemente selbst zu bestimmen. Setzt man $\alpha\sqrt{(ee-1)} = \beta$, so giebt die Gleichung [6] des Art. 99

$$[18]\qquad \beta = \frac{\sin f\sqrt{rr'}}{\operatorname{tang} 2n}.$$

Durch Combination dieser Formel mit [12], [12*] des Art. 99 wird erhalten:

$$[19] \quad \sqrt{(ee-1)} = \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} 2n}{2(l-z)}$$

$$[19^*] \quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} 2n}{2(L+z)},$$

woraus die Excentricität genau und bequem sich berechnen lässt. Aus β und $\sqrt{(ee-1)}$ bekommt man durch Division α, durch Multiplication p, so dass man hat:

$$\alpha = \frac{2(l-z)\cos f.\sqrt{rr'}}{\operatorname{tang} 2n^2} = \frac{2mm\cos f.\sqrt{rr'}}{yy\operatorname{tang} 2n^2} = \frac{kktt}{4yy\, rr'\cos f^2 \operatorname{tang} 2n^2}$$

$$= \frac{-2(L+z)\cos f.\sqrt{rr'}}{\operatorname{tang} 2n^2} = \frac{-2MM\cos f.\sqrt{rr'}}{YY\operatorname{tang} 2n^2} = \frac{kktt}{4YYrr'\cos f^2 \operatorname{tang} 2n^2};$$

$$p = \frac{\sin f.\operatorname{tang} f.\sqrt{rr'}}{2(l-z)} = \frac{yy\sin f.\operatorname{tang} f.\sqrt{rr'}}{2mm} = \left(\frac{yrr'\sin 2f}{kt}\right)^2$$

$$= \frac{-\sin f.\operatorname{tang} f.\sqrt{rr'}}{2(L+z)} = \frac{-YY\sin f.\operatorname{tang} f.\sqrt{rr'}}{2MM} = \left(\frac{Yrr'\sin 2f}{kt}\right)^2.$$

Der dritte und sechste Ausdruck für p, die überhaupt mit den Formeln [18], [18*] des Art. 95 identisch sind, zeigen, dass dasjenige, was dort über die Bezeichnung der Grössen y, Y gesagt ist, auch für die Hyperbel gilt.

Aus Combination der Gleichungen [6] und [9] des Art. 99 folgt $(r'-r)\sqrt{\frac{ee-1}{rr'}} = e\sin f.(C-\frac{1}{C})$. Führt man daher ψ und ω ein und setzt $C = \operatorname{tang}(45^0+N)$, so kommt

$$[20] \quad \operatorname{tang} 2N = \frac{2\sin\psi \operatorname{tang} 2\omega}{\sin f\cos 2\omega}. \qquad (117)$$

Ist so C gefunden, so erhält man daraus die Werthe der in Art. 21 mit u bezeichneten Grösse für beide Orte, und es ergiebt sich endlich mittelst der Gleichung III, Art. 21:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{C-c}{(C+c)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' = \frac{Cc-1}{(Cc+1)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi},$$

oder, wenn man für C, c die Winkel N, n einführt:

$$[21]\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin(N-n)}{\cos(N+n)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}$$

$$[22]\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' = \frac{\sin(N+n)}{\cos(N-n)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}.$$

Hieraus bestimmt man die wahren Anomalien v, v', deren mit $2f$ verglichener Unterschied zugleich zur Prüfung der Rechnung dient. Schliesslich leitet man durch Formel XI. Art. 22 leicht ab, dass das Zeitintervall zwischen dem Perihele bis zu der dem ersten Orte entsprechenden Zeit sei:

$$= \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k}\left\{\frac{2e\cos(N+n)\sin(N-n)}{\cos 2N\cos 2n} - \log\operatorname{hyp}\frac{\operatorname{tang}(45^0+N)}{\operatorname{tang}(45^0+n)}\right\}$$

und ebenso das Zeitintervall vom Perihele bis zu der dem zweiten Orte entsprechenden Zeit

$$= \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k}\left\{\frac{2e\cos(N-n)\sin(N+n)}{\cos 2N\cos 2n} - \log\operatorname{hyp}\operatorname{tang}(45^0+N)\operatorname{tang}(45^0+n)\right\}.$$

Setzt man daher die erste Zeit $= T-\frac{1}{2}t$, und deshalb die zweite $= T+\frac{1}{2}t$, so erhält man

$$[23]\qquad T = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k}\left\{\frac{e\operatorname{tang}2N}{\cos 2n} - \log\operatorname{tang}(45^0+N)\right\},$$

woraus die Zeit des Periheldurchganges bekannt wird. Endlich hat man die zur schliesslichen Prüfung der Rechnung anwendbare Gleichung

$$[24]\qquad t = \frac{2\alpha^{\frac{3}{2}}}{k}\left\{\frac{e\operatorname{tang}2n}{\cos 2N} - \log\operatorname{tang}(45^0+n)\right\}.$$

105.

Zur Erläuterung dieser Rechnungsvorschriften will ich das Beispiel aus den beiden in den Artikel 23, 24, 25, 26 nach denselben hyperbolischen Elementen gerechneten Orte vollenden. Es sei daher $v'-v = 48^0\,12'\,0''$, oder
(118) $f = 24^0\,6'\,0''$, $\log r = 0{,}033\,3585$, $\log r' = 0{,}200\,8541$, $t = 51{,}497\,88$ Tage. —
Hieraus findet sich $\omega = 2^0\,45'\,28''47$, $l = 0{,}0579\,6039$, $\frac{mm}{\frac{5}{6}+l}$ oder der genäherte

Werth von $h = 0{,}064\,4371$; hieraus, mittelst Tafel II, $\log yy = 0{,}056\,0848$, $\frac{mm}{yy} = 0{,}0504\,7454$, $z = 0{,}0074\,8585$, dem in Tafel III entspricht $\zeta = 0{,}000\,0032$. Daraus folgt der verbesserte Werth $h = 0{,}0644\,3691$, $\log yy = 0{,}056\,0846$, $\frac{mm}{yy} = 0{,}0504\,7456$, $z = 0{,}0074\,8583$, welche Werthe, indem ζ dadurch nicht verändert wird, keiner weiteren Verbesserung bedürfen. Nun steht die Rechnung der Elemente so:

