



Christian Schmollngruber, BSc

# **Untersuchungen zu Verankerungsdetails bei Betontürmen von Windenergieanlagen**

## **MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Bauingenieurwissenschaften - Konstruktiver Ingenieurbau

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuer

O. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Viet Tue  
Dipl.-Ing. Oliver Reicht, Dipl.-Ing. Dipl.-Ing. Werner Theiler

Institut für Betonbau

## **Eidesstattliche Erklärung**

### ***Affidavit***

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

*I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.*

---

Datum/Date

---

Unterschrift/Signature

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Nguyen Viet Tue, der durch seinen enthusiastische und freundliche Art im Hörsaal mein Interesse für den Betonbau geweckt und damit entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Er hat dieses interessante Thema vorgeschlagen und die Bearbeitung in den Räumlichkeiten des Instituts ermöglicht. Dafür und für seine Unterstützung und Förderung während der Arbeit bin ich ihm sehr Dankbar.

An dieser Stelle auch ein Dankeschön an Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Guggenberger für die Unterstützung. Sein umfangreiches Wissen im Bereich der Schalentragerwerke war sehr hilfreich.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Betreuern Dipl.-Ing. Oliver Reicht und Dipl.-Ing. Dipl.-Ing. Werner Theiler für die angenehme Zusammenarbeit und dafür, dass sie mir bei der Ausarbeitung der vorliegenden Arbeit große Freiheit ließen eigene Ideen einzubringen und mir bei Fragen immer zur Seite standen.

Bei meinen Studienkollegen möchte ich mich für die Hilfsbereitschaft und die humorvolle Atmosphäre im Studium bedanken. Insbesondere durch die lebhaften Diskussionen im Freundeskreis der 'Gruppe 1' wird die Zeit an der Technischen Universität Graz stets in guter Erinnerung bleiben.

Graz, im September 2014

Christian Schmollngruber

## **Kurzfassung**

### Untersuchungen zu Verankerungsdetails bei Betontürmen von Windenergieanlagen

Die Krafteinleitung des Vorspannsystems stellt bei der Entwicklung von modularen Betontürmen für Windenergieanlagen eine wesentliche Komponente zur Umsetzbarkeit dar. Die Beanspruchung des Turmschafts in den Einleitungsbereichen ist sehr komplex und bedarf einer genaueren Untersuchung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die externe Vorspannkrafteinleitung an konsolenartigen Kreisringträgern im Bereich des Turmkopfes untersucht. Ziel ist es, das Tragverhalten dieser Betonelemente zu analysieren und durch Optimierung der Geometrie die sichere Kraftübertragung vom Ringträger auf den Betonschaft zu gewährleisten.

Mithilfe einer analytischen Berechnung wurde zunächst das Tragverhalten eines rotations-symmetrisch belasteten Kreisringträgers grundlegend studiert. In einer anschließenden Parameterstudie konnte der Einfluss der Geometrie auf den Kraftfluss für unterschiedliche Belastungssituationen geklärt werden. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wurden Vorschläge zur Ausführung der Verankerungsdetails an einem konkreten Turmentwurf ausgearbeitet. Für diese Detailbetrachtungen wurden linear elastische Finite-Elemente-Berechnungen an geeigneten Modellen durchgeführt.

Die Erkenntnisse zur optimalen Geometrieauslegung, in Verbindung mit den vorgestellten Berechnungsmodellen, bilden eine gute Grundlage für die Dimensionierung von Verankerungskonstruktionen für externe Vorspannsysteme bei Betontürmen.

## **Abstract**

### Investigation of Anchorage Elements in Concrete Towers of Wind Energy Plants

In the design of modular concrete towers of wind energy plants the structural behaviour of anchorage elements for prestressing systems is considered to play the most important role, that decisively influences the feasibility of the tower. The stress states of the tower shaft in these areas are complex. That requires intensive investigation to get comprehensive information of this behaviour.

In this thesis, the load transfer of prestressing forces in console-like ring girders on the top of the tower as well as the structural behaviour are investigated. Through optimising the geometry, the save load transfer from the ring girder to the concrete shaft can be ensured.

At first the structural behaviour of a rotationally symmetrical loaded ring girder is fundamentally studied. Subsequently, parametric study on the effect of different girder geometries on the flow of forces is performed. On the basis of these, anchorage elements on an actual tower concept have been optimised using linear-elastic finite element calculations.

The results of geometry optimisation together with the presented calculation models form a good basis for dimensioning of anchorage elements for prestressed concrete towers.

# Inhaltsverzeichnis

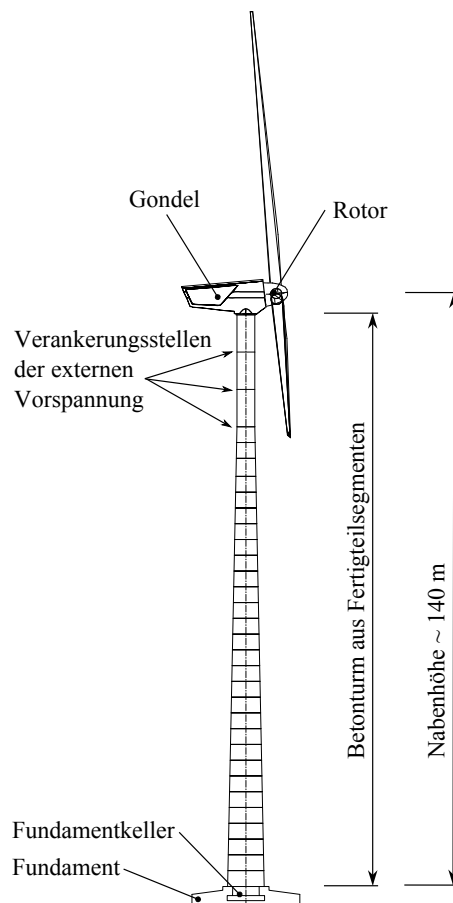
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Zielsetzung und Inhalt der Arbeit . . . . .	2
<b>2. Spannkrafteinleitung bei Betontürmen</b>	<b>3</b>
2.1. Vorspannsysteme und Anwendung bei Betontürmen . . . . .	3
2.2. Turmentwurf . . . . .	5
2.3. Verankerungsdetails am Turm der Windenergieanlage . . . . .	8
2.4. Belastungen . . . . .	9
<b>3. Berechnungsmodelle</b>	<b>16</b>
3.1. Tragverhalten und Modellbildung . . . . .	16
3.2. Analytisches Modell . . . . .	18
3.3. Numerische Modelle . . . . .	25
3.4. Vergleich der Modelle und Anwendung . . . . .	28
<b>4. Geometrische Einflüsse</b>	<b>32</b>
4.1. Parameter . . . . .	32
4.2. Kritische Spannungspunkte . . . . .	33
4.3. Geometriestudie . . . . .	34
4.4. Empfehlungen zur Auslegung der Verankerungsdetails . . . . .	48
<b>5. Detailuntersuchung</b>	<b>49</b>
5.1. Allgemeines . . . . .	49
5.2. Detail A . . . . .	53
5.3. Detail B . . . . .	62
5.4. Detail C . . . . .	68
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>74</b>
6.1. Zusammenfassung . . . . .	74
6.2. Ausblick . . . . .	75
<b>A. Erläuterung zur analytischen Berechnung - Formelwerk</b>	<b>78</b>
<b>B. Beispiel zur analytischen Berechnung</b>	<b>86</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation

Die umweltschonende Stromerzeugung mit modernen Windkraftanlagen (WEA) leistet heute einen wichtigen Beitrag für eine zukunftsfähige Energieversorgung. Um diese Energiequelle wirtschaftlich nutzen zu können, sind vor allem im Binnenland große Turmhöhen erforderlich. Bei diesen hohen Turmkonstruktionen kommt die Spannbetonbauweise zum Einsatz. Industriell gefertigte Betonrohrsegmente werden beim Turmbau aufeinander gestellt und durch vertikales Vorspannen fixiert. Die Einleitung der Vorspannkkräfte erfolgt an Betonelementen am Turmkopf. Diese hoch beanspruchten Krafteinleitungspunkte des Vorspannsystems stellen eine wesentliche Komponente zur Umsetzbarkeit der Turmkonstruktion dar und erfordern besondere Aufmerksamkeit bei der Auslegung.

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zum besseren Verständnis des Tragverhaltens und zur optimalen Auslegung dieser zur Spannkrafteinleitung erforderlichen Betonelemente geleistet werden.



**Abb. 1.1.:** Übersicht WEA

Die Ausgangssituation für diese Arbeit bildet ein Turmentwurf des Instituts für Betonbau mit einer Nebenhöhe von 140 m, welcher rein aus Betonfertigteilsegmenten aufgebaut und durch extern geführte Spannglieder vorgespannt wird. Eine schematische Übersicht dieser WEA und die Lage der drei Verankerungsstellen am Turmkopf ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

Die Abmessungen des Turmes und die erforderlichen Vorspannkräfte sind im vorliegenden Entwurfsplan enthalten. Die horizontalen Einwirkungen wurden laut Vorgaben am Institut festgelegt. Die vertikale Belastung aus dem Gondel- und Rotorgewicht wurden zu Beginn dieser Arbeit aus Herstellerangaben ermittelt. Ein erster Vorschlag zur Geometrie der Verankerungskonstruktionen ist im Entwurfsplan dargestellt. Die externen Spannglieder sollen an konsolenartigen Ringträgern verankert werden. Für die Festlegung der Abmessungen dieser Ringträger wurden noch keine detaillierten Berechnungen durchgeführt, weshalb das komplexe Tragverhalten der hoch belasteten Kreisringträger nur unzureichend bekannt ist.

## 1.2. Zielsetzung und Inhalt der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Tragverhalten der Verankerungskonstruktionen für die verschiedenen Lastfälle zu analysieren und durch die Entwicklung und Optimierung der Geometrie die sichere Kraftübertragung vom Ringträger auf den Betonschaft des Turmes zu gewährleisten. Als Ergebnis soll eine allgemeine Aussage zur Geometrie und zum Kraftfluss erfolgen. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen soll die Geometrie der drei Kreisringträger am Turmkopf anhand bestimmter Kriterien optimiert und ein Ausführungsvorschlag erarbeitet werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier wesentliche Abschnitte. Im ersten Teil der Arbeit wird ein Überblick über die verschiedene Vorspannsysteme bei WEA-Türmen gegeben, bevor auf den konkreten Turmentwurf und die Belastungen eingegangen wird. Im zweiten Teil werden die Berechnungsmodelle zur analytischen und linear elastischen FE-Berechnung der Verankerungskonstruktionen vorgestellt. Die Beschreibung des allgemeinen Tragverhaltens der Kreisringträger anhand der entwickelten Modelle findet sich ebenfalls in diesem Teil der Arbeit. Mit Hilfe dieser Modelle werden im dritten Teil der Arbeit die geometrischen Einflüsse auf das Tragverhalten analysiert und Angaben zur optimalen Geometrie gemacht. Der vierte Teil der Arbeit befasst sich mit der Geometriefindung und Detailauslegung der drei konkreten Verankerungsstellen am Turm der WEA. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Erkenntnisse und gibt einen Ausblick auf mögliche weitere zu untersuchende Aspekte.

Im Anhang A zur Arbeit ist das Formelwerk zur analytischen Berechnung der gekoppelten Kreiszyinderschalen und im Anhang B ein durchgerechnetes Beispiel beigelegt.



## 2. Spannkrafteinleitung bei Betontürmen

Um die Windenergie im Binnenland wirtschaftlich nutzen zu können, sind große Turmhöhen erforderlich. Diese Türme mit Narbenhöhen über 100 m werden vorwiegend in der Beton- bzw. Hybridbauweise ausgeführt. Die vorgespannten Betontürme können prinzipiell in Ortbeton- oder in Fertigteilbauweise hergestellt werden, wobei Spannbetontürme aus Ortbeton heute für kommerzielle Windkraftanlagen aus Kostengründen kaum mehr in Frage kommen [8]. Die Fertigteilbauweise mit aufeinander gesetzten Fertigteilsegmenten ist deutlich wirtschaftlicher und auch für große Turmhöhen anwendbar. Die Tragwirkung des Betonschaftes wird bei dieser Konstruktionsweise durch vertikales Zusammenspannen der einzelnen Turmsegmente erreicht. Als Vorspannsystem kommen dabei intern oder extern geführte Spannglieder zum Einsatz.

Neben der Sicherstellung der Turmtragwirkung erfüllt die vertikale Vorspannung meist zwei weitere wesentliche Aufgaben. Zum einen soll sie gewährleisten, dass sich das Spannbetontragwerk unter den planmäßigen Einwirkungen im Zustand I befindet. Dadurch kann eine Fugenöffnung bzw. eine Rissbildung weitgehend vermieden und die Verformung des Betonturms gering gehalten werden. Zum anderen ist neben den statisch erforderlichen Aspekten die Vorspannung für die dynamische Auslegung des Turmes wichtig [5].

Hinsichtlich der Vorspannung spielen die Krafteinleitungspunkte je nach Wahl des Vorspannsystems eine wesentliche Rolle bei der Ausbildung des Turmschafts. Die Verankerung der Spannglieder kann an Stahladaptern oder Betonelementen erfolgen, wobei die Lage und Anzahl dieser Krafteinleitungspunkte je nach Turmbauart unterschiedlich ist. Eine Adapterkonstruktion aus Stahl kommt vorwiegend bei hybriden Turmkonstruktionen zum Einsatz und befindet sich am Übergang zwischen Beton- und Stahlschaft. Wird die Vorspannkraft an Betonelementen eingeleitet, sind meist mehrere Krafteinleitungspunkte am Turmkopf vorgesehen, an denen die Spannkraft abgestuft in den Betonturm eingeleitet wird. Der untere Krafteinleitungspunkt befindet sich bei beiden Bauarten im Spannkeller im Fundament der Windkraftanlage.

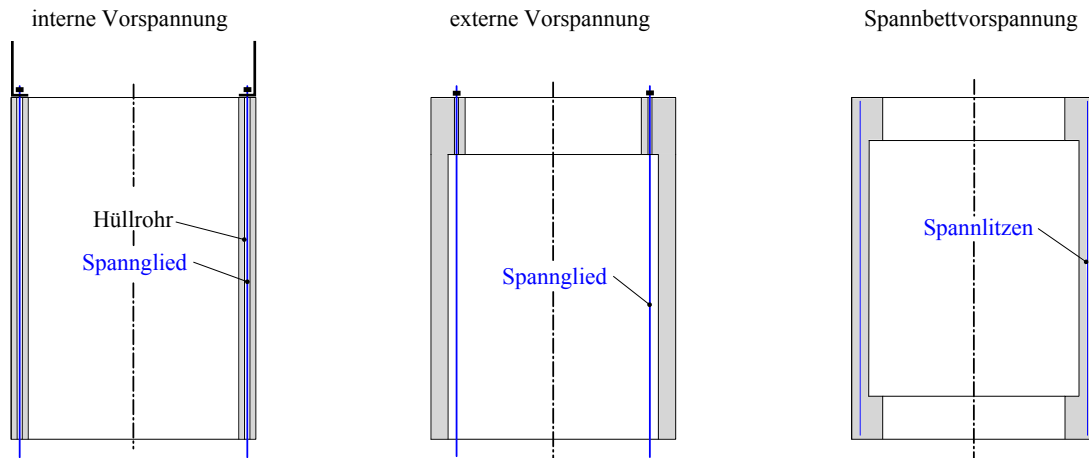
Im Zuge dieser Arbeit wird an einem reinen Fertigteilbetonturm die Krafteinleitung an Betonelementen sowie die Kraftweiterleitung in den Schaft für die Verankerungsstellen am Turmkopf untersucht.

