

Untersuchung von Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz

Franz Holzinger, B.Sc.

Untersuchung von Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz

Masterarbeit

an der

Technischen Universität Graz

vorgelegt von

Franz Holzinger, B.Sc.

Institut für Elektrische Meßtechnik und
Meßsignalverarbeitung (EMT),
Technische Universität Graz
A-8010 Graz

29. August 2014

© Copyright 2014, Franz Holzinger

Betreuer: DI Dr.techn. Martin Benedikt
Begutachter: DI Dr.techn. Univ.-Doz. Daniel Watzenig



Investigation of Methods for Estimation of the Instantaneous Frequency

Master's Thesis

at

Graz University of Technology

submitted by

Franz Holzinger, B.Sc.

Institute of Electrical Measurement and
Measurement Signal Processing (EMT),
Graz University of Technology
A-8010 Graz, Austria

29th August 2014

© Copyright 2014 by Franz Holzinger
This work is written in german language.

Advisor: DI Dr.techn. Martin Benedikt

Evaluator: DI Dr.techn. Univ.-Doz. Daniel Watzenig



„Nur Narren sind sich sicher, der kluge Mann denkt weiter nach.“

Angus MacGyver

Kurzfassung

Das starke wirtschaftliche Interesse sowohl Entwicklungszeit als auch Entwicklungskosten zu senken, führt zu dem Schluss, dass immer öfter simulationstechnische Werkzeuge anstelle von teuren Prototypen verwendet werden. Die Komplexität der Problemstellung erlaubt es oftmals nicht, diese innerhalb einer Simulationsumgebung zu lösen, wodurch die Kombination von mehreren Simulationswerkzeugen notwendig ist. Die Co-Simulation ist eine Technik, die sich aus dieser Problemstellung heraus entwickelt hat. Eine Co-Simulationsplattform gewährleistet, dass jedem Teilmodell die notwendigen Daten, die sogenannten Koppelsignale, zu den Koppelzeitpunkten zur Verfügung stehen.

Im Allgemeinen sind die einzelnen Teilmodelle der Co-Simulation gegenseitig abhängig. Sie benötigen für die Berechnung die Ergebnisse der anderen Modelle. Innerhalb eines Koppelschritts stehen dem ersten Modell jedoch keine Informationen der anderen Teilsysteme zur Verfügung. Die notwendigen Koppelsignale müssen mittels Extrapolation geschätzt werden. Das Extrapolationsfilter kann, in Abhängigkeit der Koppelschrittweite und der Frequenz der Koppelsignale, Fehler im Systemverhalten verursachen. Um diese Fehler zu Erkennen bietet sich die Analyse der Momentanfrequenz der Koppelsignale an.

In dieser Arbeit werden verschiedene Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz untersucht. Es wird unter anderem auf online Methoden, die eine Aussage über die Frequenz während der Laufzeit liefern, eingegangen. Da ein großer Teil der Frequenzschätzer auf stationären mittelwertfreien Signalen beruht und diese Annahme in der Regel bei Simulationsergebnissen nicht gilt, werden zusätzlich Verfahren gezeigt, die es ermöglichen die Frequenzschätzer trotzdem zu verwenden.

Abstract

The economic interest to reduce the development time and costs leads to the conclusion that simulation tools are used instead of expensive prototypes. The complexity of the problems does not often able to be solved within one simulation environment. In particular for multiphysics models it is necessary to combine different simulation tools. The co-simulation is a technique that has been developed to handle this problem. A co-simulation platform has to ensure that each model gets the required data, the so called coupling signals, to the time instants.

In general, the different models of the co-simulation depend on each other. They need the results from the other models for the calculation. The preliminary computed model has no information about the results of the other models during one coupling step. The required coupling signals must be estimated by extrapolation. The extrapolation filter can, depending on the coupling step size and the frequency of the coupling signals, cause faults in the system behaviour. These faults are detected by the analysis of the instantaneous frequency of the coupling signals. In this thesis different methods for estimating the instantaneous frequency are analysed. It covers inter alia online methods, which allow an estimation of the instantaneous frequency during the simulation. Most of the frequency estimators are based on stationary zero-mean signals and in general this assumption is not valid for simulation results. So additional procedures will be shown, which still allow the use of these frequency estimators.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ort

Datum

Unterschrift

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Place

Date

Signature

Inhaltsverzeichnis

Inhalt	ii
Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	v
Danksagung	vii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Zielsetzung	1
1.3 Struktur der Arbeit	2
2 Einführung in Co-Simulation und Momentanfrequenz	3
2.1 Co-Simulation	3
2.1.1 Allgemein	3
2.1.2 Analyse der nicht-iterativen Co-Simulation	7
2.2 Momentanfrequenz	12
2.2.1 Allgemein	12
2.2.2 Definition und Herkunft	13
3 Methoden zur Analyse der momentanen Frequenz	17
3.1 Offline Untersuchungen	17
3.1.1 Fourier-Transformation	17
3.1.2 Kurzzeit-Fourier-Transformation	18
3.1.3 Wavelet-Transformation	20
3.1.4 Phasenableitung und Phasendifferenz	22
3.1.5 Analyse der Nulldurchgänge	24
3.1.6 Hilbert-Huang-Transformation	25
3.2 Online Untersuchungen	35
3.2.1 Steigungsbasierte Analyse	35
3.2.2 Schätzung mittels Energieoperator	37
3.2.3 Auto-regressive Frequenzschätzung	41
3.2.4 Frequenzschätzung mittels Kalman-Filter	44

4	Signalaufbereitung und Vorberechnung	49
4.1	Allgemein	49
4.2	Filterung	51
4.3	Ableitung	51
4.4	Signalzerlegung	52
4.4.1	Online EMD	52
4.5	Erweiterung des EKF Modells	57
5	Anwendungsbeispiele	59
5.1	Schwingung mit unterschiedlichen Frequenzen	60
5.2	Schwingung mit zwei Frequenzen	68
5.3	Schwingung mit linearem Trend	75
5.4	Co-Simulation eines Regelkreises	82
6	Zusammenfassung und Ausblick	87
6.1	Zusammenfassung	87
6.2	Schlussfolgerung	87
6.3	Ausblick	88
A	Ergänzende mathematische Zusammenhänge	89
A.1	Analytische Berechnung der Momentanfrequenz	89
A.2	Herleitung der Zeit-Frequenz Unschärferelation	90
A.3	Herleitung des diskreten Teager-Kaiser Energieoperators	91
A.3.1	Zeitdiskrete Analyse mit konstanter Frequenz und Amplitude	92
A.4	Kubische hermitesche Splines	93
	Literaturverzeichnis	95

Abbildungsverzeichnis

2.1	Grenzen zwischen klassischer Simulation, Modellseparation, Modellintegration und Co-Simulation	4
2.2	Schematische Betrachtung der nicht-iterativen Co-Simulation	5
2.3	Kontinuierliche Betrachtung der nicht-iterativen Co-Simulation	7
2.4	Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals im Frequenzbereich	8
2.5	Extrapolation im Zeitbereich	10
2.6	Betragsgänge der Extrapolationsfilter	10
2.7	Frequenzgänge von Zoh, Foh und Soh	11
2.8	Noten als Zeit-Frequenzdarstellung	12
2.9	Verlauf der momentanen Phase und der momentanen Amplitude	13
2.10	Summe zweier sinusförmiger Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen	15
3.1	Phasenraumgebiet STFT	20
3.2	Phasenraumgebiet Wavelet	21
3.3	Schritte der EMD	27
3.4	Schätzen des Extremwertes durch interpolieren eines Polynoms	28
3.5	Verhalten der Hüllkurve bei verschiedenen Randbedingungen	30
3.6	Interpolation der Runge-Funktion	31
3.7	Verlauf der Spline Interpolation	33
3.8	Extrahieren der Frequenz aus dem Trend	34
3.9	Extrahieren einer Mode aus einem Sprung im Trend	35
3.10	Maximale Steigungsänderung eines abgetasteten Sinussignals	36
3.11	Feder-Masse-System	38
3.12	Blockschaltbild AR-Filter	41
4.1	Sinusförmige Schwingung mit linearem Offset	50
4.2	Feder-Masse-System über Seilwinde	50
4.3	Betragsgang zweier Sinusschwingungen	51
4.4	Änderung des Beobachtungshorizontes der online EMD bei einem neuen Extremwert	53
4.5	Stückweise EMD mit gewöhnlichen Randbedingungen	54

4.6	Randbedingung der linken Intervallgrenze	56
4.7	Stückweise EMD mit neuen Randbedingungen	56
4.8	Schwankungsbereich der EMD bei Einfluss eines nachfolgenden Sprungs . .	57
5.1	Verlauf eines stationären Sinussignals mit konstanter Amplitude	60
5.2	Offline Frequenzschätzung einer Schwingung mit verschiedenen Frequenz- verhalten	61
5.3	Relativer Fehler der offline Frequenzschätzungen an einer Schwingung mit verschiedenen Frequenzverhalten	62
5.4	Online Frequenzschätzung einer Schwingung mit verschiedenen Frequenz- verhalten	65
5.5	Relativer Fehler der online Frequenzschätzungen an einer Schwingung mit verschiedenen Frequenzverhalten	66
5.6	Summe zweier Sinusschwingungen	68
5.7	Offline Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen	69
5.8	Offline Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen	70
5.9	Online Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen	72
5.10	Relativer Fehler der online Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen .	73
5.11	Schwingung mit linearem Trend	75
5.12	Offline Frequenzschätzung der Schwingung mit linearem Trend	76
5.13	Relativer Fehler der offline Frequenzschätzung einer Schwingung mit linea- rem Trend	77
5.14	Online Frequenzschätzung der Schwingung mit linearem Trend	79
5.15	Relativer Fehler der online Frequenzschätzung einer Schwingung mit linea- rem Trend	80
5.16	Schematische Darstellung eines Standardregelkreises	82
5.17	Schematische Darstellung der Kopplung der Teilmodelle	82
5.18	Sprungantwort des Regelkreises bei unterschiedlichen Koppelschrittweiten .	83
5.19	Verlauf der ersten Mode des Ausgangssignals des Regelkreises	84
5.20	Momentanfrequenz und korrespondierende Koppelschrittweite	84
A.1	Darstellung der Polynome der hermiteschen kubischen Splines	94

Tabellenverzeichnis

2.1	Begrenzung der Makro-Schrittweite bzgl. Kopplungsvarianten	11
3.1	Koeffizienten zur Momentanfrequenzschätzung der Phasendifferenz mit höherer Ordnung M	24
A.1	Charakteristische Eigenschaften der vier kubischen Polynome von hermiteschen Splines	94

Danksagung

Zu Beginn möchte ich meinem Betreuer Dr. Martin Benedikt danken. Die oftmals zeitintensiven und anregenden Diskussionen rund um meine Arbeit und darüber hinaus, motivierten mich stets von Neuem und eröffneten mir einen neuen Interessenbereich.

Nicht minder möchte ich Univ.-Doz. Dr. Daniel Watzenig danken, ohne dessen Zutun diese Arbeit erst gar nicht möglich gewesen wäre.

Weiter möchte ich dem Kompetenzzentrum „Das virtuelle Fahrzeug“ Forschungsgesellschaft mbH für die Möglichkeit zum Schreiben dieser Arbeit und den gewonnenen Erfahrungen, die ich in den letzten zwei Jahren als Mitarbeiter sammeln durfte, danken.

Ein großer Dank gilt meinen Freunden und Kollegen, die ich während meines Studiums kennenlernen durfte und die mich sowohl während den angenehmen, als auch oftmals stressigen Zeiten des Studiums begleitet haben.

Abschließend möchte ich meiner Familie und ganz besonders meinen Eltern danken, die mich nicht nur während meines Studiums stets unterstützt und ermutigt haben.

Franz Holzinger
Graz, August 2014

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

In den letzten Jahren und Jahrzehnten ist in der Industrie ein klarer Trend zur Senkung der Entwicklungszeit und der dadurch entstehenden Kosten zu erkennen. Die Fertigung von Prototypen stellt besonders in der Automobilbranche eine große Zeit- und Kostenproblematik dar. Vorabuntersuchungen am Rechner ermöglichen die Entwicklung von „virtuellen Prototypen“ und verkürzen die Entwicklungszeiten.

Bei einer Vielzahl von Simulationsprogrammen, die oftmals auf spezifische Problemstellungen zugeschnitten sind, ist es schwierig große und komplexe Aufgabenstellungen mittels einer Simulationsumgebung zu lösen. Die Co-Simulation (co-operative simulation) bietet eine sinnvolle Möglichkeit die Stärken verschiedener Simulationsprogramme miteinander zu verknüpfen.

Der Austausch und die Zuweisung der Signale zu den einzelnen Simulationsumgebungen wird von einer Co-Simulationsumgebung übernommen. Diese stellt typischerweise eine übergeordnete Plattform dar, die den Transfer der Koppeldaten zwischen den Programmen zu sogenannten Koppelzeitpunkten gewährleistet.

Der Zeitpunkt der Kopplung wird durch eine Koppelschrittweite vorgegeben, welche im Allgemeinen konstant als auch zeitvariabel sein kann. Eine günstige Wahl der Koppelschrittweite stellt sich als eine nicht zu unterschätzende Herausforderung dar. Bei zu kleinen Koppelschrittweiten steigt der Kommunikationsaufwand und somit die Gesamtsimulationsdauer. Wird die Koppelschrittweite zu groß gewählt, so treten Koppeleffekte auf, welche die Genauigkeit der Simulation beeinflussen. Um die Leistungsfähigkeit der Co-Simulationsplattform zu steigern ist somit über die Koppelschrittweite ein Kompromiss zwischen Laufzeit und Genauigkeit zu finden.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist in erster Linie die Evaluierung der Kopplung basierend auf dem Frequenzinhalt der Koppelsignale. Dabei sollen die Frequenzinhalte der Koppelsignale

während der Simulation (online) bestimmt werden. Dieser Frequenzinhalt kann der zur Verfügung stehenden Bandbreite der Koppelung gegenübergestellt werden und somit eine qualitative Beurteilung der Kopplung ermöglichen. Mit Hilfe der Momentanfrequenz des Koppelsignals lässt sich auf die zulässige Koppelschrittweite und somit auf die Qualität der Kopplung schließen. Somit sollen während der Simulation eventuell entstehende Fehler im Bezug auf die Koppelschrittweite erkannt werden können.

Die meisten Frequenzschätzverfahren, die in dieser Arbeit behandelt werden, setzen ein stationäres mittelwertfreies Signal voraus. Diese Annahme trifft jedoch generell nicht auf Koppelsignale der Co-Simulation zu. Daher werden zusätzlich Verfahren gezeigt, die den Einsatz der Frequenzschätzer trotzdem ermöglichen.

1.3 Struktur der Arbeit

Die Arbeit befasst sich mit der Bestimmung der Momentanfrequenz von Signalen. In diesem Zusammenhang werden unterschiedliche Ansätze zum Schätzen der Momentanfrequenz besprochen und erörtert.

Im Anschluss zur Einleitung in **Kapitel 1** befasst sich das **Kapitel 2** mit einer allgemeinen Einführung in die Co-Simulation und in die Thematik der Momentanfrequenzschätzung. Dabei wird genauer auf die Methodik der Kopplung und den damit entstehenden Schwierigkeiten eingegangen. Zusätzlich beinhaltet dieses Kapitel eine allgemeine Einführung in das Themengebiet *Momentanfrequenz*, in der die Herkunft und Definition der Momentanfrequenz aufgezeigt wird.

In **Kapitel 3** werden verschiedene Ansätze und Methoden zum Schätzen der Momentanfrequenz mathematisch näher gebracht. Es werden die Grundgedanken der einzelnen Methoden zum Schätzen aufgezeigt. Dabei wird grundsätzlich zwischen Verfahren, die einerseits während der Simulationslaufzeit die Momentanfrequenz bestimmen und solchen, die erst im Anschluss zur Simulation die Momentanfrequenz ermitteln, unterschieden.

Kapitel 4 befasst sich mit der Momentanfrequenzschätzung in Bezug auf die Analyse von nicht stationären Signalen, da die Stationarität in diesem Zusammenhang oftmals eine Voraussetzung ist. Es werden verschiedene Überlegungen aufgezeigt, die es ermöglichen sollen, die Frequenz von nicht stationären Signalen während der Laufzeit zu bestimmen.

Im Anschluss daran wird in **Kapitel 5** die Funktionsweise der einzelnen Methoden anhand von Beispielen dargestellt. Anhand von ausgewählten Beispielen wird der Einsatzbereich der Methoden analysiert und gegenübergestellt. Zusätzlich wird die Auswirkung von nicht stationären Signalen auf die Methoden gezeigt und Auswirkung von Vorberechnungen demonstriert.

Abschließend werden in **Kapitel 6** die Ergebnisse zusammengefasst und resümiert. Zusätzlich wird ein Ausblick auf weiter mögliche Tätigkeiten in diesem Bereich gegeben.

Kapitel 2

Einführung in Co-Simulation und Momentanfrequenz

Das folgende Kapitel gibt einen allgemeinen Einblick in die Thematik der Co-Simulation und der Bedeutung der Momentanfrequenz. Es wird der Stand der Technik der Co-Simulation aufgeführt und die eventuell entstehende Problematik der Kopplung näher erläutert. Weiters wird auf den Ursprung und die Definition der Momentanfrequenz eingegangen und ihre Anwendung zum Detektieren von möglichen Koppelfehlern erläutert.

2.1 Co-Simulation

Um große und komplexe Simulationsaufgaben, die oftmals domänenübergreifende Gesamtsysteme darstellen, lösen zu können, gilt die Separation der Aufgabe in Teilsysteme als eine übliche Herangehensweise. Oftmals ist es nicht möglich eine komplexe Aufgabe mit einem einzelnen Simulationsprogramm zu lösen, da die einzelnen Teilsysteme spezielle Simulationsumgebungen benötigen. Die Co-Simulation bietet hierzu eine Möglichkeit die Stärken verschiedener Simulationsprogramme zu kombinieren. Dieses Kapitel soll einen allgemeinen Überblick über die Funktion der Co-Simulation und die damit einhergehende Problematik schaffen.

2.1.1 Allgemein

Die immer größer werdende Komplexität von Simulationsmodellen bringt einzelne Simulationsprogramme oft an ihre Grenzen. Gerade in der Fahrzeugindustrie gibt es unzählige Simulationsumgebungen die auf einzelne spezifische Problemstellungen angepasst sind. Eine gesamte Fahrzeugsimulation ist mit einem einzigen Simulationsprogramm nicht mehr oder nur eingeschränkt möglich. Die Co-Simulation ist eine Technik, die sich aus dieser Problemstellung heraus entwickelt hat.

In der Literatur wurde eine einheitliche Begriffsbeschreibung für die Co-Simulation und weitere Kopplungsmethoden vorgeschlagen [1]. Die Unterteilung und die Grenzen der einzelnen Begriffe sind in Abbildung 2.1 graphisch dargestellt.

Bei einer üblichen, *klassischen Simulation* wird ein Problem mit **einem** Integrator, d.h. ein numerischer Lösungsalgorithmus (*Solver*), in **einer** Simulationsumgebung gelöst. Es ist eine geschlossene Simulation mit einem Modellierungs- sowie auch Simulationswerkzeug.

Die *Modellseparation* bietet eine Möglichkeit zum Lösen von Problemen mit unterschiedliche Dynamiken, um die Leistungsfähigkeit der gesamten Simulation zu steigern. Das Modell muss dazu jedoch in Teilsysteme unterteilt werden. Die Teilmodelle werden mit **einem** Modellierungswerkzeug modelliert, jedoch mit **mehreren** Solvern simuliert, welche unterschiedliche Schrittweiten besitzen können. Es ist eine verteilte Simulation mit einheitlicher Modellierung.

Eine geschlossene Simulation mit verteilter Modellbildung wird *Modellintegration* genannt, dabei wird ein Problem mit **mehreren** Werkzeugen modelliert, anschließend werden die Teilmodelle zusammengeführt und gemeinsam mit **einem** Solver gelöst.

Der Begriff *Co-Simulation* bezeichnet den Einsatz von **mehreren** Werkzeugen für die Modellierung eines Problems, bei deren Lösung auch **mehrere** Solver verwendet werden. Somit sind mit dieser Technik verteilte Modellbildung und verteilte Simulation möglich. Eine Co-Simulationsplattform gewährleistet die korrekte Kopplung und den Datenaustausch zwischen den einzelnen Simulationswerkzeugen, die gekoppelten Signale werden *Koppelgrößen* genannt.

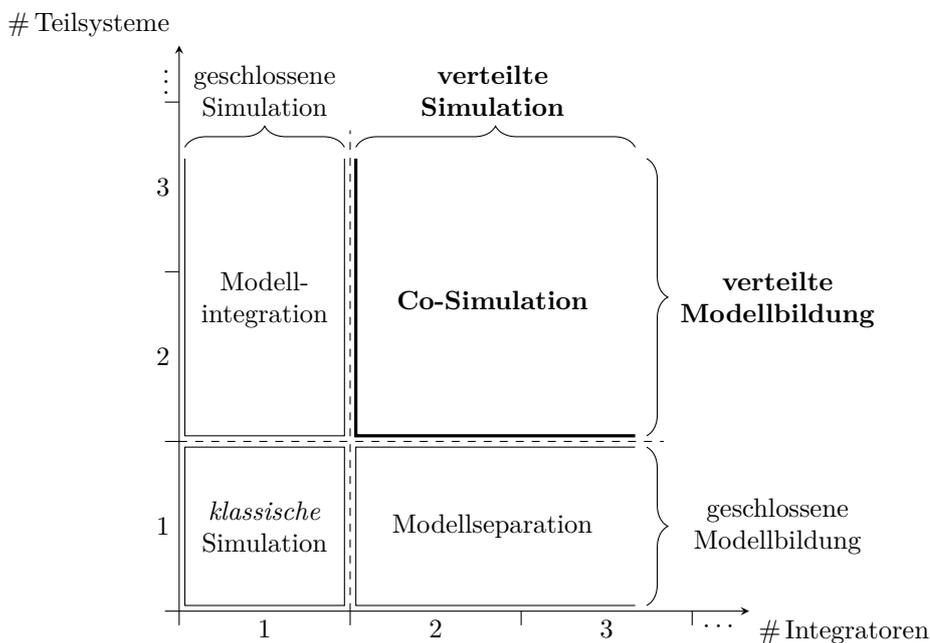


Abbildung 2.1: Grenzen zwischen klassischer Simulation, Modellseparation, Modellintegration und Co-Simulation [1]

Durch die Gegebenheit von mehreren numerischen Lösungsalgorithmen existieren in der Regel unterschiedliche Schrittweiten der einzelnen numerischen Solver. Dadurch entsteht die Notwendigkeit von Koppelzeitpunkten, zu denen die Daten zwischen den Programmen ausgetauscht werden. Da die Programme zu diesen Zeitpunkten synchronisiert werden, werden diese Zeitpunkte auch *Synchronisationszeitpunkte* genannt. Die Schrittweite eines

Simulationsprogramms wird im Kontext der Co-Simulation als **Mikro-Zeitschritt** mit der Abkürzung T_δ bezeichnet [2–4]. Abhängig von den Einstellungen des Solvers kann die Mikro-Zeitschrittweite T_δ variabel (*variable step-size solver*) oder konstant (*fixed step-size solver*) sein. Analog dazu wird die Schrittweite zwischen den Koppelzeitpunkten der Co-Simulationsumgebung als **Makro-Zeitschritt** mit der Abkürzung T_Δ bezeichnet [2–4]. Die Art der Kopplung und die Ausführungsreihenfolge der Teilsysteme gehören neben der Macro-Schrittweite zu den wichtigsten Charakteristika der Co-Simulation. Bei der Art der Kopplung wird zwischen *sequentiell* und *parallel* unterschieden. Während bei der *sequentiellen* Kopplung die einzelnen Teilsysteme nach einander abgearbeitet werden und somit die Information jedes bereits gerechneten Teils den anderen Teilsystem zur aktuellen Simulationszeit zur Verfügung stehen, besitzen die einzelnen Teilsysteme bei der *parallelen* Kopplung keine Information über die Daten der anderen Systeme zum aktuellen Berechnungszeitpunkt. Sämtliche zur Berechnung notwendigen Eingänge der Module bei der *parallelen* Kopplung, sowie die noch nicht berechneten Koppelgrößen der *sequentiellen* Kopplung sind, sofern sie nicht a priori vorgegeben sind, zum Koppelzeitpunkt unbekannt und müssen daher geschätzt werden. Diese Schätzung erfolgt durch Extrapolation der Koppelgrößen über den aktuellen Makro-Zeitschritt zu den Koppelzeitpunkten. Die Reihenfolge der *sequentiellen* Kopplung legt den Ablauf der Abarbeitung der einzelnen Teilsysteme fest. In der Literatur finden sich Vorschläge zur Ausführungsreihenfolge bei der nicht-iterativen Co-Simulation in Bezug auf die Dynamik der Teilsysteme, wie z.B. *slowest-first* oder *fastest-first* [4, 5].

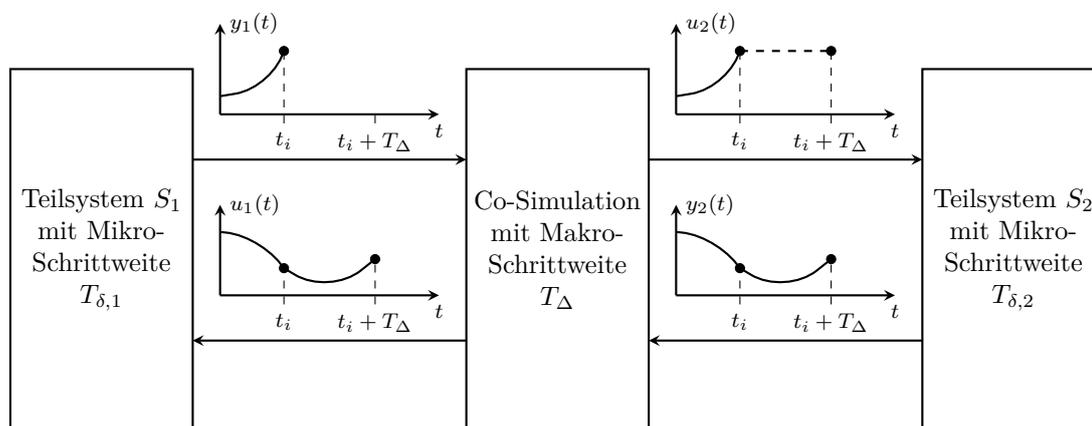


Abbildung 2.2: Schematische Betrachtung der nicht-iterativen Co-Simulation (sequentiell; Teilsystem S_2 vor Teilsystem S_1)

Die Funktionsweise der Co-Simulation soll schematisch an einem einfachen Beispiel mit zwei Teilsystemen S_1 und S_2 , wie in Abbildung 2.2 dargestellt, erläutert werden. Die beiden Simulationsprogramme werden sequentiell abgearbeitet, wobei das System S_2 zuerst gerechnet wird. Jedes System besitzt einen Eingang und einen Ausgang und die Ausgänge werden jeweils mit dem Eingang des anderen Teilmodells gekoppelt. Die Übergabe der Daten übernimmt die Co-Simulationsumgebung. Idealerweise soll die Co-Simulationsumgebung die Koppelgrößen nicht beeinflussen, wodurch gilt, dass $u_1(t) = y_2(t)$ und

$u_2(t) = y_1(t)$ ist.

Zu jedem Koppelzeitpunkt t_i beginnt die Simulation mit dem Teilsystem S_2 . Zu diesem Zeitpunkt existiert jedoch keine Information über die Eingangsgröße u_2 . Wodurch diese Größe während der Dauer T_Δ von der Co-Simulationsplattform geschätzt bzw. extrapoliert werden muss. In Abbildung 2.2 wird u_2 mit einem Extrapolationsfilter nullter Ordnung (*zero-order-hold*, *Zoh*) geschätzt. Das Ergebnis y_2 aus dem Teilmodell S_2 wird mittels der Co-Simulationsumgebung dem Modell S_1 übergeben. Dieses System kennt ihre gesamte notwendige Eingangsinformation bis zum Zeitpunkt $t_i + T_\Delta$ und kann somit ohne Schätzung der Eingangsgröße ihr Ergebnis y_1 ermitteln, womit ein Durchgang bzw. Simulationszyklus der Simulationsumgebungen abgeschlossen ist. Die weitere Vorgangsweise ist von der Art der Co-Simulation abhängig. Im Laufe der Zeit haben sich zwei Arten der Co-Simulation etabliert, die *iterative* Co-Simulation und die *nicht-iterative* Co-Simulation [2, 6–8].

Iterative Co-Simulation

Bei der *iterativen* Co-Simulation wird jeder Simulationzyklus von t_i bis $t_i + T_\Delta$ mehrmals durchgeführt. Die Ergebnisse werden vor Beginn der nächsten Iteration den Simulationsprogrammen übergeben, d.h. zu jedem Koppelzeitpunkt t_i müssen die notwendigen Koppelgrößen nur bei der ersten Iteration extrapoliert werden, da nach dem Simulationszyklus der ersten Iteration die aktuellen Simulationsergebnisse bereits vorhanden sind. Somit wird der durch die Extrapolation verursachte Schätzfehler minimal gehalten. Falls diese Iteration konvergiert, erfolgt der Abbruch der Iteration über ein festgelegtes Kriterium [6–8].

Durch die Wiederholung der Simulation eines Rechenzyklus ergibt sich die Notwendigkeit der Rücksetzbarkeit für die einzelnen Simulationswerkzeuge. Die Simulationszeit, Integratorwerte und Parameter müssen zu jedem Iterationsschritt auf ihren ursprünglichen Wert zum Zeitpunkt t_i zurückgesetzt werden. Oftmals ist ein Eingriff in diese programmspezifischen Simulationsparameter nicht möglich, wodurch der Einsatzbereich der *iterativen* Co-Simulation beschränkt ist.

Nicht-iterative Co-Simulation

Im Gegensatz zur *iterativen* Co-Simulation ist die Berechnung eines Makro-Schritts T_Δ bei der *nicht-iterativen* Co-Simulation nach einem Durchgang abgeschlossen. Jedes Teilsystem muss über jeden Makro-Zeitschritt genau einmal simuliert werden, wodurch einerseits die Leistungsfähigkeit der *nicht-iterativen* Co-Simulation besser und andererseits der Eingriff auf programmspezifische Parameter nicht notwendig ist, da keine Werte zurückgesetzt werden müssen.

Die Extrapolation und der dadurch verursachte Schätzfehler hat jedoch einen größeren Einfluss auf das Ergebnis. Die Art und Weise der Extrapolation und die Makroschrittweite T_Δ spielen somit bei der *nicht-iterativen* Co-Simulation eine signifikante Rolle [9–11].

2.1.2 Analyse der nicht-iterativen Co-Simulation

Idealerweise sollte die Co-Simulationsumgebung keine Auswirkung auf die Simulation haben. Die Tatsache, dass zu den Koppelzeitpunkten die Eingangsverläufe einiger Teilsysteme unbekannt sind, erfordert eine Extrapolation, welche zwangsläufig einen Einfluss auf die Koppelsignale und dadurch auf das Simulationsergebnis hat. Diese Unsicherheit kommt besonders bei der *nicht-iterativen* Co-Simulation zu tragen. Um die Eigenschaften und die möglichen Auswirkungen der Kopplung besser verstehen zu können, muss der Signalverlauf der Kopplung genauer betrachtet werden.

Analyse der Abtastzeit

Die Koppelsignale $y_i(t)$ werden als *kontinuierlich* im Zeit- und Frequenzbereich betrachtet. Diese Betrachtung stellt eine generelle Annahme dar. Ausgangspunkt dieser Überlegung ist, dass die Mikro-Schrittweiten $T_{\delta,i}$ an die Dynamiken der einzelnen Teilsysteme angepasst sind, d.h. es treten bei den Teilsystemen keine *Aliasing-Effekte* bezogen auf deren Mikro-Schrittweiten auf, wodurch die kontinuierlichen Koppelsignale eindeutig durch die zeitdiskreten Funktionswerte beschrieben werden können [12].

Durch den Einsatz von unterschiedlichen Mikro-Schrittweiten, zum Lösen der involvierten Teilsysteme, führt eine Analyse auf Basis von zeitdiskreten Koppelsignalen zwangsläufig zu einer enorm aufwendigen *Multiraten*-Systemanalyse. Die Annahme von kontinuierlichen Koppelsignalen umgeht diese Problematik und ist zulässig, falls keine Aliasing-Effekte bzgl. der Mikro-Schrittweite auftreten. Unter dieser Annahme kann die Signalverarbeitungskette wie in Abbildung 2.3 dargestellt werden.

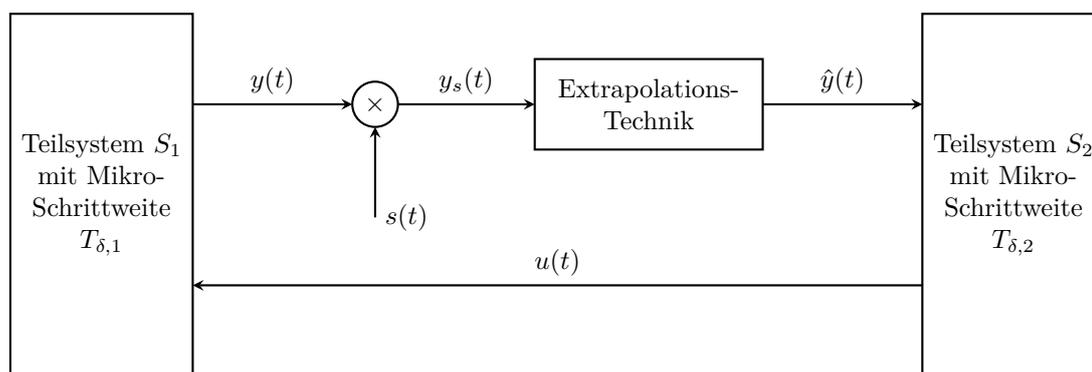


Abbildung 2.3: Kontinuierliche Betrachtung der nicht-iterativen Co-Simulation (sequentiell; Teilsystem S_2 vor Teilsystem S_1)

Das Signal $s(t)$ repräsentiert in diesem Zusammenhang eine periodische Impulsfolge mit der Periodendauer T_Δ , wobei $\delta(t)$ die Dirac'sche Deltafunktion ist. Gleichung (2.1) stellt die periodische Impulsfolge im Zeitbereich und im Frequenzbereich dar [13, S.142]:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_\Delta) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad S(j\omega) = \frac{2\pi}{T_\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_\Delta}) \quad (2.1)$$

Aus der Multiplikation der Impulsfolge $s(t)$ und der zeitkontinuierlichen Koppelgröße $y(t)$

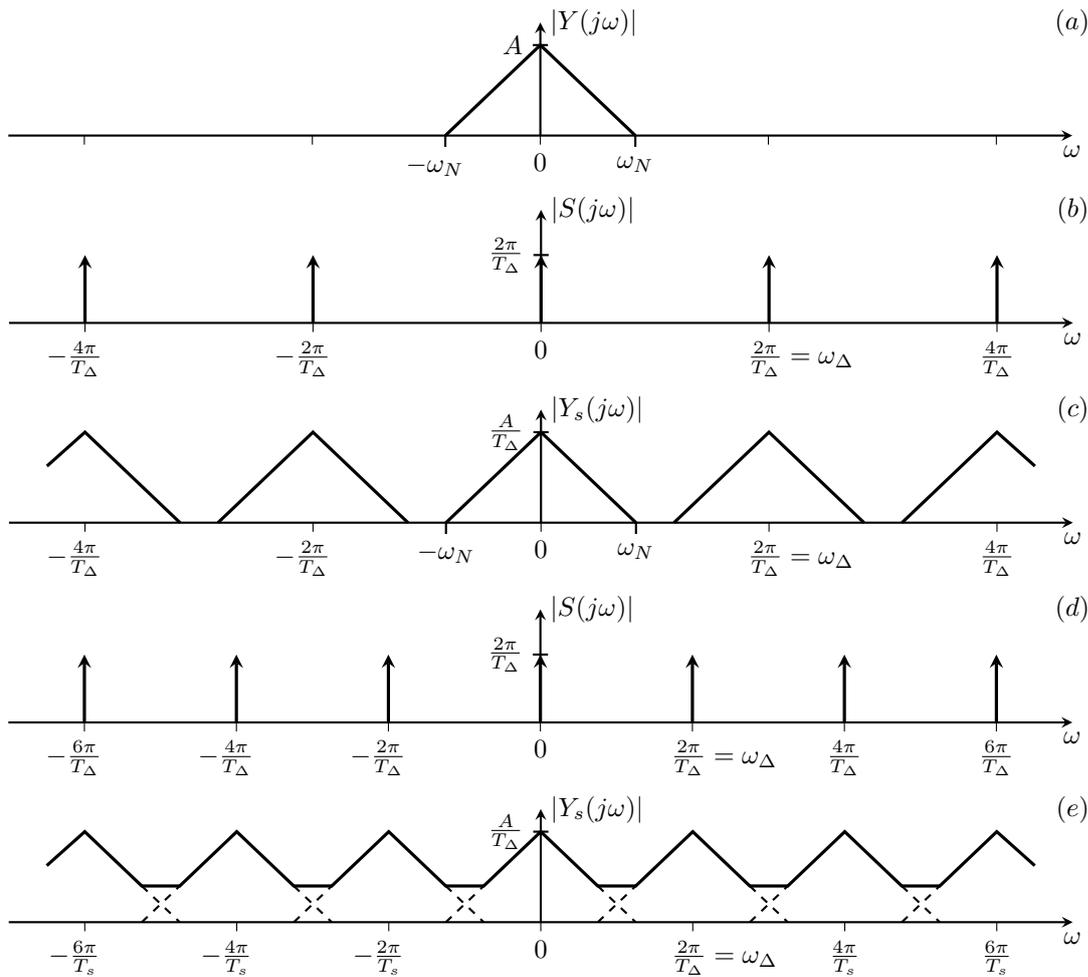


Abbildung 2.4: Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals im Frequenzbereich: (a) Frequenzspektrum eines exemplarischen kontinuierlichen Signals $y(t)$; (b) Spektrum der Abtastfunktion $s(t)$ bei $2\omega_N < \omega_\Delta$; (c) Spektrum des abgetasteten Signals $y_s(t)$ ohne Aliasing; (d) Spektrum der Abtastfunktion $s(t)$ bei $2\omega_N > \omega_\Delta$; (e) Spektrum des abgetasteten Signals $y_s(t)$ mit Aliasing [13]

ergibt sich das abgetastete Koppelsignal

$$y_s(t) = y(t)s(t) = y(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_\Delta). \quad (2.2)$$

Diese Multiplikation entspricht einem idealen Analog Digital Converter (ADC) mit einer Abtastschrittweite von T_Δ . Im Frequenzbereich entspricht das abgetastete Koppelsignalspektrum der Faltung zwischen der Fourier-transformierten $Y(j\omega)$ des Signals $y(t)$ und dem Spektrum $S(j\omega)$ der Impulsfolge $s(t)$ aus (2.1):

$$Y_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * S(j\omega) = \frac{1}{T_\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y\left(j\omega - jn \frac{2\pi}{T_\Delta}\right) \quad (2.3)$$

Aus (2.3) ist ersichtlich, dass das Spektrum $Y(j\omega)$ periodisch mit einem Abstand von

$n2\pi/T_\Delta$ im Frequenzbereich gespiegelt wird. Abbildung 2.4 zeigt schematisch die Auswirkungen der Abtastung eines kontinuierlichen Signals. Das Spektrum $Y(j\omega)$ in Abbildung 2.4 a stellt die Fourier-Transformation eines kontinuierlichen Signals $y(t)$ mit einer Bandbreite ω_N dar. In Abbildung 2.4 b und 2.4 d, ist das Spektrum der Impulsfolge $s(t)$ mit unterschiedlichen Abtastperioden T_Δ dargestellt. Die Amplitude des Spektrums des *Dirac-Kamms* ist mit der Abtastfrequenz ω_Δ skaliert, wobei $\omega_\Delta = \frac{2\pi}{T_\Delta}$ entspricht. In Abhängigkeit der Bandbreite ω_N des kontinuierlichen Signals und der Wahl der Abtastperiode T_Δ bzw. Abtastfrequenz ω_Δ kommt es zu verschiedenen Auswirkungen auf das abgetastete Signal $y_s(t)$. Bei $2\omega_N < \omega_\Delta$ beeinflussen sich die periodisch auftretenden Spektren nicht (siehe Abbildung 2.4 c). Ist die Abtastperiode ω_Δ kleiner als die doppelte Bandbreite ω_N treten *Aliasing-Effekte* auf, da das *Shannon-Theorem*

$$\omega_\Delta > 2\omega_N \quad \text{mit} \quad \omega_\Delta = \frac{2\pi}{T_\Delta} \quad (2.4)$$

bzw. $\omega_N T_\Delta < \pi$ nicht eingehalten wird. Es überlagern sich, wie in Abbildung 2.4 e dargestellt, die periodisch auftretenden Spektren einander. Die Folge daraus ist, dass höhere Frequenzanteile als niedrige Frequenzkomponenten interpretiert werden. Eine vollständige Rekonstruktion des Eingangssignals ist somit nicht mehr möglich [13, S.143].