$\log z$	7,874 2399
$\log(1+z)$	0,003 2389
$\log\sqrt{(z+zz)}$	8,938 7394
$\log 2$	0,301 0300
$\log\tang 2n$	9,239 7694
$2n$ =	9° 51′ 11″816
n =	4 55 35,908

$\log\tang f$	9,650 6199
$\log\frac{1}{2}\tang 2n$	8,938 7394
C. $\log(l-z)$	1,296 9275
$\log\tang\psi$	9,886 2868
ψ =	37° 34′ 59″77
(es müsste sein = 37° 35′ 0″)	

$\log\sin f$	9,611 0118
$\log\sqrt{rr'}$	0,117 1063
C. $\log\tang 2n$	0,760 2306
$\log\beta$	0,488 3487
$\log\tang\psi$	9,886 2868
$\log\alpha$	0,602 0619
$\log p$	0,374 6355
(es müssten sein = 0,602 0600 und 0,374 6356)	

C. $\log\frac{1}{2}\sin f$	0,690 0182
$\log\tang 2\omega$	8,984 8318
C. $\log\cos 2\omega$	0,002 0156
$\log\sin\psi$	9,785 2685
$\log\tang 2N$	9,462 1341
$2N$ =	16° 9′ 46″253
N =	8 4 53,127
$N-n$ =	3 9 17,219
$N+n$ =	13 0 29,035

$\log\sin(N-n)$	8,740 6274
C. $\log\cos(N+n)$	0,011 2902
$\log\cot\frac{1}{2}\psi$	0,468 1829
$\log\tang\frac{1}{2}v$	9,220 1005
$\frac{1}{2}v$ =	9° 25′ 29″97
v =	18 50 59,94
(es müsste sein = 18° 51′ 0″)	

$\log\sin(N+n)$	9,352 3527
C. $\log\cos(N-n)$	0,000 6587
$\log\cot\frac{1}{2}\psi$	0,468 1829
$\log\tang\frac{1}{2}v'$	9,821 1943
$\frac{1}{2}v'$ =	33° 31′ 29″93
v' =	67 2 59,86
(es müsste sein = 67° 3′ 0″)	

(119)

$\log e$	0,101 0184	$\log e$	0,101 0184
$\log \operatorname{tang} 2N$	9,462 1341	$\log \operatorname{tang} 2n$	9,239 7694
$C.\log \cos 2n$	0,006 4539	$C.\log \cos 2N$	0,017 5142
	9,569 6064		9,358 3020
Zahl =	0,3711 9863	Zahl =	0,2281 9284
$\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^{0}+N) = \ldots$	0,2859 1251	$\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^{0}+n) = \ldots$	0,1728 2621
Unterschied =	0,0852 8612	Unterschied =	0,0553 6663
log	8,930 8783	log	8,743 2480
$\frac{3}{2}\log a$	0,903 0928	$\frac{3}{2}\log a$	0,903 0928
$C.\log k$	1,764 4186	$C.\log k$	1,764 4186
		$\log 2$	0,301 0300
$\log T$	1,598 3897	$\log t$	1,711 7894
T =	39,663 38	t =	51,497 88

Es ist daher der Periheldurchgang von der dem ersten Orte entsprechenden Zeit um 13,914 44 Tage entfernt, von der dem zweiten Orte entsprechenden Zeit um 65,412 32 Tage. Die geringen Unterschiede der hier herausgebrachten Elemente von denen, nach welchen die angenommenen Orte berechnet waren, rühren von der beschränkten Genauigkeit der Tafeln her.

106.

Bei Abhandlung der vorzüglichsten, für die Bewegung der Himmelskörper in Kegelschnitten in Betracht kommenden Relationen darf nicht mit Stillschweigen übergangen werden der elegante Ausdruck der Zeit durch die grosse Halbaxe, durch die Summe $r+r'$ und durch die, die beiden Orte verbindende Chorde. Für die Parabel scheint diese Formel zwar zuerst von Euler erfunden zu sein (Miscell. Berolin. T. VII, p. 20), der solche jedoch später ausser Acht gelassen und auch nicht auf die Ellipse und Hyperbel ausgedehnt hat. Es irren daher diejenigen, welche diese Formel dem Lambert zuschreiben, wenn sich diesem Geometer auch nicht das Verdienst absprechen lässt, diesen der Vergessenheit anheimgefallenen Ausdruck selbständig erforscht und auf die übrigen Kegelschnitte ausgedehnt zu haben. Obgleich dieser Gegenstand schon von mehren Geometern behandelt ist, so werden aufmerksame Leser doch die nachfolgende Auseinandersetzung nicht für überflüssig erkennen. Ich beginne mit der elliptischen Bewegung.

Vor allen Dingen bemerke ich, dass der um die Sonne beschriebene Winkel $2f$ (Art. 88, woraus ich auch die übrigen Zeichen entnehme) innerhalb 360^0 angenommen werden kann. Denn es ist klar, dass, wenn dieser Winkel um 360^0 vermehrt wird, die Zeit um eine Revolution oder $\frac{a^{\frac{3}{2}}.360^0}{k} = a^{\frac{3}{2}} \times 365{,}25$ Tage wächst. Bezeichnet man nun die Chorde mit ϱ, so wird offenbar (120)

$$\varrho\varrho = (r'\cos v' - r\cos v)^2 + (r'\sin v' - r\sin v)^2,$$

und daher nach den Gleichungen VIII und IX des Art. 8

$$\begin{aligned}\varrho\varrho &= aa(\cos E' - \cos E)^2 + aa\cos\varphi^2(\sin E' - \sin E)^2\\ &= 4aa\sin g^2(\sin G^2 + \cos\varphi^2\cos G^2) = 4aa\sin g^2(1 - ee\cos G^2).\end{aligned}$$