### 2.1. Vorspannsysteme und Anwendung bei Betontürmen

Die bei Betontürmen verwendeten Vorspannsysteme können über die Lage und Art der Spannglieder in drei Gruppen eingeteilt werden.

- interne Vorspannung mit und ohne Verbund
- externe Vorspannung
- Spannbettvorspannung

Diese unterschiedlichen Vorspannkonzeppte kommen sowohl bei Fertigteil- als auch bei Ortbeton-türmen zur Anwendung. In den folgenden Ausführungen werden Türme aus Fertigteilsegmenten betrachtet.



**Abb. 2.1.:** Vorspannsysteme bei Betontürmen

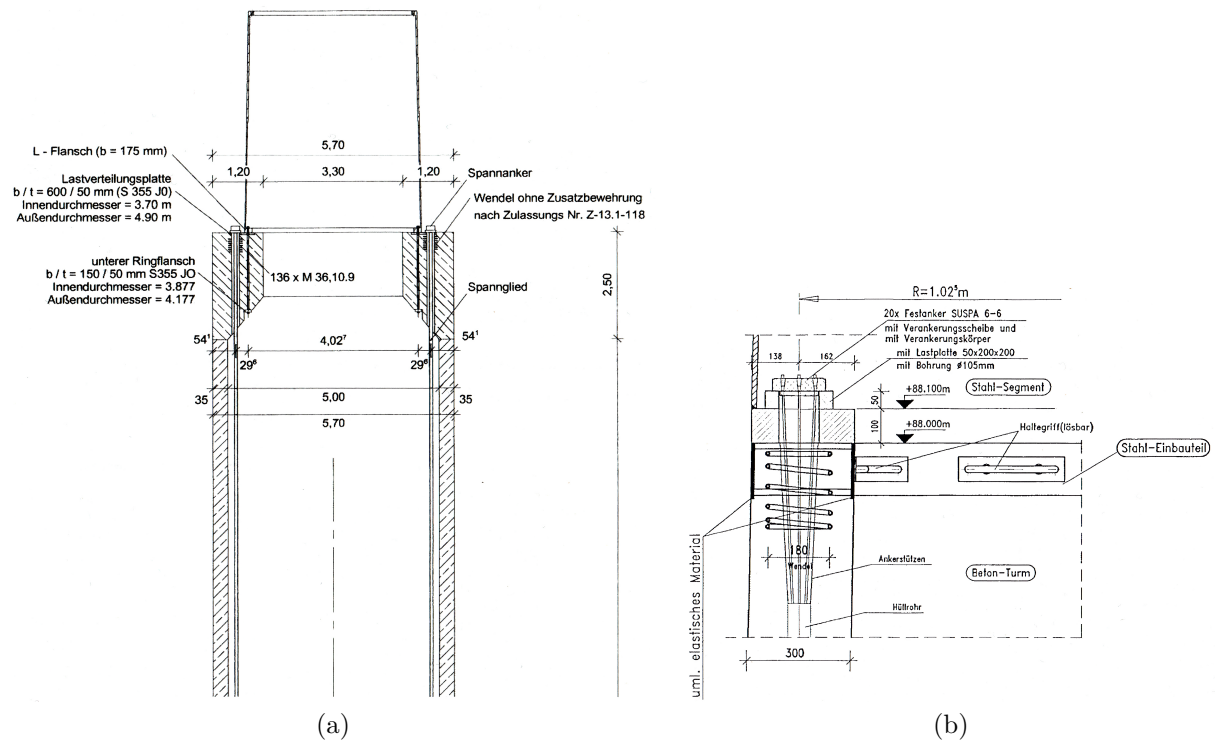
Bei der Turmmontage werden die im Fertigteilwerk hergestellten Segmente, welche an der Turmbasis aus Transportgründen aus zwei bis drei Teilsegmenten am Umfang bestehen, übereinandergestellt und ausgerichtet. Die horizontalen Lagerfugen werden entweder mit Fugenmörtel vergossen oder es erfolgt eine Verklebung der einzelnen Rohrsegmente mit Epoxidharz. Sind alle Segmente montiert, erfolgt das interne oder externe Vorspannen des Turmes.

Bei **interner Vorspannung** liegen die Spannglieder mittig in der Turmwand des Betonquerschnitts. Die Spannkabel werden von oben in die am Umfang verteilten Hüllrohre eingebracht, bis in den Spannkeller abgelassen und von dort aus vorgespannt. Handelt es sich um eine Vorspannung mit nachträglichem Verbund, werden die Hüllrohre zusätzlich vom Spannkeller aus verpresst [1].

Bei **externer Vorspannung** des Betonturms verlaufen die Spannglieder im Inneren des Turmes entlang der Turmwand. Diese werden vom Festanker am Turmkopf zum Spannkeller im Fundament der Windkraftanlage abgelassen und dort verankert.

Das externe Vorspannen des Turmschafts bietet einige Vorteile gegenüber dem internen Vorspannen. So ist zum Beispiel die Kontrolle und Auswechslung der Spannglieder jederzeit leicht möglich. Weiters können die horizontalen Lagerfugen als 'trockene Fugen' ohne Mörtelschicht ausgeführt werden, da keine Korrosionsprobleme an Spanngliedern in den Fugen auftreten können. Eine Auflistung weiterer Vorteile ist in [1] zu finden. Als Nachteil kann die aufwendigere Ausführung der Verankerungsstellen genannt werden. Im Gegensatz zur zentrischen Kräfteinleitung bei interner Vorspannung erfolgt bei externer Vorspannung die Kräfteinleitung immer exzentrisch zur Mittelfläche der Turmwand. Dies erfordert eigene Betonelemente zur Aufnahme der externen Spanngliedverankerungen.

In Abbildung 2.2 sind zwei Beispiele zur Ausführung der Kräfteinleitungspunkt bei intern und extern geführten Spanngliedern dargestellt.



**Abb. 2.2.:** Ausführungsbeispiele aus [5] und [1] zur Spanngliedverankerung am Turmschaft. In (a) ist der Adaptionbereich zwischen Spannbetonturm mit externer Vorspannung und den Stahlrohraufsatz dargestellt. Die Abbildung (b) zeigt einen bündigen L-Flansch-Anschluss auf einen Betonturm mit interner Vorspannung.

Bei der **Spannbettvorspannung** handelt es sich um Vorspannen mit sofortigem Verbund. Diese Art der internen Vorspannung wird mittels einzelnen Litzen oder Spanndrähten im Spannbett des Fertigteilwerks realisiert. Mit diesem Verfahren können kurze Masten aus Schleuderbeton oder einzelne Segmentteile des Rohrquerschnitts vorgespannt werden [8].

Beim Turmentwurf, der dieser Arbeit zugrunde liegt, wurde als Vorspannkonzzept eine externe Vorspannung gewählt. Neben dieser für das globale Tragverhalten des Turmes erforderlichen Vorspannung, kommt am oberen Turmsegment noch eine Spannbettvorspannung zum Einsatz.

## 2.2. Turmentwurf

Als Grundlage für diese Arbeit dient der Entwurf eines Turmes für eine Windenergieanlage aus extern vorgespannten Betonfertigteilsegmenten mit einer Nabenhöhe von 140 m. Dieser Turm wurde vom Institut für Betonbau der TU-Graz entwickelt und ist im Plan Nummer 12 vom 10.01.2012 dargestellt. Bei diesem Entwurf sind drei verschiedene Details für die Verankerung der externen Vorspannung vorgesehen. Abbildung 2.3 zeigt einen Auszug aus diesem Plan. Es sind der Turmschaft sowie die Bereiche der Spanngliedverankerung am Turmkopf dargestellt.

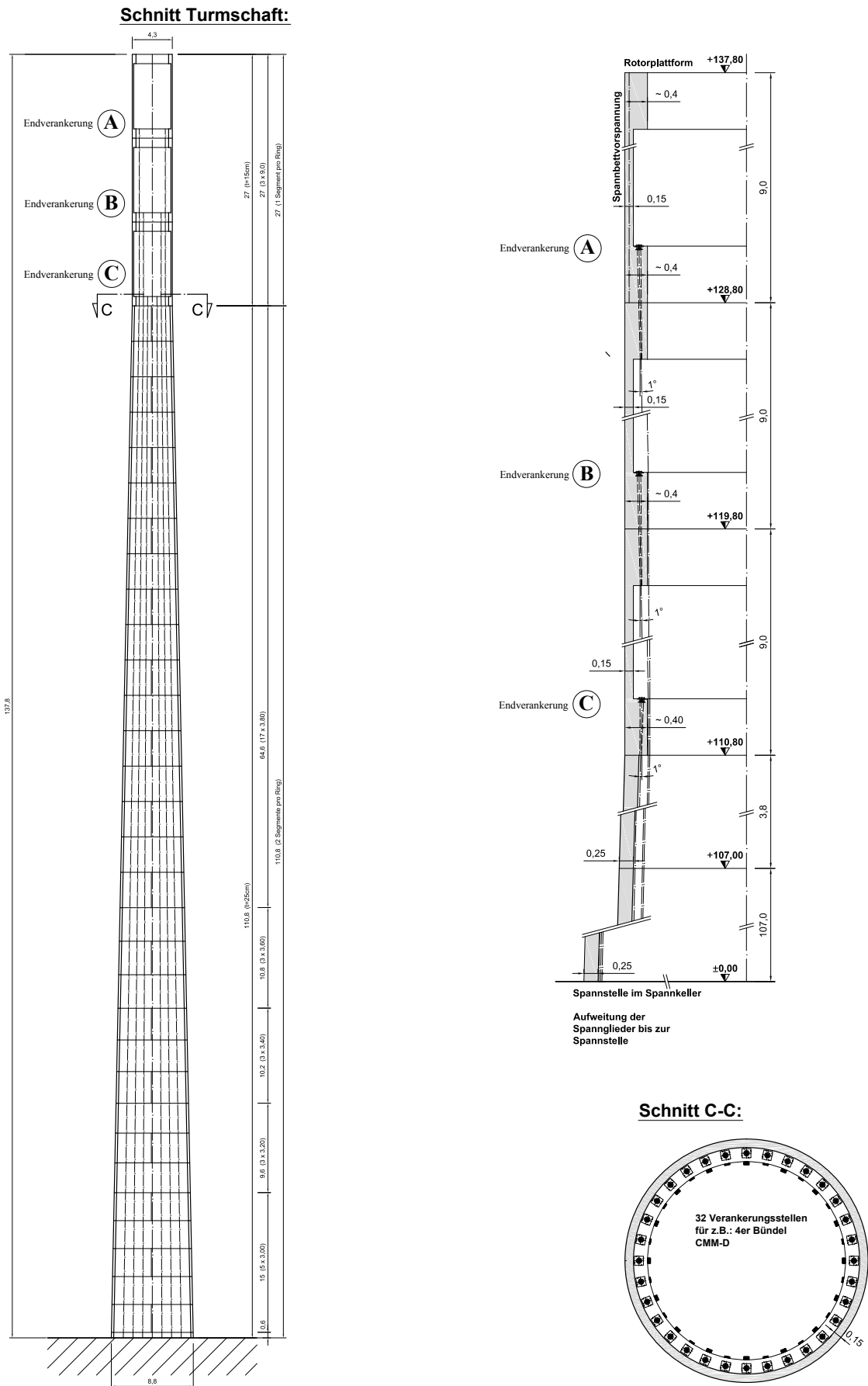


Abb. 2.3.: Übersicht Turmentwurf - Auszug aus Plan 12

## Geometrie und Material

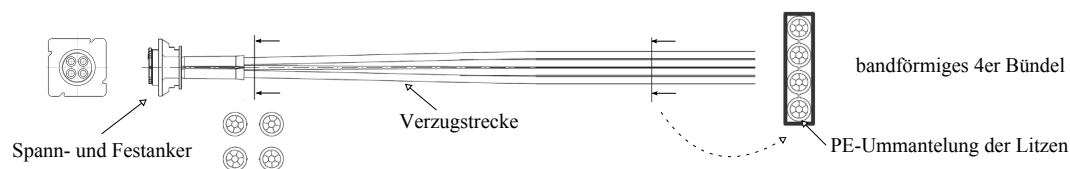
Der Turm mit einer Höhe von  $138\text{ m}$  wurde als reiner Betonturm mit zusammengespannten Fertigteilsegmenten entworfen. Der konische Turmschaft hat einen Fußdurchmesser von  $8,8\text{ m}$  und einen Kopfdurchmesser von  $4,3\text{ m}$ . Die kegelstumpfförmigen Ringsegmente im unteren Turmabschnitt haben eine maximale Höhe von  $3,8\text{ m}$  und bestehen jeweils aus zwei Segmenthälften. Der obere Turmabschnitt ab einer Höhe von  $111\text{ m}$  besteht aus drei zylindrischen Rohrabschnitten mit jeweils einer Länge von  $9,0\text{ m}$ . An den Übergängen der Rohrabschnitte befinden sich die drei Kreisringträger, in denen abgestuft jeweils ein Teil der erforderlichen Vorspannkraft eingeleitet wird. Die Turmwandstärke beträgt im unteren Teil  $25,0\text{ cm}$  und im oberen zylindrischen Teil  $15,0\text{ cm}$ . Die horizontalen Fugen zwischen den Segmenten werden als trockene Fugen ausgeführt. Die Vorspannung muss gewährleisten, dass die Fugen im Betriebszustand vollkommen überdrückt bleiben. Das oberste Turmsegment ist nicht durch die externe Vorspannung überdrückt. Um das auftretende Biegemoment aufnehmen zu können, ist für dieses Fertigteilsegment eine Spannbettvorspannung vorgesehen.

Als Betonklasse wird für die Segmente ein  $C70/85$  und in Teilbereichen ein  $C90/105$  laut EN 1992-1-1 vorgeschlagen.

## Vorspannsystem

Für das externe Vorspannen des Turmschafts soll ein Vorspannsystem des Typs VT-CMM eingesetzt werden. Die Spannglieder dieses Spannsystems bestehen aus vier bandförmigen angeordneten Litzen, die mit einem PE-Mantel umhüllt sind. Im Spann- und Festanker sind die einzelnen Litzen in einer quadratischen Ankerplatte fixiert. Das Spannsystem ist in der Zulassung ETA-06/0165 geregelt.

Beispielsweise könnte ein Spannglied mit der Bezeichnung CONA CMM 0406(four)-140 gewählt werden. Die größte zulässige Spannkraft während des Vorspannens laut EN 1992-1-1 ist bei diesem Typ auf  $P_{max} = 0,9 \cdot F_{p0,1} = 785\text{ kN}$  zu begrenzen.



**Abb. 2.4.:** VT-CMM Spannglied

Für die Auslegung der Verankerungsstellen sind die Abmessungen der Ankerplatten und die minimalen Rand- und Achsabstände laut Zulassung zu beachten. Die nachfolgend angeführten Abstände wurden für eine gewählte Betondeckung von  $c_{nom} = 30\text{ mm}$  berechnet.

Verankerungssystem:	CONA CMM 0406 (four)	
Abmessungen der Ankerplatte:	$a = 160\text{ mm}$	$b = 160\text{ mm}$
Minimale Randabstände:	$a_e = 160\text{ mm}$	$b_e = 120\text{ mm}$
Minimale Achsabstände:	$a_c = 300\text{ mm}$	$b_c = 220\text{ mm}$

Die Einleitung der Vorspannkraft erfolgt an drei unterschiedlichen Stellen im oberen Teil des Turmes. Am unteren Kreisringträger sollen am Umfang  $n = 32$  und an den beiden oberen Kreisringträgern  $n = 24$  Ankerplatten angeordnet werden. Die Spannanker aller Spannglieder befinden sich im Fundamentkeller der Windkraftanlage.