Da oftmals auch nicht-bandbegrenzte Koppelsignale (durch Unstetigkeiten, etc.) auftreten, kommt im Vorfeld ein *Anti-Aliasing-Filter* zum Einsatz, um die Frequenzkomponenten der Koppelgröße zu begrenzen. Die Phasendrehung des Filters bewirkt eine Verzögerung des Signals und hat somit eine mögliche Auswirkung auf die Stabilität des gesamten co-simulierten Systems, wodurch die Ordnung des Filters nicht zu groß gewählt werden darf [2, 13].

Analyse der Extrapolation

Die üblichsten Schätzmethode der Extrapolation basieren auf Polynomen, darunter zählen Polynome nullter Ordnung bzw. *zero-order-hold* (*Zoh*), erster Ordnung bzw. *first-order-hold* (*Foh*) und zweiter Ordnung bzw. *second-order-hold* (*Soh*) zu den bekanntesten Vertretern. Die Koeffizienten der Polynome werden durch Interpolation der letzten Stützstellen ermittelt und die Werte zu einem zukünftigen Zeitpunkt daraus errechnet.

Die Unterschiede der Extrapolation sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Zum Koppelzeitpunkt kT_Δ sind die Verläufe der Extrapolation mit *Zoh*, *Foh* und *Soh* auf Basis des abgetasteten Signals $y(t)$ bis zum Zeitpunkt $(k+1)T_\Delta$ aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass keiner der Extrapolationen dem tatsächlichen Verlauf des Signals $\hat{y}(t)$ nach dem Koppelzeitpunkt kT_Δ folgt. Die Schätzung mit dem Polynom erster Ordnung liefert bei diesem Beispiel bezogen auf den Signalverlauf das beste Ergebnis.

Um die Einflüsse der Extrapolationen und die Auswirkung auf die Makro-Schrittweite T_Δ besser zu veranschaulichen, werden die Extrapolationsfilter im Frequenzbereich betrachtet (siehe Abbildung 2.6).

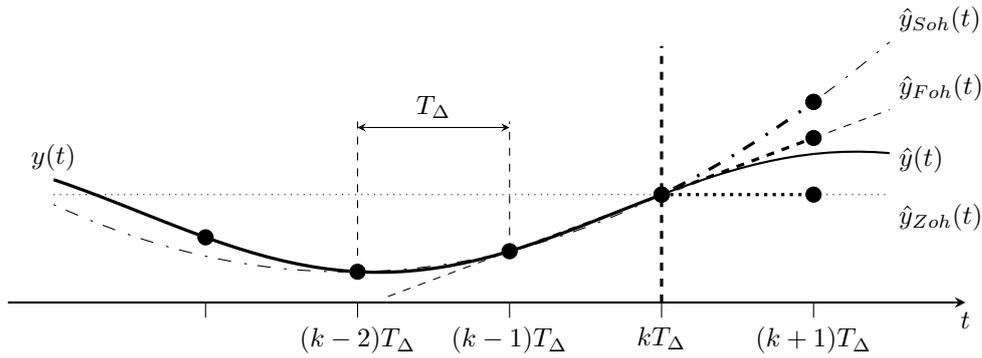


Abbildung 2.5: Extrapolation im Zeitbereich

Verglichen mit dem idealen Extrapolationsfilter in Abbildung 2.6 verstärken die Filter *Zoh*, *Foh* und *Soh* die Frequenzkomponenten um $\omega T_\Delta = \pi$ und darüber teils enorm, wodurch selbst bei Einhaltung des Abtastkriteriums (2.4) eine große Verfälschung durch die Extrapolationsfilter auftreten können, falls sich die Signalfrequenz nahe der maximal zulässigen Frequenz befindet. Daraus ist ersichtlich, dass die Grenzen für die maximale Signalfrequenz weit unterhalb der *Shannon-Grenze* liegen muss.

Nicht alleine der Betrag des Extrapolationsfilters sondern auch dessen Phase hat einen Einfluss auf das Koppelsignal. Die Phase und die dadurch entstehende zeitliche Verzögerung können das Verhalten des Systems verändern und u. U. zur Instabilität des gesamten Systems führen.

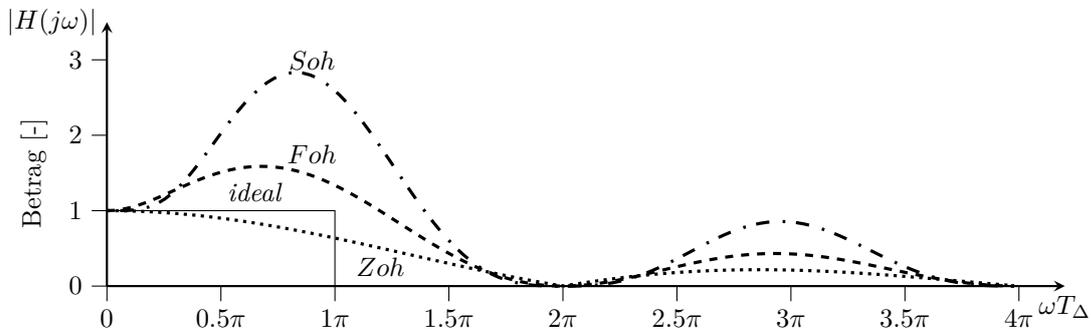


Abbildung 2.6: Betragsgänge der Extrapolationsfilter [2]

Abbildung 2.7 zeigt den Betrag und die Phase der Extrapolationsfilter im unteren Frequenzbereich. Bei tiefen Frequenzen ändert sich der Betrag des Extrapolationsfilters nullter Ordnung kaum, jedoch sinkt dessen Phase im Verhältnis zu den anderen Filtern schnell ab. Im Gegensatz dazu bleibt die Phase des Filters erster Ordnung über weite Frequenzen Nahe bei Null, jedoch steigt der Betrag schneller an. Das Extrapolationsfilter mittels *Soh* liefert bei niedrigen Frequenzen sowohl bei der Phase als auch beim Betrag über einen langen Frequenzbereich eines dem idealen Extrapolationsfilter ähnliches Verhalten.

Es wurden heuristische Grenzwerte für die maximale auftretende Frequenz bezogen auf die Makro-Schrittweite T_Δ zu den einzelnen Extrapolationsmethoden festgelegt [2].

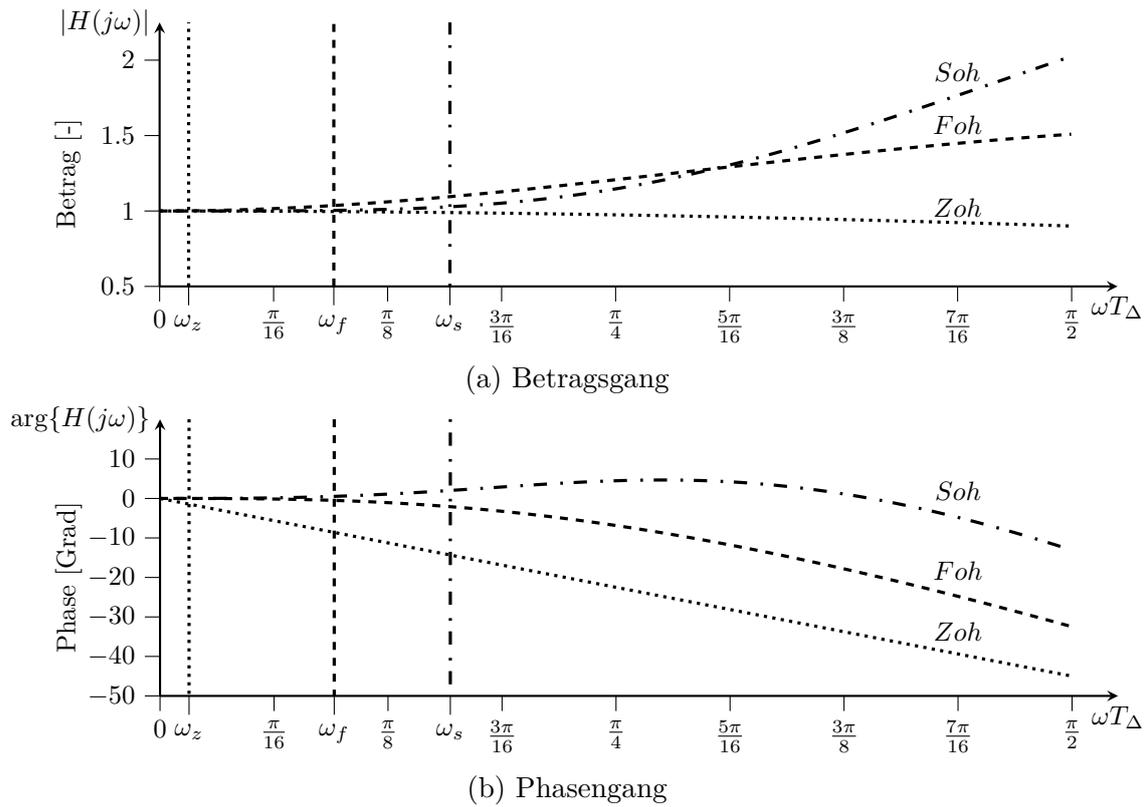


Abbildung 2.7: Frequenzgänge von Zoh , Foh und Soh : (a) Betragsgang; (b) Phasengang [2]

Tabelle 2.1: Begrenzung der Makro-Schrittweite bzgl. Kopplungsvarianten [2]

Kopplung	$\overline{\omega T_{\Delta}}$
Zoh	0.05
Foh	0.3
Soh	0.5

Die Grenzwerte aus Tabelle 2.1 resultieren aus dem Betrag bzw. aus der Phase der Extrapolationsfilter. Allgemein gilt für den Grenzwert

$$\overline{\omega T_{\Delta}} = \min \{ \omega_m T_{\Delta}, \omega_p T_{\Delta} \}, \quad (2.5)$$

wobei die Frequenz ω_m jene Frequenz ist, bei der für den Betrag der Extrapolationsfilter

$$\omega_m = \sup \{ \omega \in \mathbb{R}^+ : |H(j\omega)| < 1.03 \} \quad (2.6)$$

gilt und ω_p ist jene Frequenz, bei der sich für die Phase der Extrapolationsfilter

$$\omega_p = \sup \{ \omega \in \mathbb{R}^+ : |\arg\{H(j\omega)\}| < 3^\circ \} \quad (2.7)$$

ergibt [10].

Mit der Frequenz der Koppelsignale und unter Berücksichtigung der Grenzwerte aus Tabelle 2.1 kann eine Aussage über die Güte der Gesamtsimulation bezüglich der Co-Simulation getroffen werden. Es liegt nahe, die Frequenzen im Koppelsignal während der Simulation zu bestimmen, um unerwünschte Kopplungseffekte durch hohe Frequenzkomponenten frühzeitig zu erkennen und unnötigen Simulationsaufwand zu vermeiden. Die Untersuchung der Koppelsignale auf ihre momentane Frequenz ist ein logischer und vernünftiger Schluss.

Mit der Kenntnis der momentanen Frequenz wird die Gültigkeit der Kopplung verifiziert, jedoch nicht der Einfluss der Kopplung auf das Simulationsergebnis. Das bedeutet, dass der Frequenzinhalt im Signal der Koppelbandbreite gegenüber gestellt wird, jedoch nicht, ob die Art der Kopplung geeignet ist und einen Einfluss auf die Simulation hat. Zum Beispiel kann durch die Frequenzschätzung nicht eruiert werden, ob die durch die Extrapolation erzeugte Unstetigkeit u. U. existierende hochdynamische Komponenten in den Teilsystemen anregen oder Einfluss auf die numerische Lösung der Teilsysteme haben.

2.2 Momentanfrequenz

Variable Frequenzen treten in der Natur und im Alltag jedes Menschen auf, ohne jedoch als solche wahrgenommen zu werden. Das veränderliche Spektrum des Lichts vor einem Sonnenuntergang oder die Vibrationen eines Radiolautsprechers sind nur zwei Beispiele hierfür. Dieser Abschnitt soll einen allgemeinen Einblick in die Herkunft und Bedeutung des Begriffs *Momentanfrequenz* geben.

2.2.1 Allgemein

Die erste und weit verbreitetste Betrachtung von zeitveränderlichen Frequenzen ist nicht in der Technik oder Wissenschaft, sondern in der Musik zu finden. Dort werden Frequenzen in Form von Noten graphisch dargestellt (siehe Abbildung 2.8). Jede einzelne Note steht für eine bestimmte Frequenz, so hat z.B. der Kammerton a' eine Frequenz von 440 Hz und das c eine Frequenz von 130.813 Hz . Die horizontale Position der Noten entspricht dem zeitlichen Auftreten der einzelnen Töne.



Abbildung 2.8: Noten¹ als Zeit-Frequenzdarstellung

Erst mit dem Aufkommen der Kommunikationstechnik an der Wende des letzten Jahrhunderts stieg auch das Interesse der Wissenschaft am zeitlichen Verlauf von Frequenzen, um unter anderem das Verhalten der Amplitudenmodulation (AM) und der Frequenzmodulation (FM) mathematisch beschreiben zu können. Die Veröffentlichung von Carson [15] im Jahr 1922 gehört in diesem Zusammenhang zu den Ersten, die sich ausgiebig mit der Analyse von modulierten Signalen auseinandergesetzt hat.

2.2.2 Definition und Herkunft

Carson und Fry [16] prägten in ihrer Veröffentlichung im Jahr 1937 als einer der Ersten den Begriff der *Momentanfrequenz* (engl. *instantaneous frequency*) als Änderung des Phasenwinkels eines Signals in Abhängigkeit der Zeit. Aufbauend auf Carson und Fry publizierte der Franzose Jean Paul Ville [17] im Jahr 1948 eine nützliche Definition der Momentanfrequenz als Ableitung der Phase eines analytischen Signals² über die Zeit. Übersetzt vom französischen ins englische wurde seine Arbeit von Selin im Jahr 1958 [18].

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \arg(z(t)) \quad (2.8)$$

Wobei $\omega(t)$ die momentane Kreisfrequenz in *rad/s* darstellt und $z(t)$ ein analytisches Signal repräsentiert, das sich in der oberen komplexen Halbebene befindet. Abbildung 2.9 zeigt den Verlauf des analytischen Signals $z(t)$ und den daraus resultierenden Winkel $\phi(t)$ in der komplexen Ebene bzw. im Argand Diagramm.

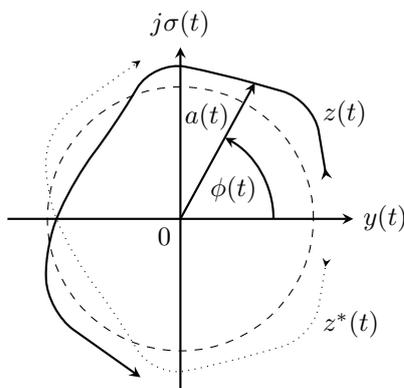


Abbildung 2.9: Verlauf der momentanen Phase $\phi(t)$ und der momentanen Amplitude $a(t)$

Die Verwendung der Hilbert-Transformation, um ein analytisches Signal $z(t)$ aus einem reellen Signal $y(t)$ zu generieren, wurde erstmals von Gabor [19] im Jahr 1946 vorgeschlagen [20]. Demnach ergibt sich ein analytisches Signal wie in (2.9) aus der Addition eines reellen Signals $y(t)$ mit dessen komplex gewichteten Teils resultierend aus der Hilbert-

¹Noten der *Suite 1* aus Johann Sebastian Bachs *Suiten Violoncello solo*, BWV 1007 [14].

²Ein analytisches Signal ist ein komplexwertiges Signal $z(t) = x(t) + jy(t)$, dessen Imaginärteil der Hilbert-Transformation des Realteils $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ entspricht.

Transformation $\sigma(t) = \mathcal{H} \{y(t)\}$ [21].

$$z(t) = y(t) + j\mathcal{H} \{y(t)\} = y(t) + j\sigma(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (2.9)$$

Ville ging in seiner Veröffentlichung nicht nur in die Bedeutung und Definition der Momentanfrequenz ein, sondern hob in diesem Zusammenhang die Bedeutung des momentanen Spektrums des Signals hervor. Er zeigte, dass die mittlere Frequenz in einem Signalspektrum $\bar{\omega}_{\langle\omega\rangle}$ gleich dem zeitlichen Mittel der Momentanfrequenz $\bar{\omega}_{\langle t\rangle}$ entspricht [17, 20]:

$$\bar{\omega}_{\langle\omega\rangle} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{|Z(\omega)|^2}{\|Z(\omega)\|^2} d\omega}_{\substack{\text{mittlere Frequenz} \\ \text{im Frequenzbereich}}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \frac{|z(t)|^2}{\|z(t)\|^2} dt}_{\substack{\text{mittlere Frequenz} \\ \text{im Zeitbereich}}} = \bar{\omega}_{\langle t\rangle} \quad (2.10)$$

Wobei $Z(\omega)$ in (2.10) der Fourier-Transformation des zeitlichen Signals $z(t)$ und $\omega(t)$ der Momentanfrequenz entspricht.

Im Gegensatz zur *Frequenz*, dessen Definition über die Inverse der Periodendauer einer Schwingung eine physikalische Bedeutung besitzt, ist die Definition der *Momentanfrequenz* in (2.8) rein mathematisch begründet. Diese Tatsache unterstreicht den Zwiespalt zwischen dem Wort *momentan* und *Frequenz*, da sich die Definition der Frequenz auf Basis einer Zeitdauer, mit einem momentanen Zeitpunkt widerspricht.

An einem einfachen Beispiel eines Signals $y(t) = A \cos(\omega t)$ mit einer kontinuierlichen Schwingung mit einer konstanten Frequenz ω kann leicht gezeigt werden, dass der Phasenwinkel $\phi(t)$ linear mit der Zeit zunimmt.

$$\phi(t) = \arg(y(t) + j\sigma(t)) = \arctan\left(\frac{\sigma(t)}{y(t)}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}\right) = \omega t \quad (2.11)$$

Wonach sich nach der Definition (2.8), als Ableitung der Phase $\phi(t)$ über die Zeit, die Kreisfrequenz ω ergibt. Anhand eines zweiten Beispiel wird die Berechnung der Momentanfrequenz von einem Signal, dass sich als Summe zweier sinusförmiger Größen mit unterschiedlichen Frequenzen ω_1 und ω_2 zusammensetzt, betrachtet. Die Summe zweier Kosinusfunktionen kann auch als Produkt ausgedrückt werden.

$$y(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (2.12)$$

Das vermeintlich einfache Signal $y(t)$ aus (2.12) kann auf zwei verschiedene Arten mit unterschiedlichen Frequenzen beschrieben werden (siehe Anhang A.1). Nach der Definition (2.8) wird jedoch nur eine Frequenz bestimmt, es stellt sich für die Momentanfrequenz die Mittenfrequenz $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ein.

Betrachtet man zum Beispiel zwei nahe beieinander liegende Frequenzen $\omega_1 = \frac{21}{100} 2\pi$

und $\omega_2 = \frac{19}{100} 2\pi$ ergibt sich ein AM Signal, wie in Abbildung 2.10 a. Diese Tatsache ist in der Literatur als *Schwebung* bzw. *Beats Effekt* zu finden. Sind zusätzlich die beiden Amplituden des Signals $y(t) = a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t)$ unterschiedlich, stellt sich trotz zweier konstanten Frequenzen ω_1 und ω_2 eine zeitlich veränderliche Frequenz ein, die zwischen den beiden Frequenzen variiert [22, 23].

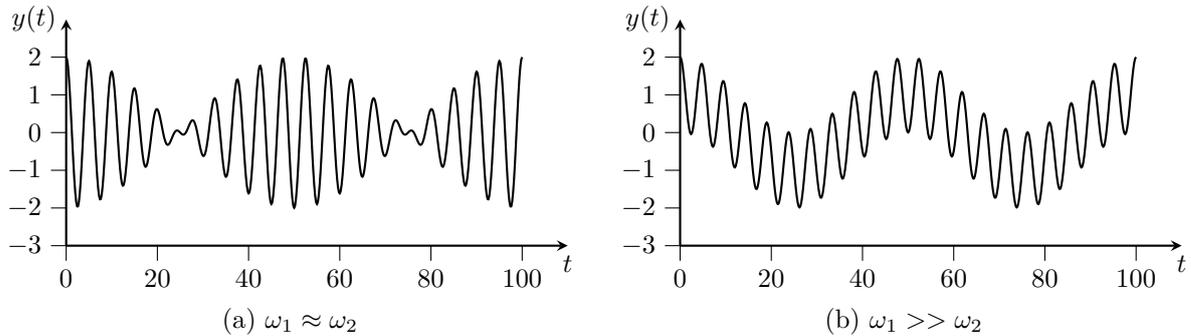


Abbildung 2.10: Summe zweier sinusförmiger Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen: (a) $\omega_1 \approx \omega_2$ (Beats Effekt); (b) $\omega_1 \gg \omega_2$

Werden jedoch zwei auseinander liegende Frequenzen $\omega_1 = \frac{21}{100} 2\pi$ und $\omega_2 = \frac{2}{100} 2\pi$ gewählt, stellt sich ein Signal wie in Abbildung 2.10 b ein. Für die Momentanfrequenz ergibt sich wiederum die Mittenfrequenz, wobei ersichtlich ist, dass die höhere Frequenzkomponente ω_1 das Signal definiert.

Bei Signalen mit mehreren Frequenzkomponenten wird somit die Aussage der Momentanfrequenz nach der Definition von Ville bedeutungslos. Im Rahmen dieser Arbeit werden Methoden betrachtet, die u. A. abweichend zur Definition (2.8) die Momentanfrequenz schätzen.

Kapitel 3

Methoden zur Analyse der momentanen Frequenz

Zum Erreichen des in der Motivation der Arbeit angestrebten Ziels, werden im Vorfeld einige Ansätze beschrieben und erläutert. In der Literatur existiert eine Vielzahl von Ansätzen zur Schätzung und Darstellung der momentanen Frequenz eines Signals [20, 23–26]. Eine generelle Einteilung der Methoden ist keine triviale Aufgabe. In den folgenden Kapitel wird versucht, diese grob in *offline* und *online* Verfahren zu unterteilen. Wobei *online* Methoden die Frequenz zur Laufzeit bestimmen. Im Gegensatz dazu treffen *offline* Verfahren im Anschluss der Simulation eine Aussage über die momentane Frequenz, da sie die gesamte bzw. eine große Signalinformation benötigen.

3.1 Offline Untersuchungen

In diesem Abschnitt wird auf *offline* Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz eingegangen. Zu Beginn werden kurz die klassischen Vertreter der Frequenzbestimmung wie die Fourier-Transformation und die Kurzzeit-Fourier-Transformation beleuchtet, die unter anderem auch das Spektrum in die Frequenzbetrachtung mit einfließen lassen. Zusätzlich wird auch die Hilbert-Huang-Transformation beschrieben, die das Signal vor der Analyse empirisch zerlegt.

3.1.1 Fourier-Transformation

Im Vorfeld wird eine Betrachtung zur grundlegenden Untersuchungen von Signalen im Frequenzbereich durchgeführt. In diesem Zusammenhang ist die Fourier-Transformation eine der bekanntesten Methoden, um die Frequenzinformation eines Signals zu erhalten [27–30].

$$Y(\omega) = \mathcal{F}_\omega \{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \langle y(t), e^{j\omega t} \rangle_t \quad (3.1)$$

Die Fourier-Transformation in (3.1) kann auch als ein Innenprodukt¹ dargestellt werden, womit die Ähnlichkeit zwischen dem Signal $y(t)$ und der komplexen Schwingung $e^{j\omega t}$ dargestellt werden kann. Das Ergebnis der Fourier-Transformation $Y(\omega)$ kann somit als Ähnlichkeitsmaß zwischen $y(t)$ und der komplexen Schwingung mit der Frequenz ω interpretiert werden. Nach dem Satz von Parseval², der besagt, dass sich die Energie durch die Fourier-Transformation nicht ändert, gilt diese Betrachtung sowohl für den Zeitbereich, wie auch für den Frequenzbereich [27].

Durch die Fourier-Transformation erhält man Information über das Verhalten eines Signals $y(t)$ im Frequenzbereich. Es ist klar ersichtlich, dass das Ergebnis aus (3.1) von der Frequenz ω , aber nicht von der Zeit t abhängig ist. Somit lassen sich zwar Aussagen über die Frequenzen eines Signals $y(t)$ anstellen, jedoch nicht zu welchem Zeitpunkt diese Frequenzen auftreten.

3.1.2 Kurzzeit-Fourier-Transformation

Einer der wohl bekanntesten Methoden zur Bestimmung der momentanen Frequenz ist die zeitabhängige Fourier-Transformation bzw. Kurzzeit Fourier-Transformation, auch bekannt unter der englischen Bezeichnung *Short Time Fourier-Transformation (STFT)* [13, 27–29].

Betrachtet man ein Spektrum mit langsam veränderlichen Frequenzkomponenten über eine lange Periode hinweg, wie zum Beispiel das Sonnenlicht im Laufe eines Tages, unterscheidet sich dieses im Vergleich zu einem kurzen Beobachtungszeitraum, wie die letzten paar Minuten vor dem Sonnenuntergang. Würde man das Spektrum des Lichtes über den Tag mit einem Zeitfenster von ein paar Minuten betrachten, das sich über den ganzen Verlauf des Tages schiebt, bekommt man, solange sich die Frequenz in diesem Fenster nicht schnell ändert, einen guten Eindruck welche Frequenzkomponenten zu welchen Zeitpunkt auftreten.

Mit anderen Worten wird zu jedem Zeitpunkt nur ein gewisser Bereich des Signals $y(t)$, abhängig von der Fensterform $w(t)$, analysiert. Dieses Fenster wird kontinuierlich über das Signal geschoben, es entsteht somit ein zeitabhängiges Frequenzspektrum $Y(\omega, t)$:

$$Y(\omega, t) = \mathcal{F}_\omega \{y(\tau)w(\tau - t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)w(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau = \langle y(\tau), w(t - \tau)e^{j\omega\tau} \rangle_\tau \quad (3.2)$$

Es ist naheliegend, dass die Form und Länge der Fensterfunktion $w(t)$ eine direkte Auswirkung auf das Spektrum $Y(\omega, t)$ besitzt, nicht unter anderem deswegen, da die Multiplikation eines Signals $y(t)$ mit einer Fensterfunktion $w(t)$ einer Faltung im Frequenzbereich

¹Das Innenprodukt kann als Maß für die Ähnlichkeit zweier Funktionen verstanden werden.

²Satz von Parseval: Wenn ein Signal $y(t)$ sowie sein Betragsquadrat im Intervall $(-\infty, \infty)$ integrierbar sind, dann gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$.

entspricht und somit eine Glättung der Frequenzspitzen mit sich führt [2].

Diese Tatsache wird deutlicher, wenn die STFT auf eine andere Art betrachtet wird. Wird die Multiplikation der Fensterfunktion als Faltung im Zeitbereich von $y(t)e^{-j\omega t}$ mit der Fensterfunktion $w(-t)$, wie in (3.3), interpretiert, entspricht das Ergebnis der STFT $Y(\omega, t)$ der inversen Fourier-Transformation, bezüglich der Frequenz ν , einer Multiplikation im Frequenzbereich des transformierten Signals $Y(\nu + \omega)$ verschoben um die Frequenz ω und der Fensterfunktion $W(\nu) = \mathcal{F}_\nu \{w(t)\}$ [27, S. 73].

$$Y(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j\omega\tau}w(-(t - \tau))d\tau = y(t)e^{-j\omega t} * w(-t) = \mathcal{F}_\nu^{-1} \{Y(\nu + \omega) \cdot W(\nu)\} \quad (3.3)$$

Da die Mittenfrequenz des Fensters $W(\nu)$ Null ist, besitzt dieses Fenster einen Tiefpasscharakter, wodurch es zu einer Dämpfung kommt.

Die Fensterlänge bestimmt die Auflösung im Zeit- und im Frequenzbereich. Gemäß der Unschärferelation bewirkt eine große Fensterlänge eine gute Frequenzauflösung, aber eine schlechte zeitliche Auflösung und umgekehrt. In diesem Zusammenhang kann die *standard* Fourier-Transformation als ein Spezialfall der STFT verstanden werden, bei der die Fensterlänge unendlich ausgeprägt ist.

Unschärferelation

Unabhängig von der Länge des Fensters $w(t)$ definiert allein die Form des Fensters die Unschärferelation zwischen der zeitlichen Auflösung und der Auflösung im Frequenzbereich. Die Relation, auch bezeichnet als *Heisenbergsche Unschärferelation*, wird als Zeitdauer-Bandbreite-Produkt des Fensters $\Delta_t\Delta_\omega$ dargestellt. Die Schwierigkeit der Bestimmung der aktuellen Frequenz beruht auf der Unschärferelation zwischen Zeit und Frequenz. Bei einem größer werdenden Zeitfenster Δ_t erhält man ein schmaler werdendes Frequenzband Δ_ω und somit eine genauere Frequenzauflösung. Umgekehrt erhält man bei einem breiten Frequenzfenster eine gute Auflösung im Zeitbereich. Die Relation zwischen der zeitlichen Auflösung und der Auflösung im Frequenzbereich lässt sich über die Ungleichung

$$\Delta_t\Delta_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

beschreiben (Herleitung siehe A.2). Bei der Momentanfrequenz möchte man beides erreichen, eine gute Frequenzauflösung sowie auch eine gute Zeitauflösung. Diese sind jedoch über die Unschärferelation in (3.4) begrenzt. So besitzt zum Beispiel ein Rechteckfenster eine Unschärferelation von $\Delta_t\Delta_\omega = 3.73$ und das *HANN* Fenster von $\Delta_t\Delta_\omega = 0.52$. Die beste mögliche Relation von $\Delta_t\Delta_\omega = 0.5$ erhält man mit einem *GAUSS* - Fenster. Das in der Zeit-Frequenzebene aufgespannte Fenster, wie in Abbildung 3.1, wird als *Heisenberg-Box* bezeichnet [27, 30]. Die Fensterfunktion $w(t)$ ist über das gesamte Beobachtungsintervall konstant, d.h., dass unabhängig von der auftretenden Frequenz das gleiche Analysefenster verwendet wird (siehe Abbildung 3.1). Dies führt dazu, dass die

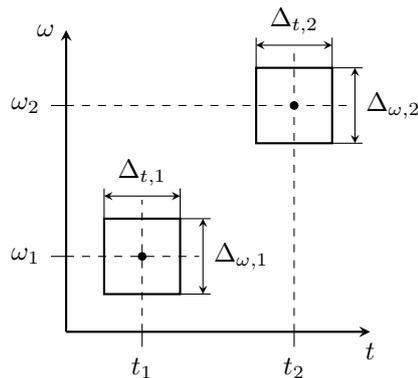


Abbildung 3.1: Phasenraumbereich STFT

zeitliche Auflösung sowie auch die Frequenzauflösung für niedrige und hohe Frequenzen unterschiedlich gut ist. Bei einem großen Beobachtungsfenster leidet die zeitliche Auflösung für höhere Frequenzen relativ zu niedrigeren Frequenzen. Umgekehrt leidet die Frequenzauflösung für niedrige Frequenzen bei einem zu klein gewählten Beobachtungsfenster. Es muss ein Kompromiss getroffen werden, der sowohl für hohe als auch niedrige Frequenzen eine zufriedenstellende Lösung liefert.

Der Hauptanwendungsbereich der STFT stellen Signale mit langsam veränderlichen Frequenzen dar, da schnelle Änderungen im Frequenzbereich, die zum Beispiel durch Sprünge im Zeitbereich verursacht werden, durch die konstante Fenstergröße unscharf detektiert werden.

Das Ergebnis der STFT wird oft in sogenannten *Spektrogramm* $S(\omega, t)$ dargestellt, wobei der quadratische Betrag der STFT zur Berechnung verwendet wird:

$$S(\omega, t) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) w(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (3.5)$$

Die Energie in einem Spektrogramm entspricht der Signalenergie $\|y(t)\|^2$ [27].

3.1.3 Wavelet-Transformation

Eine weitere Betrachtung, ähnlich der zur STFT, bietet die Wavelet-Transformation [27, 28, 30]. Wie die STFT besitzt die Wavelet-Transformation eine Fensterfunktion, die über das Signal $y(t)$ geschoben wird, jedoch verändert sich das Signalfenster in Abhängigkeit der Frequenz. So werden niedrige Frequenzen mit einem größeren zeitlichen Analysefenster und hohe Frequenzen mit einem schmalen zeitlichen Analysefenster betrachtet. Der Kompromiss zwischen guter Frequenzauflösung und guter zeitlicher Auflösung, wie bei der STFT, fällt somit weg. Besonders kurzlebige hohe Frequenzen, verursacht durch

Sprünge oder Schalteffekte im Zeitbereich, können dadurch besser analysiert werden.

$$Y^\Psi(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.6)$$

Bei der STFT wird das Analysefenster kontinuierlich über den Zeitfrequenzbereich verschoben (siehe Abbildung 3.1). Im Gegensatz dazu wird bei der Wavelet-Transformation das Fenster in der zeitlichen Ebene verschoben und skaliert (siehe Abbildung 3.2). Das sogenannte *Wavelet* $\Psi_{a,b}(t)$ besteht aus dem *Mother-Wavelet* $\Psi(t)$, das mit b zeitlich verschoben und mit a skaliert wird. Um sicher zustellen, dass die Signalenergie des Wavelets durch den Skalierungsfaktor a konstant bleibt, wird das Wavelet zusätzlich mit einem Vorfaktor $|a|^{-\frac{1}{2}}$ multipliziert.

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.7)$$

Das *Mother-Wavelet* muss, damit die Skalierung eine Änderung der mittleren Frequenz ω_Ψ und Bandbreite bewirkt, mittelwertfrei sein und eine mittlere Frequenz $\omega_\Psi \neq 0$ besitzen. Es kann als Fensterfunktion $w(t)$ mit einer mittleren Frequenz von Null und einer Verschiebung im Frequenzbereich um die Frequenz ω_Ψ betrachtet werden.

$$\Psi(t) = w(t)e^{j\omega_\Psi t} \quad (3.8)$$

Bei der Wavelet-Transformation verändert sich zwar das zeitliche Analysefenster und die Bandbreite, die Signalenergie bleibt jedoch gleich. Mit anderen Worten, es ändern sich zwar die Proportionen der Heisenberg-Box, doch die aufgespannte Fläche und somit die Unschärferelation bleiben konstant. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Flächen der beiden Heisenberg-Boxen in der Zeit-Frequenzebene sind gleich, wobei sich die Form der Analysefenster in Abhängigkeit der Frequenz ändern.

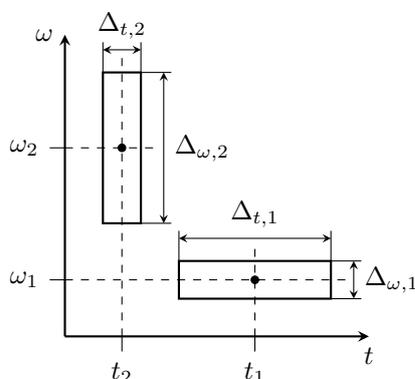


Abbildung 3.2: Phasenraumgebiet Wavelet

Die Wavelet-Transformation liefert, ähnlich wie die STFT, die Energiedichten der Frequenzsignale, dabei muss jedoch die Orthogonalität des Wavelets gewährleistet sein [27,

31]. Weiters hat die Wahl des Filters Auswirkungen auf das Ergebnis. Bei der Verwendung von beispielsweise einem *HAAR* Fenster werden die Frequenzen scharf identifiziert, so sind auch Frequenzsprünge gut erkennbar und auslesbar [2, 30].

Das Ergebnis der Wavelet-Transformation wird in sogenannten *Skalogrammen* dargestellt. Analog zum Spektrogramm der STFT wird dabei das Quadrat des Betrags der Wavelet-Transformierten analysiert.

$$S(a, b) = \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \Psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \right|^2 \quad (3.9)$$

Die Frequenz ω ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen der Skalierung a und der Frequenzverschiebung ω_{Ψ} :

$$\omega = \frac{\omega_{\Psi}}{a} \quad (3.10)$$

3.1.4 Phasenableitung und Phasendifferenz

Im zeitkontinuierlichen Fall ist die Momentanfrequenz (siehe (2.8)) durch die Ableitung des Phasenwinkels eines analytischen Signal über die Zeit definiert [17]. Um bei einem gegebenen reellen Signal $y(t)$ dessen analytisches Äquivalent zu erhalten, wird die *Hilbert-Transformation* verwendet [19]. In diesem Abschnitt wird auf die Ermittlung der Momentanfrequenz unter Verwendung der *Hilbert-Transformation* eingegangen [17, 24, 25, 32].