Nun führt man einen Hülfswinkel h in der Art ein, dass $\cos h = e\cos G$, und setzt (um alle Zweideutigkeit zu heben) voraus, dass h zwischen 0 und 180^0 genommen werden, und daher $\sin h$ eine positive Grösse sein müsse. Weil also auch g zwischen denselben Grenzen liegt (denn wenn $2g$ zu 360^0 oder darüber hinaus anwächst, so würde die Bewegung um die Sonne eine ganze Revolution oder mehr betragen), so folgt aus der vorigen Gleichung von selbst $\varrho = 2a\sin g\sin h$, wenn nämlich die Chorde als eine positive Grösse angesehen wird. Da man ferner hat $r + r' = 2a(1 - e\cos g\cos G) = 2a(1 - \cos g\cos h)$, so ist klar, dass, wenn $h - g = \delta$, $h + g = \varepsilon$ gesetzt wird, entsteht:

[1] $\quad r + r' - \varrho = 2a(1 - \cos\delta) = 4a\sin\frac{1}{2}\delta^2$

[2] $\quad r + r' + \varrho = 2a(1 - \cos\varepsilon) = 4a\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2.$

Endlich hat man $kt = a^{\frac{3}{2}}(2g - 2e\sin g\cos G) = a^{\frac{3}{2}}(2g - 2\sin g\cos h)$, oder

[3] $\quad kt = a^{\frac{3}{2}}(\varepsilon - \sin\varepsilon - (\delta - \sin\delta)).$

Man kann daher nach den Gleichungen [1] und [2] die Winkel δ und ε aus $r + r'$, ϱ und a bestimmen, und deshalb kann auch aus denselben Grössen, mittelst der Gleichung [3], die Zeit t bestimmt werden.

Diese Formel lässt sich auch folgendermaassen darstellen:

$$kt = a^{\frac{3}{2}}\left\{\arccos\frac{2a-(r+r')-\varrho}{2a} - \sin\arccos\frac{2a-(r+r')-\varrho}{2a}\right.$$
$$\left. - \arccos\frac{2a-(r+r')+\varrho}{2a} + \sin\arccos\frac{2a-(r+r')+\varrho}{2a}\right\}.$$

Es bleibt jedoch bei Bestimmung der Winkel δ, ε aus ihren Cosinussen eine Zweideutigkeit zurück, die näher betrachtet werden muss. Zwar ist von selbst klar, dass δ innerhalb -180^0 und $+180^0$ liegen müsse, sowie ε zwischen 0 und 360^0. Aber auch so liesse jeder Winkel eine doppelte Bestimmung, und die daraus hervorgehende Zeit mithin eine vierfache zu. Man hat inzwischen aus Gleichung 5, Art. 88: $\cos f.\sqrt{rr'} = a(\cos g - \cos h) = 2a \sin\frac{1}{2}\delta \sin\frac{1}{2}\varepsilon$. Da nun $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ nothwendig eine positive Grösse wird, so kann daraus geschlossen werden, dass $\cos f$ und $\sin\frac{1}{2}\delta$ nothwendig dasselbe Zeichen führen, und dass daher δ innerhalb 0 und 180^0, oder innerhalb -180^0 und 0 genommen werden müsse, je nachdem $\cos f$ positiv oder negativ wird, d. h. je nachdem die heliocentrische Bewegung $2f$ innerhalb oder über 180^0 ist. Uebrigens ist klar, dass für $2f = 180^0$, δ nothwendig $= 0$ sein muss.
(121) Auf diese Weise ist also δ vollständig bestimmt. — Aber die Bestimmung des Winkels ε bleibt nothwendig zweideutig, so dass stets für die Zeit zwei Werthe herauskommen, von denen sich, falls solches nicht anderweit bekannt wird, nicht entscheiden lässt, welcher der wahre ist. Den Grund dieser Erscheinung erkennt man übrigens leicht. Denn es lassen sich bekanntlich durch zwei gegebene Punkte zwei verschiedene Ellipsen beschreiben, welche beide in demselben gegebenen Punkte ihren Brennpunkt haben und zugleich dieselbe grosse Halbaxe.*) Offenbar aber wird die Bewegung von dem ersten Orte zum zweiten in diesen Ellipsen in ungleichen Zeiten vollendet.

107.

Bezeichnet man mit χ irgend einen Bogen zwischen -180^0 und $+180^0$, und mit s den Sinus des Bogens $\frac{1}{2}\chi$, so ist bekanntlich

---

*) Beschreibt man aus dem ersten Orte mit einem Halbmesser $2a-r$ einen Kreis, und aus dem zweiten Orte einen Kreis mit dem Halbmesser $2a-r'$, so liegt der zweite Brennpunkt der Ellipse in dem Einschnittspunkte dieser Kreise. Weil deshalb, allgemein gesprochen, stets zwei Einschnittspunkte gegeben werden, so gehen auch zwei verschiedene Ellipsen hervor.

$$\tfrac{1}{2}\chi = s + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}s^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}s^5 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6}s^7 + \text{etc.}$$

Ferner wird

$$\tfrac{1}{2}\sin\chi = s\sqrt{(1-ss)} = s - \tfrac{1}{2}s^3 - \tfrac{1.1}{2.4}s^5 - \tfrac{1.1.3}{2.4.6}s^7 - \text{etc.}$$

und deshalb

$$\chi - \sin\chi = 4\left(\tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}s^5 + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}s^7 + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6}s^9 + \text{etc.}\right)$$

In diese Reihe substituire ich für s successiv $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{a}}$ und $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{a}}$ und multiplicire das Resultat mit $a^{\frac{3}{2}}$; so entstehen respect. die Reihen

$$\tfrac{1}{6}(r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{80}\cdot\frac{1}{a}(r+r'-\varrho)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{3}{1792}\cdot\frac{1}{aa}(r+r'-\varrho)^{\frac{7}{2}} + \tfrac{5}{18432}\,\frac{1}{a^3}(r+r'-\varrho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{6}(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{80}\cdot\frac{1}{a}(r+r'+\varrho)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{3}{1792}\cdot\frac{1}{aa}(r+r'+\varrho)^{\frac{7}{2}} + \tfrac{5}{18432}\cdot\frac{1}{a^3}(r+r'+\varrho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

Deren Summen bezeichne ich mit T und U. Man sieht ohne Weiteres, da $2\sin\tfrac{1}{2}\delta = \pm\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{a}}$ (wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $2f$ innerhalb oder über 180^0 hinaus liegt), dass $a^{\frac{3}{2}}(\delta - \sin\delta) = \pm T$ (wobei das Zeichen ebenso bestimmt wird). Auf dieselbe Weise wird, wenn für ε (122) der kleinere, innerhalb 180^0 belegene Werth genommen wird, entstehen $a^{\frac{3}{2}}(\varepsilon - \sin\varepsilon) = U$; nimmt man aber den andern Werth, der das Complement des ersteren zu 360^0 ist, so wird offenbar $a^{\frac{3}{2}}(\varepsilon - \sin\varepsilon) = a^{\frac{3}{2}}360^0 - U$. Hieraus erhält man zwei Werthe für die Zeit t

$$\frac{U \mp T}{k} \quad \text{und} \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}360^0}{k} - \frac{U \pm T}{k}.$$

108.