### 2.3. Verankerungsdetails am Turm der Windenergieanlage

In Abbildung 2.5 sind die drei Verankerungsdetails dargestellt. Diese drei Typen stammen aus dem oben vorgestellten Turmentwurf und kommen in ähnlicher Weise auch bei anderen Turmentwürfen vor. Die Krafteinleitungspunkte am Übergang zur Rotorplattform und die Verankerungsstellen der Festanker im Fundament sind nicht Teil dieser Arbeit.

Die Abmessungen  $H$  und  $B$  der Kreisringträger sowie der Abstand  $a$  der Vorspannkrafteinleitung wurden beim Turmentwurf ohne genauere Berechnungen zeichnerisch festgelegt. Sowohl diese Abmessungen als auch die Anordnung der horizontalen Lagerfuge sind daher noch variabel. Die Untersuchung dieser drei Details wird als Ergebnis einen Vorschlag für die optimale Geometrie der Kreisringträger und die Anordnung der Lagerfuge liefern.

#### Detail A

Dieses Detail ist im zylindrischen Turmabschnitt angeordnet und bildet die letzte Endverankerungsstelle für die externen Spannglieder. Neben dieser äußeren Belastung muss der Ringträger auch die Vorspannkrafteinleitung aus der Spannbettvorspannung aufnehmen können. Die 24 Ankerplatten sind gleichmäßig am Umfang verteilt. Die einzelnen Litzen der Spannbettvorspannung sind mittig in der oberen Turmwand angeordnet.

#### Detail B

Die zweite Verankerungsstelle befindet sich ebenfalls im zylindrischen Turmabschnitt. Im Unterschied zum Detail A werden an diesem Kreisringträger keine Spannlitzen im sofortigen Verbund verankert. Die externe Vorspannung wird über 24 gleichmäßig am Umfang verteilte Ankerplatten in den Ringträger eingeleitet. Neben dieser Belastung muss das Detail B die Lasten von oben aufnehmen und sicher nach unten weiterleiten.

#### Detail C

Dieser Ringträger ist die erste Endverankerungsstelle am Turmschaft und bildet den Abschluss zum letzten konischen Kreissegment. An diesem Krafteinleitungspunkt wird der größte Teil der Vorspannkraft abgesetzt. Dafür sind 32 Ankerplatten am Umfang vorgesehen. Zusätzlich muss dieser Ringträger sehr hohe Lasten aus den oberen Krafteinleitungspunkten aufnehmen und nach unten weiterleiten. Die Gesamtbeanspruchung ist bei diesem Detail am höchsten.

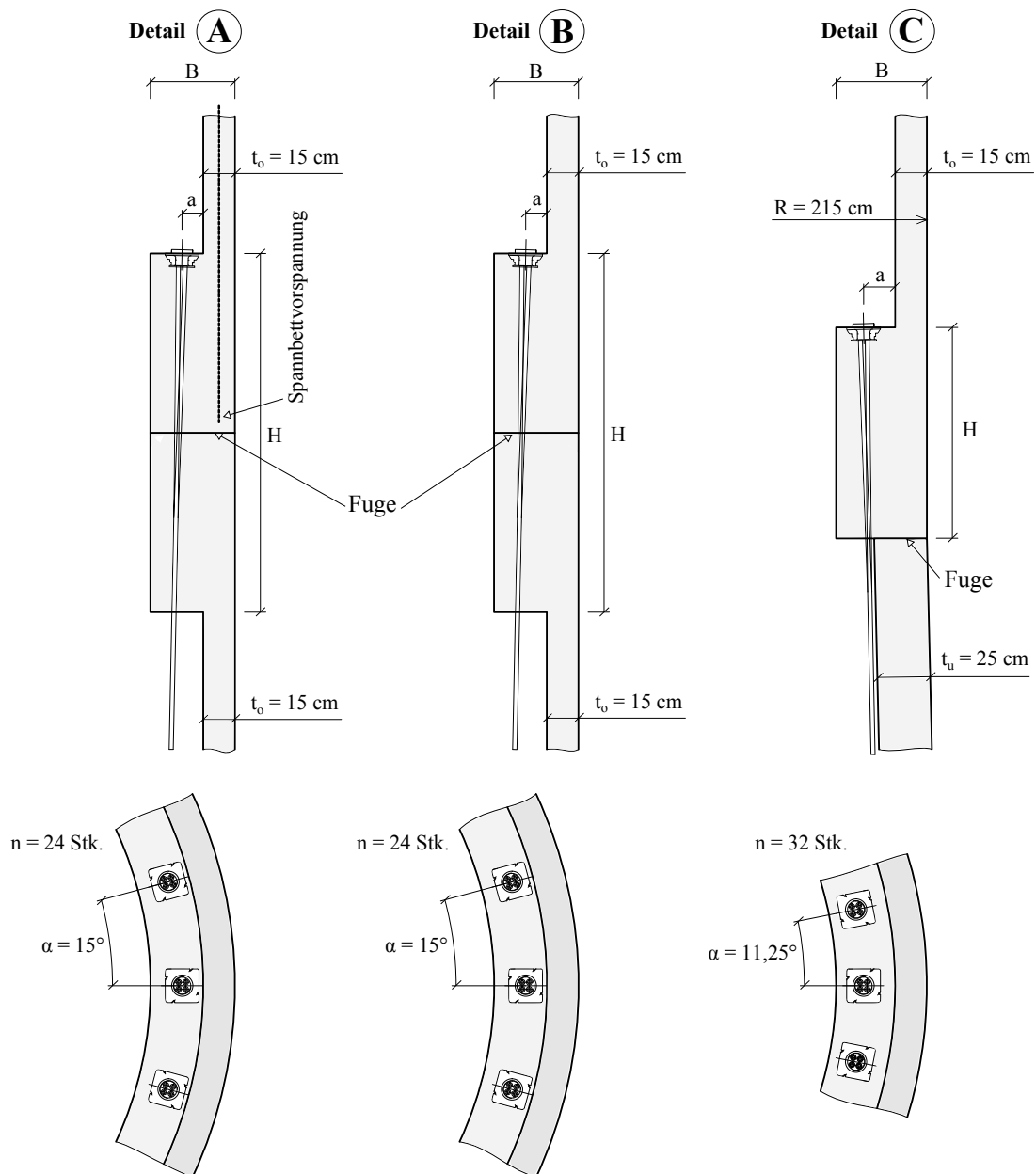


Abb. 2.5.: Verankerungsdetails

## 2.4. Belastungen

Um die Einwirkungen auf die Verankerungsdetails ermitteln zu können, wird für den Turm der Windenergieanlage eine sehr vereinfachte Lastannahme getroffen. Die Belastung gliedert sich in ständige Lasten aus Eigengewicht und externer Vorspannung und veränderliche Lasten, welche vorwiegend aus der Windbelastung stammen. Die ständigen Lasten bewirken eine symmetrische Beanspruchung und die Windlast, welche als horizontale Ersatzlast am Turmkopf angesetzt wird, bewirkt eine antimetrische Beanspruchung des Turmes.

### 2.4.1. Lastaufstellung

Das Eigengewicht der entsprechenden Turmabschnitte wurde über die vorgegebene Ausgangsgeometrie laut Plan Nr.12 ermittelt. Das Gewicht der gesamten Rotorplattform konnte durch die Auswertung von Hersteller Datenblättern eruiert werden. Insgesamt wurden 40 verschiedene Typen von aktuellen Windkraftanlagen mit Nennleistungen von 1,8 bis 6,15 MW ausgewertet. Bei Windkraftanlagen mit einer Nennleistung von 3 MW ergibt sich dabei ein durchschnittliches Gesamtgewicht für die Gondel inklusive Rotor von 1,9 MN. Diese Leistungsklasse wurde bei der Lastaufstellung zugrunde gelegt.

Folgende charakteristische Einwirkungen werden am Turm angesetzt:

#### Eigengewicht:

Eigengewicht Rotorplattform (Gondel + Rotor):  $F_G = 1,9 \text{ MN}$

Eigengewicht eines Rohrsegments mit  $L = 9 \text{ m}$ :  $F_R = 0,6 \text{ MN}$

#### Lasten aus externer Vorspannung:

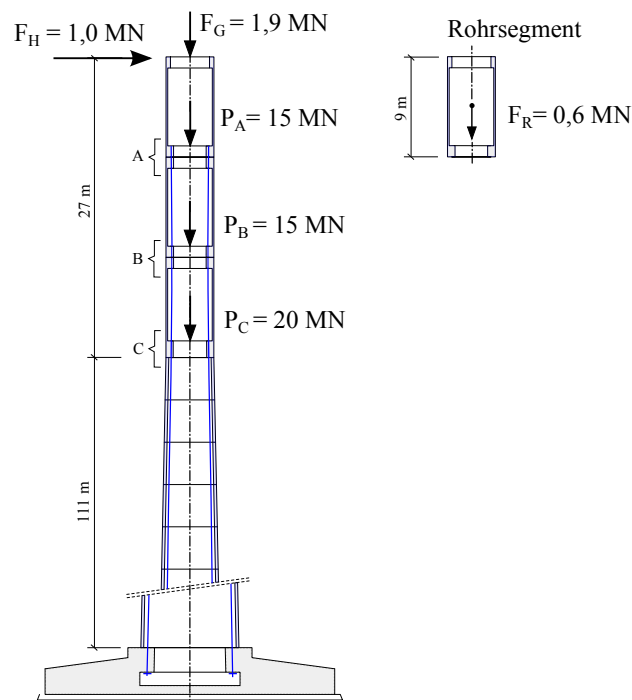
Endverankerung A:  $P_A = 15 \text{ MN}$

Endverankerung B:  $P_B = 15 \text{ MN}$

Endverankerung C:  $P_C = 20 \text{ MN}$

#### Horizontale Ersatzlast am Turmkopf:

Horizontalkraft:  $F_H = 1,0 \text{ MN}$



**Abb. 2.6.:** Einwirkungen auf den Turm

Die erforderlichen Vorspannkräfte werden aus einer statischen Vorbemessung übernommen. Der Dekompressionsnachweis ist dabei eines der Entwurfskriterien. Die Vorspannkräfte müssen



so groß gewählt werden, dass der Turm unter der maßgebenden Einwirkungskombination immer vollständig überdrückt bleibt. Diese Forderung ist laut Abbildung 2.7 für die angegebenen Vorspannkraften eingehalten.

Werden alle Lasten gleichzeitig aufgebracht, kann die gesamte globale Beanspruchung des Turmes für diese vereinfachte Lastaufstellung berechnet werden. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Abbildung 2.7 dargestellt. Die abgestufte Spanngliedverankerung führt zu einem stufenweisen Anstieg der Normalkraft im oberen Turmabschnitt. Aus diesem Normalkraftverlauf und dem linearen Momentenverlauf können die globalen Randspannungen am Turm ermittelt werden. Durch die gewählte Vorspannung bleibt die aus der Windlast zugbeanspruchte Randfaser des Turmes immer unter Druck. Diese Druckspannungen  $\sigma_{xa}$  sind am Turmfuß am geringsten. Die maximalen Druckspannungen am Turmschaft treten im Bereich der ersten Endverankerung am Detail C auf.

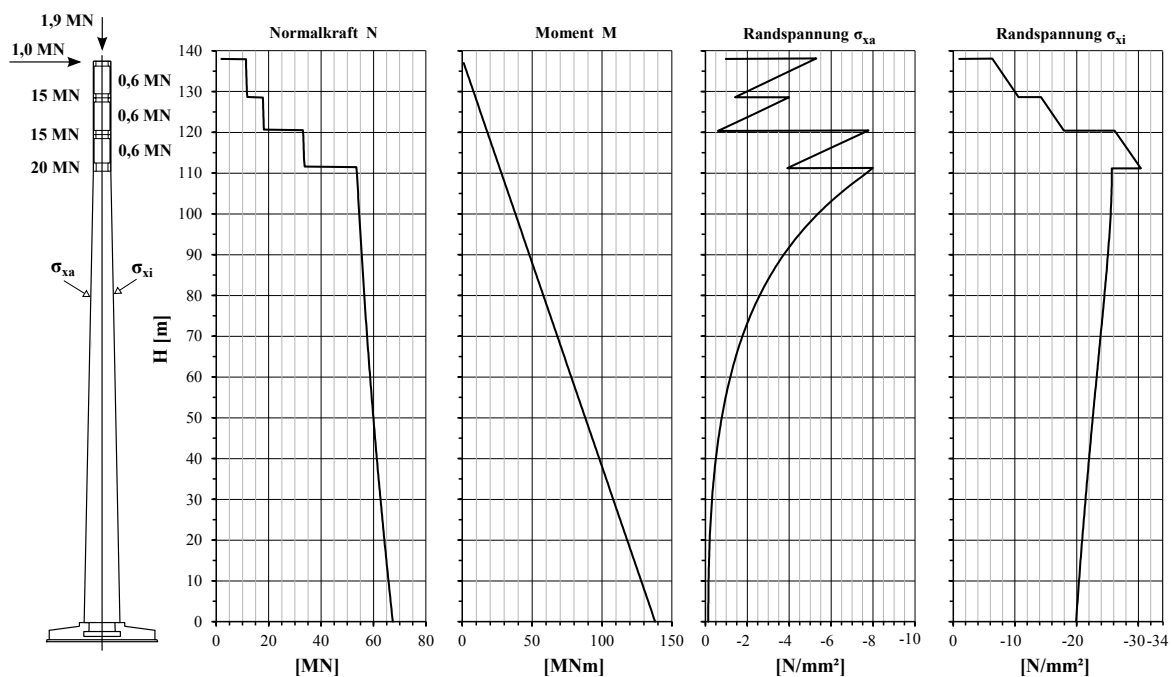


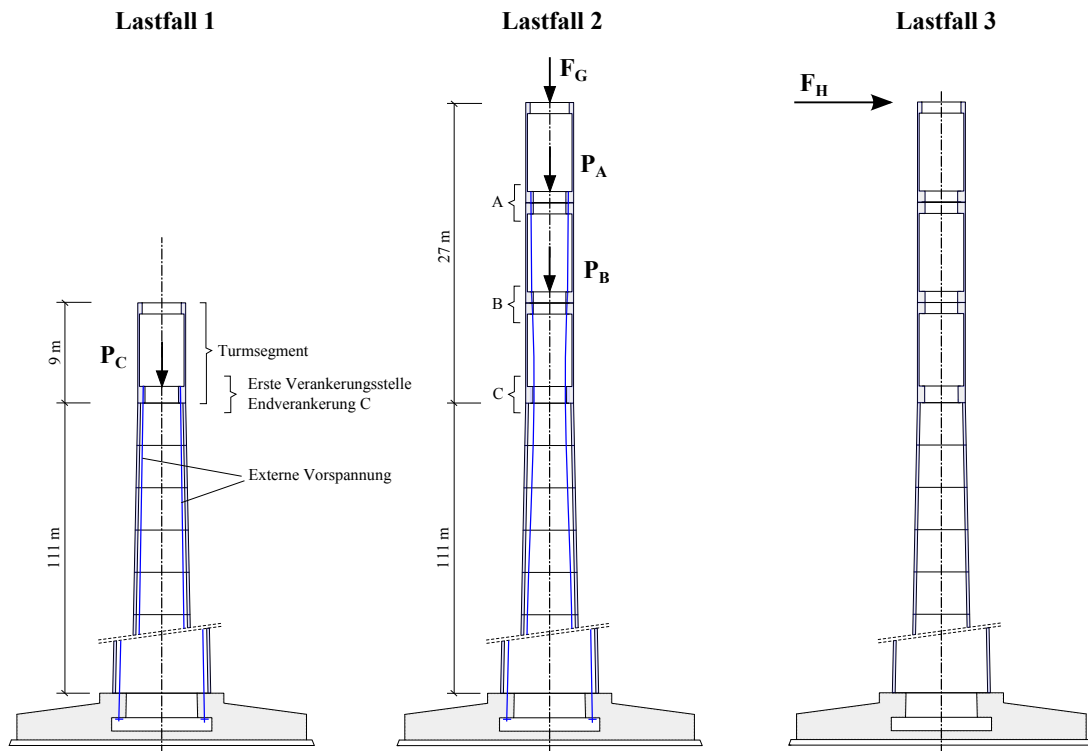
Abb. 2.7.: Globale Schnittkräfte und Randspannungen am Turm

### 2.4.2. Lastfälle

Für die Geometriestudie und Auslegung der Verankerungsdetails werden folgende drei Lastfälle betrachtet.