Hilbert-Transformation

Die Hilbert-Transformation gehört zu den wohl bekanntesten Transformationen [17, 19, 21, 24, 27]. Gabor [19] war im Jahr 1946 der erste, der die Hilbert-Transformation zur Bestimmung eines komplexen Signalanteils eines reellen Signals heranzog. Die Hilbert-Transformation ermöglicht es, ein *analytisches* Signal $z(t)$ aus einer reellen zeitlichen Funktion $y(t)$ zu generieren, indem das Ergebnis der Transformation $\sigma(t)$ komplex zum reellen Signal $y(t)$ addiert wird [21]:

$$z(t) = y(t) + j\mathcal{H}\{y(t)\} = y(t) + j\sigma(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (3.11)$$

Die zeitkontinuierliche Hilbert-Transformation ergibt sich aus [21, S.203]

$$\mathcal{H}\{y(t)\} = \sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (3.12)$$

Die momentane Phase $\phi(t)$ und die momentane Amplitude $a(t)$ ergeben sich, wie im Verlauf aus Abbildung 2.9 ersichtlich, aus

$$\phi(t) = \arctan \frac{\sigma(t)}{y(t)} \quad \text{und} \quad a(t) = \sqrt{y^2(t) + \sigma^2(t)}. \quad (3.13)$$

In der zeitdiskreten Anwendung wird die Hilbert-Transformierte $\sigma[k]$ als Faltung des reellen Signals $y[k]$ mit der Impulsantwort $h[k]$ ermittelt [13, S.792].

$$\mathcal{H}\{y[k]\} = \sigma[k] = h[k] * y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]y[k-n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y[k-m]}{m} \quad (3.14)$$

wobei $m = 2n - 1$, d.h. nur ungerade Zahlen und $n \in \mathbb{Z}_0$ beinhaltet. Die Impulsantwort $h[k]$ entspricht einem 90° Phasenschiebers, der Form

$$h[k] = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2(\pi k/2)}{k} & , k \neq 0, \\ 0 & , k = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Die diskrete Momentanfrequenz $\omega[k]$ wird als Faltung eines diskreten Differenzierers mit einer endlichen Impulsantwort $g[k]$ mit der Signalphase $\phi[k]$ definiert [13, 32]:

$$\omega[k] = \phi[k] * g[k] \quad (3.16)$$

Als eine gute Annäherung zur Definition (3.16) kann auch die Phasendifferenz herangezogen werden. Eine einfache Lösung zur Bestimmung der diskreten Momentanfrequenz bilden die vorwärts Differenz (*forward finit difference, FFD*) mit $\omega_f[k]$ aus (3.17) und die rückwärts Differenz (*backward finit difference, BFD*) mit $\omega_b[k]$ aus (3.18), wobei sich die Phase aus der Hilbert-Transformation nach (3.13) ergibt.

$$\omega_f[k] = \phi[k+1] - \phi[k] \quad (3.17)$$

$$\omega_b[k] = \phi[k] - \phi[k-1] \quad (3.18)$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Schätzung der Frequenz $\omega_c[k]$ durch die mittlere Phasendifferenz (*central finit difference, CFD*). Diese wird als Differenz des vorherigen Phasenwerts mit dem nachfolgenden Phasenwert ermittelt. Diese Schätzung entspricht dem Mittelwert der FFD aus (3.17) und der BFD aus (3.18):

$$\omega_c[k] = \frac{1}{2} (\phi[k+1] - \phi[k-1]) \quad (3.19)$$

Im Gegensatz zu FFD und BFD ist die CFD erwartungstreu für stationäre und lineare Frequenzänderung. Um auch die Erwartungstreue höhere Ordnung M zu erhalten, bietet sich ein verallgemeinerter Ansatz wie in (3.20) an [25]:

$$\omega_M[k + M/2] = \sum_{m=0}^M b_m \phi[k + m] \quad (3.20)$$

Tabelle 3.1 zeigt die Koeffizienten b_m für den verallgemeinerten Ansatz der Phasendifferenz bei verschiedenen Ordnungen M [25]. Es ist leicht ersichtlich, dass diese Ansätze stark auf Rauschen reagieren. Um die Sensitivität gegenüber Rauschen zu reduzieren existieren mehrere Ansätze, wie zum Beispiel die gewichtete Phasendifferenz (*weighted phase difference*) von Kay [33]. Weitere Ansätze zum Reduzieren des Rauschens sind in [25, 32]

Tabelle 3.1: Koeffizienten zur Momentanfrequenzschätzung der Phasendifferenz mit höherer Ordnung M

M	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	-1	1			
2	-1/2	0	1/2		
3	-1/3	-1/2	1	-1/6	
4	-1/12	-2/3	0	2/3	-1/12

zu finden. Es wird hier nicht weiter darauf eingegangen, da im Kontext dieser Arbeit Rauschen als ein zu übertragendes Signal interpretiert wird.

3.1.5 Analyse der Nulldurchgänge

Die wohl naheliegendste Variante eine Frequenz zu bestimmen ergibt sich über die Lage der Nulldurchgänge eines Signals. Ausgehend von einem rauschfreien und mittelwertfreien sinusförmigen Signal mit konstanter Frequenz $y(t) = A \sin(\omega t)$ kann über die Periodendauer T auf die Frequenz geschlossen werden. Die Periodendauer T entspricht dem doppelten zeitlichen Intervall T_z zweier aufeinanderfolgenden Nulldurchgängen [24, 25, 32].

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_z} \quad (3.21)$$

Legt man diesen Zusammenhang zwischen Frequenz und Periodendauer auf ein Signal mit einer zeitlich veränderlichen Frequenz $\omega(t)$ um, verändert sich die Frequenz in Abhängigkeit der Position der Nulldurchgänge. Eine Änderung der Frequenz kann somit nur an den Nulldurchgängen ermittelt werden. Zwischen den Nullstellen wird die Frequenz als konstant angenommen.

Die ermittelte Frequenz zwischen zwei Nulldurchgängen entspricht der mittleren Frequenz der FFD aus Kapitel 3.1.4. Ausgangspunkt der Überlegung ist ein diskretes Signal $y_k = A \cos(\omega_c k + \varphi)$, wobei zwischen zwei Nulldurchgängen N Stützstellen liegen und beide Nulldurchgänge selbst zweier Stützstellen $y_0 = y_{N-1} = 0$ entsprechen. Bei der Mittelung der Frequenz nach der FFD aus (3.17) über die N Stützstellen ergibt sich

$$\bar{\omega}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{k+1} - \phi_k = \frac{1}{N} \underbrace{(\phi_N - \phi_0)}_{\pi} = \frac{\pi}{N}, \quad (3.22)$$

wobei die Phasendifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nulldurchgängen eines sinusförmigen Signals π beträgt. Das selbe Ergebnis ergibt sich bei der Berechnung der Frequenz auf Basis der Nulldurchgänge aus (3.21), da die Zeitdauer zwischen den beiden Nulldurchgängen N beträgt. Die Berechnung der Frequenz mittels der Nulldurchgänge entspricht somit dem Mittelwert der Frequenz zwischen zwei Nulldurchgängen mit der FFD, dies gilt auch, wenn die Nulldurchgänge keine Stützstellen darstellen [25].

3.1.6 Hilbert-Huang-Transformation

Die *Hilbert-Huang-Transformation* wurde von Huang et al. im Jahr 1996 [34] veröffentlicht. Bei dieser Methode wird das Eingangssignal $y(t)$ mittels eines empirischen Ansatzes, der sogenannten *Empirical Mode Decomposition (EMD)*, in Signalkomponenten aufgeteilt. Diese werden als *Intrinsic Mode Function (IMF)* bezeichnet. Die IMF wird anschließend zur Bestimmung der Momentanfrequenz herangezogen.

Anstoß für die Überlegungen von Huang war unter anderem die Tatsache, dass viele Methoden ein *stationäres* Signal voraussetzen, dies ist jedoch i. A. nicht der Fall.

Intrinsic Mode Function

Damit ein Signal einer IMF entspricht, muss dieses zwei wesentliche Eigenschaften erfüllen:

- Die Differenz zwischen der Anzahl der Extremwerte und der Anzahl der Nullstellen über den gesamt betrachteten Zeitraum muss kleiner oder gleich Eins sein.
- Der Mittelwert bzw. die Summe der Hüllkurve entlang der Maxima und der Hüllkurven entlang der Minima muss zu jedem Zeitpunkt Null ergeben.

Mit anderen Worten muss die IMF unter anderem ein stationäres Verhalten aufweisen.

Empirical Mode Decomposition

Die Aufgabe der EMD ist es ein (nicht stationäres, nicht lineares) Signal $y(t)$ in eine bzw. mehrere Signalkomponenten aufzuteilen, die den Kriterien der IMF genügen. Der Prozess der EMD wird auch *Sifting* genannt, damit wird das herausfiltern (sieben) einer Signalkomponente aus einem Signal $y(t)$ beschrieben.

Die Ermittlung der IMF durch das Verfahren der EMD, lässt sich in wenigen Schritten erläutern. Zur Veranschaulichung wird eine Iteration des *Sifting-Prozesses* an einem Beispiel dargestellt. Das betrachtete Signal $y(t)$ wurde an Anlehnung eines Beispiels aus [2] entnommen und mit einem Offset erweitert. Die Frequenzen der einzelnen Komponenten des Signals $y(t)$ sind mit $\omega_1 = 0.628$ und $\omega_2 = 0.418$ konstant angenommen. Der Verlauf ist in Abbildung 3.3 a dargestellt. Es sei hier erwähnt, dass die einzelnen Schritte der EMD an einem zeitkontinuierlichen Signal $y(t)$ dargestellt werden. Selbige Schritte gelten auch für den zeitdiskreten Fall.

$$y(t) = \begin{cases} 1.0 \sin(\omega_1 t) + 1 & 0 \leq t < 10 \\ 2.0 \sin(\omega_2 t) + 1 & 10 \leq t < 25 \\ 1.5 \sin(\omega_2 t) + 1 & 25 \leq t < 40 \\ 1.0 \sin(\omega_1 t) + 1 & 40 \leq t < 50 \\ 1.5 \sin(\omega_1 t) + 1 & 50 \leq t < 60 \end{cases} \quad (3.23)$$

Betrachtet wird ein Signal $h^{(p,q)}(t)$ mit den Indizes q und p , wobei der Index $q = 1, \dots, Q$ den *Sifting-Prozess* bezeichnet und der Index $p = 1, \dots, P$ repräsentativ für die Iteration

innerhalb eines *sifting* steht. Zu Beginn jedes Sifting-Prozesses q wird

$$h^{\langle 1,q \rangle}(t) = r^{\langle q \rangle}(t) \quad (3.24)$$

gewählt, wobei für das Initialsignal $r^{\langle 1 \rangle}(t) = y(t)$ gilt. Die EMD umfasst i. A. folgende Schritte:

1. Zu Beginn jeder Iteration innerhalb eines Sifting-Prozesses werden die Minima $h_{m,i}^{\langle p,q \rangle}(t_i)$ und Maxima $h_{M,j}^{\langle p,q \rangle}(t_j)$ des Signals $h^{\langle p,q \rangle}(t)$, wie in Abbildung 3.3 b, ermittelt. Die Fußnote m soll in diesem Zusammenhang als Identifikation für ein Minimum verstanden werden und der Buchstabe i als Index für die einzelnen Minima. Analog dazu gilt die Fußnote M als Zeichen für ein Maximum mit dem Index j .
2. Die Minima und Maxima werden anschließend herangezogen, um die Einhüllende zu bilden. So ergibt sich die Einhüllende $h_m^{\langle p,q \rangle}(t)$ als Interpolation der Minima $h_{m,i}^{\langle p,q \rangle}(t_i)$ und Analog die Hüllkurve $h_M^{\langle p,q \rangle}(t)$ als Interpolation der Maxima $h_{M,j}^{\langle p,q \rangle}(t_j)$, wie in Abbildung 3.3 c dargestellt.
3. Die Einhüllende der Maxima $h_M^{\langle p,q \rangle}(t)$ und die Einhüllende der Minima $h_m^{\langle p,q \rangle}(t)$ werden anschließend zur Bildung der mittleren Hüllkurve $m^{\langle p,q \rangle}(t)$ herangezogen (siehe Abbildung 3.3 d).

$$m^{\langle p,q \rangle}(t) = \frac{h_M^{\langle p,q \rangle}(t) + h_m^{\langle p,q \rangle}(t)}{2} \quad (3.25)$$

4. Der berechnete Mittelwert $m^{\langle p,q \rangle}(t)$ der einhüllenden Kurven aus (3.25) wird anschließend vom Signal $h^{\langle p,q \rangle}(t)$ abgezogen. Der Verlauf ist in Abbildung 3.3 e dargestellt. Das daraus resultierende Signal wird für den nächsten Iterationsschritt $p + 1$ im Sifting-Prozess als Eingangssignal $h^{\langle p+1,q \rangle}(t)$ zur Verfügung gestellt.

$$h^{\langle p+1,q \rangle}(t) = h^{\langle p,q \rangle}(t) - m^{\langle p,q \rangle}(t) \quad (3.26)$$

Die Schritte 1-4 werden solange wiederholt bis das Abbruchkriterium erfüllt ist. Dies ist der Fall, wenn das Signal $h^{\langle p,q \rangle}(t)$ den Kriterien der IMF genügen. Es ergibt sich für die Mode $c_q(t) = h^{\langle P,q \rangle}(t)$ und der q 'te Sifting-Prozess ist somit abgeschlossen. Der nächste Sifting-Prozess beginnt mit der Ermittlung der Initialfunktion

$$r^{\langle q+1 \rangle}(t) = r^{\langle q \rangle}(t) - h^{\langle P,q \rangle}(t). \quad (3.27)$$

Die Anzahl der resultierenden Moden und somit die Anzahl der Sifting-Prozesse hängt vom Verlauf des Eingangssignals $y(t)$ und daraus folgend von $r^{\langle q \rangle}(t)$ bzw. von dessen Extremwerten ab. Besitzt $r^{\langle q \rangle}(t)$ keine bzw. nur noch einen Extremwert, können die Einhüllenden nicht mehr gebildet werden und somit der Sifting-Prozess nicht mehr durchgeführt werden. Der verbleibende Verlauf $r^{\langle Q \rangle}(t)$ wird als Residuum bezeichnet. Für das Signal

$y(t)$ gilt somit:

$$y(t) = \sum_{q=1}^Q c_q(t) + r^{(Q)}(t) \quad (3.28)$$

Es geht bei der Anwendung der EMD keine Information verloren, da das ursprüngliche Signal $y(t)$ aus der Summe der einzelnen Moden und dem Residuum rekonstruiert werden kann.

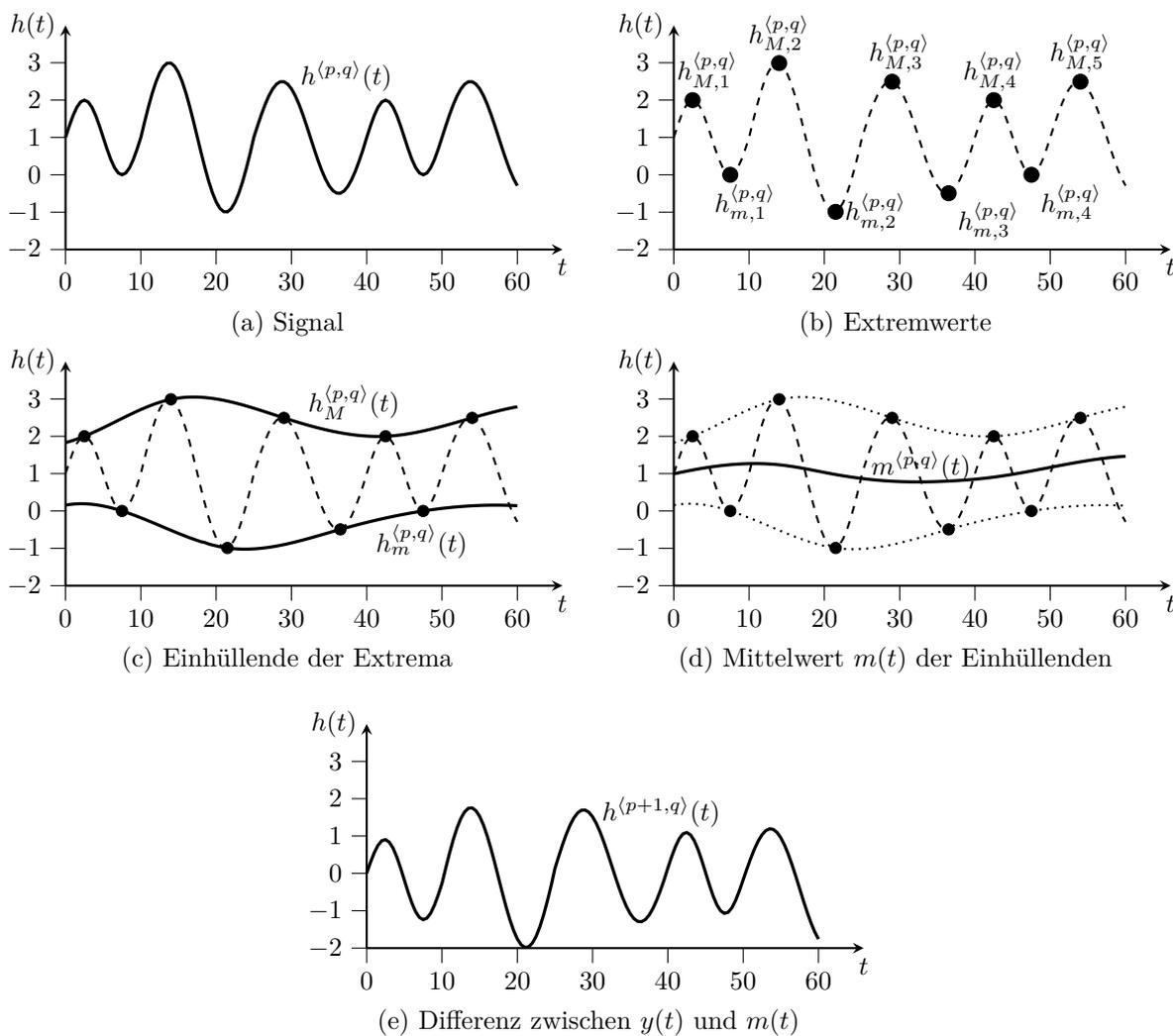


Abbildung 3.3: Schritte der EMD: (a) zu untersuchendes Signal $h^{(p,q)}(t)$; (b) Ermittlung der Extremwerte; (c) Hüllkurve über die Minima und Maxima; (d) Mittelwert der Hüllkurven $m^{(p,q)}(t)$; (e) Differenz zwischen $h^{(p,q)}(t)$ und $m^{(p,q)}(t)$ als Ergebnis nach dem ersten Durchlauf

Die bisherige Betrachtung der EMD bezog sich auf ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$. Für eine reale Anwendung im zeitdiskreten Fall sind manche Annahmen verfälscht bzw. so nicht einzuhalten. Das Abbruchkriterium der EMD ist durch die zwei Eigenschaften der IMF gekennzeichnet. Es ist naheliegend, dass die Differenz der Einhüllenden aus numerischen Gründen, nicht zu jedem Zeitpunkt Null ergeben kann und dadurch diese Bedingung mittels einer Unsicherheitsumgebung ϵ um Null entschärft wird. Für die Berechnung des

Fehlers lässt sich z.B. die Standardabweichung

$$\epsilon = \sum_{t=0}^T \frac{|h^{\langle p-1, q \rangle}(t) - h^{\langle p, q \rangle}(t)|^2}{(h^{\langle p-1, q \rangle}(t))^2} dt \quad (3.29)$$

ermitteln [34]. Die Abweichung ϵ wurde von Huang im Bereich von 0.1 vorgeschlagen [34]. Es wurde jedoch angedacht, diese Schranke in Abhängigkeit des Signals zu variieren [35].

Die Ergebnisse der EMD hängen i. W. von den Hüllkurven ab, diese werden grundlegend von drei Faktoren bestimmt:

- Lage der Maxima und Minima
- Annahme der Randwerte
- Interpolation der Extremwerte

In den folgenden Abschnitten wird näher auf die unterschiedlichen Punkte eingegangen.

Lokalisierung der Extrema

Die Interpolation der Extremwerte ist die Grundlage der EMD. Es ist naheliegend, dass die Lage der Maxima und Minima das Ergebnis signifikant beeinflussen. Daher ist es umso wichtiger, die genaue Position und den genauen Wert der Extrema zu kennen. Durch die Tatsache, dass ein zeitdiskretes Signal vorliegt, lässt sich ein Extrema nicht eindeutig lokalisieren.

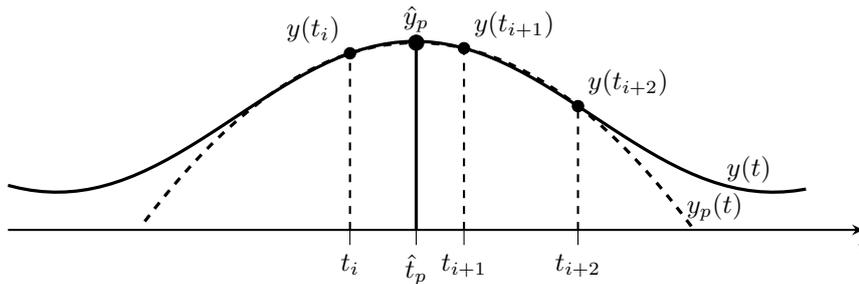


Abbildung 3.4: Schätzen des Extremwertes durch interpolieren eines Polynoms

Abbildung 3.4 zeigt ein Signal $y(t)$ welches zu den Zeitpunkten t_i , t_{i+1} und t_{i+2} abgetastet ist. Bei reiner Betrachtung der Stützstellen ist $y(t_{i+1})$ das Maximum, es ist jedoch ersichtlich, dass sich das tatsächliche Maximum \hat{y} zwischen den Zeitpunkten t_i und t_{i+1} befindet.

Rato schlug in diesem Zusammenhang vor ein Polynom zweiter Ordnung $y_p(t)$ in alle drei aufeinander folgenden Stützstellen $y(t_i)$, $y(t_{i+1})$ und $y(t_{i+2})$ zu interpolieren [36].

$$y_p(t) = at^2 + bt + c \quad (3.30)$$

Das geschätzte Maximum \hat{y}_p ergibt sich durch das Ableiten und Null setzen des Polynoms (3.30). Der Extremwert kann allgemein angeschrieben werden als

$$\hat{y}_p = \frac{b}{2} \hat{t}_p + c \quad \text{mit} \quad \hat{t}_p = -\frac{b}{2a}. \quad (3.31)$$

Durch das Lösen des Polynoms erspart man sich unter anderem die Abfrage nach einem Maximum oder Minimum, da die Lösung des Polynoms Aufschluss darüber liefert. Der Koeffizient a spielt hierbei die tragende Rolle. Ist der Koeffizient positiv handelt es sich um ein Minimum, ist der Koeffizient kleiner Null, so liegt ein Maximum. Liefert die Interpolation des Polynoms für den Koeffizienten $a = 0$ existiert kein Extremwert. Zusätzlich dazu darf nach [37] das geschätzte Extremum \hat{y}_p nur innerhalb eines halben Abtastschritt von t_{i+1} entfernt liegen, für variable Abtastschrittweiten folgt somit die Bedingung:

$$t_{i+1} - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2} < \hat{t}_p < \frac{t_{i+2} + t_{i-1}}{2} = t_{i+1} + \frac{t_{i+2} - t_{i-1}}{2} \quad (3.32)$$

Randwertproblem

Bei der Bildung der einhüllenden Kurve mittels Minima und Maxima ergibt sich, außer der genauen Lokalisation der Extremwerte, noch eine weitere Problematik bezüglich des Verhaltens der Hüllkurve an den Rändern des Beobachtungsfensters. Der Verlauf der einhüllenden Kurve hat einen inhärenten Einfluss auf die Berechnung und auf das Ergebnis der EMD. Es stellt sich somit die Frage, wie die Eigenschaft der einhüllenden Kurve am Beginn und am Ende des Beobachtungsfensters bestmöglich gewählt werden kann. Dies wird umso mehr von Bedeutung wenn der Beobachtungszeitraum klein ist bzw. die Anzahl der Extremwerte des vorliegenden Signals gering ist.

Abbildung 3.5 zeigt das Verhalten der Hüllkurven mit den dazugehörigen Minima und Maxima bei unterschiedlichen Betrachtungen am Rand. Das Zeitintervall $t \in [0, 60]$ stellt den Beobachtungsbereich für die Berechnung dar. Der Verlauf außerhalb dieses Bereichs soll den weiteren Verlauf der Hüllkurven zeigen und dient zur Veranschaulichung der Einflüsse verschiedener angenommenen Randwerte. Die Berechnung der einhüllenden Kurven ohne Einfluss des Verhaltens am Rand, wie in Abbildung 3.5 a dargestellt, hat geringe Bedeutung, da sie, wie unschwer zu erkennen ist, keinerlei Aussagen am Rand besitzt. Das direkte Setzen der Randwerte auf einen fixen Wert wie in Abbildung 3.5 b auf Null bzw. in Abbildung 3.5 c auf den Wert des Signals $y(t)$ am Rand erzielen zwar bessere Lösungen aber keine Lösung, die generell eingesetzt werden kann.

Vernünftige Lösungen bieten die Spiegelung der Extremwerte [35]. Dabei wird jeweils das dem Rand nächste Minimum und Maximum außerhalb des Beobachtungsintervall gespiegelt (Abbildung 3.5 e). Eine quasi schiefssymmetrische Spiegelung ist in Abbildung 3.5 f dargestellt. Dabei wird das erste Maximum $h_{M,1}^{<p,q>}$ zum Zeitpunkt $t_{M,1}$ um den Zeitpunkt des ersten Minimum $h_{m,1}^{<p,q>}$ zum Zeitpunkt $t_{m,1}$ zu einem fiktiven Maximum mit der Amplitude $h_{M,1}^{<p,q>}$ zum Zeitpunkt $-t_{m,1}$ gespiegelt. Äquivalent ergibt sich ein fiktives Minimum mit der Amplitude $h_{m,1}^{<p,q>}$ zum Zeitpunkt $-t_{M,1}$ [37].

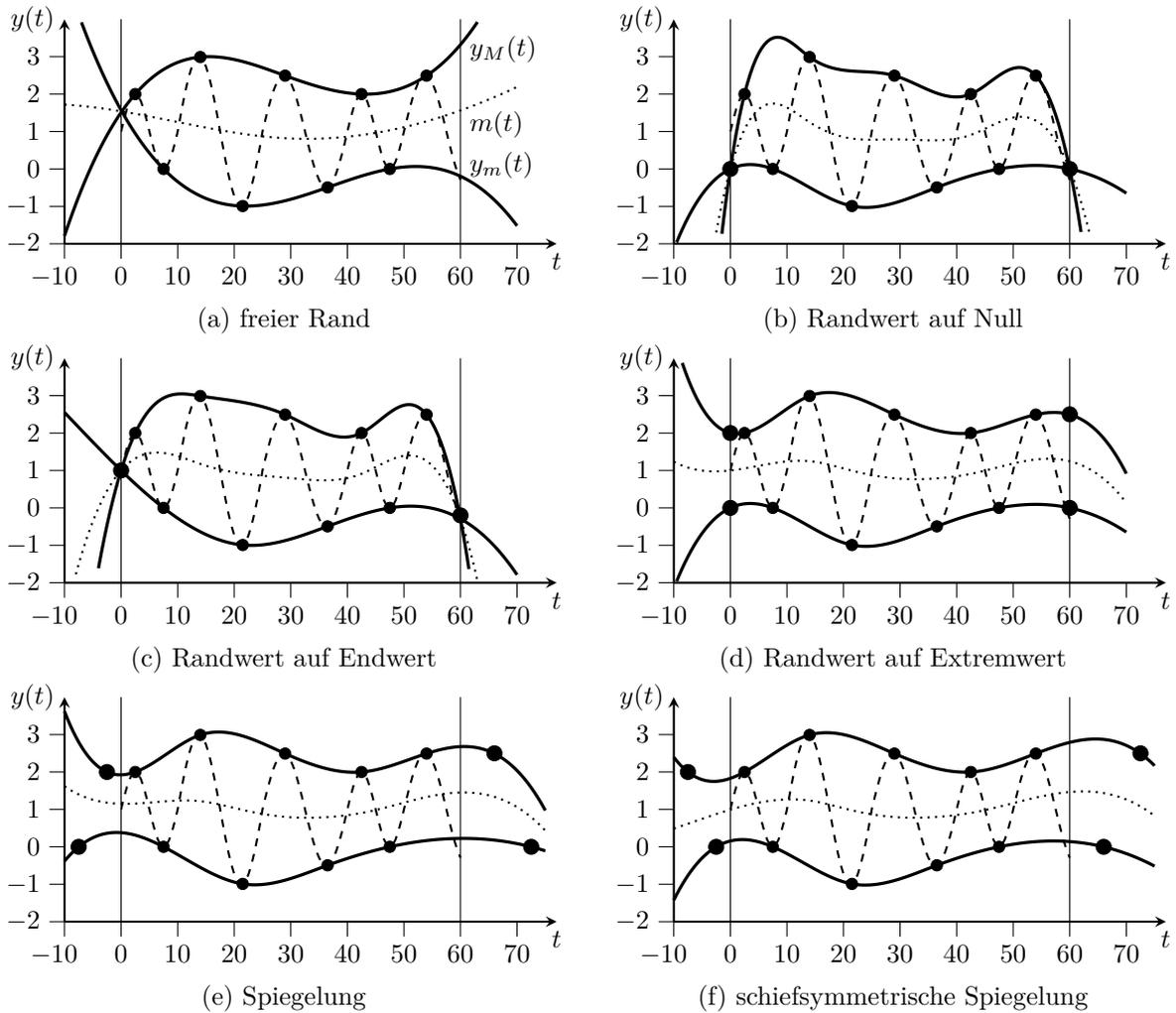


Abbildung 3.5: Verhalten der Hüllkurve bei verschiedenen Randbedingungen: (a) ohne Randwerte; (b) Randwert auf Null; (c) Randwert auf Endwert; (d) Randwert auf Rand dazugehörigen Extremwert; (e) Spiegelung der Extrempunkte; (d) Schiefsymmetrische Spiegelung der Extrempunkte

Ansätze mit einem fixen Randwert, wie in Abbildung 3.5 b und Abbildung 3.5 c besitzen den großen Nachteil, dass bei einem dem Rand naheliegenden Maxima ungewollte Schwingungen in das Signal interpretiert werden, die schlussendlich als große Signalkomponenten aufscheinen. In der Regel liefern Ansätze mit direktem Einfluss der Position der Extrema (z.B. Spiegelung) die besseren Lösungen, insbesondere bei periodischen Signalen. Bei einer abgeschlossenen Sequenz, die vor und nach der Sequenz einen stationären Zustand besitzt, ist ein fixer Randwert jedoch besser als die Lösung mit den Spiegelungen.

Interpolation

Ein weiterer Diskussionspunkt zur EMD stellt die Interpolation der Extremwerte dar. Diese zeigt neben den Randwerten einen großen Einfluss auf die Lösungen der EMD. Im folgenden Abschnitt werden unterschiedliche Methoden zur Interpolation diskutiert [38].

Polynominterpolation

Eine Hauptgruppe der Interpolationsmethoden bilden die Polynominterpolationen, dabei wird ein Polynom N 'ter Ordnung in die Stützstellen hineingelegt. Die Ordnung des Polynoms N ist von den Anzahl der zu interpolierenden Stützstellen $M = N + 1$ abhängig [39].

$$y_P(t) = c_N t^N + c_{N-1} t^{N-1} + \dots + c_1 t + c_0 \quad (3.33)$$

Bei steigender Anzahl von Stützstellen treten bei dieser Art der Interpolation erhebliche Nachteile auf. Die Approximation des Signal verschlechtert sich mit größer werdenden N . Es treten an den Intervallgrenzen starke Schwingungen mit großer Amplitude auf. Diese Erscheinung ist in der Literatur als *Runge-Phänomen* bekannt [39]. Veranschaulichen lässt sich dieses Phänomen mit der gleichnamigen *Runge-Funktion* $y_R(t) = 1/(1+t^2)$, die in Abbildung 3.6 dargestellt ist und zum einen mit $M = 5$ bzw. $M = 10$ Stützstellen interpoliert wird.

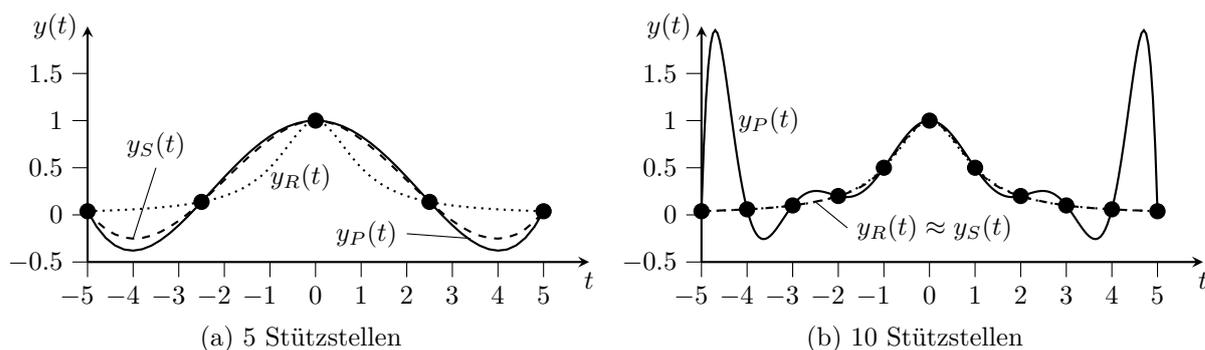


Abbildung 3.6: Interpolation der Runge-Funktion $y_R(t)$ mittels polynominiellen Ansatz $y_P(t)$ und mittels Splines $y_S(t)$, bei: (a) 5 Stützstellen; (b) 10 Stützstellen

Es ist ersichtlich, dass die Interpolation $y_P(t)$ in Abbildung 3.6 b mit $M = 10$ Stützstellen um $t = 0$ sich besser an die ursprüngliche Runge-Funktion $y_R(t)$ anschmiegt, als bei $M = 5$ Stützstellen in Abbildung 3.6 a, jedoch sind die Schwingungen an den äußeren Stützstellen stärker ausgebildet. Mit steigenden Stützstellen steigt auch die Amplitude der Interpolation $y_P(t)$ an den äußeren Stützstellen, wodurch sich die Polynominterpolation für die EMD definitiv nicht eignet.

Splines

Eine weitere weitverbreitete Möglichkeit der Interpolation stellen sogenannten *Splines*³ dar. Im Gegensatz zur Polynominterpolation wird bei der Spline-Interpolation ein Polynom der Ordnung N zwischen zwei Stützstellen hineingelegt. Dabei müssen die einzelnen Interpolationen nicht nur an den Stützstellen dessen Wert besitzen. Zusätzlich müssen in

³Spline ist die englische Bezeichnung für eine Straklatte, eine gebogene Holz- bzw. Kunststofflatte, die ihren Hauptverwendungszweck im Schiffsbau findet.

Abhängigkeit der Ordnung der Splines ihre Ableitungen in den Stützstellen übereinstimmen [39–41].

Kubische Splines

Bei der Anwendung für die EMD sind kubische Splines weit verbreitet [34, 35, 37, 42]. Es wird zwischen jeder Stützstelle y_i und y_{i+1} ein Polynom $y_{S,i}(t)$ der Ordnung $N = 3$ hineingelegt [41].

$$y_{S,i}(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i \quad \text{für} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (3.34)$$

Das Ende eines jeden Splines $y_{S,i-1}(t_i)$ und der Anfang des nächsten Splines $y_{S,i}(t_i)$ müssen dem Wert der jeweiligen Stützstelle y_i entsprechen. Es gilt somit

$$y_{S,i-1}(t_i) = y_{S,i}(t_i) = y_i \quad (3.35)$$

mit $i = 1 \dots M$, wobei M der Anzahl der Stützstellen entspricht. Zusätzlich müssen die erste Ableitung der Splines

$$\dot{y}_{S,i-1}(t_i) = \dot{y}_{S,i}(t_i) \quad (3.36)$$

und die zweite Ableitung

$$\ddot{y}_{S,i-1}(t_i) = \ddot{y}_{S,i}(t_i) \quad (3.37)$$

in den Stützstellen übereinstimmen. Damit ist sichergestellt, dass die Interpolation stetig differenzierbar ist. An den Rändern werden typischerweise *natural* Splines verwendet, wobei die zweite Ableitung an diesen Punkten $\ddot{y}_{S,i-1}(t_i) = \ddot{y}_{S,i}(t_i) = 0$ gesetzt wird [41].

Abbildung 3.6 zeigt den Vergleich der Interpolationsansätze mittels Splines $y_S(t)$ und Polynominterpolation $y_P(t)$. Während bei geringen Stützstellen $M = 5$ (siehe Abbildung 3.6 a) die beiden Interpolationsmethoden noch ähnliches Verhalten besitzen, zeigen sich die Vorteile der Splines in Abbildung 3.6 b recht deutlich. Die Spline-Interpolation passt sich fast perfekt an die Runge-Funktion an, während die Polynominterpolation stark abweicht.

Kubische Hermite-Splines

Die Hermite-Splines besitzen ein ähnliches Verhalten wie die kubischen Splines, mit dem Unterschied, dass die erste Ableitung durch die lokale Ableitung $\dot{y}_{S,i}$ a priori vorgegeben wird [43]. Dadurch wirken diese Splines lokal und beeinflussen vorangegangene Splines im Gegensatz zu klassischen Splines nicht. Ein kubisch hermiter Spline zwischen zwei Stützstellen $y(t_i)$ und $y(t_{i+1})$ ergibt sich wie folgt:

$$y_{S,i}(\tau) = \frac{3T_i\tau^2 - 2\tau^3}{T_i^3} y(t_{i+1}) + \frac{T_i^3 - 3T_i\tau^2 + 2\tau^3}{T_i^3} y(t_i) + \frac{\tau^2(\tau - T_i)}{T_i^2} \dot{y}_{S,i+1} + \frac{\tau(\tau - T_i)^2}{T_i^2} \dot{y}_{S,i},$$

wobei $0 \leq \tau \leq T_i$ gilt und $T_i = t_{i+1} - t_i$ entspricht. Zur Beschreibung jedes Splines sind lediglich die Werte der Stützstellen $y(t_i)$ und $y(t_{i+1})$ und die Ableitung $\dot{y}_{S,i}$ bzw.

$\dot{y}_{S,i+1}$ erforderlich. Eine genauere Betrachtung der hermites Splines ist im Anhang A.4 dargestellt.

$$\dot{y}_{S,i} = 2 \frac{\delta_i \delta_{i-1}}{\delta_i + \delta_{i-1}} \quad \text{mit} \quad \delta_i = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (3.38)$$

Um die differentielle Stetigkeit der Splines zu gewährleisten muss, zusätzlich zu den Stützstellenwert, die Steigung in den Stützstellen gleich sein. Eine Möglichkeit die lokale Steigung zu bestimmen ist in (3.38) dargestellt [38].

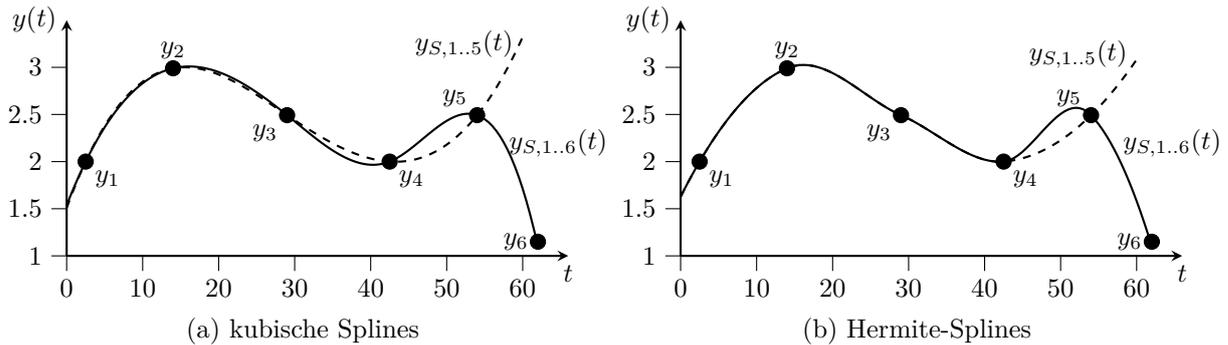


Abbildung 3.7: Verlauf der Spline Interpolation $y_{S,1..5}(t)$ mit 5 Stützstellen y_1, \dots, y_5 (----) und Spline Interpolation $y_{S,1..6}(t)$ mit 6 Stützstellen y_1, \dots, y_6 (—): (a) mit kubische Splines; (b) mit Hermite-Splines

In Abbildung 3.7 sind die Stützstellen und die Hüllkurve der Maxima des Signals des obigen Beispiels dargestellt (vgl. Abbildung 3.5). Die Berechnung der Hüllkurve erfolgte zum einen mittels kubischer Splines (Abbildung 3.7 a) und auf der anderen Seite mit Hermite-Splines (Abbildung 3.7 b). Im ersten Schritt wird die Interpolation mit 5 Stützstellen berechnet und in einem zweiten Schritt wird angenommen, dass eine neue Stützstelle hinzukommt. Durch das Hinzufügen einer neuen Stützstelle y_6 (*hier*: Maximum) verändert sich die Interpolation mittels kubischer Splines bis zu der ersten Stützstelle y_1 (siehe Abbildung 3.7 a). Im Vergleich verändert sich die Interpolation mit Hermite-Splines nur bis zur Stützstelle y_4 . Durch diese Tatsache, gegeben durch die lokale Betrachtung der Ableitung der Splines, wird eine stückweise Betrachtung der EMD möglich gemacht (siehe Kapitel 4) [43].