Betrachtet man die Parabel als eine Ellipse, deren grosse Axe unendlich gross ist, so geht der im vorhergehenden Artikel für die Zeit gefundene Ausdruck über in: $\frac{1}{6k}\left\{(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\right\}$. Da aber diese Ableitung der Formel vielleicht einigen Zweifeln ausgesetzt erscheinen könnte, so will ich eine andere, von der Ellipse unabhängige entwickeln.

Setzt man der Kürze wegen $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \vartheta$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}v' = \vartheta'$, so wird $r = \frac{1}{2}p(1+\vartheta\vartheta)$, $r' = \frac{1}{2}p(1+\vartheta'\vartheta')$, $\cos v = \frac{1-\vartheta\vartheta}{1+\vartheta\vartheta}$, $\cos v' = \frac{1-\vartheta'\vartheta'}{1+\vartheta'\vartheta'}$, $\sin v = \frac{2\vartheta}{1+\vartheta\vartheta}$, $\sin v' = \frac{2\vartheta'}{1+\vartheta'\vartheta'}$. Hieraus entsteht

$$r'\cos v' - r\cos v = \tfrac{1}{2}p(\vartheta\vartheta - \vartheta'\vartheta'),\ r'\sin v' - r\sin v = p(\vartheta' - \vartheta),$$

und daher $\varrho\varrho = \frac{1}{4}pp(\vartheta'-\vartheta)^2(4+(\vartheta'+\vartheta)^2)$. Man sieht nun leicht, dass $\vartheta' - \vartheta = \frac{\sin f}{\cos\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v'}$ eine positive Grösse ist. Setzt man daher

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{4}(\vartheta'+\vartheta)^2} = \eta, \quad \text{so ist } \varrho = p(\vartheta'-\vartheta)\eta; \quad \text{ferner wird}$$

$$r + r' = \tfrac{1}{2}p(2+\vartheta\vartheta+\vartheta'\vartheta') = p\left(\eta\eta + \tfrac{1}{4}(\vartheta'-\vartheta)^2\right);$$

man hat deshalb

$$\frac{r+r'+\varrho}{p} = \left(\eta + \tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)\right)^2$$

$$\frac{r+r'-\varrho}{p} = \left(\eta - \tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)\right)^2.$$

Aus der ersten Gleichung leitet man ohne Weiteres ab

$$+\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{p}} = \eta + \tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta),$$

weil η und $\vartheta'-\vartheta$ positive Grössen sind; aber da $\frac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)$ kleiner oder grösser ist als η, je nachdem $\eta\eta - \frac{1}{4}(\vartheta'-\vartheta)^2 = 1+\vartheta\vartheta' = \frac{\cos f}{\cos\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v'}$ positiv oder negativ, so muss man aus der zweiten Gleichung offenbar schliessen:

(123) $$\pm\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{p}} = \eta - \tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta),$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem der um die Sonne beschriebene Winkel innerhalb 180^0 liegt, oder über 180^0 hinaus geht.

Aus der Gleichung, welche in Art. 98 der zweiten folgt, hat man ferner:

$$\frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} = (\vartheta'-\vartheta)\left((1+\vartheta\vartheta')+\tfrac{1}{3}(\vartheta'-\vartheta)^2\right) = (\vartheta'-\vartheta)\left(\eta\eta+\tfrac{1}{12}(\vartheta'-\vartheta)^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(\eta+\tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)\right)^3 - \tfrac{1}{3}\left(\eta-\tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)\right)^3,$$

woraus von selbst folgt:

$$kt = \tfrac{1}{6}\left\{(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\right\},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $2f$ innerhalb oder über 180^0 hinaus liegt.

109.

Nimmt man in der Hyperbel die Symbole α, C, c in derselben Bezeichnung wie in Art. 99, so hat man aus den Gleichungen VIII, IX des Art. 21:

$$r'\cos v' - r\cos v = -\tfrac{1}{2}\left(c-\frac{1}{c}\right)\left(C-\frac{1}{C}\right)\alpha$$
$$r'\sin v' - r\sin v = \tfrac{1}{2}\left(c-\frac{1}{c}\right)\left(C+\frac{1}{C}\right)\alpha\sqrt{(ee-1)} \quad \text{und daher}$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\,\alpha\left(c-\frac{1}{c}\right)\sqrt{\left(ee\left(C+\frac{1}{C}\right)^2-4\right)}.$$

Ich setze voraus, dass γ eine Grösse ist, welche durch die Gleichung $\gamma+\frac{1}{\gamma} = e\left(C+\frac{1}{C}\right)$ bestimmt wird, und da letzterer offenbar durch zwei einander reciproke Werthe Genüge geschieht, so adoptire ich davon denjenigen, der grösser als Eins ist. Dann wird

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\alpha\left(c-\frac{1}{c}\right)\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Ferner wird

$$r+r' = \tfrac{1}{2}\alpha\left(e\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(C+\frac{1}{C}\right)-4\right) = \tfrac{1}{2}\alpha\left(\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)-4\right),$$

und deshalb

$$r+r'+\varrho = \alpha\left(\sqrt{c\gamma}-\sqrt{\frac{1}{c\gamma}}\right)^2$$
$$r+r'-\varrho = \alpha\left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}}-\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\right)^2.$$