#### Lastfall 1 - Bauzustand

Für jedes Endverankerungsdetail gibt es einen maßgebenden Bauzustand. In diesem Lastfall ist der Turm bis zur jeweiligen Stelle der Endverankerung fertiggestellt und die Vorspannkraften werden als konstante Ringlast am Kreisringträger aufgebracht. Es wird angenommen, dass bereits im Bauzustand die volle Vorspannkraft, welche für den Betriebszustand erforderlich ist, aufgebracht wird. Als Belastung von oben wirkt das Eigengewicht des letzten Turmsegments. In Abbildung 2.8 ist der Bauzustand für die Endverankerung C dargestellt.



**Abb. 2.8.:** Lastfälle - Darstellung am Turm für Verankerungsdetail C

### Lastfall 2

Im Lastfall 2 wirken bis auf die Vorspannkraft am betrachteten Detail alle vertikalen Lasten. Dies sind die Lasten aus dem Eigengewicht des fertiggestellten Turms, die Belastung aus dem Rotor- und Gondelgewicht und die Lasten aus der externen Vorspannung an den oberhalb liegenden Verankerungsstellen. Die Summe dieser Belastungen führt zu einer konstanten vertikalen Ringlast am Schnitt oberhalb des betrachteten Details.

Dieser Lastfall ist nur für die übersichtlichere Berechnung der Schnittkräfte erforderlich. Ein Verankerungsdetail wird nie allein die Belastung aus dem Lastfall 2 erhalten, sondern immer eine Lastfallkombination. Denn erst wenn die Vorspannkraft am entsprechenden Detail abgesetzt wurde, kann weitergebaut werden und somit eine Last von oben in das Detail eingeleitet werden.

### Lastfall 3

Im Lastfall 3 wirkt nur eine horizontale Ersatzkraft am Kopf des Turmes. Diese simuliert die horizontalen Belastungen aus dem Betrieb der Windkraftanlage. Die Horizontallast verursacht eine reine Biegebeanspruchung mit linearem Momentenverlauf über die Turmhöhe. Aus dieser Biegebeanspruchung des Turmes resultieren globale Spannungen in Längsrichtung. Die Berechnung der Längsspannungen am Turm wird für alle maßgebenden Schnitte analog zu folgendem Beispiel durchgeführt.

**Beispiel:** Berechnung der Längsspannungen am Detail C laut Abbildung 2.9

Biegemoment:

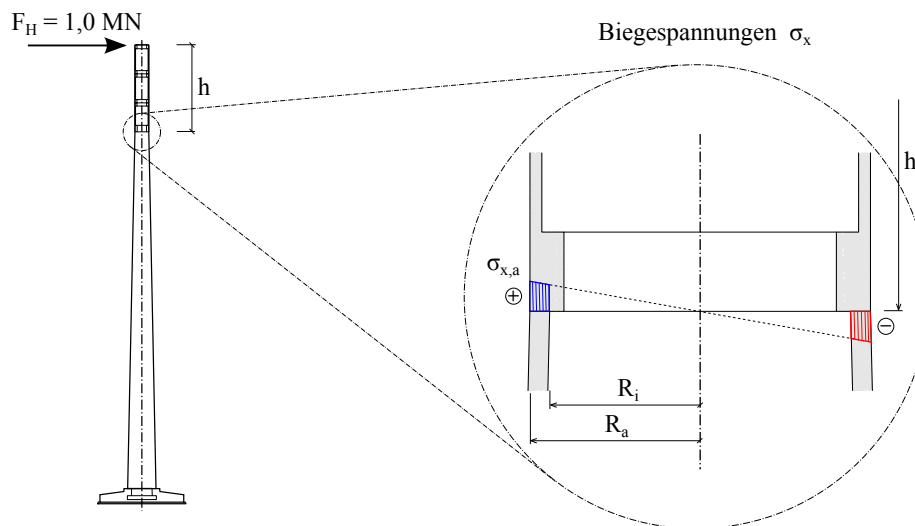
$$M = F_H \cdot h = 1000 \cdot 27,0 = 27000 \text{ kNm}$$

Trägheitsmoment:

$$I = \frac{(R_a^4 - R_i^4) \cdot \pi}{4} = \frac{(2,15^4 - 1,90^4) \cdot \pi}{4} = 6,5466 \text{ m}^4$$

Zug- und Druckspannungen in Längsrichtung an der Außenseite des Turmes:

$$\sigma_{x,a} = \frac{M}{I} \cdot R_a = \frac{27000}{6,5466} \cdot 2,15 \cdot 10^{-3} = \pm 8,87 \text{ N/mm}^2$$



**Abb. 2.9.:** Biegespannungen aus Lastfall 3 - Darstellung am Verankerungsdetail C

### Zusammenstellung der Einwirkungen für die einzelnen Lastfälle

Die Lasten aus der Lastaufstellung werden den jeweiligen Lastfällen zugeordnet und je Verankerungsdetail in der Tabelle 2.1 dargestellt. Das angegebene Biegemoment für den Lastfall 3 wird am Detail als konstanter Wert am unteren Ende des Kreisringträgers angenommen. Je nach Höhe des Trägers ergibt sich an dessen oberen Ende ein geringeres Biegemoment aus der horizontalen Belastung.

Für die Berechnung am Modell ist die Aufteilung der Punktlasten auf konstante Ringlasten am Umfang sowie eine Aufteilung der gesamten Vorspannkraft auf die jeweiligen Verankerungsstellen notwendig.

Die Lasten in der Tabelle sind alle mit den Radien  $R_V = 1,85 \text{ m}$  und  $R_o = 2,075 \text{ m}$  berechnet. Bei Detail C sind  $n = 32$  und bei Detail A und B  $n = 24$  Verankerungsstellen am Umfang vorgesehen.

Umrechnen der Vorspannkraft  $P$  und Normalkraft  $N$  in eine konstante Ringlast:

$$p = \frac{P}{U_V} = \frac{P}{2 \cdot R_V \cdot \pi} \quad \left[ \frac{MN}{m} \right] \quad n = \frac{N}{U_o} = \frac{N}{2 \cdot R_o \cdot \pi} \quad \left[ \frac{MN}{m} \right]$$

Vorspannkraft je Ankerplatte:

$$P_n = \frac{P}{n} \quad [MN]$$

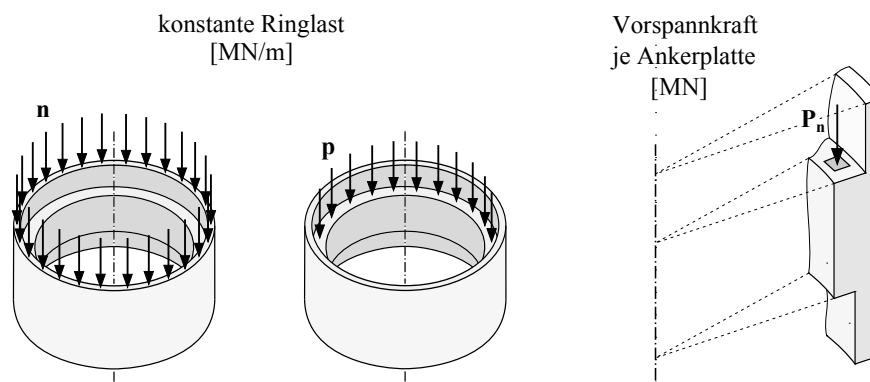
$U_V$  ... Umfang bei der Vorspannkrafteinleitung

$U_o$  ... Mittlerer Umfang der jeweils oberen Kreiszyinderschale

$n$  ... Anzahl der Verankerungsstellen am Umfang

**Tab. 2.1.:** Zusammenstellung der Einwirkungen

		<b>P</b>	<b>p</b>	<b>P<sub>n</sub></b>	<b>N</b>	<b>n</b>	<b>M</b>
<b>Detail A</b>		[MN]	$\left[ \frac{MN}{m} \right]$	[MN]	[MN]	$\left[ \frac{MN}{m} \right]$	[MNm]
Vorspannung	LF1	15	1,29	0,625	0,6	0,046	-
Normalkraft im Schnitt	LF2	-	-	-	2,5	0,19	-
Biegemoment	LF3	-	-	-	-	-	9
<b>Detail B</b>							
Vorspannung	LF1	15	1,29	0,625	0,6	0,046	-
Normalkraft im Schnitt	LF2	-	-	-	18,1	1,39	-
Biegemoment	LF3	-	-	-	-	-	18
<b>Detail C</b>							
Vorspannung	LF1	20	1,72	0,625	0,6	0,046	-
Normalkraft im Schnitt	LF2	-	-	-	33,7	2,59	-
Biegemoment	LF3	-	-	-	-	-	27



**Abb. 2.10.:** Legende zu den Einwirkungen

### 2.4.3. Lastfallkombinationen

Aus der Kombination der Lastfälle ergeben sich folgende drei Zustände:

<b>LF1</b>	=	Bauzustand
<b>LF1 + LF2</b>	=	Fertigstellungszustand
<b>LF1 + LF2 + LF3</b>	=	Betriebszustand

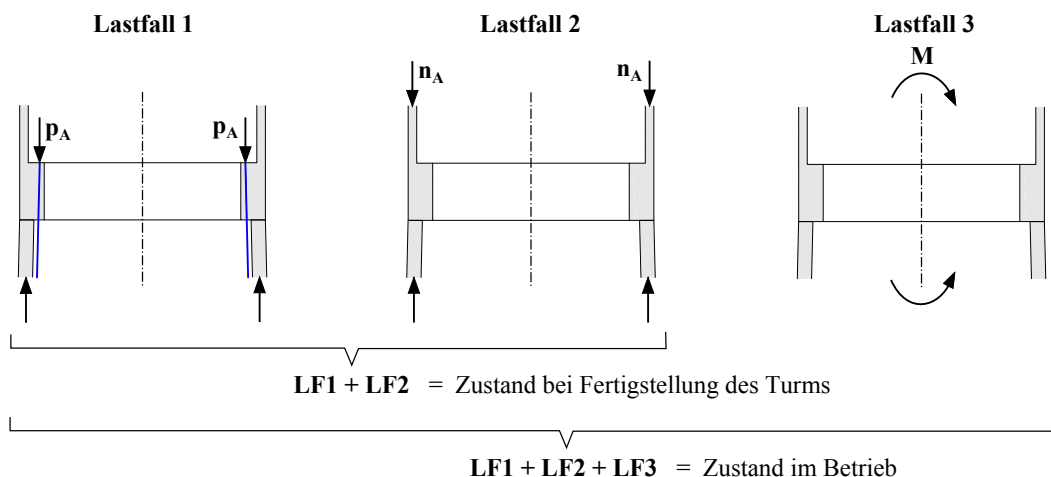
Die Lastfallkombination als Summe von Lastfall 1 und Lastfall 2 wird als Fertigstellungszustand bezeichnet. Dies ist jener Zustand kurz nach der Fertigstellung des Turmes, bei dem aber noch keine horizontalen Kräfte am Turm angreifen.

Die Summe aus Lastfall 1, 2 und 3 wird als Betriebszustand bezeichnet. Diese Lastfallkombination soll die Spitzenbelastungen im Betrieb der Windenergieanlage abdecken. In diesem Zustand wirkt am vollständig vorgespannte Turm die maximale horizontale Belastung.

Mit den in Kapitel 3 vorgestellten Berechnungsmodellen können Ringträger mit rotationssymmetrischer Belastung berechnet werden. Somit sind diese Modelle nur für den Lastfall 1 und 2 anwendbar. Als Ergebnis erhält man die am Umfang konstanten Spannungen am Verankerungsdetail. Durch die Biegebeanspruchung am Turm entstehen auch harmonisch (kosinus- bzw. sinusförmig) umlaufende Spannungen am Umfang ( $\phi$ -Richtung) des Kreisringträgers. Diese lokalen Spannungen aus der antimetrischen Belastung können mit den Modellen nicht erfasst werden.

Für die Betrachtungen in dieser Arbeit genügt eine vereinfachte Überlagerung der Spannungen aus der Biegebeanspruchung. Um die Ergebnisse für den Betriebszustand zu erhalten, werden die globalen Längsspannungen laut Abbildung 2.9 berechnet und an den maßgebenden Stellen mit den lokalen Spannungen aus Lastfall 1 und 2 überlagert.

In Abbildung 2.11 sind die Belastungen und Kombinationen am Verankerungsdetail C für die drei Lastfälle dargestellt.