Analyse des Trends

Mit Hilfe der EMD werden somit die einzelnen Moden eines Signal extrahiert, die anschließend, wie von Huang vorgeschlagen, mit der Hilbert-Transformation (HT) auf ihre Frequenzkomponenten analysiert werden können [34]. Der nicht-stationäre Anteil des Signals verbleibt im Trend bzw. im Residuum. Der Trend kann in der Regel wegen seiner nicht-stationären Eigenschaften nicht auf die momentane Frequenz untersucht werden. Dies führt insbesondere bei Signalen, die aufgrund einer geringen Anzahl von Extremwerten nicht mit der EMD zerlegt werden können und somit im Trend verschwinden, zu einer möglichen Problematik. Ein Beispiel für diesen Fall stellen Sprünge dar, diese besitzen zwar hohe Frequenzen, jedoch können sie nicht mit der Hilbert-Huang-Transformation

analysiert werden, da keine Moden extrahiert werden können und die Sprünge im Trend verbleiben.

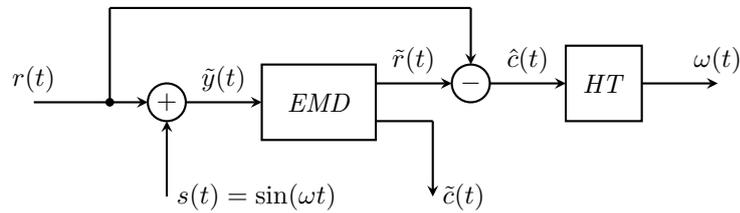


Abbildung 3.8: Extrahieren der Frequenz aus dem Trend

Um eine Aussage über mögliche Frequenzen im Trend anstellen zu können, wird an dieser Stelle vorgeschlagen den Trend $r(t)$, wie in Abbildung 3.8 dargestellt, mit einer sinusförmigen Schwingung $s(t)$ mit konstanter Frequenz ω zu beaufschlagen. Die Schwingung $s(t)$ ist im weiten Sinn stationär und besitzt selbst die Eigenschaften einer IMF, wodurch sie den Trend nicht beeinflusst. Das resultierende Signal

$$\tilde{y}(t) = r(t) + s(t) = r(t) + \sin(\omega t) \quad (3.39)$$

wird anschließend mit der EMD zerlegt. Aufgrund der Tatsache, dass das Signal $\tilde{y}(t)$ aus einem nicht zerlegbaren Signal $r(t)$ und einer Schwingung $s(t)$ besteht, ergibt sich lediglich eine Mode $\tilde{c}(t)$ und der dazugehörige Trend $\tilde{r}(t)$. Für die Weiterverarbeitung wird jedoch nicht die Mode sondern der Trend $\tilde{r}(t)$ betrachtet. Dieser wird vom ursprünglichen Residuum $r(t)$ abgezogen und das Ergebnis $\hat{c}(t)$ wird auf mögliche Frequenzen untersucht.

Diese Vorgehensweise kann an einem einfachen Fall-Beispiel leicht erörtert werden. Besitzt ein Signal bzw. das Residuum $r(t)$ keine Frequenzanteile, ergibt sich nach der Analyse mit der EMD für den Trend $\tilde{r}(t) = r(t)$, da die aufaddierte Schwingung $s(t)$ als Mode $\tilde{c}(t)$ extrahiert wird. Somit ergibt sich für die zusätzliche entstehende Mode $\hat{c}(t) = r(t) - \tilde{r}(t) = 0$ und es wird keine Frequenz detektiert.

Befinden sich jedoch im Trend hohe Frequenzen, wie im Fall eines Sprunges (siehe Abbildung 3.9 a), ergibt sich nach der Untersuchung mit der EMD ein Residuum $\tilde{r}(t)$ wie in Abbildung 3.9 b dargestellt. Der Sprung und dessen hohe Frequenzanteile sind in der resultierenden Mode $\tilde{c}(t)$ in Abbildung 3.9 c und im Trend $\tilde{r}(t)$ ersichtlich. Subtrahiert man den Trend $\tilde{r}(t)$ vom ursprünglichen Signal $r(t)$ ergibt sich für das Ergebnis ein Verlauf wie in Abbildung 3.9 d. Die hohen Frequenzanteile des Sprunges sind klar ersichtlich, ohne, dass die Frequenz der aufaddierten Schwingung das Signal beeinflussen. Die künstlich erzeugte Mode $\hat{c}(t)$ kann aufgrund der Tatsache, dass sie im Gegensatz zum Trend stationär ist, auf ihre Frequenzen untersucht werden.

Durch hinzufügen von einem künstlichen Signal, ist es möglich Signale, die in erster Linie nicht mit der EMD untersuchbar sind, zu zerlegen und somit ihre Frequenz zu bestimmen.

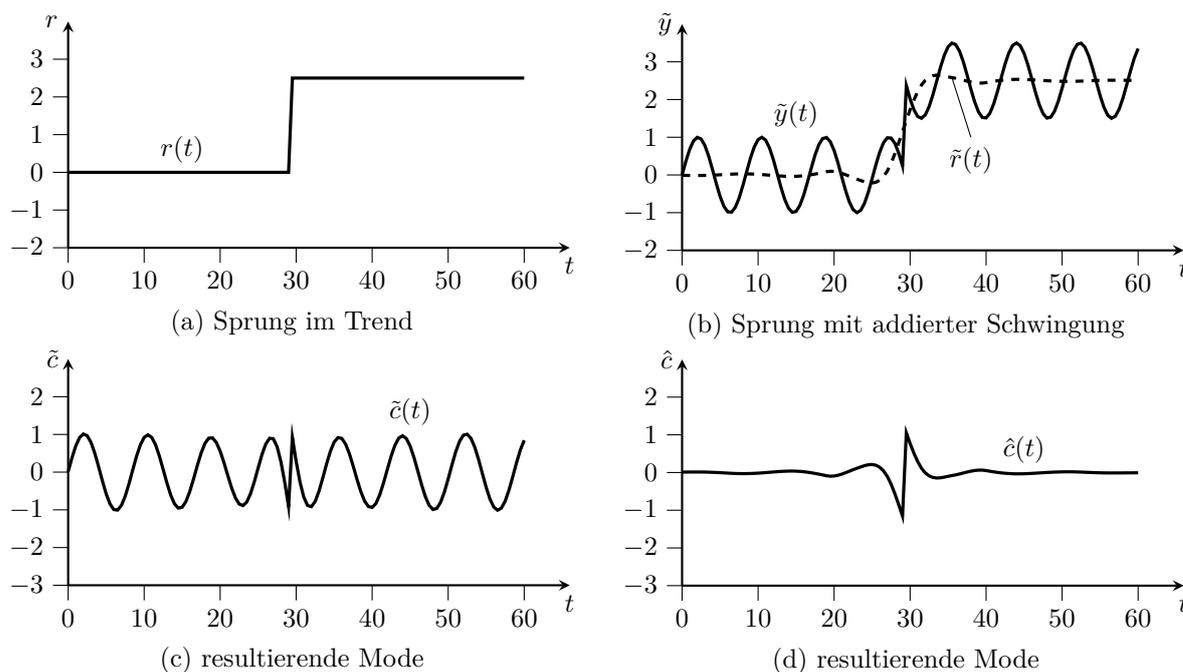


Abbildung 3.9: Extrahieren einer Mode aus einem Sprung im Trend: (a) Trend mit Sprung $r(t)$; (b) Sprung mit aufaddierter Schwingung $s(t)$ und daraus resultierender Trend $\tilde{r}(t)$; (c) resultierender Verlauf der Mode $\tilde{c}(t)$; (d) resultierende Mode $\hat{c}(t)$ des Signals $r(t)$

3.2 Online Untersuchungen

Im folgendem Kapitel werden Methoden und Ansätze zum Schätzen der Momentanfrequenz beleuchtet, die eine Möglichkeit bieten während der Simulationslaufzeit Aussagen über die aktuelle Frequenz zu treffen. Es werden zwei Ansätze zum signalbasierten Schätzen dargestellt, sowie auf zwei weitere Ansätze von modellbasierten Schätzmethode eingegangen.

3.2.1 Steigungsbasierte Analyse

Der Ansatz der steigungsbasierten Analyse beruht auf einem Vorschlag zur Schrittweitensteuerung für die Co-Simulation [2]. Der Grundgedanke basiert auf der Steigungsänderung $\Delta_{y,i}$ zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützstellen. Eine hohe Steigung geht mit einer hohen Frequenz und/oder Amplitude einher. Die Steigungsdifferenz $\Delta_{y,i}$ ergibt sich aus

$$\Delta_{y,i} = \frac{\delta_{y,i+1} - \delta_{y,i}}{y_i}, \quad (3.40)$$

wobei die einzelne Steigungen

$$\delta_{y,i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \quad (3.41)$$

sich aus der lokalen Differenz der Änderung des Signals durch die Änderung der Zeit ergeben. Abbildung 3.10 zeigt einen Ausschnitt einer Schwingung mit drei Stützstellen y_i ,

y_{i-1} und y_{i+1} , wobei die Stützstelle y_i am Maximum des Signals ist. Es ist nachvollziehbar, dass die maximale Steigungsänderung eines sinusförmigen Signal bei den Extrema zu finden ist. Um den Einfluss der Amplitude auf die Änderung der Steigung zu beseitigen, wird durch den Wert der Stützstelle y_i dividiert.

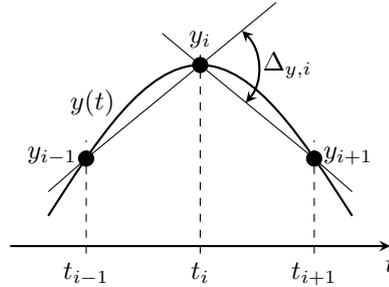


Abbildung 3.10: Maximale Steigungsänderung $\Delta_{y,i}$ eines abgetasteten Sinussignals $y(t)$ [2]

Rollt man die Überlegung von einer anderen Seite auf, ausgehen von einem sinusförmigen Signal mit konstanter Frequenz ω und konstanter Amplitude A ergibt sich für die Betrachtung eines kontinuierlichen Signals $y(t)$ für äquidistante diskrete Zeitpunkte $t = kT$ mit der Periodendauer T

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = y_k. \quad (3.42)$$

Die erste Ableitung $\dot{y}(t)$ und zweite Ableitung $\ddot{y}(t)$ von $y(t)$ wird in (3.43) näherungsweise als lokale Differenz der Stützstellen beschrieben.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A \omega \cos(\omega t + \varphi) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T} \\ \ddot{y}(t) &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \approx \frac{(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})}{T^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Durch die Division der zweiten Ableitung $\ddot{y}(t)$ mit dem Signals $y(t)$ erhält man eine Schätzung der Frequenz ω .

$$\omega^2 = -\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} \approx \frac{(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})}{T^2 y_k} \quad (3.44)$$

Aus dem Vergleich von (3.40) und (3.44) ist erkennbar, dass das Ergebnis der Steigungsänderung $\Delta_{y,i}$ dem Quadrat der Frequenz ω skaliert mit der Abtastzeit T entspricht.

$$\Delta_{y,k} = \omega^2 T \quad (3.45)$$

Bezogen auf ein abgetastetes Signal bedeutet dieser Zusammenhang, dass lediglich drei Stützstellen y_i , y_{i-1} und y_{i+1} benötigt werden um eine Aussage über die momentane Frequenz zu erhalten.

Steigungsbasierte Analyse bei FM-AM Signalen

Bei der Erläuterung der Grundgedanken der steigungsbasierten Frequenzanalyse wurde von einer sinusförmigen Schwingung mit konstanter Amplitude und Frequenz ausgegangen. Im folgenden Abschnitt soll das Verhalten der Methode bei einem FM-AM Signal der Form

$$y(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (3.46)$$

mit einer zeitvariablen Amplitude $a(t)$ und einer zeitvariablen Phase $\phi(t)$ betrachtet werden. Die Schätzung der Momentanfrequenz bei der steigungsbasierte Analyse basiert auf dem Quotienten der zweiten Ableitung $\ddot{y}(t)$ und des Grundsignals $y(t)$ aus (3.44). Aus Grund der Übersichtlichkeit wird für die folgende Betrachtung die Abhängigkeit der Zeit t nicht explizit angeführt.

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{y}}{y} &= \frac{\ddot{a} \cos \phi - (2\dot{a}\dot{\phi} + a\ddot{\phi}) \sin \phi - a\dot{\phi}^2 \cos \phi}{a \cos \phi} \\ &= \underbrace{-\dot{\phi}^2}_D + \underbrace{\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}\dot{\phi} + a\ddot{\phi}}{a} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}}_E \end{aligned} \quad (3.47)$$

Der nach dem Einsetzen und Umformen resultierende Term D entspricht dem erwarteten Wert aus (3.44). Der Term E stellt die Unsicherheit der Frequenzschätzung verursacht durch die Ableitungen der Frequenz bzw. der Amplitude dar. Der mathematische Schätzfehler

$$E = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}\dot{\phi} + a\ddot{\phi}}{a} \tan \phi \quad (3.48)$$

ist mit dem oszillierenden Term $\tan \phi$ gewichtet, der in Abhängigkeit der Phase ϕ und somit über die Zeit variiert. Der auftretende Fehler schwankt zwischen $E = (-\infty, \infty)$ und stellt somit einen nicht zu vernachlässigbare Unsicherheit der Frequenzschätzung dar.

3.2.2 Schätzung mittels Energieoperator

In diesem Abschnitt wird auf einige Methoden zur Schätzung der Frequenz mit Hilfe des Teager-Kaiser Operators eingegangen, die im zeitdiskreten Fall unter der englischen Bezeichnung *Discrete Time Energy Separation Alorithm (DESA)* in der Literatur zu finden sind. Aufbauenden darauf wird ein Algorithmus unter Verwendung des *Higher Order Differential Energy Operator (HODEO)* gezeigt [44–46].

Teager-Kaiser Energieoperator

Üblicherweise ist die Energie eines Signals $y(t)$ in der Literatur mit $E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$ dargestellt [27]. Eine andere Möglichkeit die Energie eines Signales zu interpretieren zeigt

der Teager-Kaiser Energieoperator, dessen Vorarbeit aus den kryptischen Beobachtungen von Teager aus dem Jahr 1980 [47] stammt und schließlich von Kaiser 1990 [48] aufgegriffen und veröffentlicht wurde. Der Grundgedanke basiert auf der Betrachtung eines Feder-Masse-Systems, wie in Abbildung 3.11 dargestellt, mit einer Masse m und einer Federkonstante k .

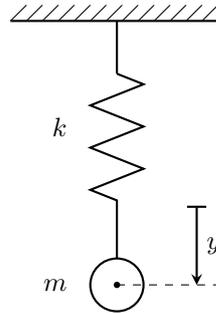


Abbildung 3.11: Feder-Masse-System

Ausgehend von der Differentialgleichung zweiter Ordnung des Feder-Masse-Systems ohne äußerlich wirkende Kräfte

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (3.49)$$

ergibt sich die Energie E des Systems in (3.50) aus der potentiellen Energie der Feder und der kinetischen Energie der Masse m :

$$E = \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad (3.50)$$

Durch Einsetzen der homogenen Lösung der Differentialgleichung $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ in (3.50), wobei A die konstante Amplitude, φ die Phasenverschiebung und ω die konstante Frequenz repräsentieren, die sich aus $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ergibt, zeigt sich, dass die Energie E proportional dem Produkt aus dem Quadrat der Frequenz ω und dem Quadrat der Amplitude A ist:

$$E \propto \omega^2 A^2 \quad (3.51)$$

Der Zusammenhang in (3.51) kann auch durch die Bildung des Quadrats der ersten Ableitung $\dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$ weniger dem Produkt des Signals $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ mit der zweiten Ableitung $\ddot{y} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ gebildet werden. Es lässt sich somit aus einem Signal $y(t)$ und dessen ersten und zweiten Ableitung eine dem Quadrat der Frequenz und Amplitude proportionale Energie des Signals berechnen. Die in (3.52) dargestellte Betrachtung der Energie wird in der Literatur als *Teager-Kaiser Energieoperator* $\Psi_c \{y(t)\}$ bezeichnet.

$$\Psi_c \{y(t)\} = \dot{y}^2(t) - y(t)\ddot{y}(t) = \omega^2 A^2 \quad (3.52)$$

Eine allgemeiner Betrachtung des Energieoperators erlaubt die Verwendung mehrerer Va-

riablen [49, 50]. Die Erweiterung

$$\Psi_c\{x, y\} = \dot{x}y - x\ddot{y} \quad (3.53)$$

ermöglicht die Analyse der Energie höherer Ordnungen. Wenn in (3.53) für $x = \dot{y}$ gewählt wird, ergibt sich der Energieoperator für die Geschwindigkeit bzw. für die Wahl von $x = \ddot{y}$ ergibt sich der Energieoperator bezüglich der Beschleunigung von $y(t)$.

$$\Psi_c\{y, \dot{y}\} = \dot{y}\ddot{y} - yy^{(3)} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_c\{y, \ddot{y}\} = \dot{y}y^{(3)} - yy^{(4)} \quad (3.54)$$

Der generalisierte Energieoperator höherer Ordnung lässt sich somit wie folgt anschreiben:

$$\Gamma_{c,k}\{y(t)\} = \Psi_c\{y(t), y^{(k)}(t)\} = \dot{y}(t)y^{(k-1)}(t) - y(t)y^{(k)}(t), \quad (3.55)$$

wobei k die Ordnung des Operators repräsentiert [45, 46]. Es gilt somit, dass der generalisierte Energieoperator $\Gamma_{c,2}\{y(t)\}$ mit der Ordnung $k = 2$ dem Teager-Kaiser Energieoperator $\Psi_c\{y(t)\}$ entspricht.

Frequenzschätzung mittels Energieoperator

Der *Teager-Kaiser Energieoperator* kann schließlich zur Bestimmung der Momentanfrequenz $\omega(t)$ und der momentanen Amplitude $a(t)$ herangezogen werden. Es wird von einer konstanten Amplitude A und Frequenz ω_c ausgegangen, wonach die Frequenz ω_c eines kontinuierlichen sinusförmigen Signals $y(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi)$, wie in (3.56) ersichtlich, aus der Wurzel des Energieoperators $\Psi_c\{\dot{y}(t)\} = A^2\omega_c^4$ des abgeleiteten Signals $\dot{y} = -A\omega_c \sin(\omega_c t + \varphi)$ durch den Energieoperator des Signals $\Psi\{y(t)\} = A^2\omega_c^2$ gebildet wird [44].

$$\omega = \sqrt{\frac{\Psi_c\{\dot{y}(t)\}}{\Psi_c\{y(t)\}}} \quad (3.56)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich auch die Amplitude A des Signales bestimmen.

$$A = \left| \frac{\Psi_c\{y(t)\}}{\sqrt{\Psi_c\{\dot{y}(t)\}}} \right| \quad (3.57)$$

Frequenzschätzung mittels Energieoperator höherer Ordnung

Unter der Verwendung des generalisierten Energieoperators aus (3.55) ergibt sich eine weitere Möglichkeit zum Schätzen der Momentanfrequenz, wobei die Lösung des Energieoperators $\Gamma_{c,k}$ eines sinusförmigen Signals mit konstanter Amplitude A und Frequenz ω allgemein als

$$\Gamma_{c,k}\{y(t)\} = \begin{cases} (-1)^{1+1/2k} A^2\omega^{k-2} & \text{wenn } k = 2, 4, 6, \dots, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.58)$$

angeschrieben werden kann [46]. Die Bildung der Frequenz erfolgt aus

$$\omega(t) = \sqrt{-\frac{\Gamma_{c,4}\{y(t)\}}{\Gamma_{c,2}\{y(t)\}}} \quad \text{bzw. i. A.} \quad \omega(t) = \sqrt{-\frac{\Gamma_{c,k+2}\{y(t)\}}{\Gamma_{c,k}\{y(t)\}}}, \quad (3.59)$$

wobei im allgemeinen Fall k die Ordnung des energiebasierten Lösungsverfahrens angibt [45]. Es genügt somit im zeitkontinuierlichen Fall, die aktuellen Ableitungen eines Signals zu kennen um auf dessen Frequenz schließen zu können.

Für abgetastete Signale verhält sich der Energieoperator und die Bestimmung der momentanen Frequenz ähnlich. Es bedarf lediglich 4 Stützstellen um die momentane Frequenz zu schätzen (siehe Anhang A.3) [44–46].

Energieoperator bei FM-AM Signalen

Wie auch bei der steigungsbasierten Analyse aus Kapitel 3.2.1 liegt den Überlegungen der Frequenzschätzung mittels Energieoperator ein sinusförmiges Signal mit konstanter Frequenz und Amplitude zugrunde, weshalb die Einflüsse von variabler Frequenz und Amplitude in diesem Abschnitt geklärt werden sollen. Für die Bestimmung des Energieoperators sind neben dem Signal die ersten beiden Ableitungen erforderlich. Wird ein FM-AM Signalen $y(t) = a(t) \cos \phi(t)$ mit zeitlich veränderlicher Amplitude $a(t)$ und zeitabhängiger Phase $\phi(t)$ betrachtet, ergibt sich der Operator aus (3.52) wie folgt:

$$\begin{aligned} \Psi_c \{y\} &= \dot{y}^2 - y\ddot{y} \\ &= \dot{a}^2 \cos^2 \phi + a^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi - 2a\dot{a}\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi \\ &\quad - a \cos \phi \left(\ddot{a} \cos \phi - 2\dot{a}\dot{\phi} \sin \phi - a\ddot{\phi} \sin \phi - a\dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \\ &= \underbrace{a^2 \dot{\phi}^2}_D + \underbrace{\left(\dot{a}^2 - a\ddot{a} \right) \cos^2 \phi + a^2 \ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi}_E \end{aligned} \quad (3.60)$$

Es wird in diesem Abschnitt wiederum auf das explizite hinweisen auf die Zeit t aus Grund der Übersichtlichkeit verzichtet. Der Term D entspricht dem erwarteten Term aus (3.52). Der Term E ist der unerwartete Beitrag, der bei der Betrachtung durch veränderliche Amplitude und Frequenz entsteht, wobei der Klammerausdruck $\dot{a}^2 - a\ddot{a} = \Psi_c \{a\}$ dem Energieoperator angewandt auf die Amplitude a entspricht.

$$\begin{aligned} E &= \Psi \{a\} \cos^2 \phi + a^2 \ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi \\ &\leq \Psi \{a\} + a^2 \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Der durch die Modulation verursachte Term E ist in der Regel kleiner als der Erwartungswert $E < D$ wodurch die Berechnung der Momentanfrequenz nach (3.56) eine gute Schätzung für die Frequenz liefert [44]. Die Momentanfrequenz mittels Teager-Kaiser

Energieoperator Ψ_c kann somit näherungsweise wie folgt angeschrieben werden:

$$\omega(t) \approx \sqrt{\frac{\Psi_c \{ \dot{y}(t) \}}{\Psi_c \{ y(t) \}}}. \quad (3.62)$$

3.2.3 Auto-regressive Frequenzschätzung

In diesem Kapitel wird die Schätzung der Momentanfrequenz mit Hilfe der *Auto-Regression* (*AR*) erläutert. Ausgehend von einem stationären weißen Rauschen ν_k (Rauschprozess $\nu_k \propto \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$) werden die Parameter eines AR Filters so gewählt, dass das zu untersuchende abgetastete Signal y_k daraus resultiert. Über die Position der Polstellen p_n kann auf die Polfrequenz bzw. Momentanfrequenz ω_k des Signals geschlossen werden [51, 52].

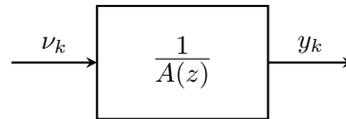


Abbildung 3.12: Blockschaltbild AR-Filter

Das weiße Rauschen repräsentiert per Definition eine stationäre, mittelwertfreie und unkorrelierte Zufallszahl ν_k [53, S.93]. Die Autokorrelation

$$r_{xx}[k] = \sigma_\nu^2 \delta[k] \quad (3.63)$$

liefert einen diskreten Diracimpuls mit der Höhe der quadratischen Varianz des Rauschens σ_ν^2 . Auf Grund der Mittelwertfreiheit ergibt sich für das Leistungsdichterspektrum ein konstanter Wert von σ_ν^2 [27]. Mit anderen Worten beinhaltet weißes Rauschen alle Frequenzkomponenten, womit es möglich ist, mit Hilfe eines Filters jedes beliebige Signal zu erhalten.

Die Übertragungsfunktion eines AR-Filters lässt sich als

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} \quad (3.64)$$

anschreiben. Die Differenzgleichung mit linearen konstanten Koeffizienten lautet:

$$y_k = \nu_k - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_N y_{k-N} = \nu_k - \sum_{n=1}^N a_n y_{k-n}. \quad (3.65)$$

Aus den Parametern des Filters $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ kann auf die Lage der Polstellen $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]^T$ geschlossen werden:

$$z^N + \sum_{n=1}^N a_n z^{N-n} = \prod_{n=1}^N (z - p_n) \quad (3.66)$$

Schlussendlich liefert die Phasenlage der Pole p_n eine Information über die Frequenz

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \arctan \left(\frac{\Im \{p_n\}}{\Re \{p_n\}} \right), \quad (3.67)$$

wobei $n = 1, 2, \dots, N$ den Index der Pole darstellt. Zur Bestimmung der Parameter gibt es mehrere Schätzverfahren und Ansätze. Mögliche Wege führen über die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* und die *Yule-Walker-Gleichung*.

Rekursive Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Eine Möglichkeit zum Schätzen der Parameter $\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N]^T$ des AR-Modelles liefert eine rekursive Variante der Methode der kleinsten Fehlerquadrate auch bekannt unter der englischen Bezeichnung *Recursive Least Square (RLS)* [27, 52, 54]. Ziel ist es, ein Modell der Form

$$\hat{y}(z) = \frac{1}{\hat{\mathbf{A}}(z)} \nu(z) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N \hat{a}_n z^{-n}} \nu(z) \quad (3.68)$$

zu erhalten, dessen geschätzte Parameter $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ entsprechen. Für $\nu_k = 0$ muss der Modellfehler verschwinden und es muss gelten

$$\hat{y}_k \hat{=} - \sum_{n=1}^N \hat{a}_n y_{k-n}. \quad (3.69)$$

Damit ergibt sich der Prädiktionsfehler zu

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k + \hat{a}_1 y_{k-1} + \hat{a}_2 y_{k-2} + \dots + \hat{a}_N y_{k-N} = y_k - \mathbf{m}_k^T \hat{\mathbf{a}} \quad (3.70)$$

wobei für $\mathbf{m}_k = [-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-N}]^T$ gilt.

Die Verfahren zur rekursiven Ermittlung der unbekannt Parameter sind in der Literatur bekannt [52, S.365ff ; 27, S.355ff]. Die rekursive Schätzung der Parameter $\hat{\mathbf{a}}_k$ ergibt sich aus der Korrektur des vorangehenden Werts $\hat{\mathbf{a}}_{k-1}$. Die Korrektur erfolgt über den Korrekturterm $\mathbf{k}_k \epsilon_k$, wobei \mathbf{k}_k den Korrekturfaktor repräsentiert:

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \hat{\mathbf{a}}_{k-1} + \mathbf{k}_k (y_k - \hat{\mathbf{a}}_{k-1}^T \mathbf{m}_k) \quad (3.71)$$

Der Korrekturvektor \mathbf{k}_k der Dimension $N \times 1$ wird folgendermaßen bestimmt:

$$\mathbf{k}_k = \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{m}_k}{\lambda + \mathbf{m}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{m}_k} \quad (3.72)$$

Die Aktualisierung der sogenannten Schätzfehlerkovarianz \mathbf{P}_k mit der Dimension $N \times N$ erfolgt über:

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{k}_k \mathbf{m}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \right) \lambda^{-1} \quad (3.73)$$

Mit jedem neuem Messpunkt wird die Schätzung besser, in der Schätzfehlerkovarianzmatrix $\mathbf{P}_k = [\mathbf{M}_k^T \mathbf{M}_k]^{-1}$, wobei $\mathbf{M}_k = [\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k-1}, \dots, \mathbf{m}_{k-Q}]^T$, sind alle Q Messpunkte impliziert. Für veränderliche Frequenzen und somit auch veränderlichen Koeffizienten a_i ist es nicht sinnvoll alle Messpunkte für die Schätzung heranzuziehen. Eine Möglichkeit, um dies zu Umgehen, ist die zusätzliche Verwendung eines sogenannten Vergessensfaktors λ der dafür sorgt, dass weiter zurückliegende Messwerte weniger stark in die Schätzung mit einfließen [52, 54]. Der Vergessensfaktor λ ist kleiner sein als Eins und liegt typischerweise zwischen 0.98 und 0.995 [52].

Yule-Walker-Gleichung

Eine weitere Möglichkeit zum Schätzen der Filterparameter \hat{a}_n und die wohl weitest verbreitete Methode bei AR-Modellen ist die sogenannte *Yule-Walker-Gleichung* (YWG) [52, 54–56]. Hierfür wird der Erwartungswert aus dem Produkt der Differenzgleichung (3.65) und der konjugiert komplexen Wertefolge $y^*(k-l)$ gebildet

$$E \{y_k y_{k-l}^*\} = E \{\nu_k y_{k-l}^*\} - \sum_{n=1}^N a_n E \{y_{k-n} y_{k-l}^*\}. \quad (3.74)$$

Die YWG ergibt sich aus dem Zusammenhang der Autokorrelation $c_{yy,l} = E \{y_k y_{k-l}^*\}$ von einem im weiteren Sinne stationären stochastischen Prozess⁴, wie folgt:

$$c_{yy,l} = c_{\nu y,l} - \sum_{n=1}^N a_n c_{yy,l-n} = c_{\nu y,l} - \mathbf{a}^T \mathbf{c}_{yy,l} = c_{\nu y,l} - \mathbf{c}_{yy,l}^T \mathbf{a} \quad (3.75)$$

Für den Erwartungswert aus dem Produkt des Rauschens ν_k und $y^*(k-l)$ gilt,

$$c_{\nu y,l} = E \{\nu_k y_{k-l}^*\} = \begin{cases} \sigma_\nu^2, & l = 0 \\ 0, & l > 0, \end{cases} \quad (3.76)$$

wobei σ_ν^2 die Varianz des Rauschens darstellt. Die YWG bietet eine Möglichkeit den fiktiven Rauschanteil ν_k aus der Gleichung zu eliminieren. Die YWG ermöglicht eine Verbindung zwischen der Autokorrelation $c_{yy,l}$ von y_k und den Koeffizienten a_n des AR-Modells.

Bei der Annahme, dass der Prozess ergodisch⁵ ist, kann die Autokorrelation

$$\hat{c}_{yy,l} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L y_k y_{k-l}^* \quad (3.77)$$

geschätzt werden. Schlussendlich kann die YWG aus (3.75) mit $l > N$ Messpunkten mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst werden [55].

⁴Ein stochastischer Prozess heißt *stationär*, wenn die statistischen Eigenschaften invariant gegenüber der Zeit sind.

⁵Ein stationär stochastischer Prozess ist *ergodisch*, wenn der zeitliche Mittelwert einer Reasalisation gleich dem Schar-Mittelwert über die Realisationen entspricht.

Zeitvariable auto-regressive Frequenzschätzung

Die geschätzten Parameter des AR-Modells basieren auf zeitunabhängigen Parametern a_n . Es existieren jedoch auch Ansätze auf Basis von zeitveränderlichen Parametern $a_{n,k}$, die sogenannte *Time-Varying Auto-Regression (TVAR)* [55, 57, 58].

$$a_{n,k} = a_{n,0} + a_{n,1}k + a_{n,2}\frac{k^2}{2} + \dots \quad (3.78)$$

Dabei wird ein polinomischer Verlauf der Parameter $a_{k,n}$ in Abhängigkeit der Zeit, wie in (3.78), angenommen. Der Fokus hierbei liegt jedoch auf dem Verlauf der Parameter und folglich dem Verlauf Momentanfrequenz innerhalb eines Beobachtungsfenster von vorangegangenen Stützstellen. Es handelt sich somit eher um eine offline Variante der Momentanfrequenzschätzung und wird in dieser Arbeit nicht näher betrachtet.

3.2.4 Frequenzschätzung mittels Kalman-Filter

In diesem Abschnitt wird die Frequenzschätzung mit Hilfe des *Extended Kalman-Filters (EKF)* erörtert [59, 60]. Das Kalman-Filter schätzt die Parameter eines Signalmodells mit variabler Amplitude und Frequenz.

Extended Kalman-Filters

Das Kalman-Filter ist ein Werkzeug zum Schätzen von Systemzuständen. Das Modell des *Extended Kalman-Filters* besitzt im Gegensatz zum üblichen Kalman-Filter nichtlineare Eigenschaften. In der Literatur ist das Kalman-Filter weit verbreitet und ausführlich diskutiert [27, 52–54, 61, 62], es wird im folgenden Abschnitt kurz auf die wesentlichen Gesichtspunkte des EKF's eingegangen. Ausgangspunkt des EKF's ist ein nichtlineares diskretes Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3.79)$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{N,k}]^T$ mit N Zustandsgrößen und dem Ausgangsvektor $\mathbf{y}_k = [y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{P,k}]^T$. Zusätzlich beinhaltet das Modell ein Systemrauschen \mathbf{w}_k und ein Messrauschen \mathbf{v}_k , wobei es sich bei beiden Rauschquellen um ein normalverteiltes weißes Rauschen handelt, die unkorreliert zueinander und zu den Anfangszuständen \mathbf{x}_0 des Systems sind. Der Erwartungswert der beiden Rauschquellen ist $E\{\mathbf{w}_k\} = E\{\mathbf{v}_k\} = 0$ und es gilt, dass

$$E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_n^T\} = \mathbf{Q} \delta_{k-n} \quad \text{und} \quad E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_n^T\} = \mathbf{R} \delta_{k-n} \quad (3.80)$$

sind, wobei die Kovarianzmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} positiv semidefinite Diagonalmatrizen sind [27]. Für die Berechnung des EKF werden zusätzlich die partiellen Ableitungen von $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$

und $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ benötigt:

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (3.81)$$

Im Vorfeld zur Berechnung müssen zum Zeitpunkt $k = 0$ die geschätzten Zustandsgrößen $\hat{\mathbf{x}}_0 = E\{\mathbf{x}_0\}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_0 = (E\{\mathbf{x}_0 - E\{\mathbf{x}_0\}\})(E\{\mathbf{x}_0 - E\{\mathbf{x}_0\}\})^T$ initialisiert werden [61]. Die Prädiktion der Zustände $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ergibt sich aus der Zustandsgleichung (3.79) und dem vorangegangenen Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (3.82)$$

Analog dazu ergibt sich die Prädiktion der Kovarianzmatrix \mathbf{P}_k^- aus

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q} \quad (3.83)$$

Die Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_k ergibt sich aus der Prädiktion der Kovarianzmatrix \mathbf{P}_k^- , der partiellen Ableitung der Ausgangsgleichung \mathbf{H}_k und der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} des Messrauschens \mathbf{v}_k wie folgt:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.84)$$

Die Schätzung der Zustände $\hat{\mathbf{x}}_k$ für jeden Zeitschritt k berechnen sich aus der Zustandsgleichung (3.79) mit dem durch den Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_k gewichteten Schätzfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_k$.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \underbrace{\mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k^-))}_{\boldsymbol{\varepsilon}_k} \quad (3.85)$$

Das Aktualisieren der Kovarianzmatrix \mathbf{P}_k ergibt sich aus der sogenannten *Riccati-Gleichung*:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \quad (3.86)$$

Modellansatz

Ausgangspunkt für das Modell des Kalman-Filters ist ein AM-FM Signal y_k mit Messrauschen v_k :

$$y_k = \underbrace{A_k \cos(\omega_k k + \varphi)}_{s_k} + v_k \quad (3.87)$$

Für die Ermittlung des Modells werden in einem ersten Schritt die Änderung des Signals nach einer Iteration $k + 1$ betrachtet. Mit der Anwendung des Summensatzes $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ ergibt sich für das AM-FM Signal

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= A_{k+1} \cos(\omega_{k+1} (k + 1) + \varphi) \\ &= A_{k+1} [\cos(\omega_{k+1} k + \varphi) \cos(\omega_{k+1}) - \sin(\omega_{k+1} k + \varphi) \sin(\omega_{k+1})] \end{aligned} \quad (3.88)$$

In einem zweiten Schritt wird angenommen, dass sich die Frequenz ω_k innerhalb eines Schrittes nicht ändert [60], es gilt somit

$$\omega_{k+1} = \omega_k, \quad (3.89)$$

zusätzlich wird angenommen, dass sich die Amplitude A_k innerhalb eines Schrittes um den Faktor α_k ändert. Dies erlaubt eine getrennt Betrachtung der Amplitude und daraus folgend eine schnelle Signaländerung [59].

$$A_{k+1} = \alpha_k A_k. \quad (3.90)$$

Setzt man die beiden Annahmen aus (3.89) und (3.90) in die Gleichung (3.88) ein, ergibt sich s_{k+1} wie folgt:

$$s_{k+1} = \overbrace{\alpha_k}^{x_{4,k}} \left(\underbrace{A_k \cos(\omega_{k+1} k + \varphi)}_{x_{1,k}} \overbrace{\cos(\omega_k)}^{x_{3,k}} - \underbrace{A_k \sin(\omega_{k+1} k + \varphi)}_{x_{2,k}} \sin(\omega_k) \right) \quad (3.91)$$

Die Zustandsgrößen $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, x_{4,k}]^T$ des Modells werden auf Basis von (3.91) wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= A_k \cos(\omega_k k + \varphi) = s_k \\ x_{2,k} &= A_k \sin(\omega_k k + \varphi) \\ x_{3,k} &= \omega_k \\ x_{4,k} &= \alpha_k \end{aligned} \quad (3.92)$$

Das Zustandsraum-Modell kann somit wie folgt angeschrieben werden

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{4,k} [x_{1,k} \cos(x_{3,k}) - x_{2,k} \sin(x_{3,k})] \\ x_{2,k+1} &= x_{4,k} [x_{1,k} \sin(x_{3,k}) + x_{2,k} \cos(x_{3,k})] \\ x_{3,k+1} &= x_{3,k} + w_{3,k} \\ x_{4,k+1} &= x_{4,k} + w_{4,k} \end{aligned} \quad (3.93)$$

mit dem Zustandsrauschen $w_{3,k}$ und $w_{4,k}$. Die Frequenz ω_k stellt selbst eine Zustandsgröße dar. Die Ausgangsgleichung ergibt sich aus (3.87) und der Zustandsgrößen $x_{1,k}$.

$$y_k = x_{1,k} + v_k \quad (3.94)$$

Zusammengefasst und umgeschrieben auf die Systembeschreibung aus (3.79) ergibt sich

für die Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x}_k) = x_{1,k}$ und die Systemfunktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{4,k} [x_{1,k} \cos(x_{3,k}) - x_{2,k} \sin(x_{3,k})] \\ x_{4,k} [x_{1,k} \sin(x_{3,k}) + x_{2,k} \cos(x_{3,k})] \\ x_{3,k} \\ x_{4,k} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

mit dem Systemrauschen $\mathbf{w}_k = [0, 0, w_{3,k}, w_{4,k}]^T$ und dem skalaren Messrauschen v_k .