Setzt man daher $\sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{4\alpha}} = m$, $\sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{4\alpha}} = n$, so wird nothwendig

(124) $\sqrt{c\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c\gamma}} = 2m$. Um die Frage zu entscheiden, ob $\sqrt{\frac{\gamma}{c}} - \sqrt{\frac{c}{\gamma}} = +2n$ oder $= -2n$ wird, muss man untersuchen, ob γ grösser oder kleiner ist als c. Aber aus Gleichung 8 des Art. 99 folgt leicht, dass der erstere Fall Statt habe, wenn $2f$ innerhalb 180^0 liegt, der zweite, sobald $2f$ über 180^0 hinausgeht. Schliesslich hat man aus demselben Artikel

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right) - 2\log c = \tfrac{1}{2}\left(c\gamma - \frac{1}{c\gamma}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{c}{\gamma}\right)$$

$$-\log c\gamma + \log\frac{\gamma}{c} = 2m\sqrt{(1+mm)} \mp 2n\sqrt{(1+nn)} - 2\log\left(\sqrt{(1+mm)}+m\right)$$
$$\pm 2\log\left(\sqrt{(1+nn)}+n\right),$$

wobei die unteren Zeichen immer den Fall bezielen, wo $2f > 180^0$. Nun wird $\log\left(\sqrt{(1+mm)}+m\right)$ leicht in folgende Reihe entwickelt:

$$m - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}m^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}m^5 - \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}m^7 + \text{etc.}$$

Dies erhält man von selbst aus:

$$\mathrm{d}\log\left(\sqrt{(1+mm)}+m\right) = \frac{\mathrm{d}m}{\sqrt{(1+mm)}}.$$

Daraus folgt:

$$2m\sqrt{(1+mm)} - 2\log\left(\sqrt{(1+mm)}+m\right) = 4\left(\tfrac{1}{3}m^3 - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}m^5 + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}m^7 - \text{etc.}\right)$$

und ebenso eine ganz ähnliche Formel, falls m mit n vertauscht wird. Hieraus endlich geht hervor, dass, wenn man setzt:

$$T = \tfrac{1}{6}(r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{80}\cdot\frac{1}{\alpha}(r+r'-\varrho)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{3}{1792}\cdot\frac{1}{\alpha\alpha}(r+r'-\varrho)^{\frac{7}{2}} -$$
$$\tfrac{5}{18432}\cdot\frac{1}{\alpha^3}(r+r'-\varrho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

$$U = \tfrac{1}{6}(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{80}\cdot\frac{1}{\alpha}(r+r'+\varrho)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{3}{1792}\cdot\frac{1}{\alpha\alpha}(r+r'+\varrho)^{\frac{7}{2}} -$$
$$\tfrac{5}{18432}\cdot\frac{1}{\alpha^3}(r+r'+\varrho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.},$$

sich ergiebt $kt = U \mp T$, welche Ausdrücke mit den in Art. 107

erwähnten allenthalben übereinkommen, wenn dort a in $-\alpha$ umgeändert wird.

Uebrigens sind diese Reihen sowohl für Ellipse als Hyperbel zum praktischen Gebrauche besonders dann bequem, wenn a oder α einen sehr grossen Werth erhalten, d. h. wenn der Kegelschnitt bedeutend zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigt. In diesem Falle könnte man sie auch zur Auflösung des oben behandelten Problems (Art. 85—105) anwenden. Weil aber, nach meinem Urtheile, sie auch dann nicht einmal die Kürze der vorhin gezeigten Auflösung gewähren, so halte ich mich bei der weiteren Auseinandersetzung dieser Methode nicht auf.

---

(125)

Vierter Abschnitt.

Relationen zwischen mehren Orten im Raume.

110.

Die in diesem Abschnitte zu betrachtenden Relationen sind von dem Naturell der Bahn unabhängig und stützen sich lediglich auf die Voraussetzung, dass alle Punkte der Bahn in derselben Ebene mit der Sonne liegen. Wir wollen hier nur die einfachsten dieser Relationen berühren, und die complicirteren und specielleren zum zweiten Buche aufsparen.

Die Lage der Bahnebene ist durch zwei Orte des Himmelskörpers im Raume völlig bestimmt, sobald nur diese Orte nicht in derselben geraden Linie mit der Sonne liegen. Da sich nun der Ort eines Punktes im Raume vorzüglich auf zwei Arten angeben lässt, so bieten sich daraus zwei Aufgaben zur Lösung dar.

Setzen wir zuerst voraus, dass zwei Orte durch die mit resp. λ, λ', β, β' bezeichneten heliocentrischen Längen und Breiten gegeben seien; die Abstände von der Sonne gehen nicht in die Rechnung ein. Wenn dann die Länge des aufsteigenden Knotens mit ☊, und die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik mit i bezeichnet wird, so ist

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\beta &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega)\\ \operatorname{tang}\beta' &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda' - \Omega).\end{aligned}$$

Die Bestimmung der Unbekannten ☊ und $\operatorname{tang} i$ wird hier auf die in Art. 78 II. betrachtete Aufgabe zurückgeführt. Man hat daher nach Anleitung der ersten Auflösung

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega) &= \operatorname{tang}\beta\\ \operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang}\beta' - \operatorname{tang}\beta \cos(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda' - \lambda)}.\end{aligned}$$

Zufolge der dritten Auflösung aber findet sich der ☊ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda'-\Omega)=\frac{\sin(\beta'+\beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{\sin(\beta'-\beta)},$$

und noch etwas bequemer, wenn die Winkel β, β' unmittelbar, nicht aber durch die Logarithmen der Tangenten gegeben sind. Zur Bestimmung von i muss man jedoch auf eine der Formeln

$$\operatorname{tang} i=\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin(\lambda-\Omega)}=\frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sin(\lambda'-\Omega)}$$

recurriren. Im Uebrigen ist die Zweideutigkeit bei Bestimmung des Winkels $\lambda-\Omega$, oder $\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\lambda'-\Omega$ durch die Tangente so zu entscheiden, dass $\operatorname{tang} i$ positiv oder negativ wird, je nachdem die auf die Ecliptik projicirte Bewegung eine directe oder rückläufige ist. — Diese Ungewissheit kann daher nur dann gehoben werden, falls es bekannt, von welcher Seite her der Himmelskörper vom (126) ersten zum zweiten Orte gelangt ist; wenn man dies daher nicht wüsste, so würde es in der That unmöglich sein, den aufsteigenden Knoten vom niedersteigenden zu unterscheiden.