**Abb. 2.11.:** Lastfälle und Kombinationen - Darstellung am Verankerungsdetail C

## 3. Berechnungsmodelle

### 3.1. Tragverhalten und Modellbildung

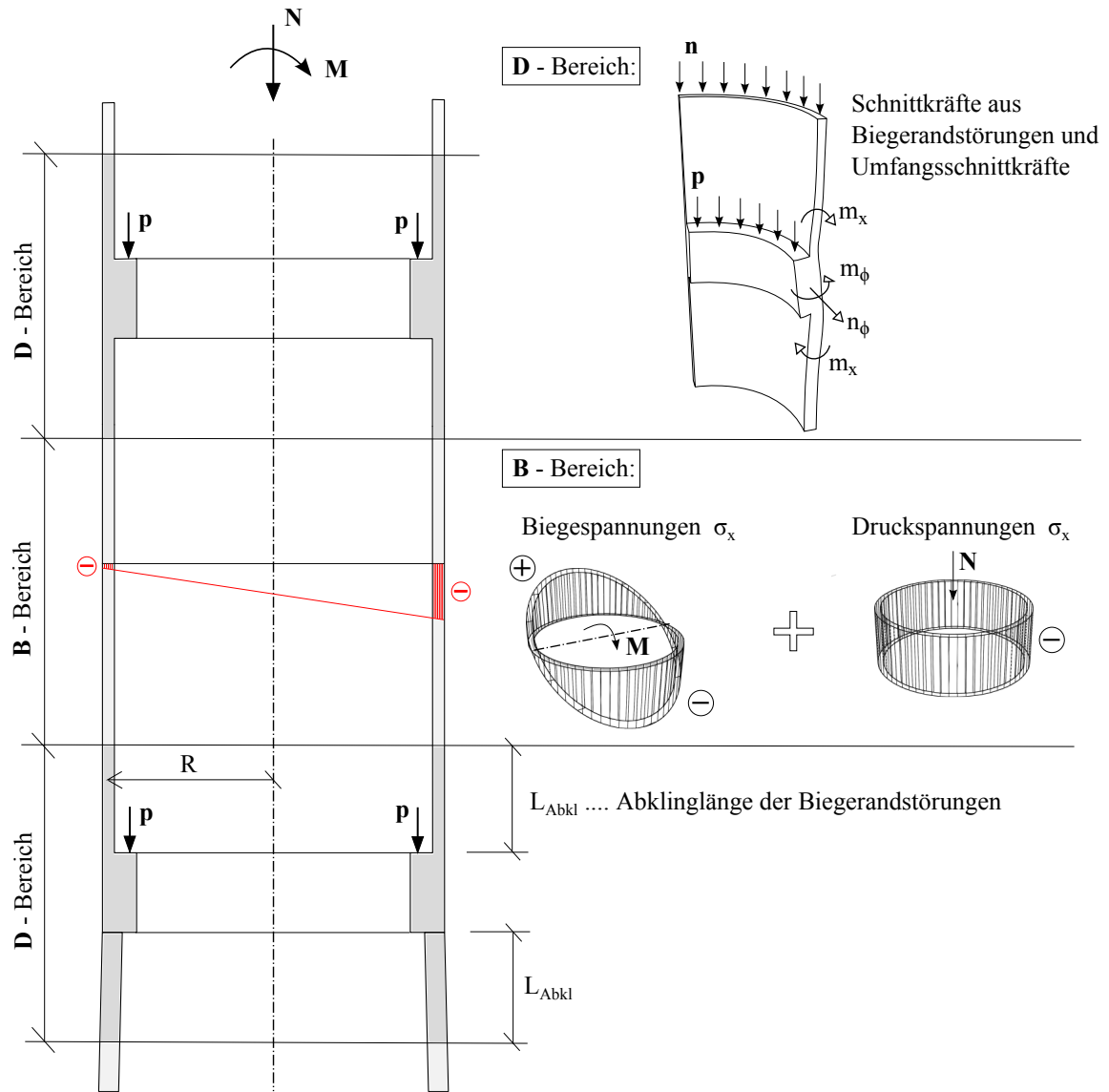
Beim Turm der Windenergieanlage handelt es sich vereinfacht betrachtet um einen im Boden eingespannten Stab mit Kreisringquerschnitt, der durch Normalkraft- und Biegemomentenwirkung beansprucht wird. Diese Einwirkungen erzeugen im Betonmast die bekannten Stabschnittgrößen am Kragträger  $N$ ,  $M$  und  $V$ . Neben diesen globalen Schnittgrößen werden durch die Einleitung der externen Vorspannung lokale Schnittgrößen hervorgerufen. Die Überlagerung der Spannungen aus globalen und lokalen Schnittgrößen führt zu den bemessungsbestimmenden Spannungen an den Verankerungsdetails.

Da die Dicke  $t$  der Turmwand im Vergleich zum Durchmesser des Betonturmes gering ist, kann im vorliegenden Fall von einer Kreiszyinderschale gesprochen werden. Diese Kreiszyinderschale erfährt durch die Normalkraft  $N$  eine rotationssymmetrische und durch das Biegemoment  $M$  eine antimetrische Belastung. Diese Belastungen führen in den ungestörten Schalenbereichen (B-Bereiche) zur Membranschnittkraft  $n_x$  in Längsrichtung. In Umfangsrichtung treten keine Schnittkräfte  $n_\phi$  auf. Bei sehr dünnen Schalen können die Spannungen aus der Membranschnittkraft  $n_x$  als konstant über die Schalendicke angenommen werden. Für die vorliegenden Rohrsegmente mit einem Verhältnis von  $R/t \approx 14$  wird mit einer linearen Spannungsverteilung über den gesamten Rohrquerschnitt laut Abbildung 3.1 gerechnet.

Bei den betrachteten Verankerungsdetails handelt es sich immer um eine Kombination aus einem Kreisringträger und anschließenden Kreiszyinderschalen. Der Kreisringträger, welcher in der Literatur auch als Ringbalken bezeichnet wird, dient dabei zur Verstärkung der Schalenstruktur. Die Kreiszyinderschale ist durch ihre geringe Biegesteifigkeit nicht in der Lage, die hohen Krempelmomente, welche aus der externen Vorspannung resultieren, aufzunehmen. Des Weiteren dient der Kreisringträger als Konsole und stellt somit den nötigen Platz für die Ankerplatten zur Einleitung der Vorspannkraft zur Verfügung.

Im Anschlussbereich der Kreiszyinderschalen am Ringträger kommt es zu Biegerandstörungen. Das Membrantragverhalten der Rohrabschnitte wird durch die angreifenden Krempelmomente gestört. Aus dieser Störung resultieren Schalenbiegemomente ( $m_x ; m_\phi$ ), Schalenquerkräfte ( $q_x ; q_\phi$ ) und Membranschnittkräfte  $n_\phi$  in Umfangsrichtung. In Abbildung 3.1 sind die Bereiche, in denen das Membrantragverhalten durch eine Biegebeanspruchung der Schalenwände überlagert wird, als D-Bereiche gekennzeichnet.

Die Spannungen aus Biegerandstörungen und die Spannungen am Kreisringträger werden unter der Annahme konstanter Ringlasten  $n$  und  $p$  berechnet. Die Biegespannung  $\sigma_x$  aus den globalen Stabschnittgrößen wird mit diesen Spannungen überlagert. Eine Belastung des Kreisringträgers durch eine über den Umfang veränderliche Ringlast  $n$ , welche aus der Biegebeanspruchung resultiert, wird nicht betrachtet.



**Abb. 3.1.:** Bereiche mit unterschiedlichem Tragverhalten

In dieser Arbeit werden die Verankerungsdetails am Turm der Windenergieanlage untersucht. Somit konzentrieren sich alle weiteren Betrachtungen auf die Kreisringträger und deren angrenzende Bereiche (D-Bereiche), in denen Biegerandstörungen auftreten. Die Länge des Abklingbereichs  $L_{Abkl}$  der Biegerandstörungen ist für eine Modellierung der Verankerungsdetails sehr wichtig und kann laut [10] folgendermaßen abgeschätzt werden.

$$L_{Abkl} = 4 \cdot L_{eff} = 4 \cdot \frac{\sqrt{R \cdot t}}{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}} \quad (3.1)$$

Ausgewertet mit der Querdehnzahl  $\nu = 0,2$  ergibt sich für die Abklinglänge  $L_{Abkl}$  folgender Zusammenhang:

$$L_{Abkl} = 4 \cdot L_{eff} = 4 \cdot 0,76763 \cdot \sqrt{R \cdot t}$$

$R$  ... Mittelradius der Kreiszyinderschale

$t$  ... Wandstärke der Kreiszyinderschale

Die mit der Gleichung 3.1 ausgewerteten Abklinglängen sind für vier verschiedene Schalenwandstärken  $t$  und einem konstanten Außenradius von  $R_a = 2,15 \text{ m}$  in der Tabelle 3.1 dargestellt. Die Länge  $L_{Gew}$  ist jene Länge, die bei der FE-Modellierung angesetzt wird. Sie wird ca. eineinhalb mal so groß wie die Abklinglänge gewählt. Durch diese Festlegung kann sichergestellt werden, dass ein ausreichend langer Teil der Kreiszyinderschale modelliert wird. Dieser Teil besteht aus dem Abklingbereich und einem Bereich mit ungestörtem Membrantragverhalten.

**Tab. 3.1.:** Abklinglängen bei Biegerandstörungen

$R$ [m]	$t$ [m]	$L_{Abkl}$ [m]	$L_{Gew}$ [m]
2,075	0,15	1,71	2,5
2,050	0,20	1,97	3,0
2,025	0,25	2,18	3,3
2,000	0,30	2,38	3,6

Die Normalspannung  $\sigma_x$ , welche durch die Beanspruchung aus dem Lastfall 3 entstehen, werden mit den bekannten Zusammenhängen der Balkenbiegung, welche im Abschnitt (2.4.2) unter Lastfall 3 dargestellt sind, berechnet. Zur Berechnung der Schnittkräfte und Spannungen aus Lastfall 1 und 2 muss für die D-Bereiche ein geeignetes Berechnungsmodell herangezogen werden. In dieser Arbeit wurden zur Ermittlung der Schnittkräfte am Verankerungsdetail Finite-Elemente-Berechnungen an mehreren FE-Modellen sowie eine Berechnung an einem analytischen Modell durchgeführt. Bei allen Modellen wurde ein linear-elastisches Werkstoffverhalten zugrunde gelegt.

## 3.2. Analytisches Modell

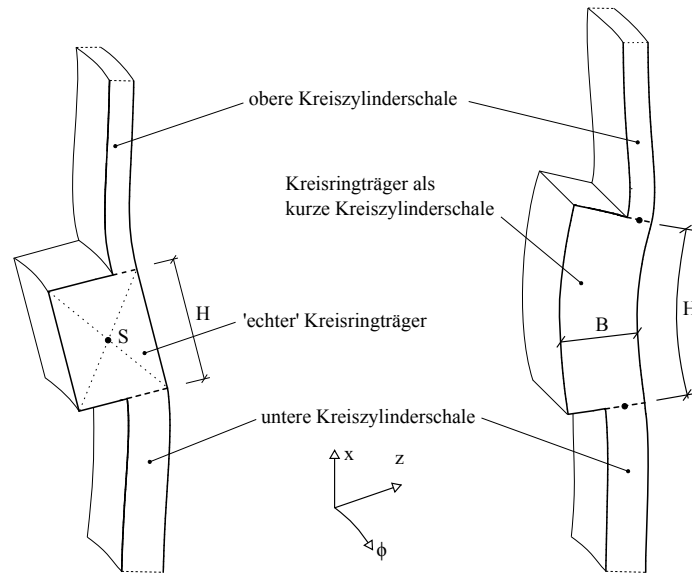
Durch die rotationssymmetrische Belastung und Lagerung der Verankerungsdetails ist neben einer Modellierung als FE-Modell auch eine analytische Berechnung des Kreisringträgers mit gekoppelten Kreiszyinderschalen möglich. Die analytische Berechnung ist in den folgenden Punkten sehr hilfreich.

- Analyse des Tragverhaltens
- Kontrolle der Finite-Elemente-Berechnungen
- Effiziente Durchführung der Geometriestudie

Die analytische Berechnung des Kreisringträgers mit gekoppelten Kreiszyinderschalen erfolgt laut [10]. Die dort vorgestellte matrixorientierte Lösungsmethodik erlaubt eine sehr kompakte und übersichtliche Berechnung der Schnittgrößen bei gekoppelten Schalensystemen. In den folgenden Abschnitten werden Berechnungsergebnisse präsentiert und die wesentliche Vorgehensweise bei der analytischen Berechnung erläutert. Ein ausführliches Beispiel ist im Anhang B und die Darstellung des Formelwerks für die analytische Berechnung ist im Anhang A zu finden.



Grundsätzlich besteht ein Verankerungsdetail aus einem Kreisringträger, an dem exzentrisch zwei Kreiszyinderschalen angeschlossen sind. Diese gekoppelten Kreiszyinderschalen werden als unendlich lang betrachtet. Der Kreisringträger kann auf zwei unterschiedliche Arten abgebildet werden. Bei einer geringen Höhe  $H$  des Kreisringträgers kann dieser als 'echter' stabförmiger Ringträger berechnet werden. Ist der Kreisringträger im Vergleich zur Breite  $B$  sehr hoch, liefert eine Berechnung als kurze Kreiszyinderschale bessere Ergebnisse. Die beiden Varianten sind in Abbildung 3.2 dargestellt.



**Abb. 3.2.:** Varianten für die Modellierung des Kreisringträgers

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Berechnung ist für beide Varianten gleich. Nach dem Aufstellen der Systemsteifigkeitsmatrix  $\hat{K}_{sys}$  und des Systembelastungsvektors  $\hat{r}_{sys}$  wird das Gleichungssystem  $\hat{r}_{sys} = \hat{K}_{sys} \cdot \hat{u}_{sys}$  nach den Verschiebungen aufgelöst. Mit den nun bekannten Systemverschiebungen  $\hat{u}_{sys}$  kann auf die Schnittkräfte im Kreisringträger und in den anschließenden Schalen rückgerechnet werden.

Die Berechnung als echten Kreisringträger ist durch den einfachen Aufbau der  $2 \times 2$  - Steifigkeitsmatrix sehr leicht möglich. Hierbei werden alle am Träger angreifenden äußeren Kräfte in den Schwerpunkt transformiert. Als Lösung erhält man die Systemverschiebungen im Schwerpunkt des Kreisringträgers. Da die Biegung des Trägers um die  $\phi$ -Achse mit dieser Berechnungsmethode nicht erfasst werden kann, ist diese nur bei geringen Kreisringträgerhöhen und Belastungen aus Lastfall 1 anwendbar.

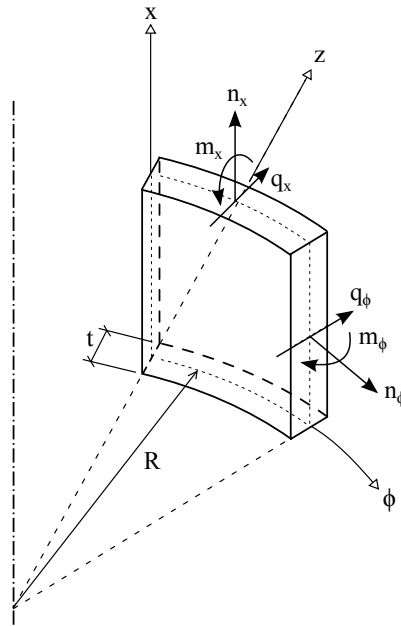
Die Berechnung als kurze Kreiszyinderschale ist für hohe Kreisringträger im Lastfall 1 und 2 anwendbar. Durch die Berücksichtigung der Verkrümmung des Trägers um die  $\phi$ -Achse können mit diesem Modell alle relevanten Verformungen des Kreisringträgers abgebildet werden.

Bei der Aufbereitung der analytischen Lösung wurden beide Berechnungsmethoden bei unterschiedlichen Kreisringträgergeometrien angewendet und die Ergebnisse mit der FE-Lösung verglichen. Die Berechnung als kurze Kreiszyinderschale lieferte dabei bessere Ergebnisse. Daher wird in den folgenden Abschnitten nur mehr diese betrachtet.

### 3.2.1. Schnittkraftberechnung und Tragverhalten

Anhand der Ergebnisse der analytischen Berechnung kann das Tragverhalten des Kreisringträgers sehr gut analysiert werden. Im Gegensatz zu einer FE-Rechnung treten hier keine lokalen Effekte und örtliche Spannungspitzen auf.

In der Abbildung 3.3 sind die relevanten Schalenschnittgrößen dargestellt. Mit der analytischen Berechnung können die Verläufe dieser Schnittgrößen in jedem Schalenteil eines zusammengesetzten Schalensystems berechnet werden. Die Membrandrillkräfte ( $n_{x\phi}$  ;  $n_{\phi x}$ ) und die Drillmomente ( $m_{x\phi}$  ;  $m_{\phi x}$ ) sind für unsere Betrachtungen nicht relevant und daher auch nicht dargestellt.



**Abb. 3.3.:** Relevante Schalenschnittgrößen

Membranschnittkräfte:	$n_x$ ; $n_\phi$ ; $n_{x\phi}$ ; $n_{\phi x}$	$[kN/m]$
Schalenschnittmomente:	$m_x$ ; $m_\phi$ ; $m_{x\phi}$ ; $m_{\phi x}$	$[kNm/m]$
Schalenschnittkräfte:	$q_x$ ; $q_\phi$	$[kN/m]$

Da die Höhe des Kreisringträgers einen entscheidenden Einfluss auf die Schnittgrößen hat, werden die Ergebnisse für drei unterschiedliche Kreisringträgerhöhen in Abbildung 3.5 gegenübergestellt. Die Berechnung des Schalensystems wurde laut Formelwerk im Anhang A mit den folgenden Eingangsparametern getrennt für Lastfall 1 und Lastfall 2 durchgeführt. Als Einwirkungen wurden die Lasten am Detail C laut Tabelle 2.1 angesetzt.