Das Kalman-Filter stellt eine Möglichkeit dar, die Momentanfrequenz eines verrauschten Signals zu schätzen. Es wird jedoch in dieser Arbeit in Bezug auf die Co-Simulation von rauschfreien Signalen ausgegangen, wodurch der Vorteil des Kalman-Filters im Umgang mit Rauschen wegfällt. Trotzdem wird das Kalman-Filter als eine Methode zum Schätzen der Momentanfrequenz in dieser Arbeit betrachtet.

Kapitel 4

Signalaufbereitung und Vorberechnung

Die im Vorfeld behandelten Methoden basieren auf der Analyse mittelwertfreier Signale, dies trifft allgemein jedoch nicht auf Simulationssignale und Koppelsignale zu. Im folgenden Kapitel wird auf eine allgemeine Betrachtung von Signalen und möglichen Vorberechnungen zur korrekten Identifikation der Momentanfrequenz eingegangen.

4.1 Allgemein

In der vorhergehenden Beschreibung der Methoden wurden unterschiedliche Ansätze zur Bestimmung der Momentanfrequenz erläutert. Der Ausgangspunkt der meisten Methoden ist ein frequenz- und amplitudemoduliertes Signal der Form:

$$y(t) = a(t) \cos(\omega(t)t + \varphi) \quad (4.1)$$

Der Grund für diese Annahme ist der Anwendungszweck, der meist aus der Kommunikationstechnik stammt bzw. in der Spracherkennung zu finden ist [16, 17, 24].

Für eine generelle Betrachtung von Signalen, ist dieser Ansatz nicht ausreichend. Im Allgemeinen kann nicht davon ausgehen werden, dass der Mittelwert eines Signals $y(t)$ über die Zeit Null ist. Eine Erweiterung auf

$$y(t) = a(t) \cos(\omega(t)t + \varphi) + d(t) \quad (4.2)$$

ist die logische Konsequenz. Ansätze wie DESA, HODEO und die steigungsbasierte Analyse skalieren ihr Ergebnis mit dem aktuellen Signalwert, wodurch sie das Ergebnis durch den Offset verfälschen. Es ist also erstrebenswert das Signal ohne Offset zu betrachten. Für die generelle Annahme ist es jedoch erforderlich den Offset nicht als Konstante sondern als zeitvariable Funktion zu interpretieren. Es wird für den Ansatz eines im weiteren Sinn nicht stationäres Signal gewählt [63]. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Term

$d(t)$ einem polynomialen Ansatz folgt:

$$d(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots \quad (4.3)$$

Der Ansatz nach (4.2) erschwert jedoch die Bestimmung der Momentanfrequenz. Die Auswirkungen eines Signals mit zeitvariablem Offset $d(t)$ soll an einem Beispiel veranschaulicht werden. Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf zweier sinusförmiger Signale $y(t)$ und $y_h(t)$, mit und ohne einem Term $d(t)$. Die Schwingung könnte unter anderem ein Resul-

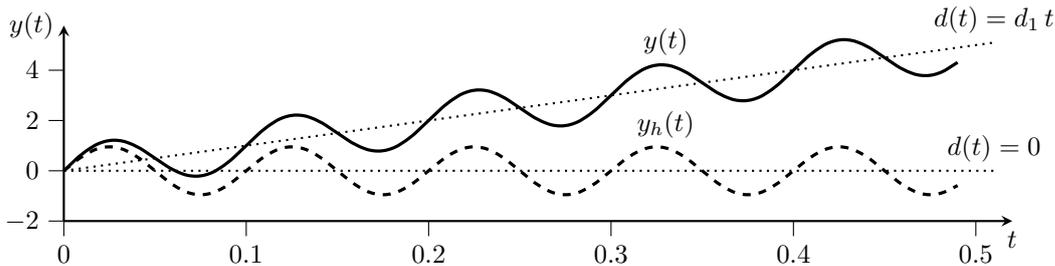


Abbildung 4.1: Sinusförmige Schwingung mit linearem Offset

tat eines einfachen Feder-Masse-Schwingers, mit einer linearen einwirkenden Kraft, wie in Abbildung 4.2, sein. Bei diesem Beispiel wird ein Feder-Masse-System mit einer Masse m und einer Federkonstante k , das mit einem Motor über eine Umlenkrolle verbunden ist, angeregt. Die von außen einwirkende Kraft u nimmt dabei linear zu. Die Lösung der

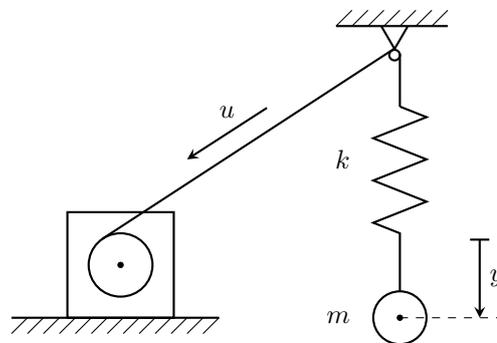


Abbildung 4.2: Feder-Masse-System über Seilwinde

Differenzialgleichung $\ddot{y}m + ky = u(t)$ des Feder-Masse-Systems in (4.4) ergibt sich aus einer Schwingung (homogener Anteil) und einer linearen Funktion (partikulärer Anteil).

$$y(t) = \underbrace{A \sin(\omega t)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{d_0 + d_1 t}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad \text{wobei} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.4)$$

Der lineare bzw. affine Offset beinhaltet keine Information bezüglich der Frequenz und somit entspricht die erwartete Frequenz gleich ω . Bei Betrachtung des Frequenzverlaufs des Signals $y(t)$, ist jedoch ein markanter Einfluss ersichtlich.

Abbildung 4.3 zeigt den Betragsgang der Fourier-Transformation der Signale mit und ohne

Offset. Während bei der reinen sinusförmigen Schwingung $y_h(t)$ ohne Offset im Spektrum nur eine Frequenz ausgeprägt ist, sind bei dem Signal $y(t)$ mit Offset sämtliche Frequenzen des Spektrums vertreten. Diese Tatsache ist nicht erstaunlich, da der lineare Offset einem

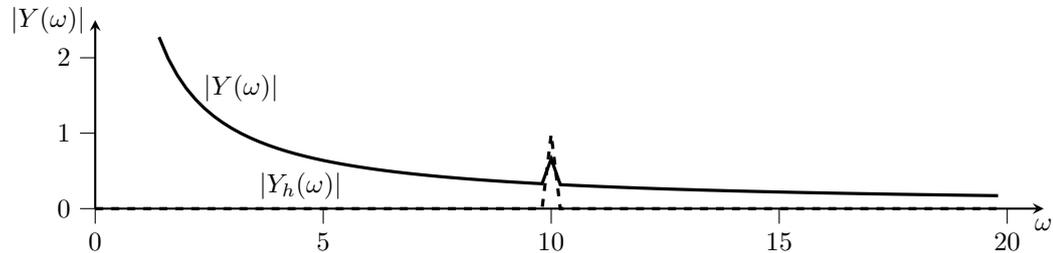


Abbildung 4.3: Betragsgang zweier Sinusschwingungen

Integrator entspricht, und die Fourier-Transformation des Offsets $d_1 t \circ \bullet \frac{d_1}{j\omega}$ folgt. Es zeigt sich, dass selbst bei einem vermeintlich einfachen Beispiel, wie dem Feder-Masse-System aus Abbildung 4.2, die Schätzung der Momentanfrequenz keine triviale Aufgabe darstellt.

Eine Lösung für diese Problematik wäre einerseits die Verwendung von geeigneten Schätzmethoden, die auf Signalen mit variablen Offset basieren oder die Zerlegung des Signals in Signalkomponenten und die anschließende Analyse derer bzw. eine im Vorfeld der Frequenzschätzung angestellte Signalaufbereitung.

In den folgenden Kapiteln werden unterschiedliche Möglichkeiten zum Analysieren der Frequenz eines nicht-stationären Signals untersucht.

4.2 Filterung

Eine naheliegende Überlegung ist die Filterung des Signals $y(t)$. Mittels eines Hochpassfilters, wäre es möglich einen konstanten Mittelwert d aus der Gleichung zu eliminieren.

$$\tilde{Y}(\omega) = H_{HP}(\omega)Y(\omega) \quad (4.5)$$

Eine Schwierigkeit entsteht einerseits jedoch bei der Wahl der richtigen Grenzfrequenz, damit das Filter keine Auswirkungen auf die zu schätzenden Frequenzen aufweist. Bei zeitvariablen Offset-Termen ist jedoch eine geeignete Filterung, ohne der Kenntnis der gewünschten Frequenz nicht möglich, da wie in Abbildung 4.3 ersichtlich ist, der Einfluss des Offsets sich über den ganzen Frequenzbereich erstreckt.

4.3 Ableitung

Durch Bildung der zeitlichen Ableitung eines Signals verschwindet der konstante Anteil des Signals. Der frequenzmodulierte Anteil bleibt bis auf die Phasenverschiebung konsistent, nur die Amplitude verändert sich zu $\tilde{a}(t) = \sqrt{\dot{a}^2(t) + (a(t)\dot{\omega}(t)t + a(t)\omega(t))^2}$.

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \frac{d}{dt}y(t) = \dot{a}(t) \cos(\omega(t)t + \varphi) - a(t)(\dot{\omega}(t)t + \omega) \sin(\omega(t)t + \varphi) \\ &= \tilde{a}(t) \cos(\omega(t)t + \tilde{\varphi})\end{aligned}\quad (4.6)$$

Das abgeleitete Signal kann als neues sinusförmiges Signal interpretiert werden. Bei Annahme eines linearen Offsets bzw. eines Offsets höherer Ordnung müsste das Signal dementsprechend öfter abgeleitet werden um sämtliche Einflüsse des Offsets zu eliminieren. Die Schwierigkeit entsteht in der Ermittlung der Häufigkeit der Ableitung.

4.4 Signalzerlegung

Eine weitere Möglichkeit bietet die in Kapitel 3.1.6 beschriebene *Empirical Mode Decomposition*. Durch die Forderung der IMF, dass die Differenz der Hüllkurve der Maxima und Minima des Signals zu jedem Zeitpunkt Null ergeben muss, sind die einzelnen Moden per Formulierung mittelwertfrei und stationär. Der Offset des Signals ist schlussendlich im Trend bzw. Residuum enthalten.

Die bisherige Betrachtung der EMD erlaubt jedoch eine Zerlegung des Signals erst am Ende der Simulation. Es existieren jedoch Ansätze, die es erlauben die EMD auch während der Laufzeit zu verwenden [35, 37, 64]. Im folgenden Abschnitt wird die online bzw. stückweise EMD näher erläutert und eine im Zuge dieser Arbeit entwickelte online Methode dargestellt.

4.4.1 Online EMD

Im Kapitel 3.1.6 wurde bereits auf die EMD auf der Grundlage von Huang eingegangen [34]. Bei dieser Betrachtung wird das gesamte zu separierende Signal verwendet, um die Moden und den Trend zu extrahieren. Dies stellt zusätzlich zur a posteriori Frequenzermittlung insbesondere bei großen Datensätzen einen immensen Rechenaufwand dar. Es ist somit naheliegend, nicht das gesamte Signal für die Analyse zu betrachten. Bei der stückweise bzw. online EMD werden nur Teile des zu untersuchenden Signals betrachtet, um die Moden und schlussendlich die Frequenzen zu bestimmen. Anders als bei der STFT, die auch einen zeitlichen Ausschnitt für die Analyse benötigt, ist das Beobachtungsfenster abhängig von der Lage der letzten Minima und Maxima des Signals, wodurch die Fensterlänge von Signal zu Signal und von Extremwert zu Extremwert unterschiedlich lang sein kann.

Analyse Fenster

Die Anzahl der zu betrachtenden Extremwerte hängt von der Art der Interpolation des Signals ab. In Kapitel 3.1.6 wurde bereits auf die Unterschiede verschiedener Möglichkeiten zur Interpolationen eingegangen. Die Verwendung der *hermiteschen kubischen Splines*

bietet aufgrund der Tatsache, dass die Interpolation im Gegensatz zu herkömmlichen Splines lokale Eigenschaften besitzt, eine Grundvoraussetzung für die Verwendung der EMD während der Laufzeit [38, 43, 64]. Durch die Verwendung der lokalen Ableitung zum Bilden der Splines beschränkt sich der Einflussbereich auf die benachbarten Stützstellen. Somit können die Splines getrennt von einander berechnet werden. Es reichen in der Regel 3 Maxima bzw. 3 Minima zum Generieren der jeweiligen Hüllkurve aus. Diese Maxima bzw. Minima definieren daraus folgend die Fensterlänge.

Die Funktionsweise der stückweisen EMD und die Veränderung des notwendigen Beobachtungsintervall soll Anhand eines Beispiels näher erläutert werden. Ausgangspunkt ist ein zu untersuchendes Signal $h^{<1,q>}(t)$, dargestellt in Abbildung 4.4 a. Im aktuellen Beobachtungsintervall von t_j bis t_{i-1} befinden sich zwei Maxima $h_{M,1}$ und $h_{M,2}$ und zwei Minima $h_{m,1}$ und $h_{m,2}$. Zum Zeitpunkt t_i wird ein neues Minima $h_{m,3}$ detektiert. Es ist nun möglich die Einhüllende zwischen $h_{m,1}$ und $h_{m,2}$ eindeutig zu bilden, da die lokale Ableitung im Punkt $h_{m,2}$ durch das neue Minima berechnet werden kann. Anschließend kann der klassische Algorithmus der EMD nach der Beschreibung in Kapitel 3.1.6 zur Berechnung des Signals von t_j bis t_i verwendet werden. Wie in Abbildung 4.4 b dargestellt wird jedoch nicht die gesamte ermittelte Mode $c(t)$ als Ergebnis herangezogen, sondern nur die Zeitspanne von t_j bis zum nächsten Extremwert (hier Maximum: $h_{M,1}$), da die Einhüllende der Maxima über den Zeitpunkt t_{j+1} hinaus nicht eindeutig beschrieben werden kann und vom zukünftigen Extremwert abhängig ist.

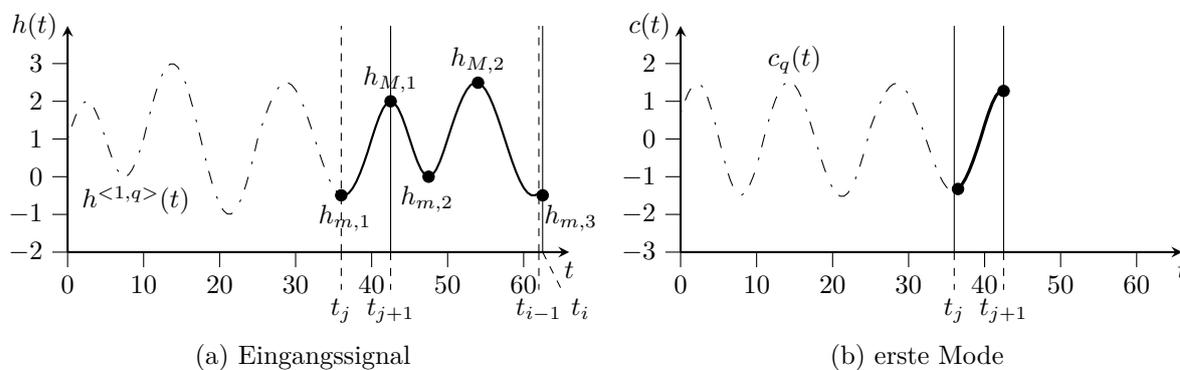


Abbildung 4.4: Änderung des Beobachtungshorizontes der online EMD bei einem neuen Extremwert: (a) aktuelles Beobachtungsintervall des Eingangssignal $y(t)$; (b) Teilresultat der ersten Mode $c(t)$

Das Beobachtungsintervall schrumpft nach der Berechnung der Mode von t_j auf t_{j+1} und wächst bis zum nächsten ermittelten Extremwert mit jeder neuen Stützstelle wieder an.

Online Randwertproblem

Abgesehen von dem reduzierten Signal und der Verwendung von hermiteschen Splines handelt es sich bei den bisherigen Betrachtung um die herkömmliche EMD aus Kapitel 3.1.6, die unabhängig von einander berechnet werden. Die unabhängige Berechnung

der einzelnen Moden führt, unter anderem durch den Einfluss der Randbedingungen auf Signale mit wenigen Extremwerten, zu Unstetigkeiten im Resultat. Zwar sind, wie in Abbildung 4.5 a dargestellt, die stückweise berechneten Teilmoden für sich stetig, jedoch sind die Übergänge zwischen den Teilmoden nicht stetig. Die Unstetigkeiten finden sich nicht nur in der berechneten Mode $c_q(t)$ sondern auch im Residuum wieder $r^{<q+1>(t)}$ (siehe Abbildung 4.5 b) und liefern bei der Berechnung der Momentanfrequenz unerwünschte hohe Frequenzen.

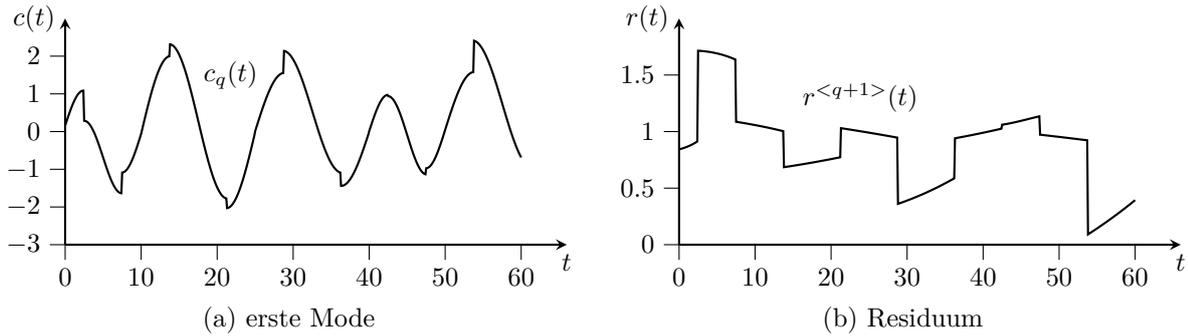


Abbildung 4.5: Stückweise EMD mit gewöhnlichen Randbedingungen (schief symmetrisch): (a) erste Mode $c(t)$; (b) Residuum nach der ersten Mode $r(t)$

Um die Stetigkeit der gesamten Teilmoden zu gewährleisten muss die EMD zum Teil modifiziert werden. Im Gegensatz zur klassischen EMD ergeben sich Unterschiede bezüglich der Randwerte. Der Verlauf der Einhüllenden auf der rechten Seite des Beobachtungsintervall ist weiterhin unbekannt und wird z.B. mittels Spiegelung der Extremwerte geschätzt, jedoch werden die Randwerte auf der linken Seite des Beobachtungsfensters durch vorangegangene bereits bekannte Extremwerte definiert. Die Verwendung der Information von bereits zurückliegenden Extremwerten für die Berechnung der Hüllkurven ist eine Notwendigkeit für die Stetigkeit des Signals. Um die Stetigkeit zu gewährleisten, muss zusätzlich das Verhalten jeder Iteration am (linken) Rand innerhalb eines Sifting-Prozesses vorgegeben werden. Da unterschiedliche Signale i. A. unterschiedliche Anzahl an Iterationsschritten mit sich führen, muss eine generelle Iterationstiefe vorgegeben werden. Dadurch kann es jedoch passieren, dass die ermittelte Mode durch eine zu klein gewählte Anzahl an Iterationen nicht den Kriterien der IMF entspricht.

Diese Problematik lässt sich umgehen, wenn das Verhalten der Einhüllenden am Rand des Beobachtungsfensters nicht über zurückliegende Extremwerte, sondern über die Eigenschaften der Einhüllenden am Rand beschrieben werden. Ausgangspunkt dieser Überlegung ist die Berechnung der Mode $c_q(t)$. Diese wird über das zu separierende Signal $r^{<q>(t)}$ und der Summe aller mittleren Einhüllenden $m^{<p,q>}$ innerhalb eines Sifting-Prozesses q , wie in (4.7), definiert. Mit der Annahme, dass das Signal $r^{<q>(t)}$ stetig ist, folgt aus der Forderung das $c_q(t)$ stetig sein soll, dass die Summe aller $m^{<p,q>(t)}$ stetig sein muss. Diese Bedingung gilt folglich auch für die Summe der Einhüllenden der Maxima $H_M(t)$ und die

Summe der Einhüllenden der Minima $H_m(t)$.

$$c_q(t) = r^{<q>}(t) - \sum_{p=1}^P m^{<p,q>}(t) = r^{<q>}(t) - \left(\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^P h_M^{<p,q>}(t)}_{H_M(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^P h_m^{<p,q>}(t)}_{H_m(t)} \right) \quad (4.7)$$

Das Beobachtungsfenster wird jeweils um die Position eines Extremwertes weitergeschoben, wodurch das Verhalten der Einhüllenden $H_M(t_j)$ und $H_m(t_j)$ durch die Berechnung der vorhergehenden Teilmode bekannt ist. Um die Stetigkeit der Mode zu gewährleisten müssen die Summen der Einhüllenden $H_M(t)$ und $H_m(t)$ an den Intervallsgrenzen t_j identisch sein. Dies kann unter anderem dadurch erreicht werden, dass im ersten Iterationsschritt $p = 1$ die Hüllkurve der Maxima $h_M^{<1,q>}(t_j) = H_M(t_j)$ und die Hüllkurve der Minima $h_m^{<1,q>}(t_j) = H_m(t_j)$ gesetzt werden. Damit besitzen die Teilmoden nach der ersten Iteration den gleichen Wert, wodurch für die weiteren Iterationsschritte $h_M(t_j)^{<p+1,q>} = 0$ und $h_m(t_j)^{<p+1,q>} = 0$ gelten muss. Die Anzahl der Iterationen innerhalb eines Sifting-Prozesses ist somit irrelevant, da die Stetigkeit der Mode nach der ersten Iteration gewährleistet ist.

Dieser Vorschlag lässt sich mithilfe von Splines einfach realisieren, indem zu den interpolierenden Extremwerten $h_{m,i}$ und $h_{M,j}$ jeweils ein zusätzlicher Extremwert $h_{m,0}$ bzw. $h_{M,0}$ vorangestellt wird. Diese besitzen ein Verhalten wie folgt:

$$h_{M,0} = \begin{cases} H_M(t_j) & , p = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h_{m,0} = \begin{cases} H_m(t_j) & , p = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

Zusätzlich muss die differentielle Stetigkeit der Mode und folglich die Ableitung der Einhüllenden an der Intervallgrenze gewährleistet werden. Dies erfolgt durch die Vorgabe der lokalen Ableitung der hermiteschen Splines. Analog zu den Werten wird die Ableitung am linken Rand wie folgt beschrieben:

$$\dot{h}_{M,0} = \begin{cases} \left. \frac{d}{dt} H_M(t) \right|_{t=t_j} & , p = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \dot{h}_{m,0} = \begin{cases} \left. \frac{d}{dt} H_m(t) \right|_{t=t_j} & , p = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

Die neu definierten Randwerte sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Im ersten Iterationsschritt $p = 1$ in Abbildung 4.6 a werden sowohl die Werte $h_{M,0}$ bzw. $h_{m,0}$ als auch die Ableitungen $\dot{h}_{M,0}$ bzw. $\dot{h}_{m,0}$ durch die Einhüllenden der vorherigen Teilmode definiert. Ab der zweiten Iteration, wie in Abbildung 4.6 b ersichtlich, werden die Werte wie auch die Ableitung der Einhüllenden auf Null gesetzt.

Abbildung 4.7 zeigt die zusammengesetzte Mode wie auch das Residuum der stückweisen EMD mit den vorgeschlagenen Randwerten. Es ist klar ersichtlich, dass trotz der stückweisen Berechnung der EMD keine Unstetigkeiten im Signal vorkommen (vgl. Abbildung 4.5).

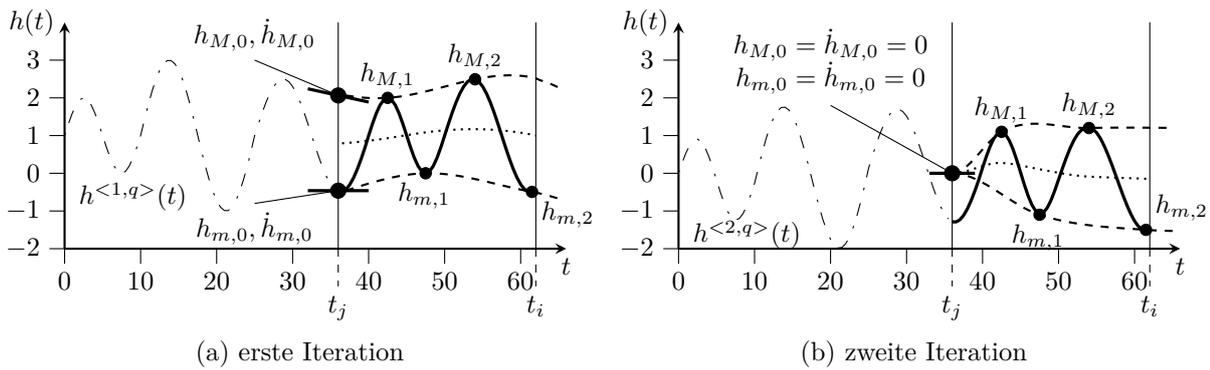


Abbildung 4.6: Randbedingung der linken Intervallgrenze: (a) erste Iteration des Sifting-Prozesses; (b) zweite Iteration des Sifting-Prozesses

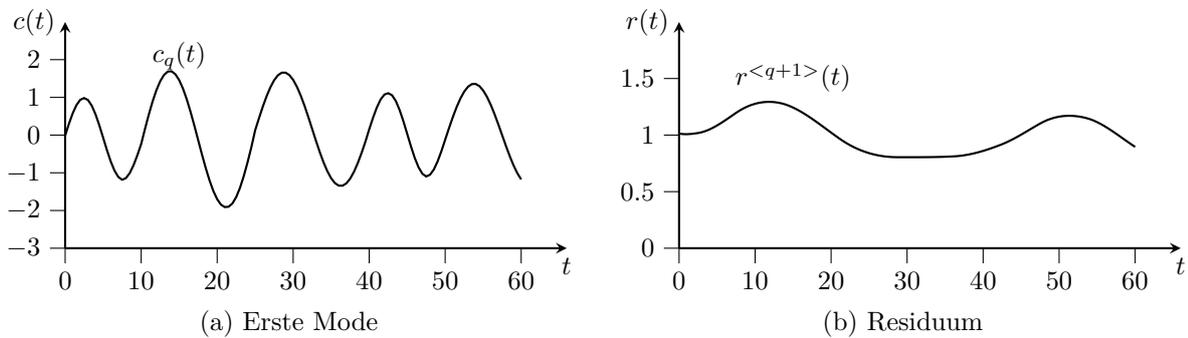


Abbildung 4.7: Stückweise EMD mit neuen Randbedingungen: (a) erste Mode; (b) Residuum nach der ersten Mode

Schwankungsbereich der EMD

Die Berechnung der EMD ist, wie im vorangegangenen Kapitel erläutert, erst nach den letzten vier Extremwerten eindeutig beschreibbar. Im folgenden Abschnitt wird kurz erläutert, wie stark die Einflüsse nachfolgender Extremwerte auf den Verlauf der Mode $c(t)$ und des Trends $r(t)$ sind.

Um dies Darzustellen wird das Signal $y(t)$ aus Abbildung 4.8 a mit einem Sprung $u = \pm 5\sigma(t_u)$ zum Zeitpunkt $t_u = 60s$ beaufschlagt. Wobei in einem ersten Schritt der Sprung positiv $y_u(t) = y(t) + 5\sigma(t_u)$ und anschließend negativ $y_l(t) = y(t) - 5\sigma(t_u)$ auf addiert wird und jeweils die erste Mode $c_l(t)$ und $c_u(t)$ bzw. der Trend $r_l(t)$ und $r_u(t)$ mit der EMD berechnet wird.

Abbildung 4.8 b zeigt den Verlauf der ersten Mode $c(t)$ mit den Verläufen der Mode $c_u(t)$ bei einem positiven Sprung und mit $c_l(t)$ bei einem negativen Sprung. Die aufgespannte Fläche der beiden Moden $c_u(t)$ und $c_l(t)$ kann als Unsicherheit des Verlaufs der Mode in Bezug auf künftige Extremwerte verstanden werden, wobei die Grenzen, da sie als Sprünge im Signal angenommen sind, als Extremfälle gelten. Es ist ersichtlich, dass die Unsicherheit selbst bei Sprüngen relativ gering ist, besonders durch die Tatsache, dass die Frequenz der Moden sich kaum unterscheiden. Diese Erkenntnis ist sofern nicht verwunderlich, da zukünftige Ereignisse keine Auswirkungen auf die aktuelle Frequenz haben sollen.

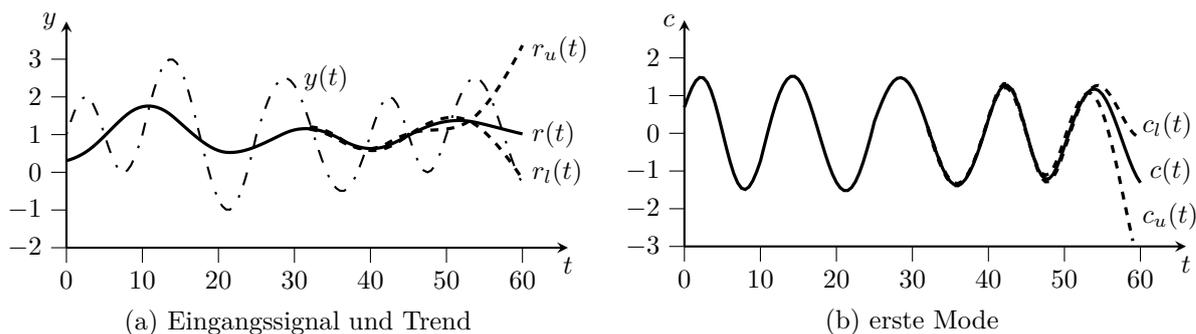


Abbildung 4.8: Schwankungsbereich der EMD bei Einfluss eines nachfolgenden Sprungs: (a) Schwankung des ersten Residuums; (b) Schwankung der ersten detektierten Mode

Im Zusammenhang der Ermittlung der Moden mittels der EMD wurden in diesem Kapitel sowohl der Begriff *online* als auch *stückweise* verwendet. Die bisherige Betrachtung beschränkte sich alleinig auf die stückweise EMD. Um die EMD auch online verwenden zu können und somit mit jeder neuen Stützstelle eine aktuelle Auskunft über die momentane Frequenz zu erhalten, wäre es möglich die EMD mit jedem neuen Wert neu zu berechnen. Der im Verhältnis hohe Berechnungsaufwand spricht jedoch dagegen. Sinnvoller wäre es den Trend als eigentliches Ergebnis der Separation zu betrachten und diesen bis zur Detektion eines neuen Extremwerts zu extrapolieren. Dadurch entsteht eine Schätzung für die Frequenz, die mit jedem Extremwert aktualisiert wird.

4.5 Erweiterung des EKF Modells

Die bisherigen Betrachtungen zur Analyse der Momentanfrequenz von nicht-stationären Signalen ging mit der Notwendigkeit von einer Verarbeitung des Signals im Vorfeld einher, wie z.B. die Signalseparation mit der EMD oder die Bildung der Ableitung des Signals. Im folgenden Abschnitt wird eine Methode ohne nötiger Vorberechnung vorgestellt. Basis für die Überlegung liefert das Modell der EKF zur Schätzung der Frequenz aus Kapitel 3.2.4. Der Ansatz wird um einen nicht-stationären Anteil erweitert, damit ist es möglich nicht-stationären Anteile des Signals mit dem Term d_k zu schätzen.

$$y_k = A_k \cos(\omega_k k + \varphi) + d_k + v_k \quad (4.10)$$

Die Zustandsgrößen sind äquivalent zu denen in Kapitel 3.2.4 mit der Erweiterung eines

zusätzlichen Zustands $x_{5,k} = d_k$.

$$\begin{aligned}
 x_{1,k} &= A_k \cos(\omega_k k + \varphi) \\
 x_{2,k} &= A_k \sin(\omega_k k + \varphi) \\
 x_{3,k} &= \omega_k \\
 x_{4,k} &= \alpha_k \\
 x_{5,k} &= d_k
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Das Zustandsmodell $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k$ ergibt mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$ somit zu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{4,k} [x_{1,k} \cos(x_{3,k}) - x_{2,k} \sin(x_{3,k})] \\ x_{4,k} [x_{1,k} \sin(x_{3,k}) + x_{2,k} \cos(x_{3,k})] \\ x_{3,k} \\ x_{4,k} \\ x_{5,k} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

wobei die Ausgangsgleichung $y_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k$ über

$$h(\mathbf{x}_k) = x_{1,k} + x_{5,k} \tag{4.13}$$

beschrieben wird. Die Größen \mathbf{w}_k und v_k beschreiben wie im Kapitel 3.2.4 das Zustandsrauschen und das Messrauschen des Modells. Mit der Erweiterung des Modells um den Faktor d_k ist es möglich, den Verlauf des Trends des Signals zu schätzen und somit die Frequenz ohne dessen Einfluss zu ermitteln.

Mit den betrachteten Methoden, wie der Signalzerlegung mit Hilfe der EMD oder mittels EKF mit einer Erweiterung des Modells um einen Offset-Term, ist es somit möglich nichtstationäre Signale auf ihre momentane Frequenz zu untersuchen.

Kapitel 5

Anwendungsbeispiele

Im folgenden Kapitel werden die Funktionalität und die Eigenschaften der Methoden zum Schätzen der Momentanfrequenz anhand von einigen Beispielen gezeigt. Zu Beginn wird das Verhalten an einer stationären sinusförmigen Schwingung mit unterschiedlichen Frequenzen dargestellt, zu diesem Zweck wird die Frequenz als konstant und als linear bzw. quadratisch wachsend mit der Zeit angenommen.

An einem zweiten Beispiel wird das Verhalten der Methoden an einem Signal mit zwei Schwingungen untersucht. Zusätzlich zum eigentlichen Signal wird die modulierte Schwingung nach einer Signalaufbereitung untersucht, dazu wird zum einen das Signal abgeleitet und zum anderen wird die erste Mode der EMD betrachtet.

Im dritten Beispiel wird das Verhalten einer nicht-stationären Schwingung untersucht, dabei handelt es sich um eine sinusförmige Schwingung mit konstanter Frequenz die einem linear steigendem Trend überlagert ist.

In einem weiteren Beispiel wird die Auswirkungen der Wahl der Koppelschrittweite bei der Co-Simulation dargestellt. Hierzu wird ein Standardregelkreis in zwei Teilsysteme aufgeteilt und mittels Co-Simulation gekoppelt. Mittels der Frequenzschätzung wird die günstige Wahl der Koppelschrittweite evaluiert.

Für die betrachteten Beispiele werden die folgenden Methoden zur Analyse der Momentanfrequenz verwendet:

- Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT)
- Wavelet-Transformation (WT)
- Analyse der Nulldurchgänge (ZC)
- Hilbert-Transformation bzw. Phasendifferenz (HT)
- Steigungsbasierte Analyse (SB)
- Diskreter Energieoperator (DESA-1a)
- Auto-regressive Frequenzschätzung (AR)
- Frequenzschätzung mittels extended Kalman-Filter (EKF)

5.1 Schwingung mit unterschiedlichen Frequenzen

Im ersten Beispiel werden die Eigenschaften der einzelnen Methoden zum Schätzen der Momentanfrequenz an einem stationären sinusförmigen Signal untersucht. Dabei wird zunächst die Frequenz konstant angenommen. Weiters wird eine linear steigende Frequenz betrachtet und abschließend steigt die Frequenz der sinusförmigen Schwingung quadratisch mit der Zeit an.

Ausgangspunkt für die Untersuchungen bildet eine sinusförmige Schwingung $y(t)$ der Form

$$y(t) = \sin \left(\int_0^t \omega(\tau) d\tau \right), \quad (5.1)$$

wobei das Argument der Schwingung dem Integral der Momentanfrequenz $\omega(t)$ über die Zeit entspricht. Dabei werden für die Frequenz unterschiedliche Verhalten definiert:

- Schwingung mit konstanter Frequenz $\omega(t < 50 \text{ s}) = 0.5 \text{ rad/s}$ und zusätzlichem Frequenzsprung auf $\omega(t > 50 \text{ s}) = 1.5 \text{ rad/s}$.
- Schwingung mit linear steigender Frequenz $\omega(t) = 0.5 + 1.5/100 t$.
- Schwingung mit quadratisch steigender Frequenz $\omega(t) = 0.5 + 1.5/(100)^2 t^2$.