Nach Auffindung der Winkel Ω und i werden die Argumente der Breite u, u' durch die Formeln

$$\operatorname{tang} u=\frac{\operatorname{tang}(\lambda-\Omega)}{\cos i},\quad \operatorname{tang} u'=\frac{\operatorname{tang}(\lambda'-\Omega)}{\cos i}$$

ermittelt, die im ersten oder zweiten Halbzirkel zu nehmen, je nachdem die entsprechenden Breiten nördlich oder südlich sind. Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu, von denen man, falls es beliebt, die eine oder andere zur Prüfung der Rechnung brauchen kann:

$$\cos u=\cos\beta\cos(\lambda-\Omega),\qquad \cos u'=\cos\beta'\cos(\lambda'-\Omega);$$

$$\sin u=\frac{\sin\beta}{\sin i},\qquad \sin u'=\frac{\sin\beta'}{\sin i};$$

$$\sin(u'+u)=\frac{\sin(\lambda+\lambda'-2\Omega)\cos\beta\cos\beta'}{\cos i},\qquad \sin(u'-u)=\frac{\sin(\lambda'-\lambda)\cos\beta\cos\beta'}{\cos i}.$$

111.

Nehmen wir zweitens an, dass die beiden Orte gegeben seien durch ihre Abstände von drei, in der Sonne unter rechten Winkeln sich schneidenden

Ebenen. Bezeichnen wir diese Abstände für den ersten Ort mit x, y, z, für den zweiten mit x', y', z', und setzen voraus, dass die dritte Ebene die Ecliptik selbst sei, dass aber die positiven Pole der ersten und zweiten Ebene in der Länge N und $90^\circ + N$ liegen. Dann wird nach Art. 53, wenn man die beiden Radien Vectoren mit r, r' bezeichnet, sein:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos u\cos(N-\Omega)+r\sin u\sin(N-\Omega)\cos i\\
y &= r\sin u\cos(N-\Omega)\cos i-r\cos u\sin(N-\Omega)\\
z &= r\sin u\sin i\\
x' &= r'\cos u'\cos(N-\Omega)+r'\sin u'\sin(N-\Omega)\cos i\\
y' &= r'\sin u'\cos(N-\Omega)\cos i-r'\cos u'\sin(N-\Omega)\\
z' &= r'\sin u'\sin i.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
zy'-yz' &= rr'\sin(u'-u)\sin(N-\Omega)\sin i\\
xz'-zx' &= rr'\sin(u'-u)\cos(N-\Omega)\sin i\\
xy'-yx' &= rr'\sin(u'-u)\cos i.
\end{aligned}$$

Aus Combination der ersten mit der zweiten Formel bekommt man $N-\Omega$, und $rr'\sin(u'-u)\sin i$. Hieraus und aus der dritten Formel erhält man i, und $rr'\sin(u'-u)$.

Insofern der Ort, dem die Coordinaten x', y', z' entsprechen, als der der Zeit nach spätere angenommen wird, muss u' grösser als u werden. Falls
(127) es deshalb überher bekannt ist, ob der zwischen dem ersten und zweiten Orte um die Sonne beschriebene Winkel kleiner oder grösser ist, als zwei rechte, so müssen $rr'\sin(u'-u)\sin i$ und $rr'\sin(u'-u)$ im ersten Falle positive, im zweiten negative Grössen sein. Es lässt sich daher dann $N-\Omega$ ohne Zweideutigkeit bestimmen, und zugleich aus dem Zeichen der Grösse $xy'-yx'$ entscheiden, ob die Bewegung recht- oder rückläufig ist. Umgekehrt lässt sich, falls die Richtung der Bewegung bekannt ist, aus dem Zeichen der Grösse $xy'-yx'$ entscheiden, ob $u'-u$ kleiner oder grösser als 180° genommen werden muss. Wenn aber sowohl die Richtung der Bewegung, als die Beschaffenheit des um die Sonne beschriebenen Winkels gänzlich unbekannt ist, so kann man offenbar zwischen dem aufsteigenden und niedersteigenden Knoten nicht unterscheiden.

Uebrigens sieht man leicht, dass, sowie $\cos i$ der Cosinus der Neigung der Bahnebene gegen die dritte Ebene ist, so $\sin(N-\Omega)\sin i$ und $\cos(N-\Omega)\sin i$ respective die Cosinus der Neigungen der Bahnebene gegen die erste und zweite Ebene sind; sowie dass $rr'\sin(u'-u)$ die doppelte Fläche des zwischen den beiden Radien Vectoren eingeschlossenen Dreiecks, und dass endlich $zy'-yz'$, $xz'-zx'$, $xy'-yx'$ die doppelte Fläche der Projectionen desselben Dreiecks auf die einzelnen Ebenen ausdrückt.

Schliesslich kann offenbar die dritte Ebene statt der Ecliptik auch jedwede andere Ebene sein, wenn nur alle Grössen, die durch ihre Beziehungen auf die Ecliptik definirt sind, ebenso auf diese dritte beliebige Ebene bezogen werden.

112.