#### Eingangsparameter:

Außenradius:	$R_a = 2,15 \text{ m}$
Kreisringträgerhöhe:	$H = 1,0 \text{ m}$ ; $H = 1,5 \text{ m}$ ; $H = 2,0 \text{ m}$
Kreisringträgerbreite:	$B = 50 \text{ cm}$
Abstand Spannkrafteinleitung:	$a = 15 \text{ cm}$
Wandstärke obere Kreiszyklinderschale:	$t_2 = 15 \text{ cm}$
Wandstärke untere Kreiszyklinderschale:	$t_3 = 25 \text{ cm}$

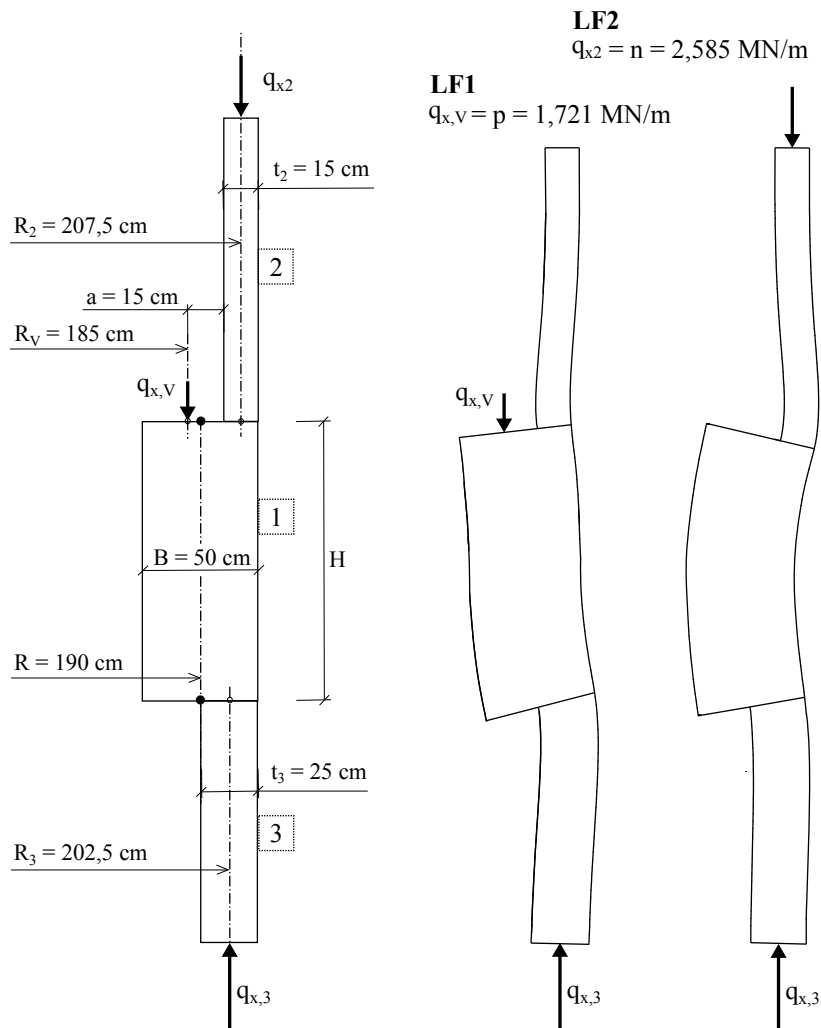


Abb. 3.4.: Angabe zur analytischen Berechnung

### Tragverhalten Im Lastfall 1

Im Lastfall 1 erfährt der Kreisringträger durch die exzentrische Vorspannkrafteinleitung eine Verdrehung nach innen um die  $\phi$ -Achse. Diese Verdrehung bewirkt am oberen Trägerrand Druckkräfte und am unteren Rand Zugkräfte  $n_\phi$  in Umfangsrichtung. Die Verteilung dieser Umfangsschnittkraft über die Trägerhöhe ist bei niedrigen Trägern linear. Mit zunehmender Höhe nimmt die Linearität ab. Dies ist vergleichbar mit dem Verhalten eines Biegeträgers beim Übergang zu einem wandartigem Träger. An den anschließenden Kreiszyklinderschalen kommt es durch die Verdrehung des Kreisringes zu Krepelmomenten  $m_x$  und zu Umfangsschnittkräften  $n_\phi$ . Die Krepelmomente sind direkt am Anschluss am höchsten und klingen sehr rasch ab. Die Größe dieser Anschlussmomente hängt von der Steifigkeit und somit von der Schalenwandstärke ab. Je dicker die Schale, desto höher das Anschlussmoment bei gleicher Kreisringträgerhöhe. Die Abhängigkeit des Anschlussmoments von der Kreisringträgerhöhe ist in Abbildung 3.5 erkennbar. Mit zunehmender Trägerhöhe nimmt  $m_x$  ab. Die Schnittkräfte am Umfang an der oberen Schale sind im Lastfalle 1 Druckkräfte und an der unteren Schale Zugkräfte. Sie haben ihr Maximum jeweils ca. 20 bis 30 cm entfernt vom Anschlusspunkt.

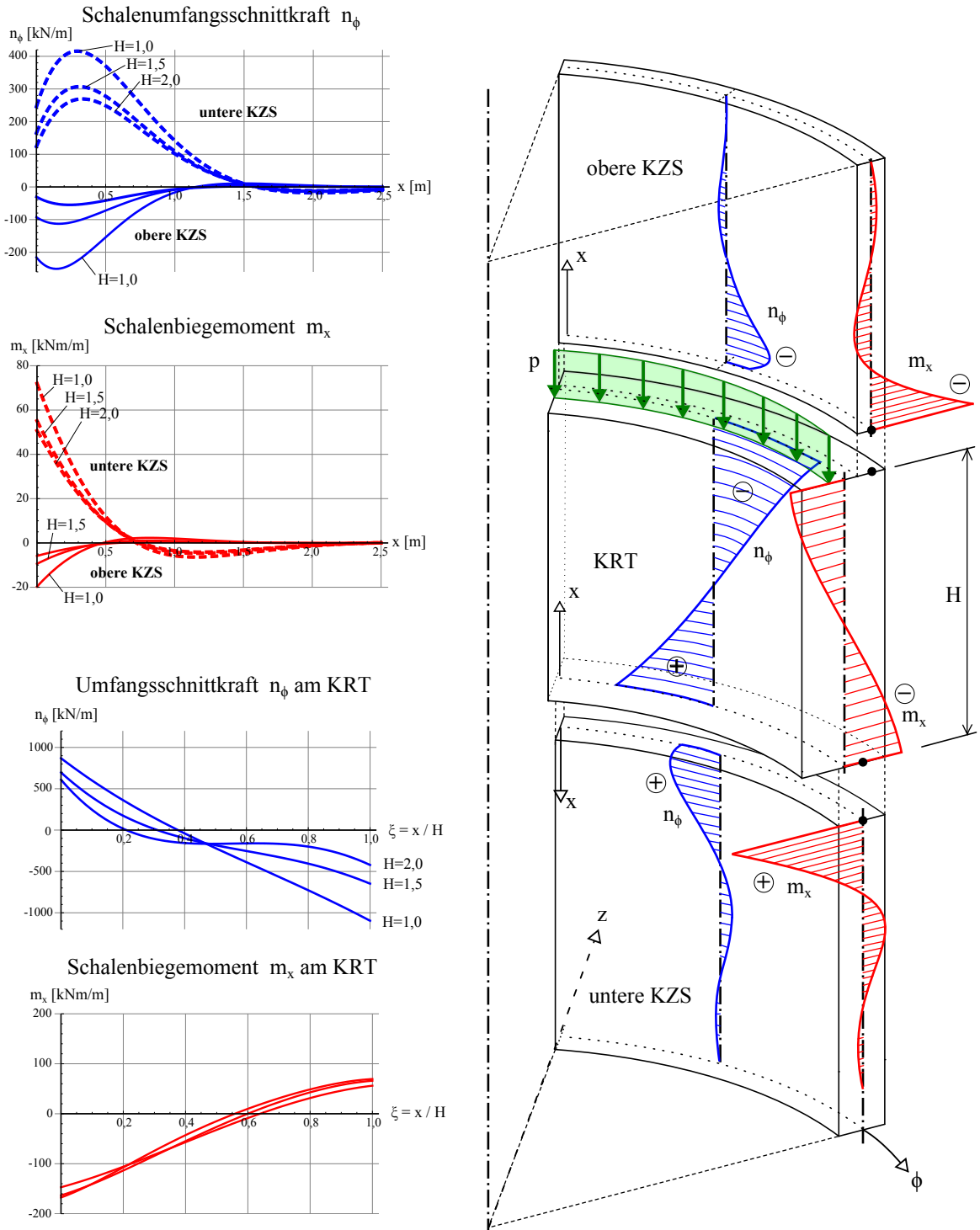
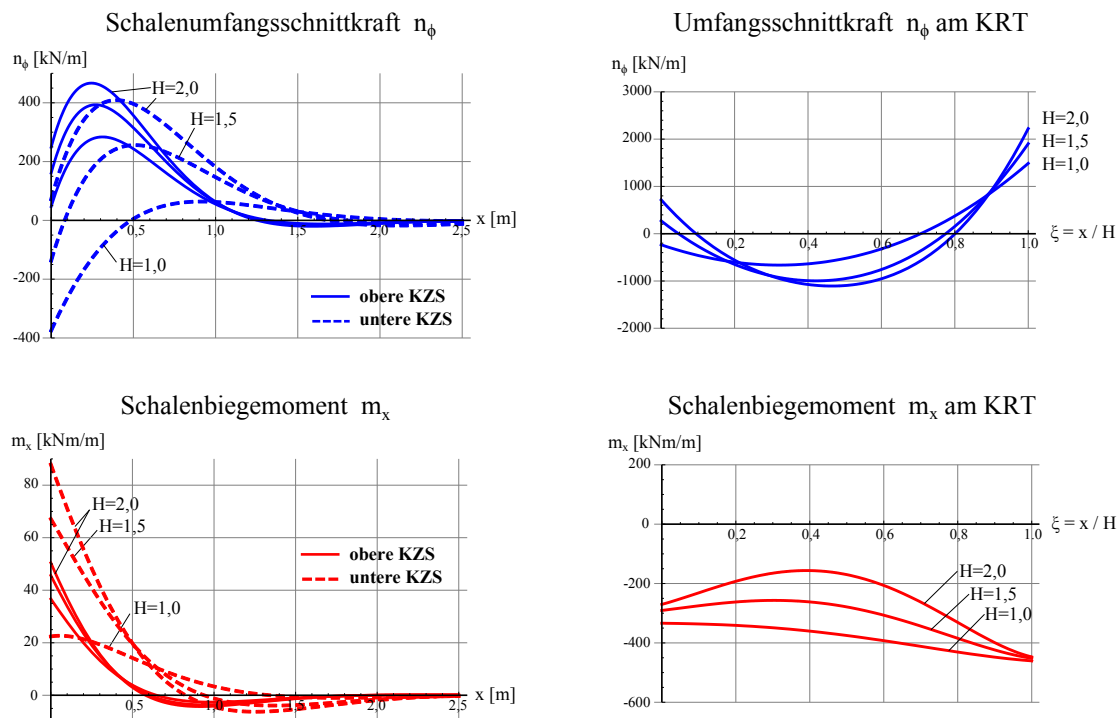


Abb. 3.5.: Verlauf der Schnittkräfte im Lastfall 1

## Tragverhalten Im Lastfall 2

Im Lastfall 2 bewirkt der exzentrische Anschluss der oberen und unteren Kreiszylinderschale eine exzentrische Krafteinleitung der konstanten Umfangslängskraft  $n_x$ . Durch die entstehenden Randmomente verkrümmt sich der Kreisringträger wie in Abbildung 3.4 dargestellt. Diese Biegebeanspruchung führt zu Zugkräften  $n_\phi$  am oberen und unteren Trägerrand. Je nach Wandstärke der anschließenden Kreiszylinderschalen sind diese Zugkräfte unten oder oben größer. Im vorliegenden Fall kommt es aufgrund der dickeren unteren Wandstärke zu geringeren Umfangskräften an der Unterseite des Ringträgers. Der Verlauf dieser Umfangskräfte über die Trägerhöhe ist in Abbildung 3.6 im Diagramm rechts oben dargestellt. Die Schalenbiegemomente  $m_x$  am Anschluss werden im Lastfall 2 im Gegensatz zum Verhalten im Lastfall 1 mit zunehmender Kreisringträgerhöhe größer.



**Abb. 3.6.:** Verlauf der Schnittkräfte im Lastfall 2

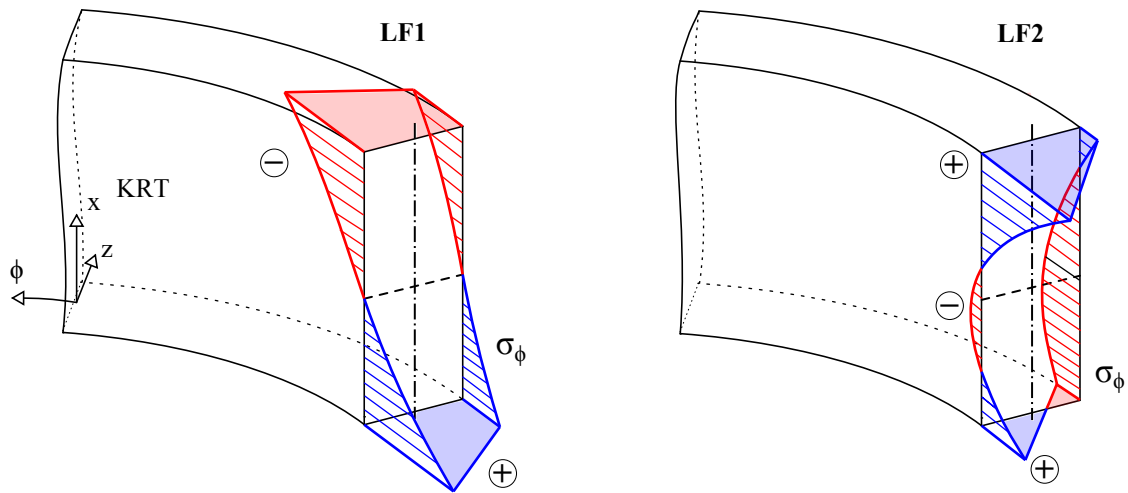
### 3.2.2. Spannungsberechnung

Die Spannungen am Kreisringträger und an den anschließenden Schalen werden mit den folgenden Gleichungen ermittelt. Als Eingangsgrößen zur Spannungsberechnung dienen die Schnittkräfte aus der analytischen Berechnung.