Die Signale werden über einen Zeitraum von $t = 0 \dots 100 \text{ s}$ betrachtet und besitzen eine äquidistante Abtastschrittweite von $T_a = 20 \text{ ms}$. Die Verläufe der Signale sind in Abbildung 5.1 dargestellt. In Abbildung 5.1 a ist die Schwingung mit konstanter Frequenz von $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ aufgetragen, bei $t = 50 \text{ s}$ springt die Frequenz auf $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$. Abbildung 5.1 b zeigt einen sinusförmigen Verlauf mit linear ansteigender Frequenz. Dabei besitzt die Schwingung bei $t = 0 \text{ s}$ eine Frequenz von $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ und steigt bis zu $t = 100 \text{ s}$ auf $\omega = 2 \text{ rad/s}$ an. Analog dazu beginnt die Schwingung mit quadratisch steigender Frequenz in Abbildung 5.1 c bei $t = 0 \text{ s}$ mit $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ und endet bei $t = 100 \text{ s}$ mit einer Frequenz von $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

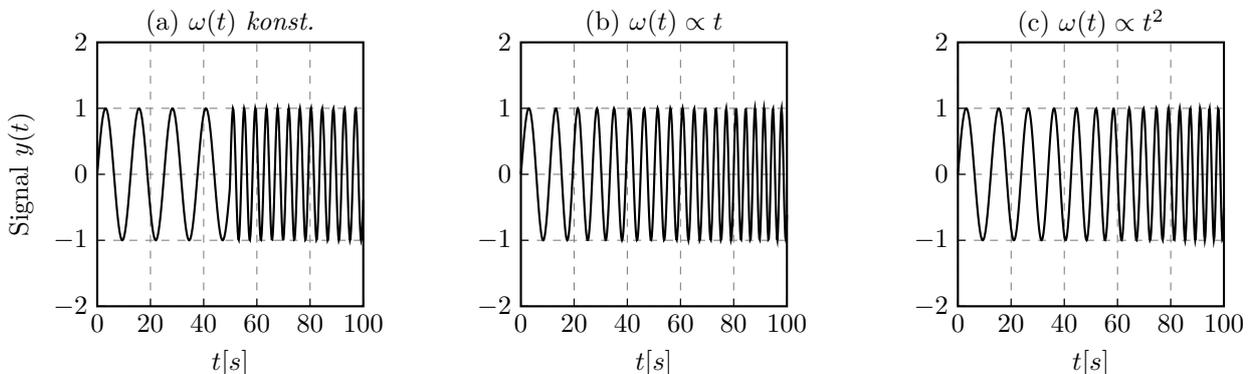


Abb. 5.1: Verlauf eines stationären Sinussignals mit konstanter Amplitude: (a) konstante Frequenz und Frequenzsprung; (b) linear steigende Frequenz; (c) quadratisch steigende Frequenz

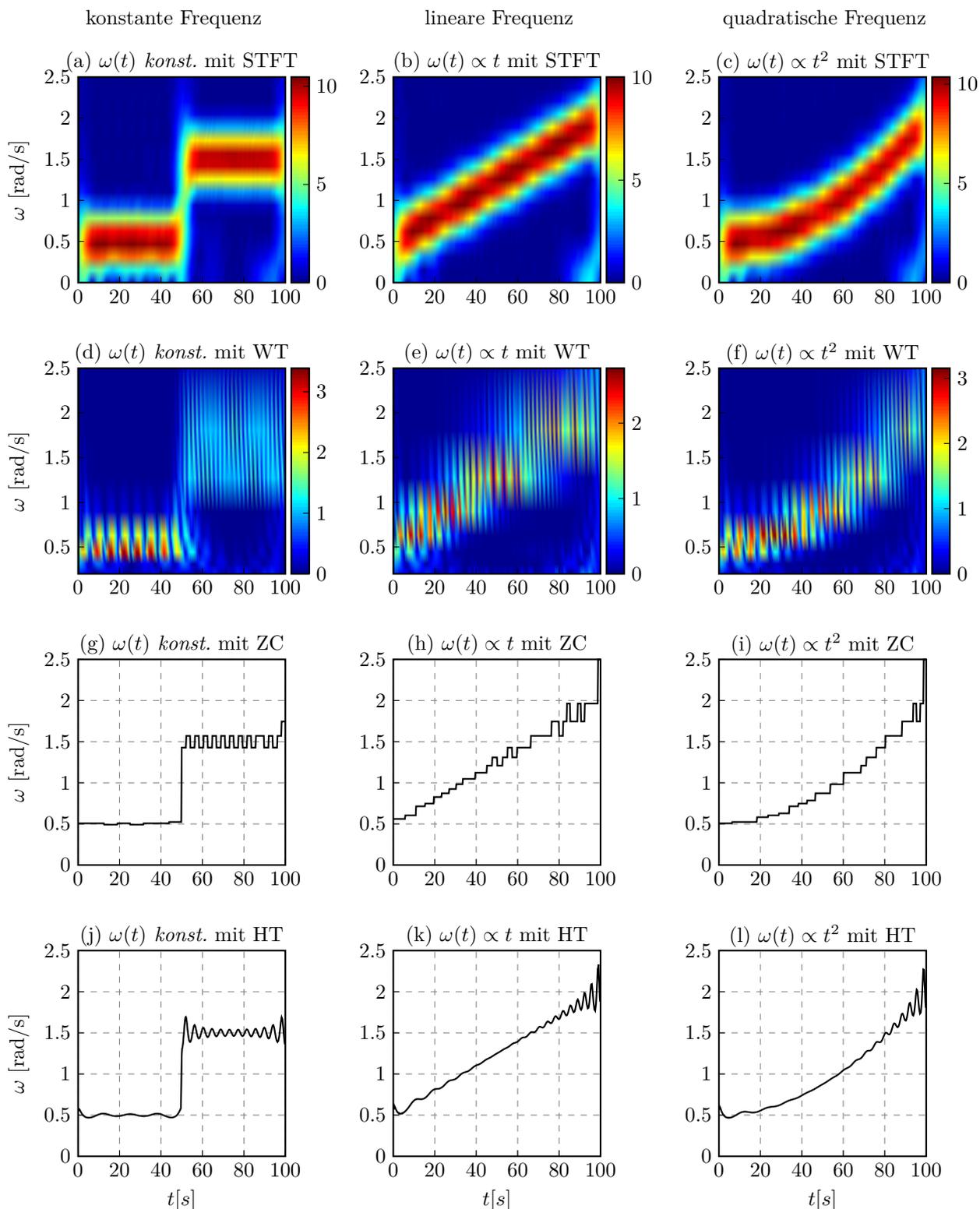


Abb. 5.2: Offline Frequenzschätzung einer Schwingung mit verschiedenen Frequenzverhalten: (links) konstante Frequenz; (Mitte) linear steigende Frequenz; (rechts) quadratisch steigende Frequenz; (a-c) Kurzzeit-Fourier-Transformation; (d-f) Wavelet-Transformation; (g-i) Analyse der Nulldurchgänge; (j-l) Hilbert-Transformation

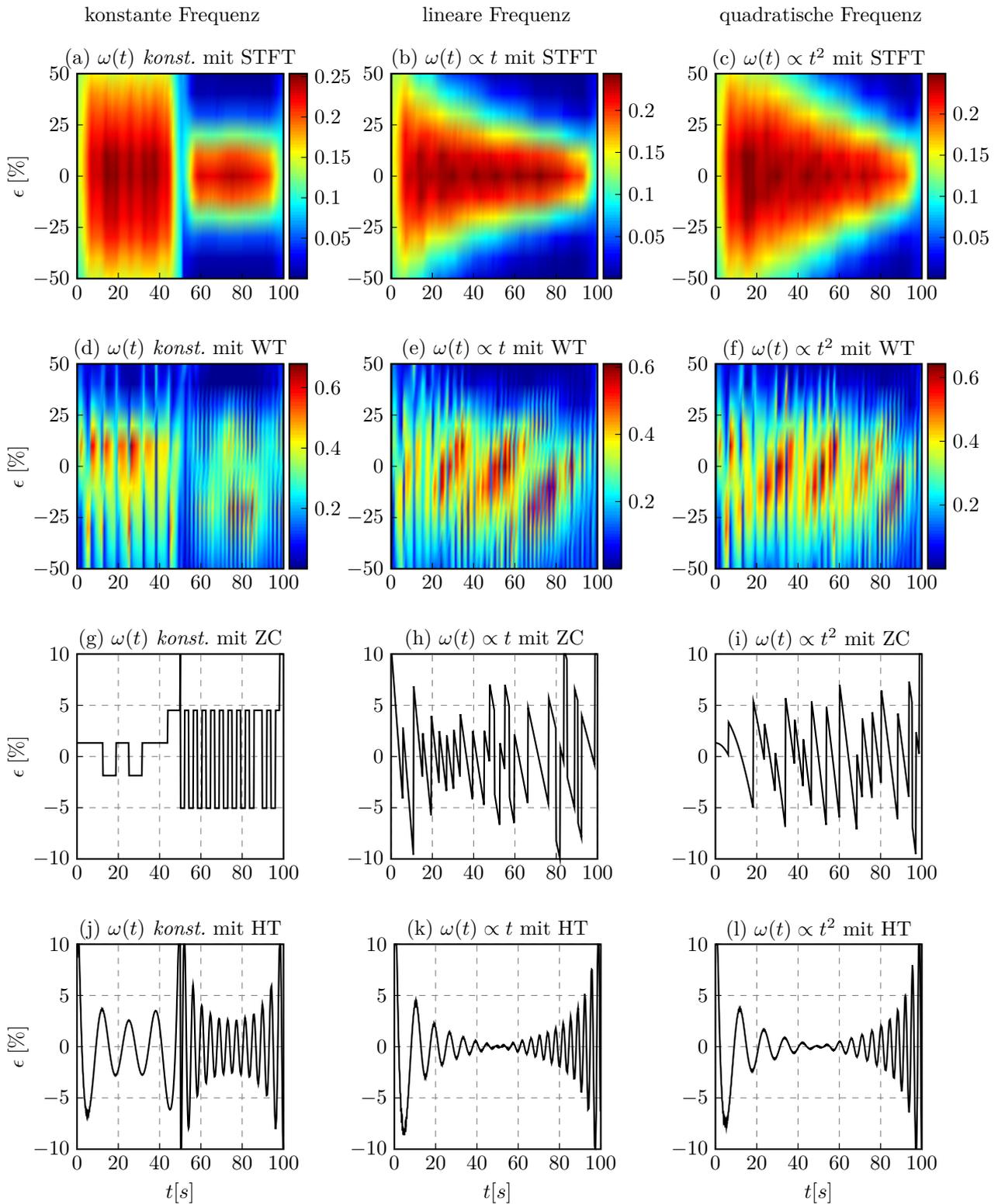


Abb. 5.3: Relativer Fehler der offline Frequenzschätzungen an einer Schwingung mit verschiedenen Frequenzverhalten: (links) konstante Frequenz; (Mitte) linear steigende Frequenz; (rechts) quadratisch steigende Frequenz; (a-c) Kurzzeit-Fourier-Transformation; (d-f) Wavelet-Transformation; (g-i) Analyse der Nulldurchgänge; (j-l) Hilbert-Transformation

Abbildung 5.2 und Abbildung 5.4 zeigen die Ergebnisse der Frequenzschätzung an dem Beispiel der Sinusschwingungen mit unterschiedlichen Frequenzverhalten, wobei in Abbildung 5.2 die offline Verfahren gezeigt werden und in Abbildung 5.4 die online Methoden zur Momentanfrequenzschätzung aufgetragen sind. Jede Zeile der Abbildungen stellt die Ergebnisse eines Frequenzschätzverfahren an den Beispielen in Abbildung 5.1 dar.

Die relativen Fehler $\epsilon(t)$ der Frequenzschätzmethoden sind in Abbildung 5.3 und Abbildung 5.5 dargestellt. Wobei in Abbildung 5.3 die relativen Schätzfehler der offline Schätzverfahren aus Abbildung 5.2 aufgetragen sind. Abbildung 5.5 zeigt die relativen Schätzfehler der online Verfahren aus Abbildung 5.5. Der relative Fehler ergibt sich im allgemeinen als

$$\epsilon(t) = \frac{\omega_s(t) - \omega(t)}{\omega_s(t)} 100\% \quad (5.2)$$

wobei $\omega_s(t)$ die erwartete Frequenz darstellt und $\omega(t)$ der geschätzten Frequenz entspricht. Bei den klassischen Analyseverfahren STFT und Wavelet-Transformation ist im Gegensatz zu den restlichen Verfahren der relative Fehler in Oberflächendiagramme aufgetragen, wobei die Farbe (Intensität) ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des relativen Fehlers ist.

Die ersten drei Grafiken in Abbildung 5.2 a - c stellen die Periodogramme der Kurzzeit-Fourier-Transformation dar. Es sind die Frequenzverläufe der drei Beispiele ersichtlich bzw. erahnbar. Die nicht eindeutige Zuordnung zwischen der Frequenz und dessen zeitlichen Auftretens aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation ist deutlich zu erkennen. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit des relativen Fehlers in Abbildung 5.3 a - c ist zu erkennen, dass bei hoher Frequenz der Bereich des relativen Fehlers geringer wird.

Analog dazu stellen die Abbildung 5.2 d - 5.2 f die Analyse der Frequenz mittels der Wavelet-Transformation in Skalogrammen dar. Wie auch bei der STFT ist ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Frequenz und dessen zeitlichen Auftretens nicht möglich.

Andere Schätzmethoden, wie z.B. die Analyse der Nulldurchgänge in den Abbildungen 5.2 g bis 5.2 i, ermöglichen eine definitive und strikte Zuordnung der Frequenz und der Zeit. Charakteristisch bei dieser Methode sind die rechteckigen Sprünge, die aufgrund der nicht eindeutigen Lokalisation der Nulldurchgänge auftreten. Bei der Analyse der Nulldurchgänge wird, wie in Kapitel 3.1.5 erläutert, die Dauer zwischen zwei Nulldurchgängen für die Berechnung der Frequenz herangezogen. Da bei diskreten Eingangsfolgen die Nulldurchgänge in der Regel nicht mit der Abtastzeit einhergehen, ist das zeitliche Auftreten der Nulldurchgänge nicht eindeutig zuweisbar. Dadurch schwankt das Ergebnis um die tatsächliche Frequenz. Die Höhe des Schwankung ist unter anderem von der Abtastfrequenz und von der Signalfrequenz abhängig. Dieser Effekt wird bei steigender Frequenz größer. Grund dafür ist die im Gegensatz zu Frequenz gleichbleibende Ungenauigkeit ϵ des Nulldurchgangs. Erweitert man die Gleichung (3.21) aus Kapitel 3.1.5 um die

Ungenauigkeit $\epsilon \leq 2\pi f_A$ ergibt sich für die Frequenz

$$\omega(t) = \frac{\pi}{T_z} \pm \epsilon = \frac{\pi}{T_z} \pm 2\pi f_A. \quad (5.3)$$

Mit steigender Frequenz bzw. sinkender Periodendauer und somit sinkendem T_z wirkt sich die Ungenauigkeit immer mehr aus. Dies ist beim relativen Fehler $\epsilon(t)$ in Abbildung 5.3 d gut zuerkennen. Bei einer konstanten Frequenz von 0.5 rad/s liegt die geschätzte Frequenz im Bereich von $\pm 1 \%$ um die erwartete Frequenz, jedoch liegt die Ungenauigkeit ϵ bei ca. $\pm 5 \%$ bei einer Frequenz von $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$.

In der letzten Zeile in Abbildung 5.2 ist die Frequenzschätzung mit Hilfe der Hilbert-Transformation dargestellt. Im Speziellen zeigt die Abbildung 5.2j-1 die Ergebnisse der Phasendifferenz (forward finite difference (FFD)) aus Kapitel 3.1.4. Die Schwingungen am Anfang bzw. am Ende der Verläufe ergeben sich durch das zeitlich limitierten Beobachtungsfenster.

Der im Kapitel 3.1.5 besprochene Zusammenhang zwischen der Analyse der Nulldurchgänge und der Phasendifferenz, wonach die Analyse der Nulldurchgänge als Mittelwert über eine halbe Periode der FFD interpretiert werden kann, ist im Vergleich der Ergebnisse ersichtlich. Dies ist insbesondere am Rand der Simulationen, wie auch beim Sprung der Frequenz in Abbildung 5.2g bzw. Abbildung 5.2j erkennbar.

In Abbildung 5.4a-c sind die Ergebnisse mit Hilfe der steigungsbasierten Analyse dargestellt. Während bei konstanter Frequenz die Schätzung ein solides Ergebnis liefert, zeigt die Methode bei veränderlicher Frequenz Singularitäten. Dies ist aufgrund des in Kapitel 3.2.1 beschriebenen Schätzfehlers bei veränderlicher Frequenz und Amplitude. Der Schätzfehler verhält sich proportional dem Tangens der Phase des Signals, wodurch die Schätzung sowohl hohe positive wie negative Fehler aufweist. Dies ist besonders deutlich bei den relativen Fehlern in Abbildung 5.5a-c erkennbar. Bei konstanter Frequenz (und Amplitude) wird die Frequenz gut geschätzt, im Gegensatz ergibt sich bei linear und quadratisch steigender Frequenz ein Fehler von mehr als $\pm 10 \%$.

Die Schätzung mittels Teager-Kaiser Energieoperator bzw. mittels DESA ist in Abbildung 5.4d-f darstellt. Wie auch bei der steigungsbasierte Analyse liefert die Schätzung der DESA bei konstant bleibender Frequenz ein solides Ergebnis. Bei linear bzw. quadratische steigender Frequenz sind geringe Schwankungen der Schätzung ersichtlich, diese werden ebenso durch die veränderliche Frequenz verursacht. Im Gegensatz zur steigungsbasierten Analyse ist die Größe des Fehlers beschränkt und im Verhältnis zur Frequenz klein und liegen wie in Abbildung 5.5e und f unter 2% .

In Abbildung 5.4g-i sind die resultierenden Frequenzen mittels eines AR-Modells dargestellt. Wie auch beim vorhergehenden Verfahren sind die Frequenzen klar ersichtlich. Die

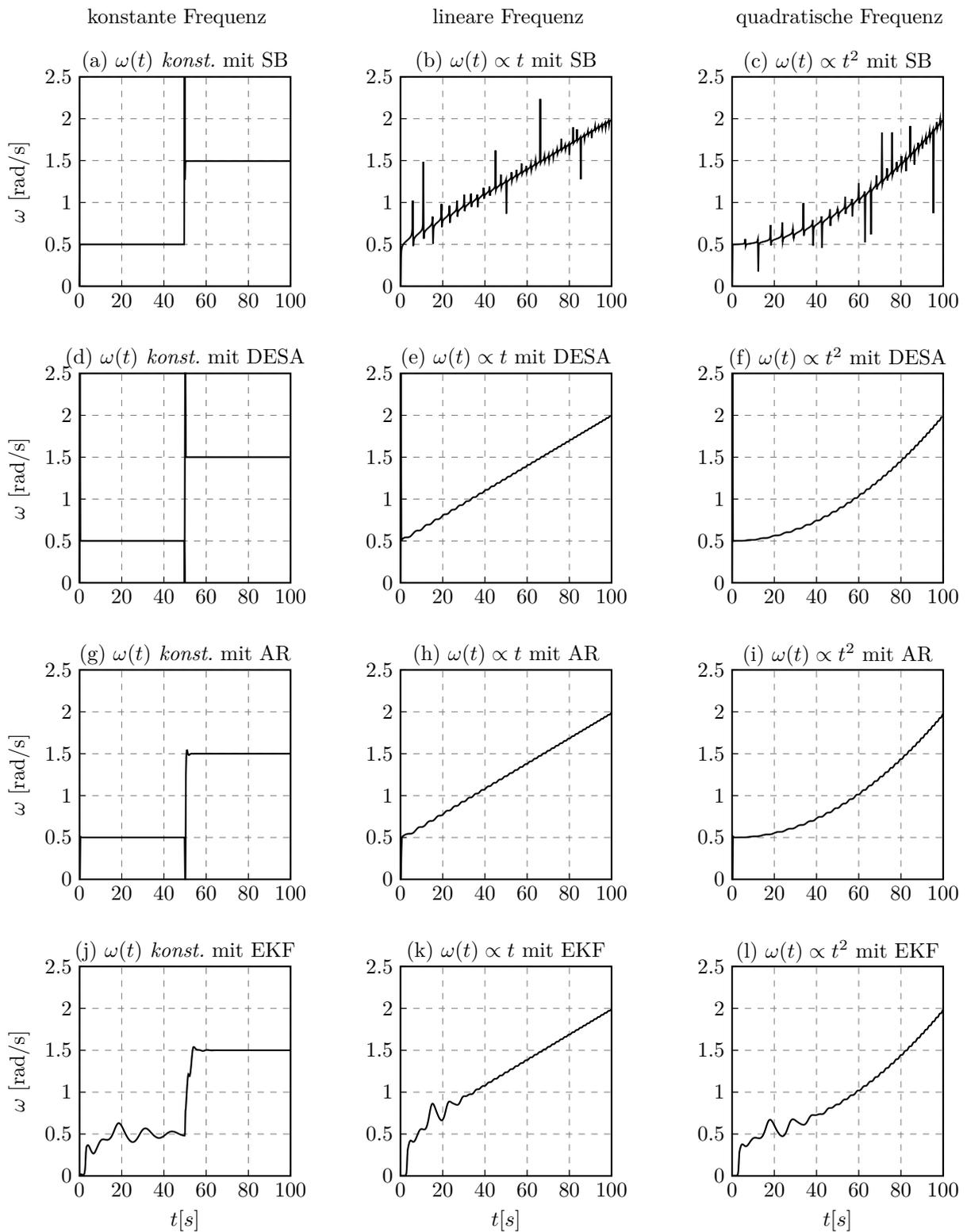


Abb. 5.4: Online Frequenzschätzung einer Schwingung mit verschiedenen Frequenzverhalten: (links) konstante Frequenz; (Mitte) linear steigende Frequenz; (rechts) quadratisch steigende Frequenz; (a-c) Steigungsbasierte Analyse (SB); (d-f) Energieoperator (DESA-1a); (g-i) Auto-regressive Frequenzschätzung (AR); (j-l) Kalman-Filter (EKF)

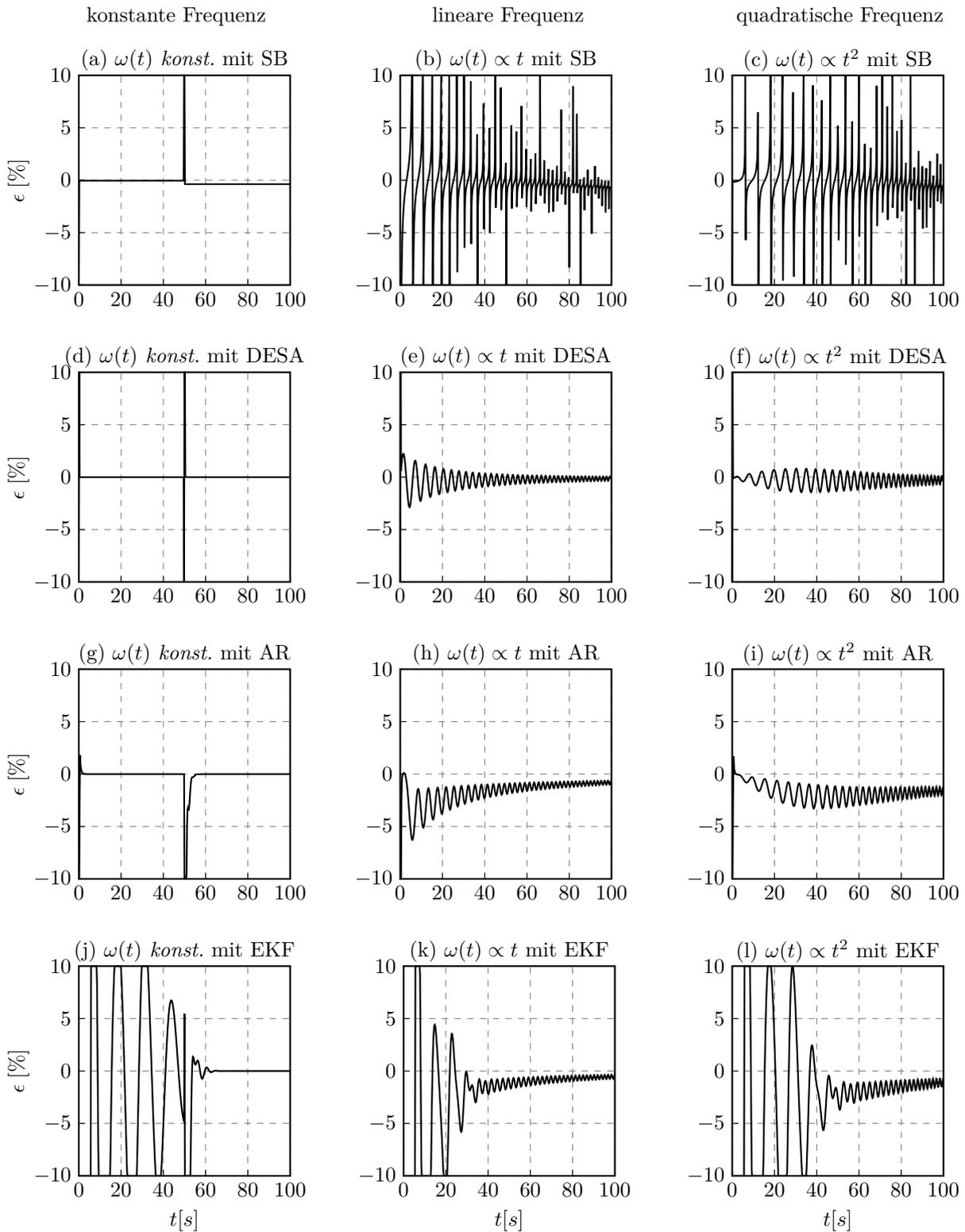


Abb. 5.5: Relativer Fehler der online Frequenzschätzungen an einer Schwingung mit verschiedenen Frequenzverhalten: (links) konstante Frequenz; (Mitte) linear steigende Frequenz; (rechts) quadratisch steigende Frequenz; (a-c) Steigungsbasierte Analyse (SB); (d-f) Energieoperator (DESA-1a); (g-i) Auto-regressive Frequenzschätzung (AR); (j-l) Kalman-Filter (EKF)

Ergebnisse zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Resultate der DESA.

Die Ergebnisse der Frequenzschätzung auf Basis eines erweiterten Kalman-Filters (EKF) sind in Abbildung 5.4 j-1 aufgetragen. Die Ergebnisse weisen zu Beginn der Simulation Unsicherheiten auf, dies liegt daran, dass eine gewissen Anzahl von Stützstellen vorhanden sein muss, um die Frequenz zu bestimmen.

In der ersten Spalte der relativen Fehler der online Verfahren in Abbildung 5.5 sowie bei der Analyse der Nulldurchgänge in Abbildung 5.3 g und der Hilbert-Transformation in Abbildung 5.3 j ist jeweils ein großer Fehler bei $t = 50 \text{ s}$ ersichtlich. Zu diesem Zeitpunkt wird zwischen der Frequenz $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ und $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$ umgeschaltet. Das Signal $y(t)$ ist an dieser Stelle zwar stetig aber nicht stetig differenzierbar, wodurch eine hohe Frequenz resultiert.

Die erwarteten Frequenzen sind bei den unterschiedlichen Konzepten und Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz in den Abbildungen 5.2 und 5.4 erkennbar. Die online Verfahren zeigen mit Ausnahme der steigungsbasierten Analyse einen geringen relativen Fehler, der nach eine bestimmten Einschwingphase kleiner $\pm 5\%$ beträgt.

5.2 Schwingung mit zwei Frequenzen

In einem zweiten Beispiel soll das Verhalten der Schätzmethoden an einem Signal mit mehreren Frequenzkomponenten untersucht werden. Das betrachtete Signal besteht aus zwei Sinusschwingungen mit gleicher Amplitude aber unterschiedlichen, konstanten Frequenzen $\omega_1 = \frac{21}{100} 2\pi = 1.31 \text{ rad/s}$ und $\omega_2 = \frac{2}{100} 2\pi = 0.126 \text{ rad/s}$.

$$y(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) \quad (5.4)$$

Für die Berechnung der Momentanfrequenz wird nicht nur das Signal $y(t)$ herangezogen, sondern es wird zusätzlich die erste Ableitung des Signals $\dot{y}(t)$ und die erste Mode des Signals $c_1(t)$ betrachtet. Es werden in diesem Beispiel somit drei Signale auf ihre Frequenz untersucht:

- das original Signals $y(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$
- die ersten Ableitung $\dot{y}(t) = \omega_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_2 \cos(\omega_2 t)$
- die erste Mode $c_1(t)$ des Signals $y(t)$

Die drei zu analysierenden Signale sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Abbildung 5.6 a zeigt das original Signal $y(t)$. Die Ableitung des Signals $\dot{y}(t)$ ist in Abbildung 5.6 b dargestellt. Im Gegensatz zum original Signal $y(t)$, bei dem die Amplituden der beiden Schwingungen gleich groß sind, sind die Amplituden des abgeleiteten Signals mit deren Frequenz gewichtet. Dieses Signal kann als Amplituden und Frequenz Modulation betrachtet werden, wobei sowohl die Frequenz als auch die Amplituden in einem kleinem Bereich schwanken. In Abbildung 5.6 c ist die erste Mode $c_1(t)$ mittels EMD dargestellt. Die extrahierte Mode entspricht der Schwingung mit der Frequenz ω_1 .

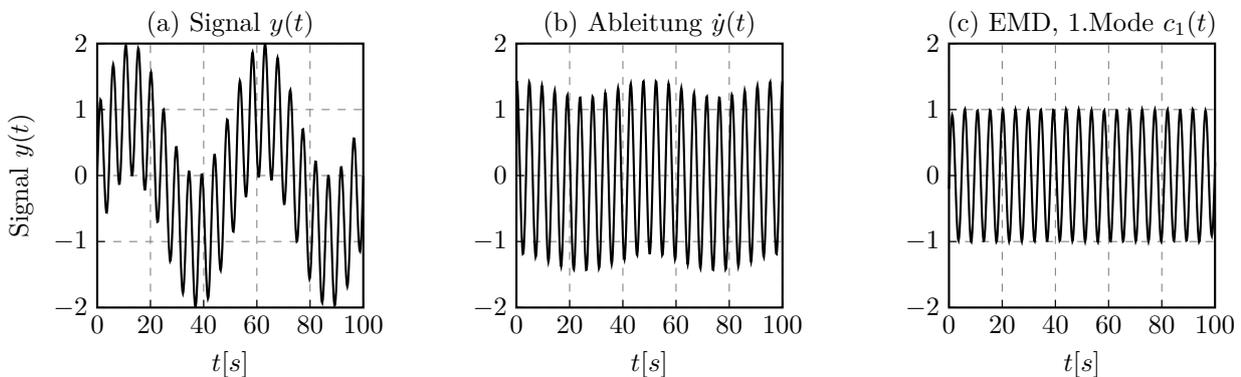


Abb. 5.6: Summe zweier Sinusschwingungen: (a) ursprüngliches Signal; (b) erste Ableitung; (c) erste Mode mittels EMD

Die Resultate der Frequenzschätzung sind in den Abbildung 5.7 und Abbildung 5.9 dargestellt, wobei Abbildung 5.7 die Ergebnisse der offline Verfahren und Abbildung 5.9 die

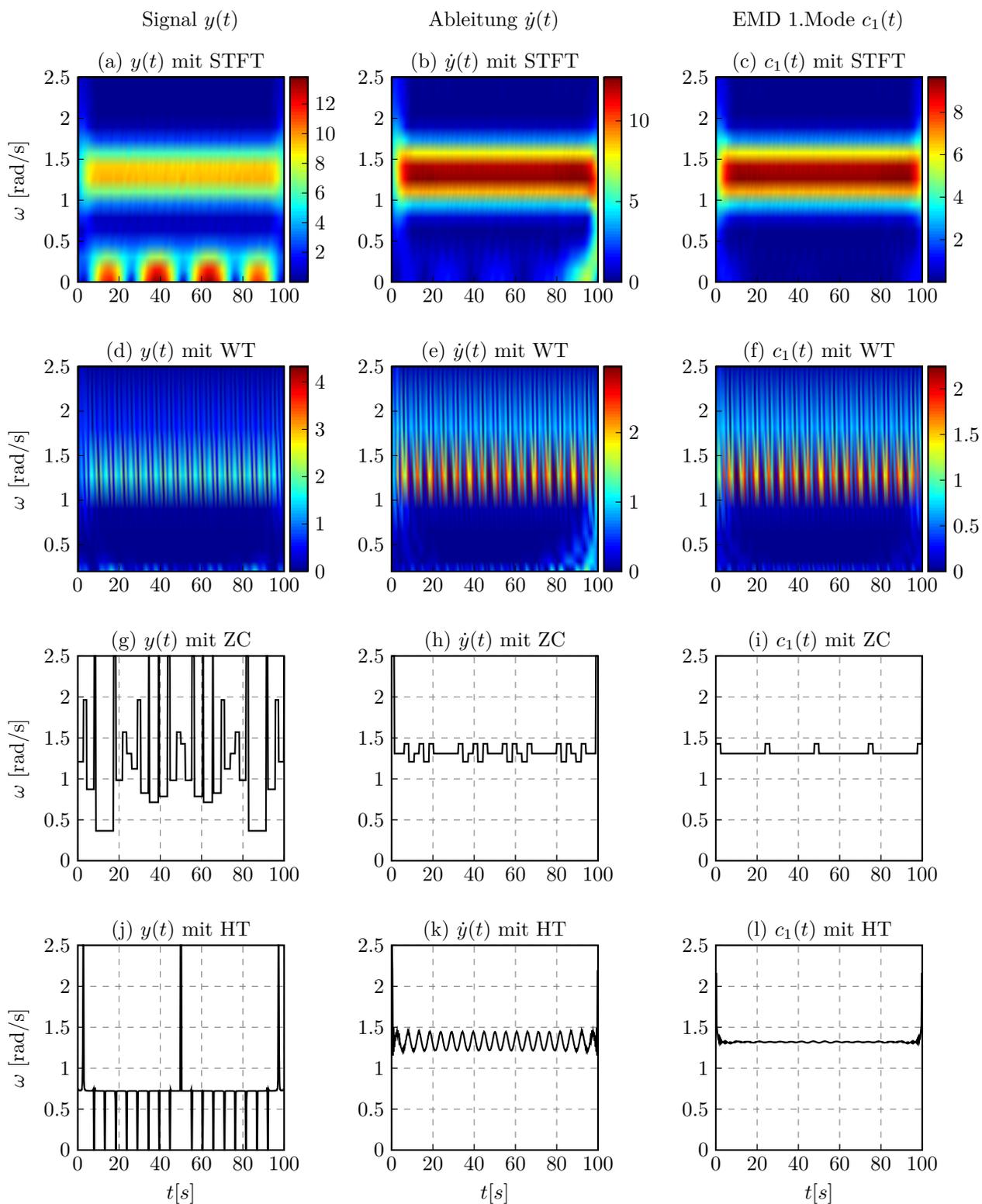


Abb. 5.7: Offline Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Kurzzeit-Fourier-Transformation; (d-f) Wavelet-Transformation; (g-i) Analyse der Nulldurchgänge; (j-l) Hilbert-Transformation

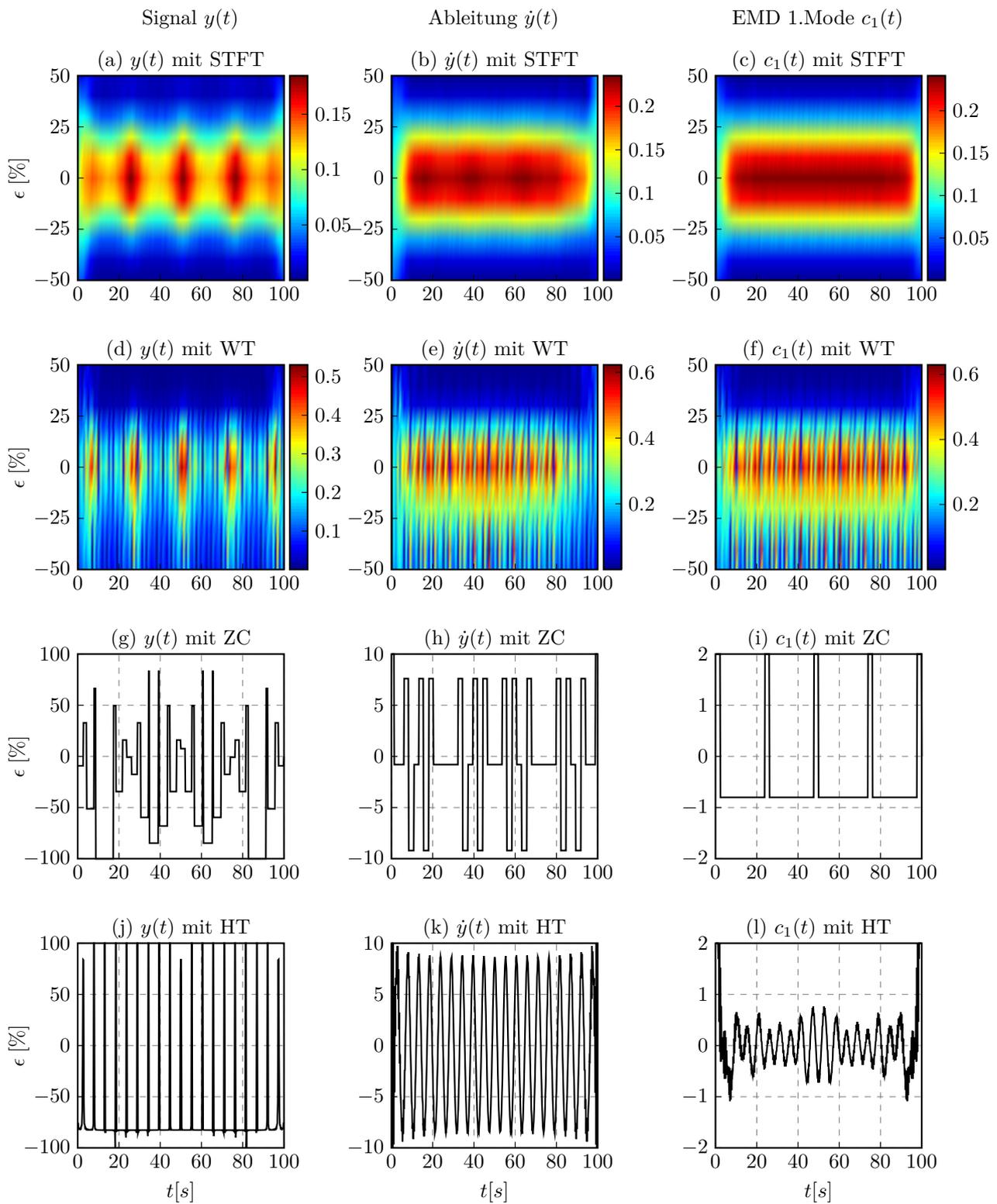


Abb. 5.8: Relativer Fehler der offline Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Kurzzeit-Fourier-Transformation; (d-f) Wavelet-Transformation; (g-i) Analyse der Nulldurchgänge; (j-l) Hilbert-Transformation

Ergebnisse der online Verfahren zeigt.

Abbildung 5.8 und Abbildung 5.10 zeigen den relativen Fehler der einzelnen Schätzmethode, wobei in Abbildung 5.8 die relativen Fehler der offline Verfahren aus Abbildung 5.7 dargestellt sind und Abbildung 5.10 die relativen Fehler der online Methoden aus Abbildung 5.9 zeigt. Als erwartende Frequenz ω_s wurde die größer der beiden Frequenzen herangezogen, es gilt somit $\omega_s = \omega_1 = 1.31 \text{ rad/s}$.

In der ersten Spalte in Abbildung 5.7 sind die Resultate der offline Verfahren des original Signals $y(t)$ dargestellt. Das analysierte Signal $y(t)$ besitzt zwei Frequenzen $\omega_1 = 1.31 \text{ rad/s}$ und $\omega_2 = 0.126 \text{ rad/s}$. Bei der STFT in Abbildung 5.7 a und der Wavelet-Transformation in Abbildung 5.7 d ist zumindest die höhere Frequenzkomponente ersichtlich. Auch die kleiner Frequenzkomponente lässt sich in beiden Fällen zumindest erahnen.

Das Ergebnis der Analyse der Nulldurchgänge ist in Abbildung 5.7 g dargestellt. Da dieses Verfahren die Nulldurchgänge als frequenzbestimmende Größe heranzieht, sind überlagerte Signale mit unterschiedlichen Frequenz, wie in Abbildung 5.6 a, nicht korrekt analysierbar. Dies zeigt sich auch im relativen Fehler im Bereich $\pm 70\%$ in Abbildung 5.8 g. Auch Verfahren auf Basis der Hilbert-Transformation, wie in Abbildung 5.7 j, zeigen Schwierigkeiten mit mehreren Frequenzen. Bei Signalen mit gleicher Amplitude aber unterschiedlicher Frequenz wird, wie in Kapitel 2.2 gezeigt, die mittlere Frequenz $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 0.718 \text{ rad/s}$ ermittelt.