Es seien x'', y'', z'' die Coordinaten eines dritten Orts, u'' dessen Argument der Breite, r'' der Radius Vector. — Dabei sollen die Grössen $r'r''\sin(u''-u')$, $rr''\sin(u''-u)$, $rr'\sin(u'-u)$, welche die doppelten Dreiecksflächen zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vector sind, resp. mit n, n', n'' bezeichnet werden. Man wird daher für x'', y'', z'' ähnliche Ausdrücke haben, wie die in dem vorangehenden Artikel für x, y, z und x', y', z' gegebenen, woraus sich mit Hülfe des Satzes I, Art. 78 leicht folgende Gleichungen ableiten lassen:

$$0 = nx - n'x' + n''x''$$
$$0 = ny - n'y' + n''y''$$
$$0 = nz - n'z' + n''z''.$$

Es seien nun die jenen drei Orten des Himmelskörpers entsprechenden geocentrischen Längen α, α', α'' und die geocentrischen Breiten β, β', β''; die auf die Ecliptik projicirten Abstände von der Erde δ, δ', δ''; ferner die entsprechenden heliocentrischen Längen der Erde L, L', L''; die Breiten B, B', B'', die ich nicht $= 0$ setze, sowohl um auf die Parallaxe Rücksicht nehmen, als um, falls es beliebt, statt der Ecliptik irgend eine andere Ebene wählen zu können. Endlich seien D, D', D'' die auf die Ecliptik projicirten (128)

Abstände der Erde von der Sonne. Wenn man sodann x, y, z durch L, B, D, α, β, δ ausdrückt, und in ähnlicher Weise die auf den zweiten und dritten Ort sich beziehenden Coordinaten, so nehmen die vorangehenden Gleichungen folgende Gestalt an:

$$[1]\quad 0 = n(\delta\cos\alpha + D\cos L) - n'(\delta'\cos\alpha' + D'\cos L') + n''(\delta''\cos\alpha'' + D''\cos L'')$$

$$[2]\quad 0 = n(\delta\sin\alpha + D\sin L) - n'(\delta'\sin\alpha' + D'\sin L') + n''(\delta''\sin\alpha'' + D''\sin L'')$$

$$[3]\quad 0 = n(\delta\,\text{tang}\,\beta + D\,\text{tang}\,B) - n'(\delta'\,\text{tang}\,\beta' + D'\,\text{tang}\,B') + n''(\delta''\,\text{tang}\,\beta'' + D''\,\text{tang}\,B'').$$

Falls hier α, β, D, L, B und die analogen Grössen für die beiden übrigen Orte als bekannt angesehen, und die Gleichungen mit n, oder n', oder n'' dividirt werden, so bleiben fünf Unbekannte übrig, von denen man also zwei eliminiren, oder durch zwei beliebige die übrigen drei bestimmen kann. Auf diese Weise bahnen jene drei Gleichungen den Weg zu sehr vielen wichtigen Ableitungen, von denen ich einige der vorzüglichsten hier entwickeln will.

113.

Um nicht durch die Länge der Formeln überladen zu werden, gebrauche ich die nachfolgenden Abkürzungen. Zuerst bezeichne ich die Grösse

$$\text{tang}\,\beta\sin(\alpha'' - \alpha') + \text{tang}\,\beta'\sin(\alpha - \alpha'') + \text{tang}\,\beta''\sin(\alpha' - \alpha)$$

mit $(0\,.\,1\,.\,2)$. Wenn in jenen Ausdruck für die einem jeden geocentrischen Orte entsprechende Länge und Breite, diejenige Länge und Breite substituirt wird, welche einem jeden der drei heliocentrischen Orte der Erde entspricht, so werde ich in dem Zeichen $(0\,.\,1\,.\,2)$ die dem ersteren entsprechende Zahl mit derjenigen römischen Zahl vertauschen, welche dem zweiten entspricht. So z. B. soll das Merkzeichen $(0\,.\,1\,.\,\mathrm{I})$ die Grösse

$$\text{tang}\,\beta\sin(L' - \alpha') + \text{tang}\,\beta'\sin(\alpha - L') + \text{tang}\,B'\sin(\alpha' - \alpha)$$

ausdrücken, und das Merkzeichen $(0\,.\,\mathrm{O}\,.\,2)$ folgende:

$$\text{tang}\,\beta\sin(\alpha'' - L) + \text{tang}\,B\sin(\alpha - \alpha'') + \text{tang}\,\beta''\sin(L - \alpha).$$

Auf ähnliche Weise verändere ich das Merkzeichen, falls in den ersten Ausdruck statt zweier geocentrischen Längen und Breiten irgend zwei heliocentrische der Erde substituirt werden. Wenn zwei Längen und Breiten in denselben Ausdruck eingehen und nur unter sich vertauscht werden, so muss man auch in dem Merkzeichen die entsprechenden Zahlen vertauschen. Dadurch wird aber der Werth selbst nicht verändert, sondern es wird nur aus dem positiven ein negativer, aus dem negativen ein positiver. So z. B. wird

$$(0\,.\,1\,.\,2) = -(0\,.\,2\,.\,1) = (1\,.\,2\,.\,0) = -(1\,.\,0\,.\,2) = (2\,.\,0\,.\,1) = -(2\,.\,1\,.\,0).$$

Alle so entstehenden Grössen lassen sich also auf folgende neunzehn zurückführen:

(0 . 1 . 2), (0 . 1 . O), (0 . 1 . I), (0 . 1 . II), (0 . O . 2), (0 . I . 2), (0 . II . 2), (129)
(O . 1 . 2), (I . 1 . 2), (II . 1 . 2), (0 . O . I), (0 . O . II), (0 . I . II), (1 . O . I), (1 . O . II), (1 . I . II), (2 . O . I), (2 . O . II), (2 . I . II), welchen als zwanzigste hinzutritt (O . I . II).

Uebrigens lässt sich leicht zeigen, dass diese einzelnen Ausdrücke, wenn man sie mit dem Producte aus den drei Cosinussen der eingehenden Breiten multiplicirt, dem sechsfachen Volum einer Pyramide gleich werden, deren Scheitel in der Sonne liegt, deren Basis aber das Dreieck ist, welches von denjenigen drei Punkten der Himmelskugel gebildet wird, die den in jenen Ausdruck eingehenden Orten entsprechen, wobei der Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt wird. So oft daher diese drei Orte in demselben grössten Kreise liegen, muss der Werth des Ausdrucks $= 0$ werden. Da dies nun bei den drei heliocentrischen Orten der Erde immer Statt findet, wenn man auf die Parallaxen und die durch Störungen entstandenen Breiten der Erde keine Rücksicht nimmt, d. h. wenn man die Erde in die Ebene der Ecliptik selbst setzt, so wird unter dieser Voraussetzung stets (O . I . II) $= 0$, welche Gleichung identisch ist, falls als dritte Ebene die Ecliptik selbst genommen wird. Sobald übrigens sowohl B, als B', als $B'' = 0$, so werden alle jene Ausdrücke, mit Ausnahme des ersten, viel einfacher; denn dieselben werden vom zweiten bis zum zehnten aus je zwei Theilen zusammengesetzt sein, vom elften bis zum neunzehnten aber aus einem einzigen Gliede bestehen.