#### Spannungen am Kreisringträger

Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_{\phi} = \frac{n_{\phi}}{B} \pm \frac{m_{\phi}}{W} = \frac{n_{\phi}}{B} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{B^2} \quad (3.2)$$



**Abb. 3.7.:** Qualitativer Verlauf der Normalspannungen  $\sigma_{\phi}$  in Umfangsrichtung am Kreisringträger im Lastfall 1 und Lastfall 2

#### Spannungen an den gekoppelten Kreiszyinderschalen

Biegespannungen in Längsrichtung am Anschluss der Kreiszyinderschalen:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{W} = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x \cdot 6}{t^2} \quad (3.3)$$

Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_{\phi} = \frac{n_{\phi}}{t_i} \pm \frac{m_{\phi}}{W} = \frac{n_{\phi}}{t_i} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{t_i^2} \quad (3.4)$$

Schalenbiegemoment in Längsrichtung:	$m_x$	$[kNm/m]$
Membranschnittkraft in Längsrichtung:	$n_x$	$[kN/m]$
Schalenbiegemoment in Umfangsrichtung:	$m_{\phi}$	$[kNm/m]$
Membranschnittkraft in Umfangsrichtung:	$n_{\phi}$	$[kN/m/m]$
Wandstärke der Kreiszyinderschale:	$t$	$[m]$
Radius der Schalenmittelfläche:	$R$	$[m]$
Breite des Kreisringträgers:	$B$	$[m]$
Querdehnzahl Beton:	$\nu = 0,2$	

### 3.3. Numerische Modelle

Für die numerische Ermittlung der Schnittgrößen wurden Finite-Elemente-Berechnungen mit den Modulen der SOFiSTiK FE-Software durchgeführt. Die Modellierung der Verankerungsdetails erfolgte mit Volumen- und Schalenelementen unter Verwendung eines linear-elastischen Werkstoffmodells. Die einzelnen Geometrieparameter der verwendeten FE-Modelle sind in bestimmten Grenzen variabel. So wird zum Beispiel bei einer Änderung der Kreisringträgerhöhe das Elementnetz automatisch angepasst und neu generiert. Dieser variable Aufbau der FE-Modelle ermöglicht es, die geometrischen Einflüsse auf das Tragverhalten der Details effizient zu untersuchen.

#### 3.3.1. Modellierung der Verankerungsdetails - Diskretisierung

Unter der Voraussetzung, dass die Einleitung der Vorspannkraft rotationssymmetrisch und an allen Ankerplatten gleichzeitig erfolgt, ist die Modellierung eines Teilsegments des Ringes möglich. Die Größe des in Abbildung 3.8 dargestellten Segments ist von der Anzahl der Ankerplatten am Umfang abhängig. Bei  $n = 32$  Verankerungsstellen am Umfang beträgt der Öffnungswinkel des Segments  $\alpha = 360/32 = 11,25^\circ$ . Bei  $n = 24$  wird ein Segment mit  $\alpha = 15^\circ$  modelliert. Die Länge der anschließenden Kreiszyinderschalen beträgt  $L_{Gew}$  laut Tabelle 3.1 und ist abhängig von der Abklinglänge der Biege- und Randstörungen.

Die Lagerung des Segments erfolgt in radialer Richtung durch Symmetrielager in den Randknoten, wie in Abbildung 3.9 symbolisch dargestellt. In vertikaler Richtung ist das Modell unten durch radial verschiebbliche Knotenlager gehalten.

Die Belastung aus der Vorspannung wird über eine modellierte Ankerplatte als Flächenlast eingeleitet. Die Hüllrohre im Ringträger werden nicht modelliert. Die Ringbelastung von oben wird je nach Modell als Streckenlast oder Flächenlast über gekoppelte starre Lasteinleitungsplatten eingeleitet.

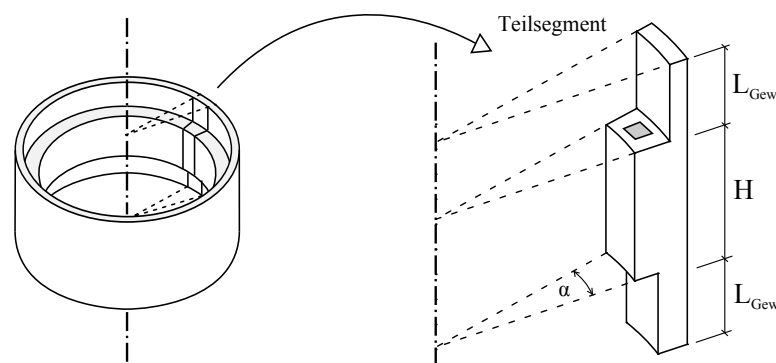


Abb. 3.8.: Modell Teilsegment

Für die FE-Berechnung der verschiedenen Verankerungsdetails wurden zwei verschiedene Modelltypen laut Abbildung 3.11 mit variablen Geometrieparametern generiert. Sie unterscheiden sich in der Wahl des Elementtyps. Für das FE-Modell 1 wurden nur Volumenelemente eingesetzt. Beim FE-Modell 2 wurden für die Modellierung der Kreiszyinderschalen Schalenelemente verwendet. Diese Elemente sind im Anschlussbereich mit den Volumenelementen des Kreisringträgers gekoppelt.

Neben diesen beiden Modellen wurde zur Kontrolle der Lagerungsbedingungen im Zuge der Modellentwicklung auch ein Viertelkreissegment erstellt. Mit diesem größeren Modell kann auch der Einfluss einer ungleichmäßigen Vorspannung untersucht werden.

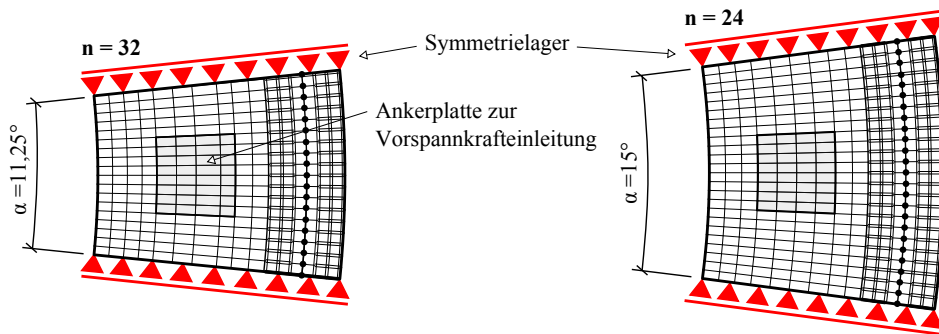


Abb. 3.9.: Lagerung

### FE-Modell 1: 3D-Segment

Das FE-Modell 1 ist rein aus Volumenelementen (BRIC) aufgebaut. Für die Diskretisierung der Verankerungsdetails wurde eine Elementnetz mit den Elementabmessungen von etwa  $l_x/l_y/l_z = 2,3/3,5/3,3 \text{ cm}$  gewählt. Dies ergibt ein günstiges Längenverhältnis zwischen größter und geringster Abmessung von  $l_{max}/l_{min} \approx 1,5$ . Mit diesem Modell kann eine Spannkrafteinleitung aus der Vorspannung mit sofortigem Verbund an der oberen Kreiszyinderschale (Detail A) abgebildet werden. Des Weiteren ermöglicht die Modellierung des Anschlussbereichs der Schalen am Kreisringträger mit Volumenelementen die Auswertung der Hauptspannungen in diesen hoch beanspruchten Bereichen.

### FE-Modell 2: 3D-Segment mit Schalen

Am FE-Modell 2 werden die Kreiszyinderschalen mit Schalenelementen (QUAD) modelliert. Die Koppelbedingungen übertragen die Verdrehungen und Verschiebungen des Referenzknotens der Schalenelemente auf die Knoten der Volumenelemente des Kreisringträgers, wie in Abbildung 3.10 dargestellt. Ein wesentlicher Vorteil dieser Modellierung besteht darin, dass alle Schalenschnittgrößen direkt ausgewertet werden können. Die Rechenzeit kann im Gegensatz zu FE-Modell 1 um mehr als die Hälfte reduziert werden. Die Ergebnisse aus der Spannungsberechnung am Kreisringträger unterscheiden sich nicht von denen aus der Berechnung am FE-Modell 1.

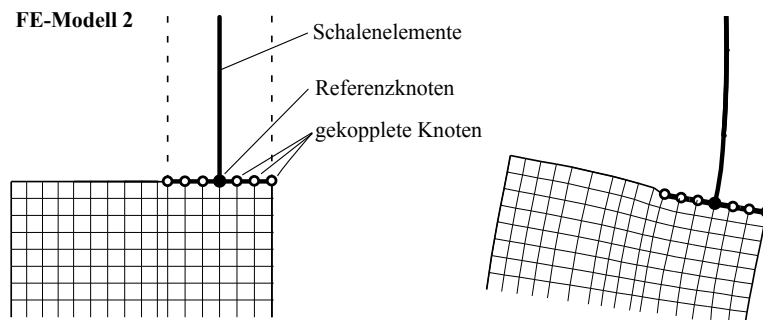


Abb. 3.10.: Kopplung der Knoten im Bereich der oberen Schale



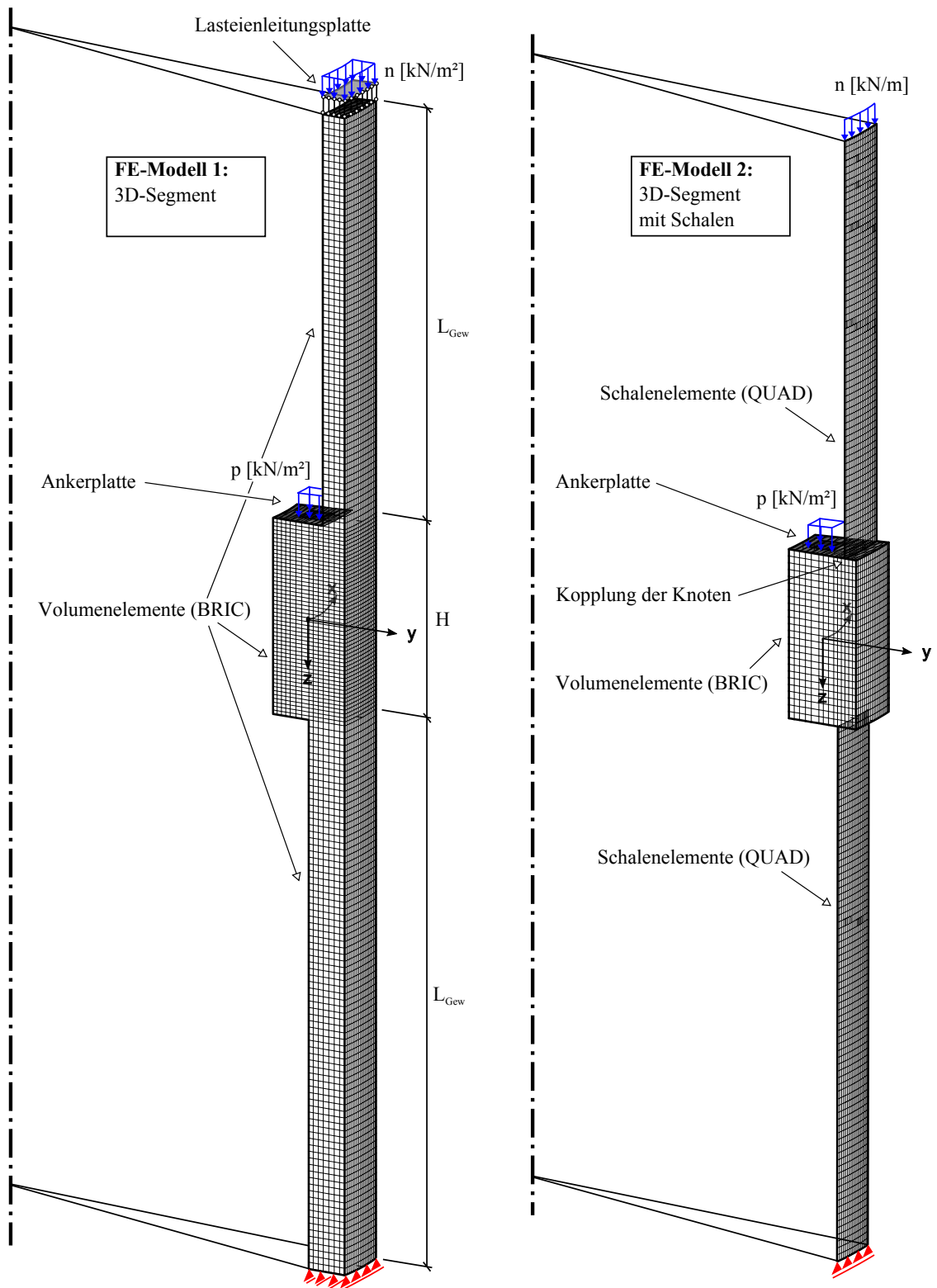


Abb. 3.11.: FE-Modelle aus Volumen- und Schalenelementen

Das im Abschnitt 3.2.1 beschriebene Tragverhalten der Kreisringträger kann sehr gut durch das Verformungsverhalten der Kreisringträger nachvollzogen werden. Aus diesem Grund sind in Abbildung 3.12 die verformten FE-Strukturen der beiden Modelle dargestellt.