Ähnlich zu den beiden Verfahren, zeigen auch die online Verfahren in der linken Spalte in Abbildung 5.9 Schwierigkeiten mit Signalen mit mehreren Frequenzen. Grund dafür ist zumeist der Trend des Signals. Bezieht man das Signal auf die Frequenz ω_1 ist das Signal nicht mittelwertfrei und somit auf die meisten Methoden nicht anwendbar.

Bessere Ergebnisse werden jedoch erzielt wenn das Signal im Vorfeld aufbereitet wird. Die mittlere Spalte in Abbildung 5.7 und Abbildung 5.9 zeigen die Resultate der Schätzmethoden nach Ableitung des Signals $y(t)$. Der relative Fehler ϵ der offline Methoden in der mittleren Spalte der Abbildung 5.8 reduzierte sich auf einen Bereich von $\pm 10\%$. Bei den online Verfahren liegt der relative Schätzfehler ϵ im Bereich $\pm 5\%$ (siehe mittleren Spalte Abbildung 5.10). Ausnahme ist steigungsbasierte Analyse in Abbildung 5.9 b, da der Schätzfehler stark von Änderungen der Amplitude abhängig ist.

Noch bessere Ergebnisse können erzielt werden wenn das Signal $y(t)$ mittels EMD in seine Signalkomponenten zerlegt wird. Wie in Abbildung 5.6 c enthält die erste Mode nur ein Verhalten der höheren Frequenzkomponente. Dies zeigt sich auch in den Resultaten in der rechten Spalte der Abbildung 5.7 und Abbildung 5.9. Der relative Fehler der online Analyseverfahren in der rechten Spalte der Abbildung 5.10 sowie bei der Hilbert-Transformation in Abbildung 5.8 l ist deutlich unter $\pm 1\%$.

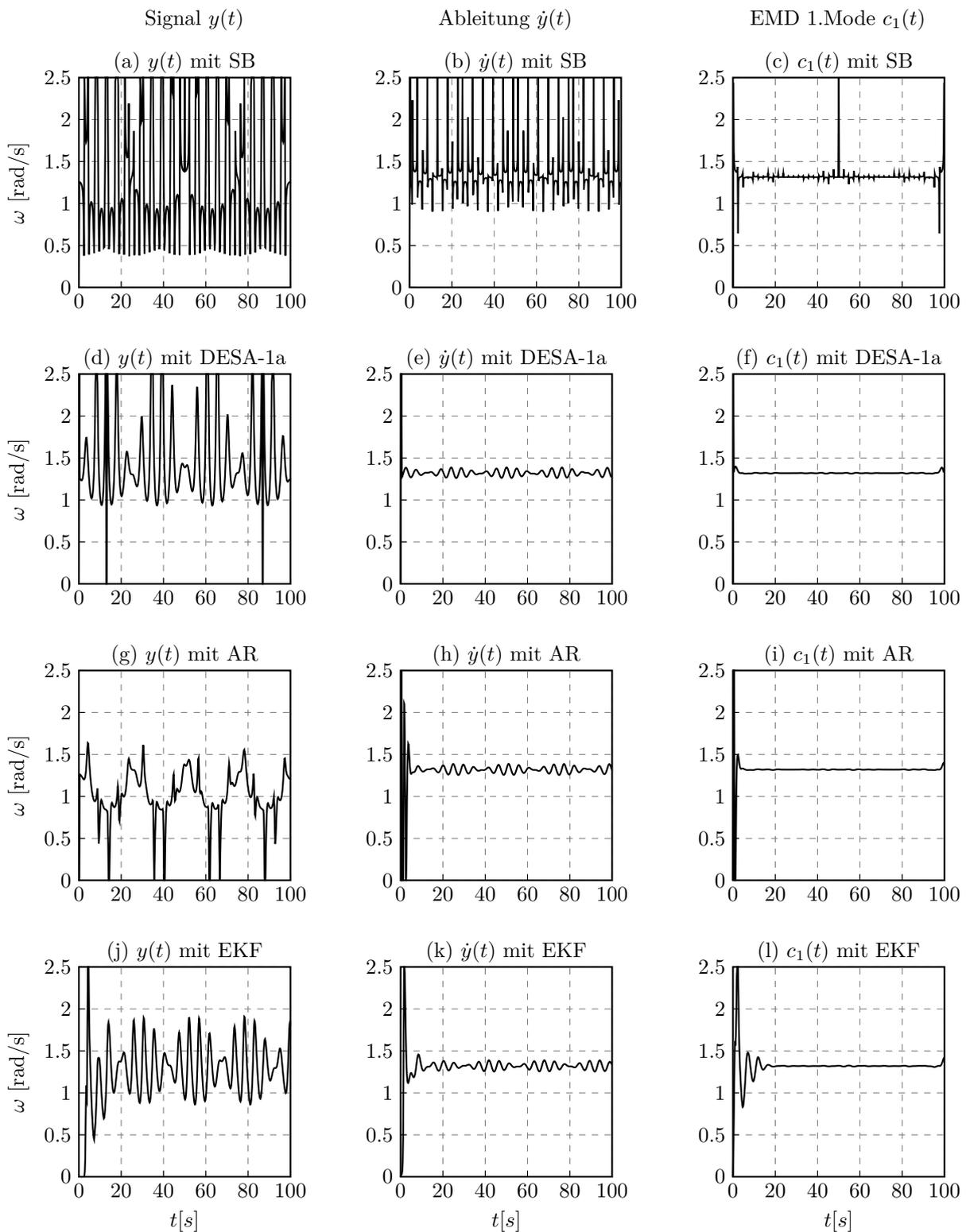


Abb. 5.9: Online Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Steigungs-basierte Analyse (SB); (d-f) Energieoperator (DESA-1a); (g-i) Auto-regressive Frequenzschätzung (AR); (j-l) Kalman-Filter (EKF)

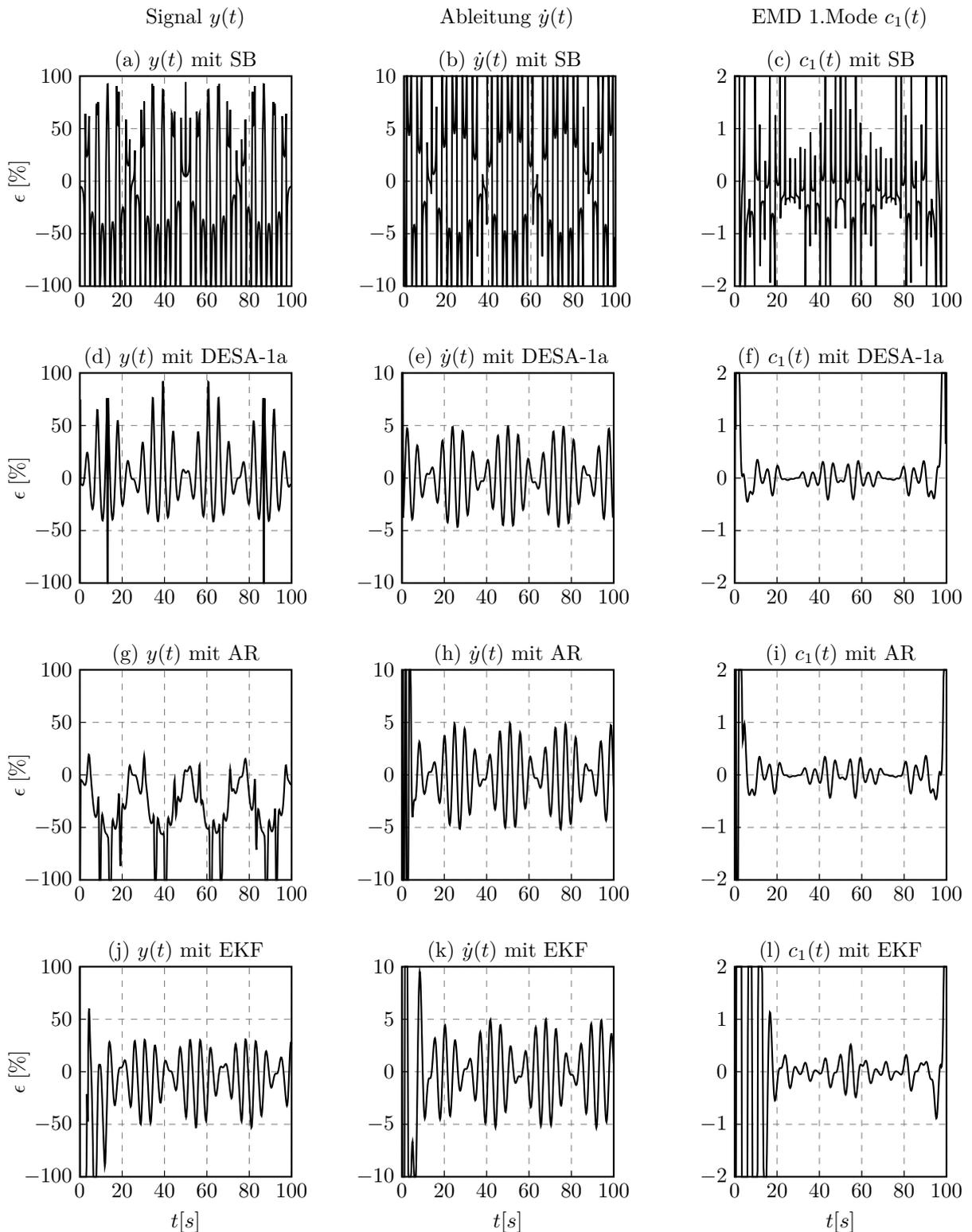


Abb. 5.10: Relativer Fehler der online Frequenzschätzung zweier Sinusschwingungen: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Steigungsbasierte Analyse (SB); (d-f) Energieoperator (DESA-1a); (g-i) Auto-regressive Frequenzschätzung (AR); (j-l) Kalman-Filter (EKF)

Dieses Beispiel hat gezeigt, dass mit Ausnahme der klassischen STFT und Wavelet-Transformation sämtliche Methoden Schwierigkeiten zeigen die Frequenz eines Signals mit mehreren Frequenzkomponenten zu bestimmen. Eine Aufbereitung des Signals im Vorfeld ist somit eine Notwendigkeit, um gültige Ergebnisse zu erhalten. Mit der Analyse des abgeleiteten Signals werden im Vergleich bessere Ergebnisse erzielt. Unsicherheiten aufgrund der zweiten Frequenzkomponente sind jedoch immer noch vorhanden. Die Zerlegung des Signals in seine Frequenzkomponenten mittels EMD erzielt die besten Resultate. In Kombination mit der Hilbert-Transformation bzw. mit der DESA lässt sich die Frequenz der höheren Frequenz eindeutig bestimmen. Da in Anwendung auf die Co-Simulation nur die Information der höchsten Frequenzkomponenten relevant ist, genügt die Analyse der ersten ermittelten Mode der EMD, falls keine Unstetigkeiten im Trend existieren.

5.3 Schwingung mit linearem Trend

Es wurde an den vorherigen Beispielen das Verhalten der Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz an einem Signal mit unterschiedlichen Frequenzverhalten und an einem Signal mit mehreren Frequenzkomponenten gezeigt. An einem dritten Beispiel soll das Verhalten an einem nicht-stationären Signal gezeigt werden. Dabei handelt es sich um eine Schwingung mit konstanter Frequenz und einem linear steigenden bzw. fallenden Trend.

$$y(t) = \begin{cases} 0.25 \sin(\omega_1 t) + 0.1 t + 2 & , \text{für } 0 \leq t < 50 \text{ s} \\ 0.25 \sin(\omega_1 t) - 0.1 t + 2 & , \text{für } 50 \text{ s} \leq t < 100 \text{ s} \end{cases} \quad (5.5)$$

Es werden zusätzlich zu dem Signal $y(t)$ mit der konstanten Frequenz von $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ die erste Ableitung $\dot{y}(t)$ und die erste Mode des Signals $c_1(t)$ betrachtet. Daraus ergeben sich drei Signale, die auf ihre Frequenz untersucht werden:

- das originale Signal $y(t)$
- die erste Ableitung $\dot{y}(t)$
- die erste Mode $c_1(t)$ des Signals $y(t)$

Die Verläufe der Signale sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Abbildung 5.11 a zeigt das ursprüngliche Signale. Der unterlagerte Trend des Signals beginnt bei 2 V und steigt linear auf 7 V bei $t = 50 \text{ s}$. Anschließend sinkt der Trend wieder mit gleicher, negativer Steigung. Dem Trend ist eine sinusförmige Schwingung mit einer Frequenz $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ und einer Amplitude von 0.25 V überlagert. In der Abbildung 5.11 b ist die Ableitung des Signals $\dot{y}(t)$ dargestellt. Die Ableitung des linearen Trends verursacht einen Offset des Signals, der bei $t = 50 \text{ s}$ von 0.1 V/s auf -0.1 V/s springt. Die erste Mode der EMD ist in Abbildung 5.11 c dargestellt.

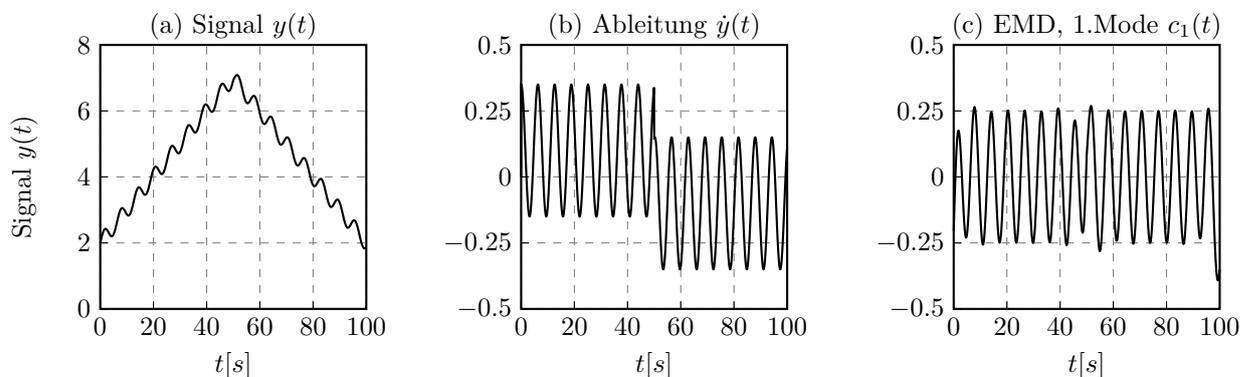


Abb. 5.11: Schwingung mit linearem Trend: (a) ursprüngliches Signal; (b) erste Ableitung; (c) erste Mode mittels EMD

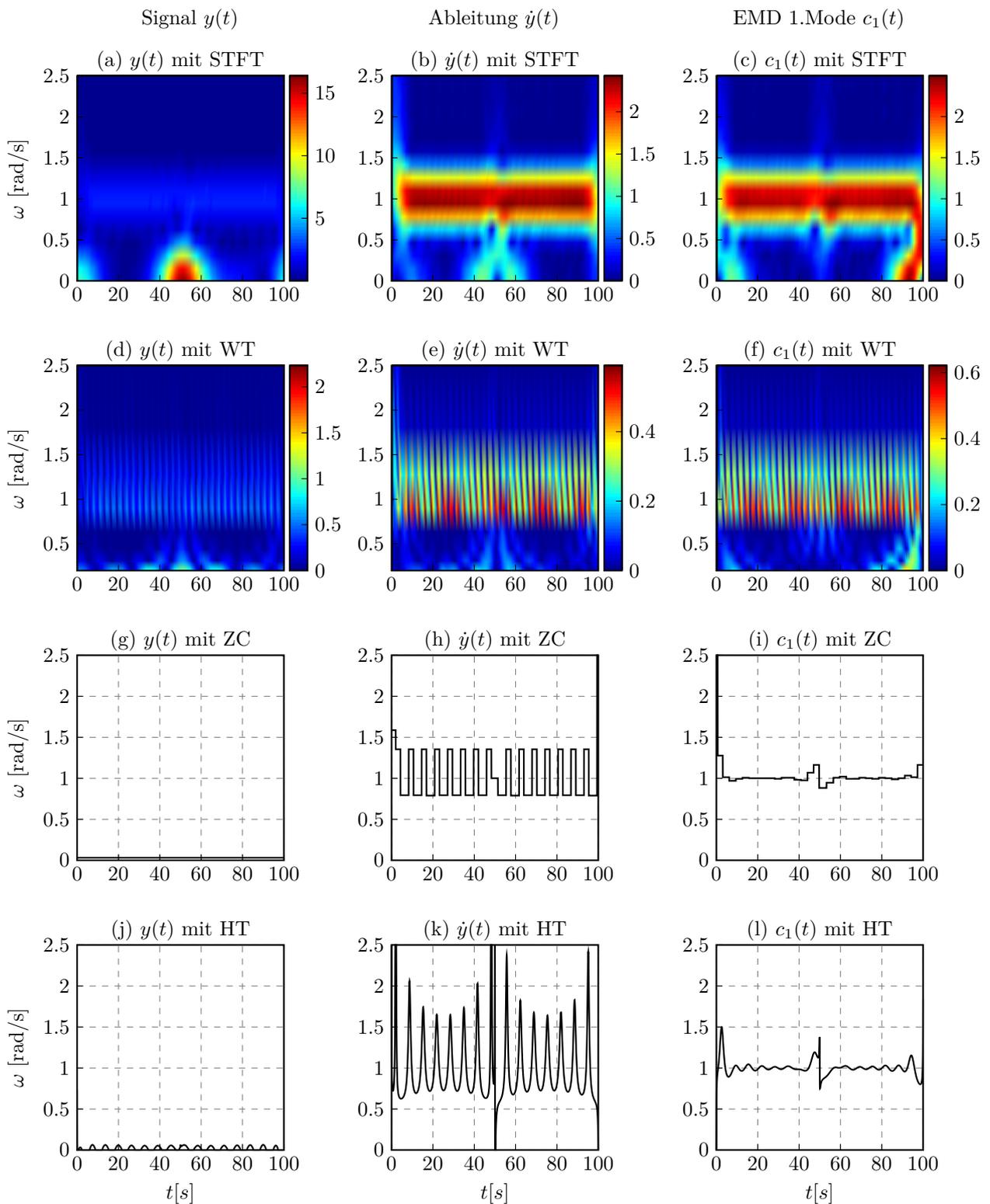


Abb. 5.12: Offline Frequenzschätzung der Schwingung mit linearem Trend: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Kurzzeit-Fourier-Transformation; (d-f) Wavelet-Transformation; (g-i) Analyse der Nulldurchgänge; (j-l) Hilbert-Transformation

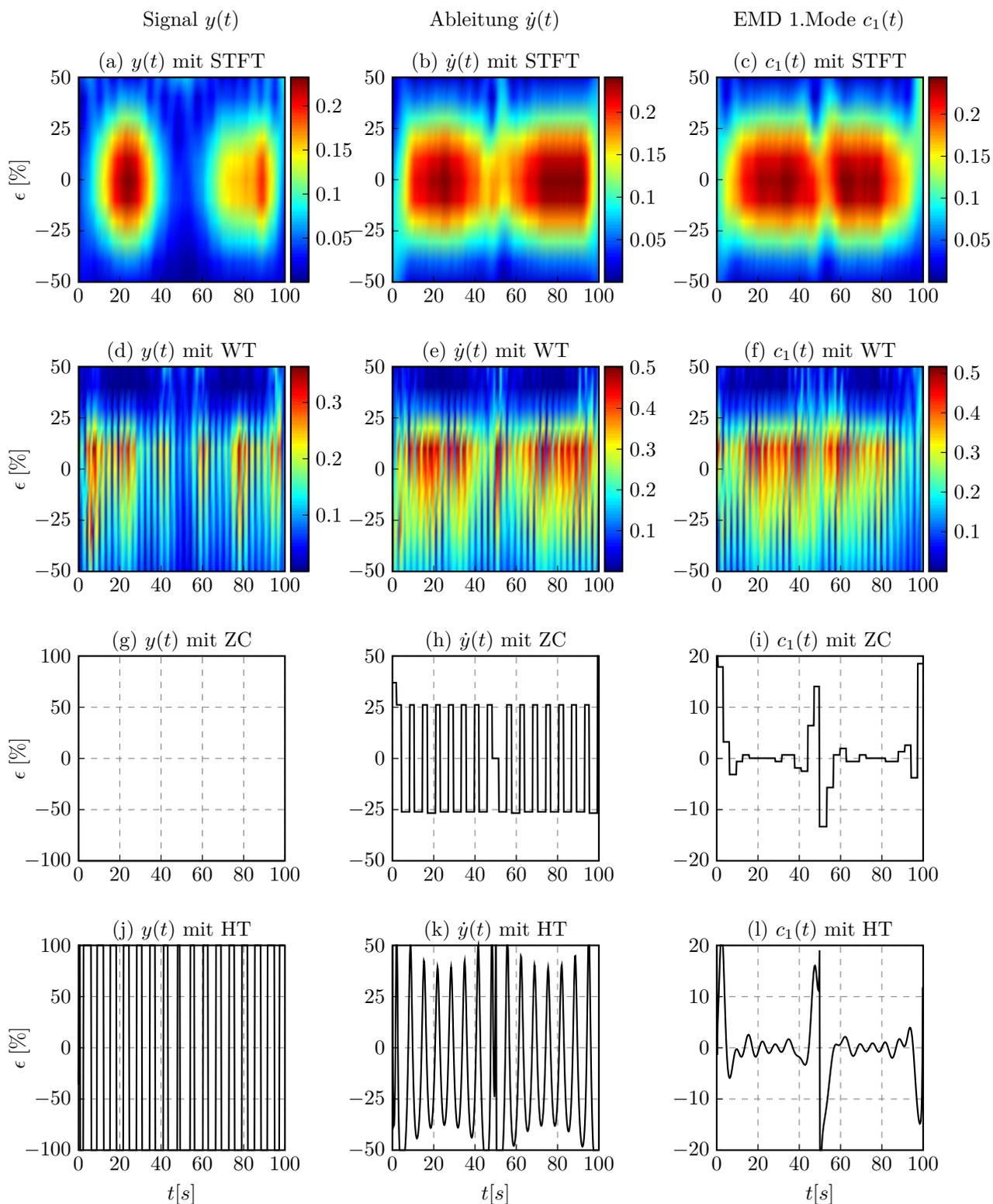


Abb. 5.13: Relativer Fehler der offline Frequenzschätzung einer Schwingung mit linearem Trend: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Kurzzeit-Fourier-Transformation; (d-f) Wavelet-Transformation; (g-i) Analyse der Nulldurchgänge; (j-l) Hilbert-Transformation

Die Resultate der Frequenzschätzung sind in Abbildung 5.12 und Abbildung 5.14 dargestellt, wobei die offline Verfahren in Abbildung 5.12 und die Verfahren der online Frequenzschätzung in Abbildung 5.14 gezeigt werden.

Die relativen Fehler $\epsilon(t)$ der Frequenzschätzmethoden sind in Abbildung 5.13 und Abbildung 5.15 dargestellt, wobei die Schätzfehler der offline Analysemethoden aus Abbildung 5.12 in Abbildung 5.13 aufgetragen sind. Abbildung 5.15 zeigt die relativen Fehler der online Momentanfrequenzschätzer aus Abbildung 5.14.

Die Ergebnisse der Analyse des originalen Signals $y(t)$ sind in der ersten Spalte der Abbildung 5.12 und Abbildung 5.14 dargestellt. Die Frequenz ω_1 der Schwingung $y(t)$ ist selbst mit den klassischen Analysemethoden, der STFT, in Abbildung 5.12a bzw. mit der Wavelet-Transformation in Abbildung 5.12d kaum zu erkennen. Da aufgrund des Trends das Signal keine Nulldurchgänge aufweist, ist die Schätzung der Frequenz auf Basis der Nulldurchgänge sinnfrei (siehe Abbildung 5.12g). Das Ergebnis der Hilbert-Transformation in Abbildung 5.12j ist ebenso bedeutungslos, da zur Bildung des benötigten analytischen Signals die Mittelwertfreiheit von $y(t)$ Voraussetzung ist. Ähnliche Verhalten zeigen die Ergebnisse der online Analysemethoden in der linken Spalte der Abbildung 5.14. Die steigungsbasierte Analyse in Abbildung 5.14a und die Analyse mittels Energieoperator in Abbildung 5.14d normieren die Ergebnisse mit dem Signal, wodurch ein großer Offset bzw. ein steigender Trend zu starken Verfälschungen führt. Auch die Analyse mit Hilfe des auto-regressiven Filters in Abbildung 5.14g bzw. die Schätzung der Frequenz mittels EKF in Abbildung 5.14j liefern keine brauchbaren Resultate. Dies zeigt sich auch den relativen Fehlern in linken Spalte der Abbildung 5.13 und Abbildung 5.15.

Die Untersuchung der Frequenz des abgeleiteten Signals $\dot{y}(t)$ in der mittleren Spalte in Abbildung 5.12 und Abbildung 5.14 zeigen zwar bessere Ergebnisse als die Analyse des ursprünglichen Signals $y(t)$. Dennoch ist der relative Fehler $\epsilon(t)$ in der mittleren Spalte der Abbildung 5.13 und Abbildung 5.15 größer als $\pm 20\%$. Diese Unsicherheit rührt Großteils immer noch von dem im Signal vorhandenen Offset her, der trotz Ableitung im Signal verbleibt. Lediglich die Schätzung mittels EKF in Abbildung 5.14k zeigt eine konstante Frequenz und einen relativen Fehler $\epsilon(t)$ in Abbildung 5.15k der gegen Null strebt. Grund dafür ist die Berücksichtigung des Offsets im Modell des Filters.

Die Ergebnisse der Untersuchung der ersten Mode des Signals $c_1(t)$ sind in der dritten Spalte der Abbildung 5.12 und Abbildung 5.14 aufgetragen. Die relativen Fehler der online Schätzverfahren in der rechten Spalte der Abbildung 5.15 sowie der relative Fehler ϵ der Analyse der Nulldurchgänge in Abbildung 5.13i und der Hilbert-Transformation in Abbildung 5.13l liegen unter 10% mit Ausnahme an den Grenzen des Beobachtungsintervalls und um den Zeitpunkt $t = 50$ s. Die Unsicherheiten an den Intervallgrenzen sind durch die Schätzung des Verhaltens am Rande durch die EMD verursacht. Die Unsicherheit bei $t = 50$ s ist aufgrund der differentiellen Unstetigkeit durch den unterlagerten Trend.

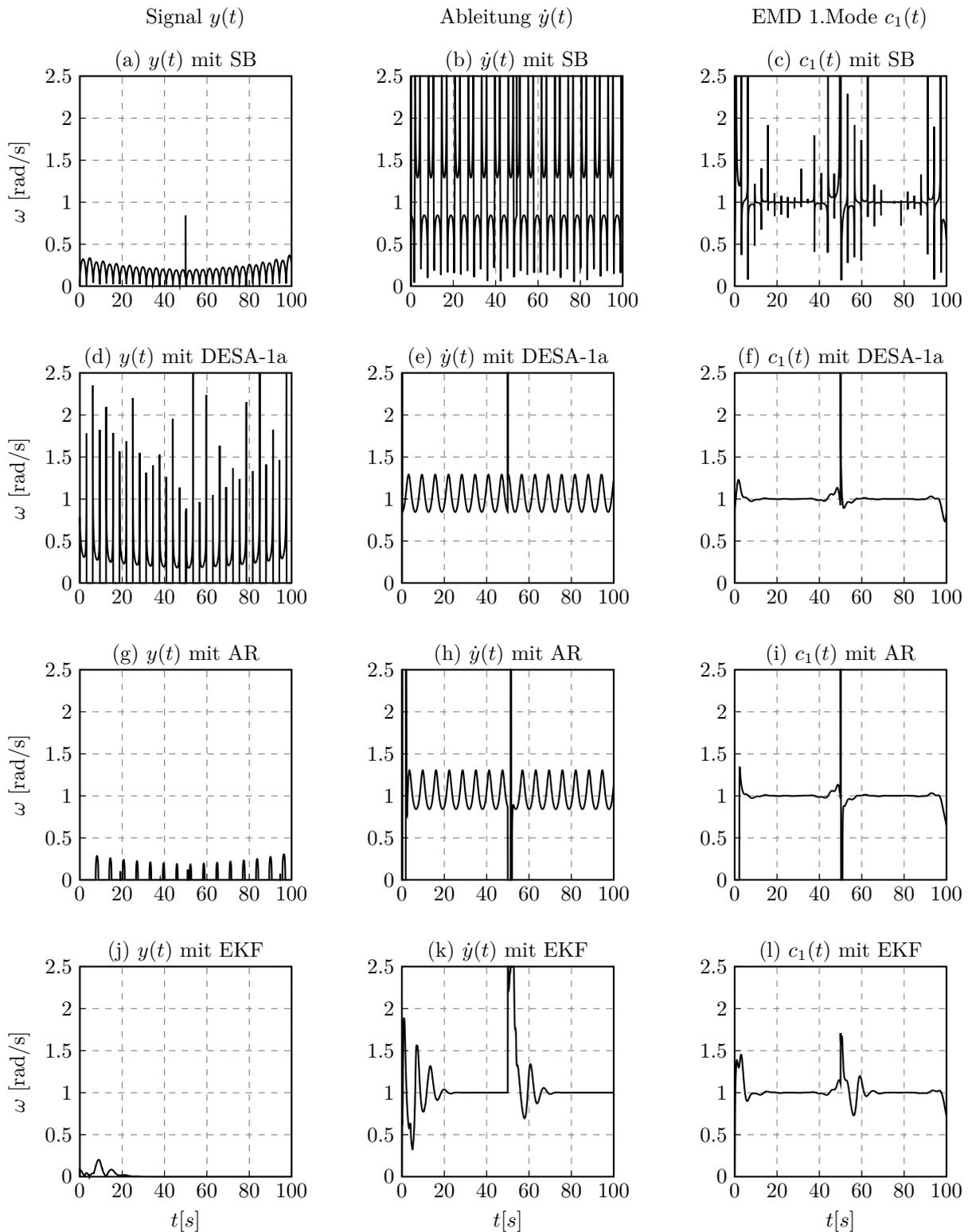


Abb. 5.14: Online Frequenzschätzung der Schwingung mit linearem Trend: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Steigungsbasierte Analyse (SB); (d-f) Energieoperator (DESA-1a); (g-i) Auto-regressive Frequenzschätzung (AR); (j-l) Kalman-Filter (EKF)

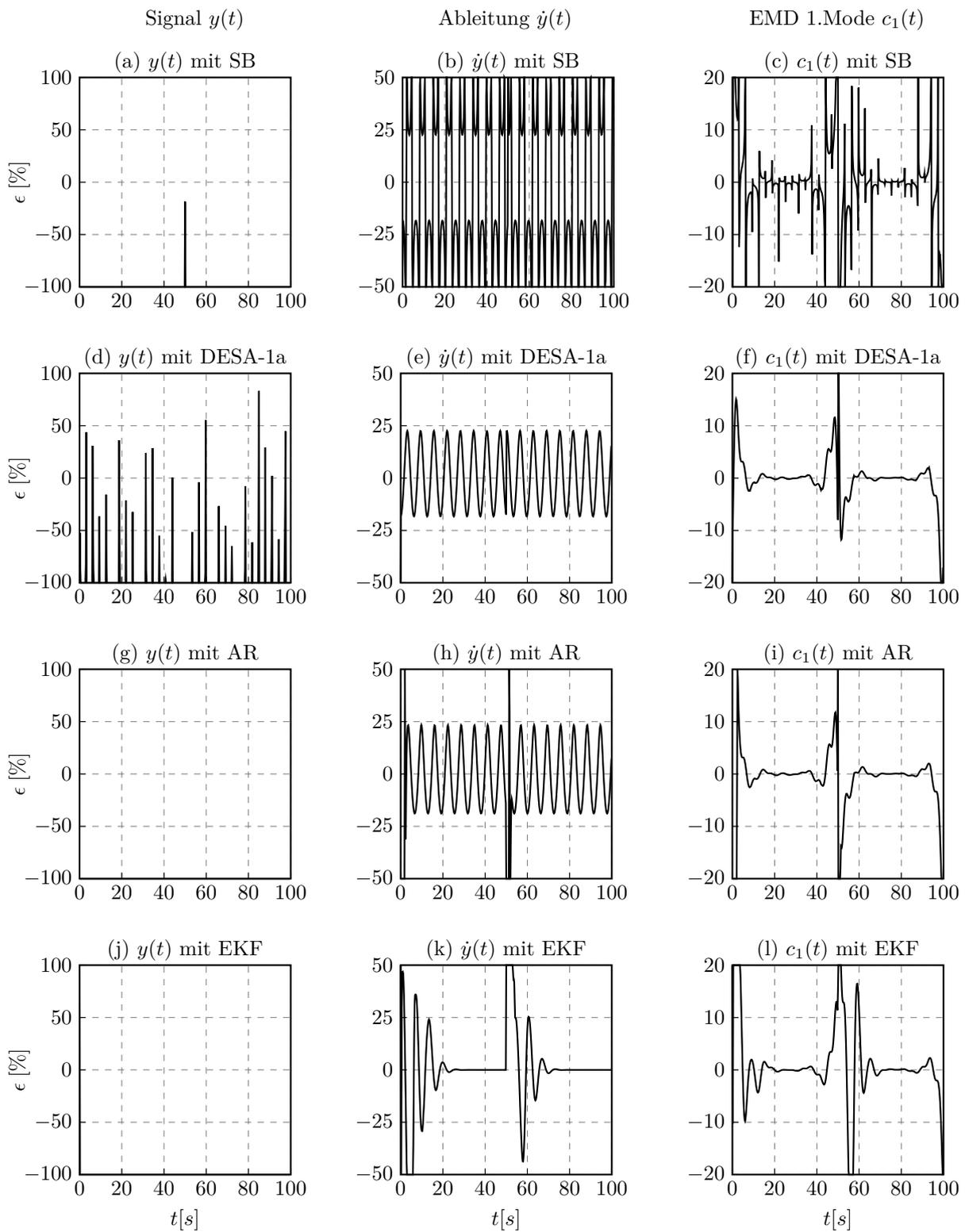


Abb. 5.15: Relativer Fehler der online Frequenzschätzung einer Schwingung mit linearem Trend: (links) ursprüngliches Signal; (Mitte) erste Ableitung; (rechts) erste Mode mittels EMD; (a-c) Steigungsbasierte Analyse (SB); (d-f) Energieoperator (DESA-1a); (g-i) Auto-regressive Frequenzschätzung (AR); (j-l) Kalman-Filter (EKF)

Die Aussage über die Momentanfrequenz von Signalen mit einem unterlagertem Trend sind von den meisten Methoden nicht gültig, eine Aufbereitung des Signals ist somit notwendig. Anhand dieses Beispiels hat sich gezeigt, dass selbst die Bildung der Ableitung nicht die gewünschten Ergebnisse erzielen, da der lineare Anteil des Trends als Offset im Signal verbleibt. Dennoch kann die Analyse des abgeleiteten Signals aufgrund ihres geringen Mehraufwands als grobe Schätzung herangezogen werden. Um eine definitive Aussage über die Frequenz treffen zu können, ist die Zerlegung des Signal in ihre Signalkomponenten, z.B. mittels EMD, sinnvoll. Der nicht-stationäre Anteil des Trends fällt bei der Zerlegung weg. Unstetigkeiten im Signal sind, sofern die EMD einsetzbar ist, auch in der Mode ersichtlich.

5.4 Co-Simulation eines Regelkreises

Im folgenden Abschnitt wird die Schätzung der Momentanfrequenz und deren Anwendung an einem Co-Simulation Beispiel mit zwei Teilsystemen, welche sequentiell und nicht-iterativ gekoppelt werden, gezeigt. Ausgangspunkt des Beispiels ist ein Standardregelkreis mit einer Strecke $P(s)$ und einem Regler $R(s)$, wie in Abbildung 5.16 dargestellt.

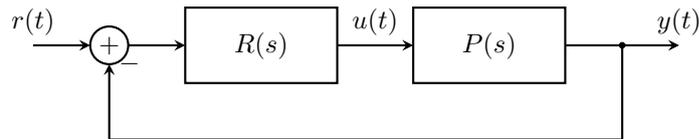


Abbildung 5.16: Schematische Darstellung eines Standardregelkreises

Das Ausgangssignal $y(t)$ der Strecke $P(s)$ wird zurückgeführt und bildet, als Differenz mit dem Referenzsignal $r(t)$, die Eingangsgröße für den Regler $R(s)$. Die Stellgröße $u(t)$ des Regelkreises wird der Strecke $P(s)$ als Eingangsgröße zur Verfügung gestellt. Die Übertragungsfunktionen der beiden Systeme sind mit

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.2)(s + 1)} \quad \text{und} \quad R(s) = \frac{s + 1}{s} \quad (5.6)$$

angenommen. Die resultierende Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $T(s)$ ergibt sich wie folgt:

$$T(s) = \frac{P(s)R(s)}{1 + P(s)R(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}. \quad (5.7)$$

Es handelt sich dabei um ein schwingungsfähiges System 2. Ordnung, mit einer Frequenz $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Der Regelkreis wird, wie in Abbildung 5.17, in zwei Teilsysteme aufgeteilt, wobei die Strecke $P(s)$ das Teilmodell S_2 mit der Stellgröße des Reglers $u(t)$ als Eingangssignal und der Ausgangsgröße $y(t)$ darstellt. Der Regler stellt mit der Rückkopplung das Teilsystem S_1 mit der Eingangsgröße $y(t)$ und der Ausgangsgröße $u(t)$ dar.

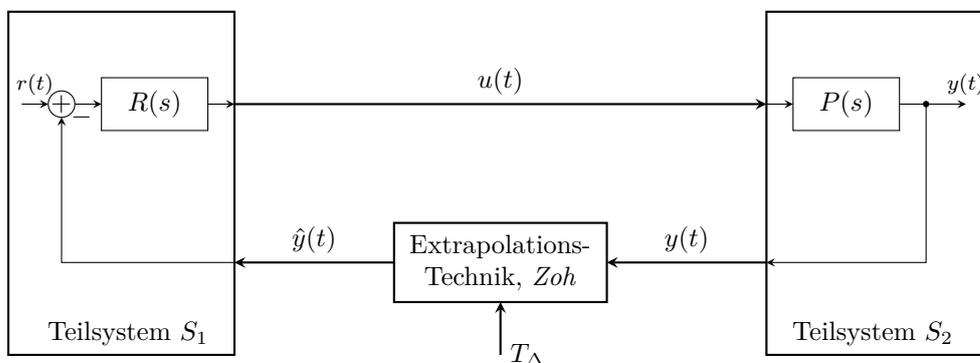


Abbildung 5.17: Schematische Darstellung der Kopplung der Teilmodelle

Das Teilsystem S_1 (Regler) wird in der Simulationsabfolge zuerst gerechnet, wodurch die Extrapolation der Ausgangsgröße $y(t)$ notwendig ist. Diese wird mittels *Zoh* über die

Koppelschrittweite T_Δ geschätzt.

Die aus der Co-Simulation resultierende Sprungantwort $y(t)$ ist mit unterschiedlichen Koppelschrittweiten $T_\Delta = [0.02\text{ s}, 0.05\text{ s}, 0.1\text{ s}]$ in Abbildung 5.18 dargestellt. Es ergeben sich für unterschiedliche T_Δ Unterschiede in den Simulationsergebnissen, wobei die Einstellungen der einzelnen Teilsysteme unverändert sind.