114.

Multiplicirt man die Gleichung [1] mit $\sin\alpha''\operatorname{tang}B''-\sin L''\operatorname{tang}\beta''$, die Gleichung [2] mit $\cos L''\operatorname{tang}\beta''-\cos\alpha''\operatorname{tang}B''$, die Gleichung [3] mit $\sin(L''-\alpha'')$, und addirt die Producte, so erhält man:

$$[4]\quad 0=n\left\{(0.2.\mathrm{II})\delta+(\mathrm{O}.2.\mathrm{II})D\right\}-n'\left\{(1.2.\mathrm{II})\delta'+(\mathrm{I}.2.\mathrm{II})D'\right\},$$

und auf ähnliche Weise, oder bequemer durch alleinige Vertauschung der Orte unter sich:

$$[5]\quad 0=n\left\{(0.1.\mathrm{I})\delta+(\mathrm{O}.1.\mathrm{I})D\right\}+n''\left\{(2.1.\mathrm{I})\delta''+(\mathrm{II}.1.\mathrm{I})D''\right\}$$

$$[6]\quad 0=n'\left\{(1.0.\mathrm{O})\delta'+(\mathrm{I}.0.\mathrm{O})D'\right\}-n''\left\{(2.0.\mathrm{O})\delta''+(\mathrm{II}.0.\mathrm{O})D''\right\}.$$

Wenn daher das Verhältniss der Grössen n, n' gegeben ist, so lässt sich mit Hülfe der Gleichung [4] aus δ die Grösse δ' bestimmen, oder δ aus δ', und so in ähnlicher Weise aus den Gleichungen [5] und [6]. Aus Combination der Gleichungen [4], [5] und [6] entsteht folgende:

$$[7]\quad \frac{(0.2.\mathrm{II})\delta+(\mathrm{O}.2.\mathrm{II})D}{(0.1.\mathrm{I})\delta+(\mathrm{O}.1.\mathrm{I})D}\times\frac{(1.0.\mathrm{O})\delta'+(\mathrm{I}.0.\mathrm{O})D'}{(1.2.\mathrm{II})\delta'+(\mathrm{I}.2.\mathrm{II})D'}\times\frac{(2.1.\mathrm{I})\delta''+(\mathrm{II}.1.\mathrm{I})D''}{(2.0.\mathrm{O})\delta''+(\mathrm{II}.0.\mathrm{O})D''}=-1,$$

mittelst welcher man aus zwei Abständen des Himmelskörpers von der Erde den dritten bestimmen kann. Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Gleichung [7] identisch, und daher zur Bestimmung eines Abstandes aus den beiden übrigen unbrauchbar werde, sobald

$$B=B'=B''=0$$

und

$$(130)\quad \left.\begin{aligned}&\operatorname{tang}\beta'\operatorname{tang}\beta''\sin(L-\alpha)\sin(L''-L')\\+&\operatorname{tang}\beta''\operatorname{tang}\beta\sin(L'-\alpha')\sin(L-L'')\\+&\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\beta'\sin(L''-\alpha'')\sin(L'-L)\end{aligned}\right\}=0.$$

Von dieser Unzuträglichkeit frei ist folgende Formel, die sich leicht aus den Gleichungen [1], [2], [3] herleitet:

$$[8] \quad (0.1.2)\delta\delta'\delta'' + (\mathrm{O}.1.2)D\delta'\delta'' + (0.\mathrm{I}.2)D'\delta\delta'' + (0.1.\mathrm{II})D''\delta\delta' + (0.\mathrm{I}.\mathrm{II})D'D''\delta + (\mathrm{O}.1.\mathrm{II})DD''\delta' + (\mathrm{O}.\mathrm{I}.2)DD'\delta'' + (\mathrm{O}.\mathrm{I}.\mathrm{II})DD'D'' = 0.$$

Multiplicirt man Gleichung [1] mit $\sin\alpha' \operatorname{tang}\beta'' - \sin\alpha'' \operatorname{tang}\beta'$, die Gleichung [2] mit $\cos\alpha'' \operatorname{tang}\beta' - \cos\alpha' \operatorname{tang}\beta''$, die Gleichung [3] mit $\sin(\alpha'' - \alpha')$ und addirt die Producte, so erhält man:

$$[9] \quad 0 = n\{(0.1.2)\delta + (\mathrm{O}.1.2)D\} - n'(\mathrm{I}.1.2)D' + n''(\mathrm{II}.1.2)D''$$

und ebenso

$$[10] \quad 0 = n(0.\mathrm{O}.2)D - n'\{(0.1.2)\delta' + (0.\mathrm{I}.2)D'\} + n''(0.\mathrm{II}.2)D''$$

$$[11] \quad 0 = n(0.1.\mathrm{Q})D - n'(0.1.\mathrm{I})D' + n''\{(0.1.2)\delta'' + (0.1.\mathrm{II})D''\}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich aus dem bekannten Verhältnisse zwischen den Grössen n, n', n'' die Abstände δ, δ', δ'' bestimmen. Dieser Schluss gilt jedoch nur im Allgemeinen gesprochen und leidet eine Ausnahme, sobald $(0.1.2) = 0$ wird. Denn es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle aus den Gleichungen [8], [9], [10] nichts anderes folgt, als die nothwendige Relation unter den Grössen n, n', n'', und zwar aus den einzelnen dreien die nämliche. Analoge Einschränkungen in Beziehung auf die Gleichungen [4], [5], [6] werden dem erfahrenen Leser sich von selbst darbieten.

Uebrigens sind alle diese hier entwickelten Schlussfolgerungen unbrauchbar, sobald die Ebene der Bahn mit der Ecliptik zusammenfällt; denn wenn β, β', β'', und B, B', B'' alle $= 0$ sind, so ist die Gleichung [3] identisch, und mithin auch alle folgenden.