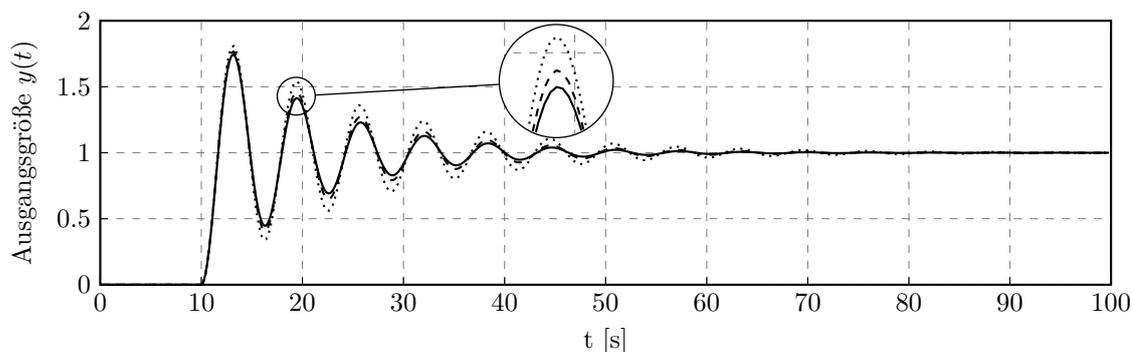


Abbildung 5.18: Sprungantwort des Regelkreises bei unterschiedlichen Koppelschrittweiten: — $T_\Delta = 0.02\text{ s}$; ---- $T_\Delta = 0.05\text{ s}$; $T_\Delta = 0.1\text{ s}$

Zu Beginn der Simulation ist die Stellgröße $u(t)$ und die Ausgangsgröße $y(t)$ gleich Null. Bei $t = 10\text{ s}$ wird ein Sprung auf das System geschaltet, wobei der Regler $R(s)$ versucht die Position nachzuführen. In Abhängigkeit der gewählten Koppelschrittweiten T_Δ stellt sich nach endlicher Zeit ein stationärer Wert am Ausgang ein. Im Verlauf der Sprungantwort $y(t)$ in Abbildung 5.18 nimmt die Amplitude der Schwingung mit steigender Koppelschrittweite T_Δ zu.

Es zeigt sich, dass die Wahl der Koppelschrittweite T_Δ einen direkten Einfluss auf das Ergebnis $y(t)$ hat. Ist die Schrittweite klein genug gewählt, entspricht das Ergebnis dem Resultat der Mono-Simulation¹. Mit Hilfe der Momentanfrequenzschätzung soll nun gezeigt werden, welche der Ergebnisse gültig sind. Da das Koppelsignal $y(t)$ einer abklingenden Schwingung mit Offset entspricht, wird vor der Analyse der Frequenz die erste Mode $c_1(t)$ des Signals mittels EMD bestimmt. Die Mode $c_1(t)$ der Sprungantwort ist in Abbildung 5.19 dargestellt.

Abbildung 5.20 zeigt den Verlauf der Momentanfrequenz der ersten Mode $c_1(t)$ der Koppelgröße. Beim Sprung wird eine hohe Frequenz identifiziert und anschließend stellt sich eine konstante Frequenz von $\omega(t) = 1\text{ rad/s}$ ein. Bis zum Sprung bei $t = 10\text{ s}$ sollte keine Frequenz identifiziert werden, da das Signal $y(t)$ bis zu diesem Zeitpunkt Null ist. Durch die Verwendung der EMD wird jedoch eine langsame Schwingung in die Mode interpretiert. Diese Tatsache ist jedoch nicht weiter problematisch, da die detektierte Frequenz im Verhältnis zur Signalfrequenz klein ist.

Auf der rechten Seite der Abbildung 5.20 befindet sich eine zusätzliche Skalierung der Ordinate. Diese repräsentiert die maximale Koppelschrittweiten nach Tabelle 2.1 aus Ka-

¹Die Mono-Simulation ist die geschlossene Simulation eines geschlossenen Modells (siehe Abbildung 2.1).

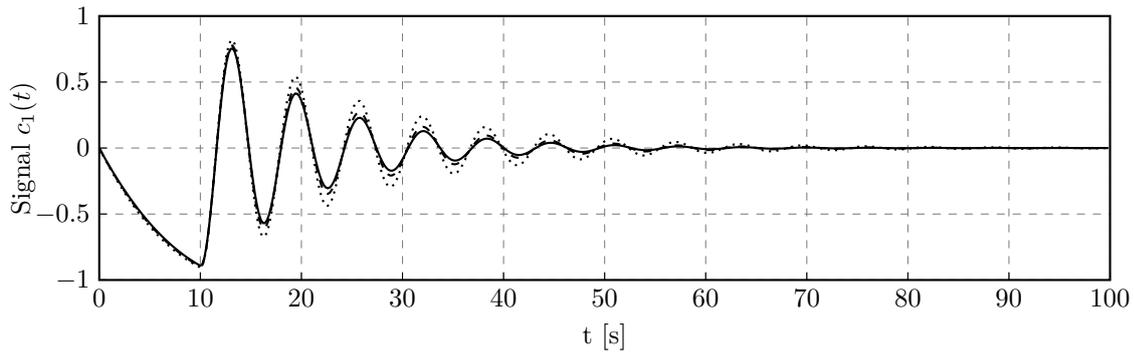


Abbildung 5.19: Verlauf der ersten Mode des Ausgangssignals des Regelkreises:
 — $T_{\Delta} = 0.02 \text{ s}$; - - - $T_{\Delta} = 0.05 \text{ s}$; $T_{\Delta} = 0.1 \text{ s}$

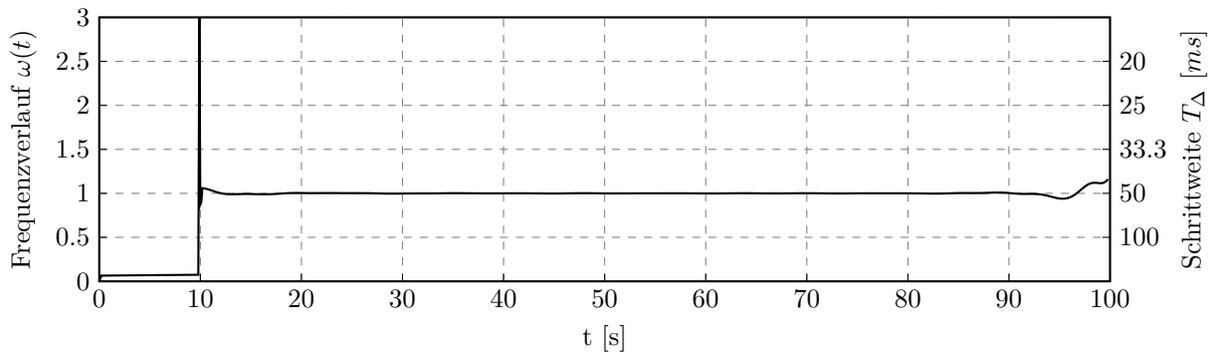


Abbildung 5.20: Momentanfrequenz und korrespondierende Koppelschrittweite

pitel 2.1.2, wonach sich die maximal zulässige Koppelschrittweite T_{Δ} in Abhängigkeit der Momentanfrequenz $\omega(t)$ und der Art der Kopplung angeben lässt [2]. Anhand dieses Beispiels mit einer Kopplung mittels *Zoh* ergibt sich, dass

$$\omega(t)T_{\Delta} \leq 0.05 \quad \text{bzw.} \quad T_{\Delta} \leq \frac{0.05}{\omega(t)} \quad (5.8)$$

gelten muss, um die Gültigkeit der Ergebnisse der Kopplung einer Co-Simulation zu gewährleisten. Mit dieser Kenntnis zeigt sich deutlich, dass eine Kopplung mit $T_{\Delta} = 0.1 \text{ s}$ eine maximal zulässige Frequenz von $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ zulässt, wonach bei einer Signalfrequenz von $\omega(t) = 1 \text{ rad/s}$ die Koppelschrittweite zu groß gewählt wurde. Die daraus resultierende überhöhte Amplitude der Schwingung lässt sich mit der durch das Extrapolationsfilter verursachten Totzeit erklären.

Die maximal zulässige Frequenz $\omega = 2.5 \text{ rad/s}$ bei einer Koppelschrittweite $T_{\Delta} = 0.02 \text{ s}$ liegt deutlich über der detektierten Frequenz $\omega(t)$. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse der Co-Simulation mit dieser Koppelschrittweite der Mono-Simulation entspricht und somit ein gültiges Ergebnis liefert.

Anders als bei $T_{\Delta} = 0.1 \text{ s}$ und $T_{\Delta} = 0.02 \text{ s}$ liegt die Koppelschrittweite $T_{\Delta} = 0.05 \text{ s}$ exakt

auf Grenze der Ungleichung (5.8). Jedoch entspricht das Ergebnis nicht dem Resultat der Mono-Simulation. Grund dafür ist, dass eine einmalige Frequenzüberhöhung, wie beim Sprung bei $t = 10 \text{ s}$ einen Fehler verursacht, der sich mit dieser Art der Kopplung nicht kompensieren lässt. Abhilfe kann hier ein Verfahren zur Fehlerkompensation schaffen [2].

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im abschließenden Kapitel wird die Momentanfrequenzschätzung als Evaluierungsmöglichkeit der Kopplung einer Co-Simulation und dessen notwendige Herangehensweise zusammengefasst und zusätzlich wird ein Ausblick auf mögliche aufbauende Arbeiten gegeben.

6.1 Zusammenfassung

Die Co-Simulation ist ein Simulationsansatz, welcher aufgrund der unzähligen Anwendungsmöglichkeiten immer mehr an Bedeutung gewinnt. Die Kombination von verschiedenen Simulationswerkzeugen ermöglicht es auch, große und komplexe Aufgabenstellungen lösen zu können. Es zeigt sich, insbesondere bei der nicht-iterativen Co-Simulation, dass die Wahl der Koppelschrittweiten T_Δ durchaus eine Herausforderung darstellt. Die Momentanfrequenzschätzung wird aufbauend darauf als Evaluierungsmöglichkeit der Koppelschrittweite verwendet. In dieser Arbeit wurden verschiedene Methoden zum Schätzen der Momentanfrequenz gezeigt. Diese setzen in den meisten Fällen stationäre mittelwertfreie Signale voraus, weshalb zusätzlich Verfahren betrachtet wurden, die es ermöglichen auch nicht-stationäre Signale zu analysieren.

6.2 Schlussfolgerung

Für die Evaluierung der Kopplung einer Co-Simulation während der Laufzeit bieten sich einfache signalbasierte Methoden zur Schätzung der Momentanfrequenz, wie z.B. Schätzung mittels Teager-Kaiser Energieoperator oder die steigungsbasierte Analyse, an. Diese Methoden zeigen ihre größte Stärke darin, dass sie nur eine geringe Anzahl an Stützstellen benötigen, um eine Aussage über die aktuelle Frequenz des Signals zu geben. Sie setzen jedoch ein im weiteren Sinne stationäres und mittelwertfreies Signal voraus. Diese Annahme trifft jedoch in der Regel nicht auf Simulationsergebnisse und somit auf Koppelsignale zu, wodurch ihr Einsatz nur eingeschränkt möglich ist.

Abhilfe für diese Einschränkung bietet zum einen die lokale Ableitung des Signals vor der

Analyse, wodurch der Offset des Signals verschwindet, der nicht-stationäre Anteil bleibt jedoch in der Regel bestehen.

Eine weitere Möglichkeit stellt die Anwendung der EMD dar. Sie zerlegt ein Signal in ihre Komponenten, in sogenannte Moden, die stationär und mittelwertfrei sind. Mit der Anwendung der EMD ist es somit zu Gänze möglich, nicht-stationäre Signale zu analysieren. In ihrer ursprünglichen Form benötigt die EMD jedoch das gesamte Signal für die Ermittlung der Moden, wodurch der große Vorteil von online Schätzmethoden verloren geht.

In dieser Arbeit wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, die EMD stetig und stückweise zu berechnen. Es ist lediglich ein Signalfenster über die letzten vier Extremwerte notwendig, um eine Mode zu ermitteln. Mit diesem Ansatz ist es während der Laufzeit möglich ein stationäres und mittelwertfreies Signal zu erhalten und daraus mit Hilfe von einfachen Schätzmethoden eine Aussage über die Momentanfrequenz zu treffen.

Es wurde bei den Untersuchungen in dieser Arbeit von rauschfreien Signalen ausgegangen. Dieser Ansatz ist durchaus legitim, da im Zusammenhang der Co-Simulation Rauschen als zu übertragendes Informationssignal interpretiert werden kann. Ist jedoch Rauschen unerwünscht, wäre eine vorab Filterung bzw. der Einsatz modellbasierter Schätzmethoden (z.B.: EKF) den signalbasierten Methoden vorzuziehen, da diese Methode das Rauschen bei der Ermittlung der Momentanfrequenz berücksichtigen können.

6.3 Ausblick

Die Momentanfrequenz bietet unabhängig von den Teilmodellen der Co-Simulation eine Möglichkeit eine Aussage über die Gültigkeit der Koppelschrittweite zu treffen. Ist die Koppelschrittweite im Bezug auf die Frequenz zu groß gewählt, lässt sich dies mit der Momentanfrequenz in Erfahrung bringen. Mit der Analyse der Momentanfrequenz ist es jedoch nicht möglich die Auswirkungen einer zu groß gewählten Koppelschrittweite bzw. die Auswirkungen zu hoher Frequenzen im System zu ermitteln, da dies Systemwissen der Teilmodelle voraussetzt und die Schätzung der Momentanfrequenz nur auf Basis des Koppelsignals fungiert. Dies bedeutet, dass hohen Frequenzen nicht zwangsläufig zu Koppelfehlern und somit zu Fehlern in der Simulation führen müssen. Um dies in Erfahrung zu bringen müssten die dynamischen Eigenschaften des nachfolgenden bzw. des gesamten Systems untersucht werden.

Anhang A

Ergänzende mathematische Zusammenhänge

A.1 Analytische Berechnung der Momentanfrequenz

Im folgenden Abschnitt wird die analytische Berechnung der Momentanfrequenz eines zeitkontinuierlichen Signals bestehend aus zwei Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz nach der Definition von Ville (2.8) erläutert.

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \\ &= \cos\left(\omega_1 t + \frac{1}{2}\omega_2 t - \frac{1}{2}\omega_2 t\right) + \cos\left(\omega_2 t + \frac{1}{2}\omega_1 t - \frac{1}{2}\omega_1 t\right) \\ &= \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Durch Anwendung des Summensatzes $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ kommt man auf die Form

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) - \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \\ &\quad + \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) - \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Äquivalent dazu gilt für $\sigma(t) = \mathcal{H}\{s(t)\}$

$$\sigma(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \quad (\text{A.3})$$

Der Phasenwinkel ergibt sich aus dem Arkustangens der Hilbert-Transformierten $\sigma(t)$ durch das Signal $y(t)$, wie folgt:

$$\phi(t) = \arg(s(t) + j\sigma(t)) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)}{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)}\right) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (\text{A.4})$$

Nach der Ableitung des Phasenwinkels $\phi(t)$ ergibt sich für die Frequenz zweier Sinusschwingungen mit unterschiedlicher Frequenz die mittlere Frequenz der beiden Frequenzen $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

A.2 Herleitung der Zeit-Frequenz Unschärferelation

Im folgenden Abschnitt wird die Herleitung der Unschärferelation zwischen der zeitlichen Auflösung Δ_t und der Frequenzauflösung Δ_ω gezeigt [27]. Mit dem Zusammenhang $w(t) \circ \bullet W(f)$ und der Bandbreite des Fourierspektrums Δ_f^2 und der Zeitdauer eines Energiesignals Δ_t^2 ergibt sich

$$\Delta_t^2 \Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{|w(t)|^2}{\|w(t)\|^2} dt \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \frac{|W(f)|^2}{\|W(f)\|^2} df. \quad (\text{A.5})$$

Wobei gilt, dass $\frac{1}{j2\pi} \frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet fX(f)$ ist. Mit dem *Satz von Parseval* $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = E$, wonach die Energie E sowohl im Frequenzbereich als auch im Zeitbereich gleich ist.

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 \Delta_f^2 &= \frac{1}{4\pi^2 E^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} w(t) \right|^2 dt \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2 E^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) dt \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Durch die *Schwarze-Regel*, die besagt, dass $|\int_{-a}^b x(t)y^*(t)dt|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \int_a^b |y(t)|^2 dt$ ist, ergibt sich die Ungleichung in (A.6). Anschließend werden die Fensterfunktionen zusammengeführt und die Gleichung partiell integriert.

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 \Delta_f^2 &\geq \frac{1}{4\pi^2 E^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} w^2(t) dt \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{16\pi^2 E^2} \left(\underbrace{t w(t)^2}_{0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(t)^2 dt}_E \right)^2 = \frac{1}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Der erste Teil der partiellen Integration in (A.7) fällt aufgrund der geraden Fensterfunktion $w(t)$ weg. Das verbleibende Integral entspricht der Energie des Signals E . Bei anschließenden ziehen der Wurzel ergibt sich für die Relation

$$\Delta_t \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi} \quad \text{bzw.} \quad \Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Es wurde somit gezeigt, dass die günstigste Relation, die erreicht werden kann, $\Delta_t \Delta_\omega = 0.5$ beträgt.

A.3 Herleitung des diskreten Teager-Kaiser Energieoperators

Der Teager-Kaiser Energieoperator liefert eine der Energie des Signales proportionales Ergebnis [47, 48]. Im zeitdiskreten Fall mit äquidistanten Abtastzeitschritten $t = kT$ wird für die Berechnung des Energieoperators Ψ_d die Stützstelle $y[k]$ und dessen benachbarten Samples $y[k-1]$ und $y[k+1]$ benötigt. Für die Überlegungen wird ein sinusförmiges Signal

$$y[k] = A \cos(k\Omega + \varphi) \quad (\text{A.9})$$

mit einer konstanten Amplitude A , einer konstanten Frequenz Ω und einer Phasenverschiebung φ angenommen. Wobei die Frequenz Ω mit der Abtastzeit T normiert ist.

$$\begin{aligned} y[k+1] &= A \cos([k+1]\Omega + \varphi) \\ y[k-1] &= A \cos([k-1]\Omega + \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Der Ansatz des diskreten Energieoperators ist analog zum zeitkontinuierlichen Operator Ψ_c aus (3.52) in Kapitel 3.2.2.

$$\begin{aligned} \Psi\{y[k]\} &= y^2[k] - y[k-1]y[k+1] \\ &= A^2 \cos^2(k\Omega + \varphi) - A^2 \cos((k-1)\Omega + \varphi) \cos((k+1)\Omega + \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Der Ausdruck

$$y[k-1]y[k+1] = A^2 \cos([k-1]\Omega + \varphi) \cos([k+1]\Omega + \varphi) \quad (\text{A.12})$$

lässt sich mit Hilfe des Summensatzes $\cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos(2a) + \cos(2b))$ und $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ umformen auf

$$\begin{aligned} y[k-1]y[k+1] &= A^2 \frac{1}{2} (\cos(2k\Omega + 2\varphi) + \cos(2\Omega)) \\ &= A^2 \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2(k\Omega + \varphi) + 1 - 2\sin^2(\Omega)) \\ &= A^2 \cos^2(k\Omega + \varphi) - A^2 \sin^2(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Eingesetzt in den diskreten Energieoperator ergibt sich für diesen der Zusammenhang

zwischen Amplitude A und Frequenz Q .

$$\begin{aligned}\Psi\{x[n]\} &= x^2[n] - x[n-1]x[n+1] \\ &= A^2 \cos^2(n\Omega + \varphi) - (A^2 \cos^2(n\Omega + \varphi) - A^2 \sin^2(\Omega)) \\ &= A^2 \sin^2(\Omega) \approx A^2 \Omega^2.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Zusammengefasst ergibt sich der *zeitdiskrete Teager-Kaiser Energieoperator* aus der Stützstelle $y[k]$ und dessen benachbarten Stützstellen $y[k-1]$ und $y[k+1]$. Es werden somit zur Berechnung der Energie zu einem Zeitpunkt k nur drei Stützstellen benötigt.

$$\Psi_d\{x[n]\} = x^2[n] - x[n+1]x[n-1] = A^2 \sin^2(\Omega) \approx A^2 \Omega^2 \quad (\text{A.15})$$

Der diskrete Energieoperator $\Psi_d\{:\}$ kann mit der Energie $A^2 \Omega^2$ angenähert werden, solange die Abtastrate um das achtfache größer ist als die auftretende Frequenz des Signals [48].

Für die generelle Betrachtung des Energieoperators im zeitdiskreten Fall gilt:

$$\Gamma_{d,n}\{x[k]\} = x[k]x[k+n-2] - x[k-1]x[k+n-1]. \quad (\text{A.16})$$

A.3.1 Zeitdiskrete Analyse mit konstanter Frequenz und Amplitude

Für die Berechnung der Momentanfrequenz im zeitdiskreten Fall wird von einem Signal $y[k] = A \cos(k\Omega + \varphi)$ mit einer konstanten Amplitude A und konstanter Frequenz Ω ausgegangen [65]. Analog zum zeitkontinuierlichen Signal aus (3.52) wird anstatt der zeitlichen Ableitung der Energieoperator auf die Differenz $\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\}$ angewandt. Mit Zuhilfenahme des mathematischen Zusammenhangs $\cos(a) - \cos(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ erhält man die Differenz $y[k] - y[k-1]$ zweier sinusförmiger Größen gleicher und konstanter Frequenz Ω und Amplitude A . Diese ist wiederum ein sinusförmiges Signal mit konstanter Amplitude \tilde{A} und Frequenz.

$$\begin{aligned}y[k] - y[k-1] &= A \cos(k\Omega + \varphi) - A \cos((k-1)\Omega + \varphi) \\ &= 2A \sin\left(k\Omega + \varphi - \frac{\Omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \tilde{A} \sin(k\Omega + \varphi)\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

Es ergibt sich daraus für den diskreten Operator $\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\}$ ein sinusförmiges Signal nach (A.15)

$$\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\} = \tilde{A}^2 \sin^2(\Omega) = 4A^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega\right) \sin^2(\Omega). \quad (\text{A.18})$$

Anschließend wird der Term $\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\}$ mit dem Energieoperator $\Psi_d\{y[k]\}$ durch

dividiert.

$$\frac{\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\}}{2\Psi_d\{y[k]\}} = \frac{4A^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega\right) \sin^2(\Omega)}{2A^2 \sin(\Omega)} = 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega\right) \quad (\text{A.19})$$

Die Frequenz Ω_c ergibt sich danach mit dem mathematischen Zusammenhang $2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \cos(a)$ schließlich zu

$$\Omega_c = \arccos\left(1 - \frac{\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\}}{2\Psi_d\{y[k]\}}\right). \quad (\text{A.20})$$

Die Amplitude A ergibt sich aus (A.15) und (A.20) zu

$$|A| = \sqrt{\frac{\Psi_d\{y[k]\}}{\sin^2(\Omega_c)}}. \quad (\text{A.21})$$

Damit ergibt sich ein Schätzung der Frequenz mittels *Discrete Time Energy Separation Alorithm*, in der Literatur wird dieser Formalismus als ¹DESA-1a bezeichnet.

Um eine symmetrische Differenz zu bilden wird der Mittelwert aus $\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\}$ und $\Psi_d\{y[k+1] - y[k]\}$ gebildet, es ergibt sich daraus die DESA-1.

$$\Omega[k] \approx \arccos\left(1 - \frac{\Psi_d\{y[k] - y[k-1]\} + \Psi_d\{y[k+1] - y[k]\}}{4\Psi_d\{y[k]\}}\right) \quad (\text{A.22})$$

Eine weitere Möglichkeit die Ableitung $\dot{y}(t)$ mittels symmetrischer Differenz abzuschätzen ist, im Gegensatz zu DESA-1, die Bildung des Mittelwerts der Steigungen des Samples $y[k]$ bevor der Energieoperator angewandt wird. Die daraus ergeben Abschätzung der Momentanfrequenz wird als DESA-2 bezeichnet.

$$\Omega[k] \approx \frac{1}{2} \arccos\left(1 - \frac{\Psi_d\{y[k+1] - y[k-1]\}}{2\Psi_d\{y[k]\}}\right) \quad (\text{A.23})$$

A.4 Kubische hermitesche Splines

Im folgenden Abschnitt wird näher auf die Bedeutung und Herleitung der hermiten kubischen Splines eingegangen. Ausgangspunkt der Betrachtung ist folgende Gleichung:

$$y_S(\tau) = \underbrace{\frac{3T_k\tau^2 - 2\tau^3}{T_k^3} y_{k+1}}_{p_1(\tau)} + \underbrace{\frac{T_k^3 - 3T_k\tau^2 + 2\tau^3}{T_k^3} y_k}_{p_2(\tau)} + \underbrace{\frac{\tau^2(\tau - T_k)}{T_k^2} d_{k+1}}_{p_3(\tau)} + \underbrace{\frac{\tau(\tau - T_k)^2}{T_k^2} d_k}_{p_4(\tau)}. \quad (\text{A.24})$$

¹Die Ziffer bezeichnet den Grad der geschätzten Ableitung und der Buchstabe a steht für die Verwendung der asymmetrische Differenz zur Schätzung der Ableitung.

Die Gleichung (A.24) besteht aus vier Termen $p_1(\tau)$ bis $p_4(\tau)$, wobei jede für sich aus einem Polynom 3. Ordnung basiert.

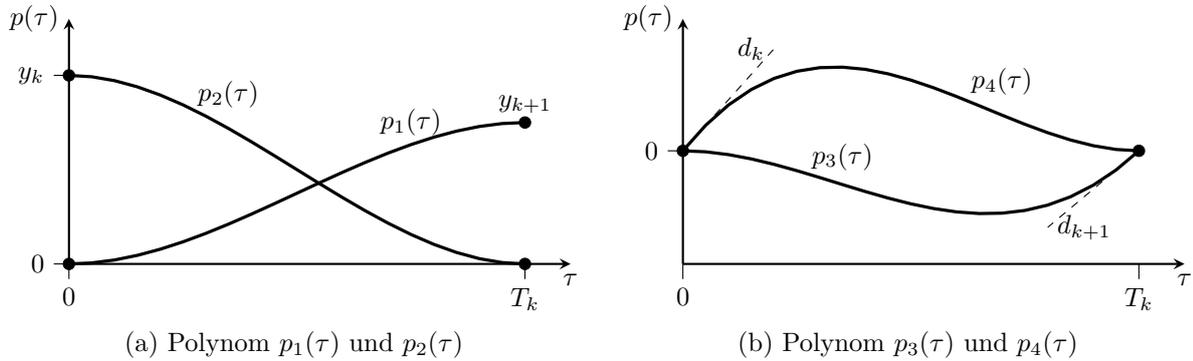


Abbildung A.1: Darstellung der Polynome der hermiteschen kubischen Splines: (a) Definition des Endwerts y_{k+1} und Anfangswerts y_k ; (b) Definition der Steigung des Endwerts d_{k+1} und des Anfangswerts d_k

Die Verläufe der einzelnen Polynome sind in Abbildung A.1 dargestellt. Der Definitionsbereich der Polynome liegt zwischen $\tau = 0 \dots T_k$, wobei $T_k = t(k+1) - t(k)$ entspricht.

Tabelle A.1: Charakteristische Eigenschaften der vier kubischen Polynome von hermiteschen Splines

$i = 1..4$	$p_1(\tau)$	$p_2(\tau)$	$p_3(\tau)$	$p_4(\tau)$
$p_i(0)$	0	y_k	0	0
$p_i(T_k)$	y_{k+1}	0	0	0
$\dot{p}_i(0)$	0	0	0	d_k
$\dot{p}_i(T_k)$	0	0	d_{k+1}	0

Die Koeffizienten der Polynome ergeben sich aus den Charakteristika der einzelnen Verläufe. Jede der Kurve beschreibt eine fundamentale Eigenschaft des Splines. Während $p_1(t)$ und $p_2(t)$ den Anfangs- bzw. den Endwert vorgeben, bestimmen $p_3(t)$ und $p_4(t)$ die Steigung des Splines an den Intervallgrenzen. Die charakteristischen Eigenschaften zur Bestimmung der Koeffizienten der Polynome sind in Tabelle A.1 aufgelistet.

Literaturverzeichnis

- [1] GEIMER, M. ; KRUEGER, T. ; LINSEL, P.: *Co-Simulation, gekoppelte Simulation oder Simulatorkopplung?* 2006
- [2] BENEDIKT, M.: *Eine Kopplungsmethode für die nicht-iterative Co-Simulation*, Technische Universität Graz, Diss., 2012
- [3] BUSCH, M.: *Zur effizienten Kopplung von Simulationsprogrammen*, Universität Kassel, Deutschland, Diss., 2012
- [4] DRONKA, S.: *Die Simulation gekoppelter Mehrkörper- und Hydraulik Modelle mit Erweiterung für Echtzeitsimulation*, Technische Universität Dresden, Diss., 2004
- [5] OBERSCHELP, O. ; VÖCKING, H.: Multirate Simulation of Mechatronic Systems. In: *International Conference on Mechatronics* (2004), S. 404–409
- [6] TRCKA, M. ; WETTER, M. ; HENSEN, J.L.M: Comparison of co-simulation approaches for building and HVAC/R system simulation. In: *IBPSA Building Simulation Conference 10* (2007), S. 1418–1425
- [7] TRCKA, Marija: *Co-simulation for Performance Prediction of Innovative Integrated Mechanical Energy Systems in Buildings*, Technische Universiteit Eindhoven, Diss., 2008
- [8] TRCKA, M. ; WETTER, M. ; HENSEN, J.L.M.: An implementation of co-simulation for performance prediction of innovative integrated HVAC systems in buildings. In: *IBPSA Building Simulation Conference 11* (2009), S. 724–731
- [9] BENEDIKT, M. ; WATZENIG, D. ; HOFER, A.: Modelling and analysis of the non-iterative coupling process for co-simulation. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* (2013), S. 1–19
- [10] BENEDIKT, M. ; WATZENIG, D. ; ZEHENTER, J. ; HOFER, A.: Macro-Step-Size Selection and Monitoring of The Coupling Error For Weak Coupled Subsystems in the Frequency-Domain. In: *International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering 5* (2013), S. 1 – 12
- [11] KÜBLER, R. ; SCHIEHLEN, W.: Two Methods of Simulator Coupling. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 6 (2000), S. 93 – 113
- [12] BENEDIKT, M. ; HOFER, A.: Ein systemorientierter Koppelansatz für die nicht-iterative Co-Simulation. In: *Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung* 18 (2013), S. 111–134

- [13] OPPENHEIM, A. V. ; SCHAFER, R. W. ; BUCK, J. R. ; 2ND (Hrsg.): *Discrete- Time Signal Processing*. Prentice-Hall, Inc, 1999
- [14] BACH, J.B. ; VOSS, Egon (Hrsg.): *Sechs Suiten Violoncello solo BWV 1007 -1012*. G. Henle Verlag, 2000
- [15] CARON, J.: Notes on the Theory of Modulation. In: *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of 10* (1922), S. 57 – 64
- [16] CARSON, J. ; FRY, T. C.: Variable Frequency Electric Circuit Theory with Application to the Theory of Frequency Modulation. In: *Bell System Tech. J.* 16 (1937), S. 513– 540
- [17] VILLE, J.: Theorie et Application de la Notion de Signal Analytic. In: *Cables et Transmissions 2A* (1948), S. 61–74
- [18] SELIN, I.: *Theory and Application of the Notion of Complex Signal*. 1958
- [19] GABOR, D.: Theory of Communication. In: *Proc. IEE* vol. 93 (1946), S. 429 – 457
- [20] BOASHASH, B.: Estimation and Interpreting The Instantaneous Frequency of a Signal - Part1: Fundamentals. In: *Proceedings of the IEEE* 80 (1992), S. 520 – 538
- [21] LEON, F. P. ; KIENCKE, U. ; JÄKEL, H. ; 5 (Hrsg.): *Signale und Systeme*. Oldenbourg, 2011
- [22] MILLER, H. ; MATTUCK, A.: *Differential Equations*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <http://ocw.mit.edu>, Spring 2010
- [23] QUINN, B.G. ; HANNAN, E. J. ; UNIVERSITY, Cambridge (Hrsg.): *The Estimation and Tracking of Frequency*. Cambridge University Press, 2001
- [24] BOASHASH, B. ; JONES, G. ; O'SHEA, P.: Instantaneous Frequency of Signals: Concepts, Estimation Techniques and Application. In: *Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing* 1152 (1989), S. 382–400
- [25] BOASHASH, B. ; O'SHEA, P. ; ARNOLD, M.J.: Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation: A Comparative Study. In: *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations* 1348 (1990), S. 126– 148
- [26] KOOTSOOKOS, P. J.: A Review of the Frequency Estimation and Tracking Problems / CRC for Robust and Adaptive Systems. 1999. – Forschungsbericht
- [27] KIENCKE, U. ; SCHWARZ, M. ; WEICKERT, T. ; 1 (Hrsg.): *Signalverarbeitung Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren*. Oldenbourg, 2008
- [28] FEICHTINGER, H. G. ; STROHMER, T. ; 1 (Hrsg.): *Gabor Analysis ans Algorithms, Theory and Applications*. Birkhauser, 1998
- [29] COHEN, L.: Time-Frequency Distribution - A Review. In: *Proc. IEEE* V77, No / (1989), S. 941 – 981

- [30] LOUIS, A. K. ; MAASS, P. ; RIEDER, A. ; LOUIS, A. K. (Hrsg.): *Wavelets*. Teubner, 1998
- [31] BERGH, H. ; EKSTEDT, F. ; LINDBERG, M. ; STERN, M. (Hrsg.): *Wavelets mit Anwendungen in Signal- und Bildbearbeitung*. Springer-Verlag, 1999
- [32] BOASHASH, B.: Estimation and Interpreting The Instantaneous Frequency of a Signal - Part1: Algorithms and Application. In: *Proceedings of the IEEE* 80 (1992), S. 540 – 568
- [33] KAY, S.: Statistically/ Computationally Efficient Frequency Estimation. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing* 4 (1988), S. 2292 – 2295
- [34] HUANG, N. E. ; SHEN, Z. ; LONG, S. R. ; WU, M. C. ; SHIN, H. H. ; ZHENG, Q. ; YEN, N. ; TUNG, C.C. ; LIU, H. H.: The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-staionary time series analysis. In: *The Royal Society* 454 (1998), S. 903 – 995
- [35] RILLING, G. ; FLANDRIN, P. ; GONVALVES, P.: On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms. In: *Nonlinear Signal and Image Processing*, 2003
- [36] RAO, T. S.: The Fitting of Non-stationary time-series Models with time-dependent Parameters. In: *Journal of the Royal Statistical Society* 32 (1970), S. 312–322
- [37] RATO, R. T. ; ORITIGUEIRA, M. D. ; BATISTA, A. G.: On the HHT, its problems, and some solution. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 (2008), S. 1374 – 1394
- [38] MOLER, Cleve ; 1 (Hrsg.): *Numerical Computing with Matlab*. Society for Industrial Mathematics, 2004
- [39] PLATO, R. ; RUSSKAMP, U. Schmickler-Hirzebruch P. (Hrsg.): *Numerische Mathematik kompakt, Grundlagenwissen für Studium und Praxis*. Vieweg, 2006
- [40] SCHABACK, R. ; WENDLAND, H. ; (Hrsg.): *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, 2005
- [41] BOOR, C. de ; MORDSEN, J.E. (Hrsg.) ; SIROVICH, L. (Hrsg.): *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978
- [42] PRAH, A.Y. A. ; OKINE, N.O. A.: Comparative study of Hilbert - Huang - transform, Fourier transform and wavelet transform in pavement profile analysis. In: *Vehicle System Dynamics* 47 (2008), S. 437–456
- [43] MEESON, R. N.: HHT Sifting and Adaptive Filtering / Institute For Defense Analyses. 2003. – Forschungsbericht
- [44] MARAGOS, P. ; KAISER, J.F. ; QUATIERI, T.F.: Energy Separation in Signal Modulation with Application to Speech Analysis. In: *Signal Processing* 41 (1993), S. 3024 – 3051
- [45] MARAGOS, P. ; POTAMIANOS, A.: Higher order differential energy operator. In: *Signal Processing Letters* 2 (1995), S. 152 – 154

- [46] IEM, Beyeong-Gwan: Generalization of an Instantaneous Frequency Estimator Based on the Higher Order Differential Energy Operator. In: *TECON 2008* 10 (2008), S. 1–4
- [47] TEAGER, H. M.: Some Observation on Oral Air Flow During Phonation. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing* 5 (1980), S. 599 – 601
- [48] KAISER, J. F.: On a simple algorithm to calculate the energy of a signal. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing* 1 (1990), S. 381–384
- [49] KAISER, J. F.: On Teager’s Energy Algorithms and Its Generalization to Continuous Signals. In: *Digital Signal Processing Workshop* 4 (1990), S. 149–152
- [50] KAISER, J. F.: Some useful properties of Teager’s energy operators. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing* 3 (1993), S. 149 – 152
- [51] FISCHER, G.: *Echtzeitspektralanalyse mit AR-Modellen*. Skript, 2005
- [52] LJUNG, L. ; 2 (Hrsg.): *System Identification, Theory for the user*. Prentice-Hall, Inc, 2009
- [53] HAYES, M. H.: *Statistical Digital Signal Processing and Modelling*. John Wiley & Sons, INC., 1996
- [54] NELLES, O. ; 1 (Hrsg.): *Nonlinear System Identification*. Springer-Verlag, 2001
- [55] PALLY, F. K.: *Implementaion of Instantaneous Frequency Estimation based on Time-Varying AR Modeling*, Polytechnic Institute, State University of Virginia, Diplomarbeit, 2009
- [56] FELSENSTEIN, E.: *Yule-Walker Gleichung für singuläre AR Systeme*, Institut für Wirtschaftsmathematik der Technischen Universität Wien, Diplomarbeit, 2010
- [57] SHARMAN, K. ; FRIEDLANDER, B.: Time-Varying Autoregressive Modeling of a class of nonstationary Signals. In: *Aucoustic, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP* 9 (1984), S. 227 – 230
- [58] RUDOY, D. ; QUATIERI, T. F. ; WOLFE, P.J.: Time-Varying Autoregressive in Speech: Detection Theory and Application. In: *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions* 19 (2011), S. 977 – 989
- [59] HAJIMOLAHOSEINI, H. ; TABAN, M. R. ; ABUTALEBI, H. R.: Improvement of Extended Kalman Filter Frequency Tracker for Nonstationary Harmonic Signals. In: *International Symposium on Telecommunications* 10 (2008), S. 592 – 597
- [60] BITTANTI, S. ; SAVARESI, S. M.: On the Parameterization and Design of an Extended Kalman Filter Frequency Tracker. In: *Transactions on automatic control* 45 (2000), S. 1718 – 1724
- [61] HAYKIN, S. ; 1, Auflage (Hrsg.): *Kalman Filtering and Neural Networks*. John Wiley & Sons, INC., 2001

- [62] KIM, P ; HUH, L (Hrsg.): *Kalman Filter for Beginners with MATLAB Examples*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2010
- [63] RUHM, K.H: *Stationäre, Nichtstationäre Signale*. Internet-Portal „Wissenschaft und Technik des Messens“, www.mmm.ethz.ch/dok01/d0000374.pdf, 2008
- [64] YIP, L.: *Realtime Empirical Mode Decomposition for Intravascular Bubble Detection*, School of Engineering and Physical Sciences, James Cook University, Diplomarbeit, 2010
- [65] MARAGOS, P. ; KAISER, J.F. ; QUATIERI, T. F.: On Amplitude and Frequency Demodulation Using Energy Operator. In: *Signal Processing* 41 (1993), S. 1532 – 1550