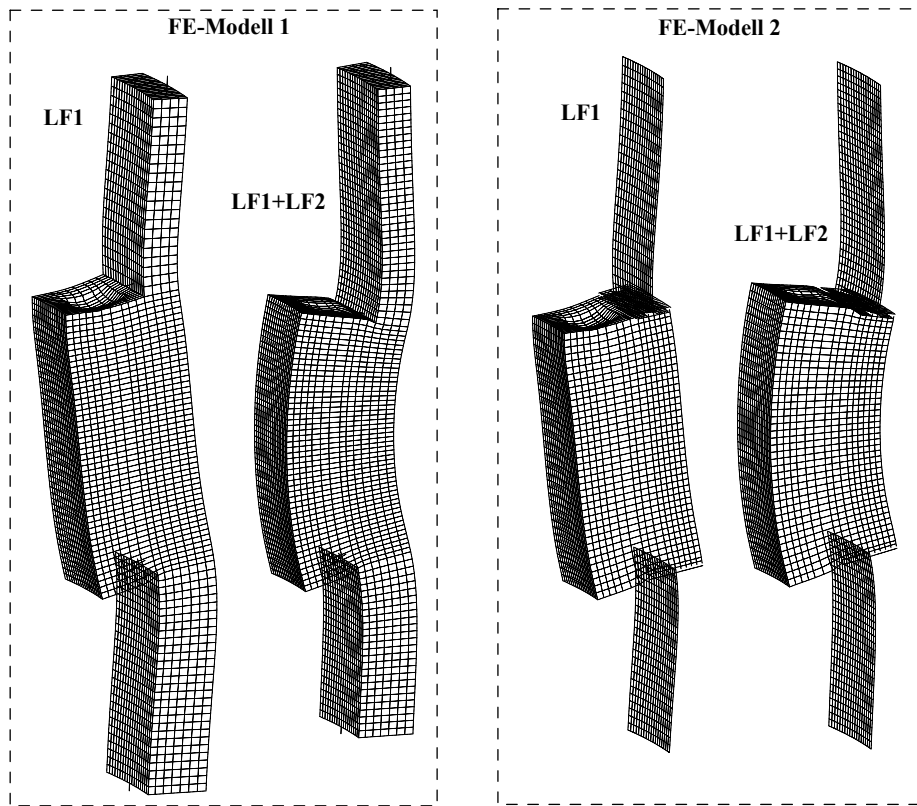


Abb. 3.12.: Verformungsfigur der Modelle

## 3.4. Vergleich der Modelle und Anwendung

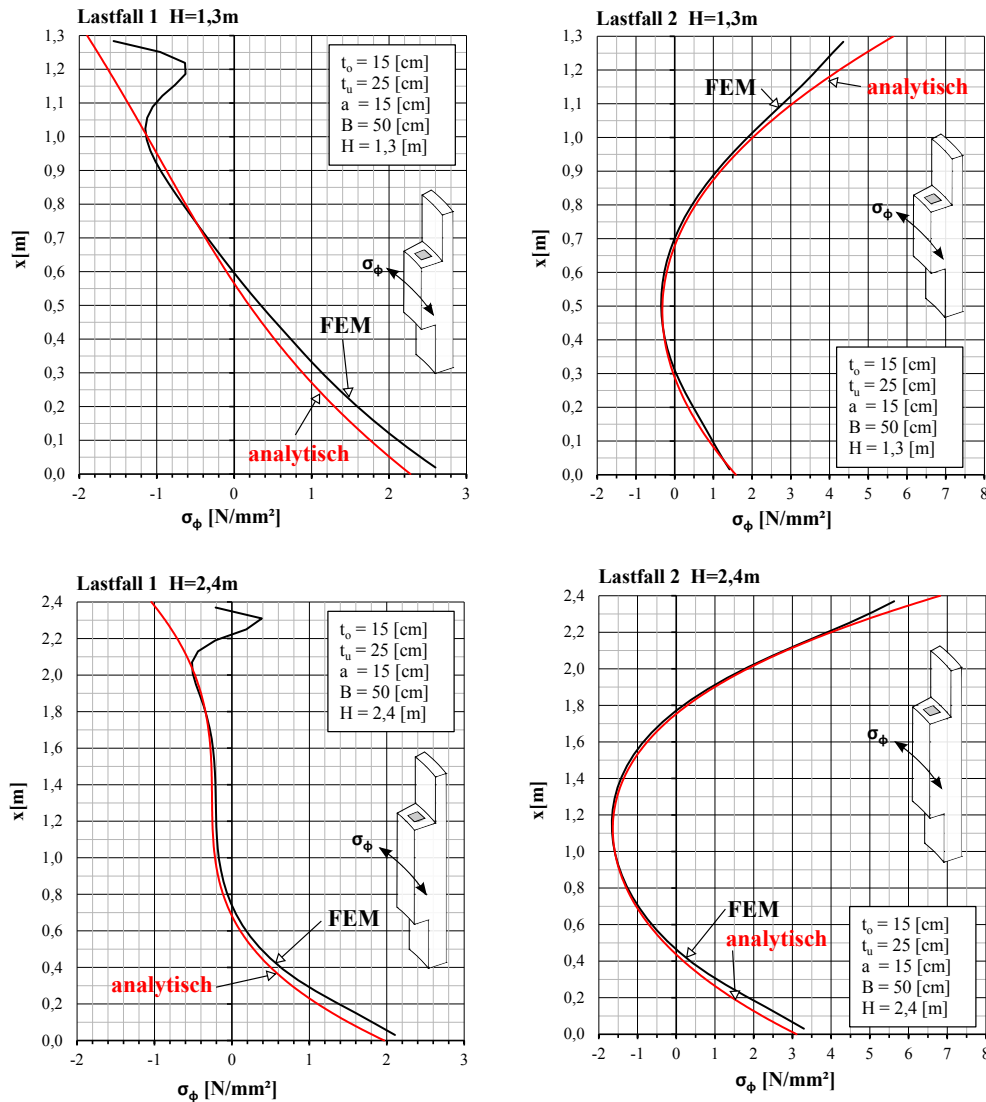
In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der oben vorgestellten analytischen Berechnung mit den numerischen Ergebnissen aus der FE-Berechnung verglichen. Da jedes Modell für bestimmte Berechnungen oder für die Auslegung eines bestimmten Details zum Einsatz kommt, wird die Anwendung der Modelle am Ende dieses Abschnittes erläutert.

### 3.4.1. Vergleich zwischen analytischer und numerischer Berechnung

Bei der FE-Berechnung laut Kapitel 3.3 verhält sich der Kreisringträger, der aus Volumenelementen besteht, etwas weicher als bei der analytischen Berechnung als kurze Kreiszyinderschale. Dadurch kommt es zu geringfügigen Abweichungen bei der Spannungsberechnung.

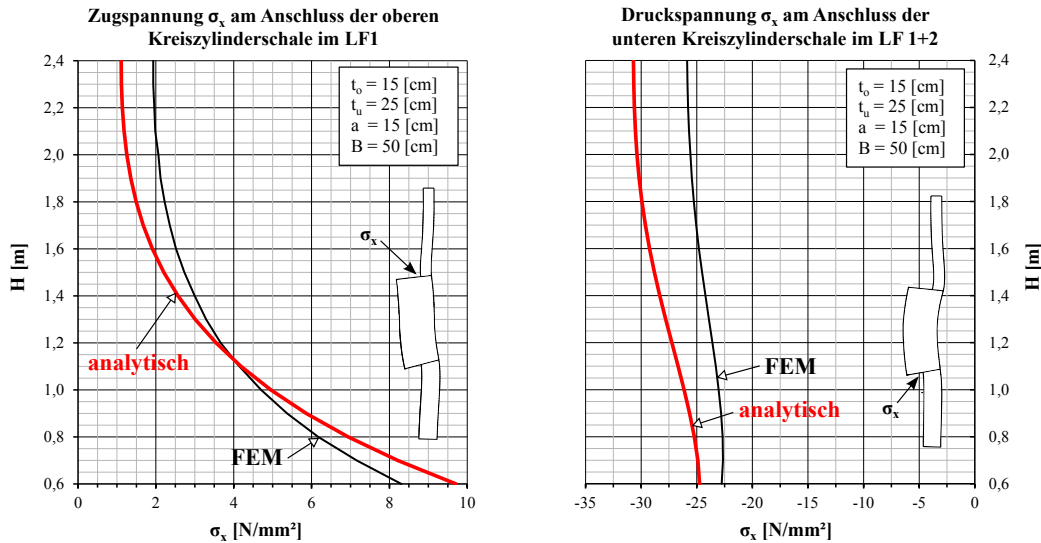
In Abbildung 3.13 werden die analytisch berechneten Umfangsspannungen  $\sigma_\phi$  an der Innenseite des Kreisringträgers mit der FE-Berechnung (FE-Modell 2) verglichen. Als Beispiel wurden zwei Kreisringträger mit einer Höhe von  $H = 1,3 \text{ m}$  und  $H = 2,4 \text{ m}$  gewählt. Die Umfangszugspannungen an der Unterseite des Trägers sind bei der analytischen Lösung immer etwas geringer als bei der FE-Lösung. Je höher der Kreisringträger, desto besser ist die Übereinstimmung der Ergebnisse.

Durch die lokale Vorspannkrafteinleitung über die Ankerplatte am FE-Modell kommt es an der Oberseite des Trägers im Lastfall 1 zu großen Abweichungen zwischen den Berechnungsmodellen. Diese lokalen Effekte können mit der analytischen Berechnung nicht erfasst werden.



**Abb. 3.13.:** Normalspannungen  $\sigma_\phi$  in Umfangsrichtung an der Innenseite des Kreisringträgers - Vergleich der FE-Berechnung mit der analytischen Berechnung für zwei verschiedene Trägerhöhen;  $H = 1,3$  m und  $H = 2,4$  m

In Abbildung 3.14 werden die Zug- und Druckspannungen in Längsrichtung am Anschluss der Schalen für unterschiedliche Trägerhöhen verglichen. Die Zugspannungen im linken Diagramm stimmen im Bereich der üblichen Trägerhöhen von  $H = 1,0$  m und  $H = 1,6$  m sehr gut überein. Durch den etwas steiferen Kreisringträger bei der analytischen Berechnung kommt es generell zu höheren Anschlussmomenten  $m_x$  und daher auch zu größeren Druckspannungen am unteren Anschluss. Die Werte der analytische Lösung sind im Mittel um ca. 15 % höher als jene der FE-Berechnung. Dadurch können mit der analytischen Berechnung auch Spannungsspitzen, die mit dem FE-Schlenmodell (FE-Modell 2) nicht erfasst werden, gut berücksichtigt werden.



**Abb. 3.14.:** Spannungen  $\sigma_x$  in Längsrichtung an den Kreiszyinderschalen - Vergleich der FE-Berechnung mit der analytischen Berechnung für Trägerhöhen von  $H = 0,6$  bis  $H = 2,4$  m

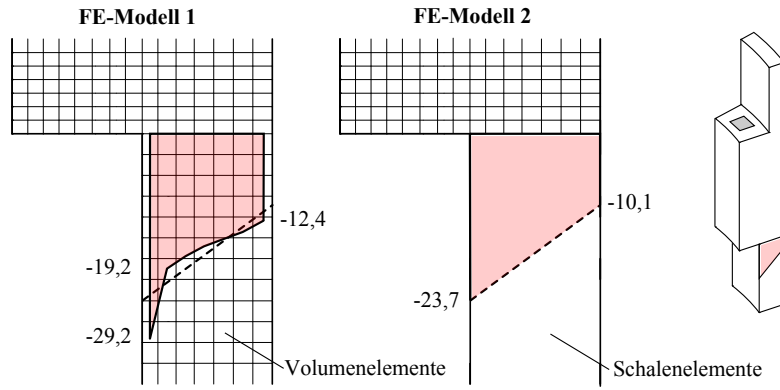
### 3.4.2. Anwendungsbereiche der Modelle

Die Gegenüberstellung der Modelle im Abschnitt 3.4.1 zeigt, dass die analytische Lösung für die drei anfangs erwähnten Punkte sehr gut geeignet ist. Die Analyse des Tragverhaltens kann ohne störende lokale Effekte durchgeführt werden. Die Kontrolle der FE-Berechnung ist bestens möglich und auch bei der Geometriestudie ist der Zeitaufwand bei einer analytischen Rechnung wesentlich geringer. Daher wird für diese Zwecke die analytische Berechnung eingesetzt.

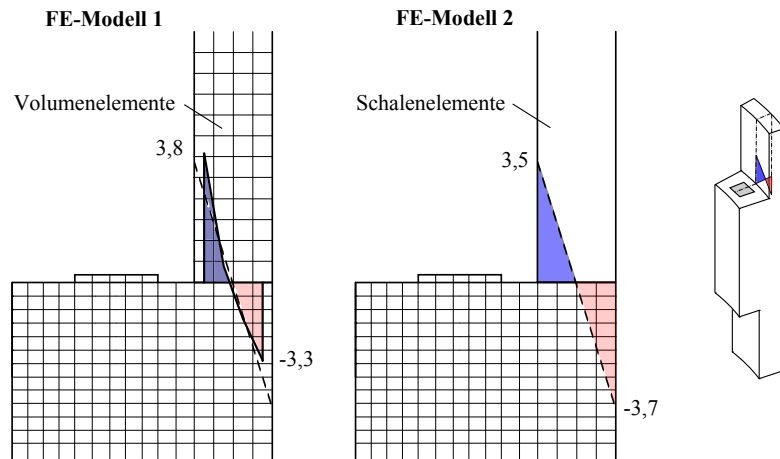
Die FE-Modelle kommen bei der Geometriestudie sowie bei der detaillierten Spannungsbeurteilung an den optimierten Verankerungsdetails zum Einsatz.

Mit **FE-Modell 1** werden die Berechnungen für die Detailuntersuchung in Kapitel 5 durchgeführt. Mit diesem Modell können die Hauptspannungen in den Volumenelementen der Schalen ausgewertet werden. Diese Spannungen in der Elementmitte sind in Abbildungen 3.15 bis 3.17 den linear verteilten Spannungen aus einer Berechnung am FE-Modell 2 gegenübergestellt. Die lokalen Druck- und Zugspannungsspitzen direkt am Anschluss der Schalen sind höher als die Randspannungen aus dem FE-Modell 2. Diese Spannungsspitzen nehmen mit einer Netzverfeinerung zu, was die Ermittlung eines 'genauen' Maximalwertes nicht zulässt. Die Hauptzugspannungen im oberen Schalenanschluss werden durch den Abstand der Ankerplatte vom inneren Schalenrand stark beeinflusst. Bei einem geringen Abstand  $a$  ist die Abweichung zum linearen Spannungsverlauf in Abbildung 3.17 deutlich zu erkennen.

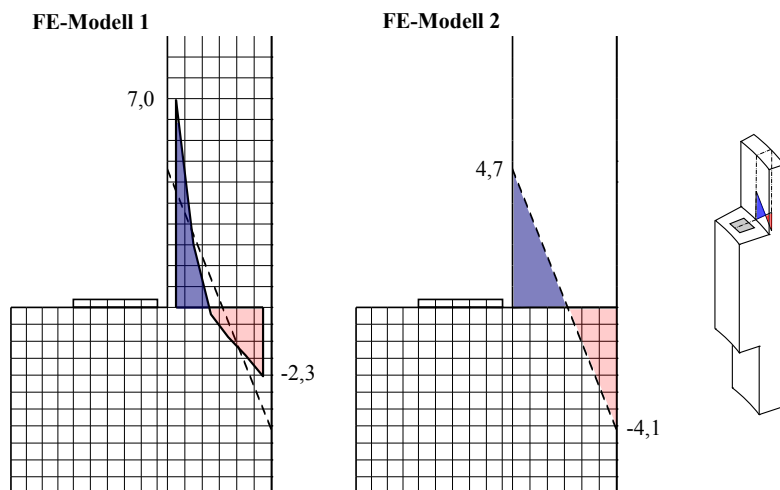
Mit **FE-Modell 2** wird die Geometriestudie in Kapitel 4 durchgeführt. Die ausgewerteten Spannungen sind, bis auf die Spannungen am Übergang vom Ringträger zur Schale, identisch mit den Spannungen aus FE-Modell 1. Für die Geometriestudie werden die Anschlussmomente  $m_x$  an der oberen und unteren Kreiszyinderschale ausgewertet und die maximalen Randspannungen laut Abschnitt 3.2.2 berechnet.



**Abb. 3.15.:** Vergleich der Hauptspannungen  $\sigma_I$  über die untere Schalendicke im Lastfall 1+2  
 Geometrie:  $H = 130 \text{ cm}$ ;  $B = 50 \text{ cm}$ ;  $t_o = 15 \text{ cm}$ ;  $t_u = 25 \text{ cm}$ ;  $a = 15 \text{ cm}$



**Abb. 3.16.:** Vergleich der Hauptspannungen  $\sigma_I$  über die obere Schalendicke im Lastfall 1  
 Geometrie:  $H = 130 \text{ cm}$ ;  $B = 50 \text{ cm}$ ;  $t_o = 15 \text{ cm}$ ;  $t_u = 25 \text{ cm}$ ;  $a = 15 \text{ cm}$



**Abb. 3.17.:** Vergleich der Hauptspannungen  $\sigma_I$  über die obere Schalendicke im Lastfall 1  
 Geometrie:  $H = 130 \text{ cm}$ ;  $B = 50 \text{ cm}$ ;  $t_o = 20 \text{ cm}$ ;  $t_u = 25 \text{ cm}$ ;  $a = 10 \text{ cm}$

## 4. Geometrische Einflüsse

Durch die Änderung der Geometrie des Kreisringträgers und der anschließenden Kreiszyklinderschalen kann das Verankerungsdetail für eine bestimmte Belastungssituation optimiert werden. Um aufzuzeigen wie sich eine Änderung der geometrischen Verhältnisse auf die Spannungen am Verankerungsdetail auswirkt, werden Abmessungen des Systems in gewissen Grenzen variiert und dabei der Spannungsverlauf in den kritischen Punkten beobachtet.

### 4.1. Parameter

Folgende fünf Parameter werden bei der Geometriestudie variiert.

- Exzentrizität  $e$  bzw. Abstand  $a$  der Vorspannkrafteinleitung
- Höhe  $H$  des Kreisringträgers
- Breite  $B$  des Kreisringträgers
- Wandstärke  $t_o$  der oberen Kreiszyklinderschale
- Wandstärke  $t_u$  der unteren Kreiszyklinderschale

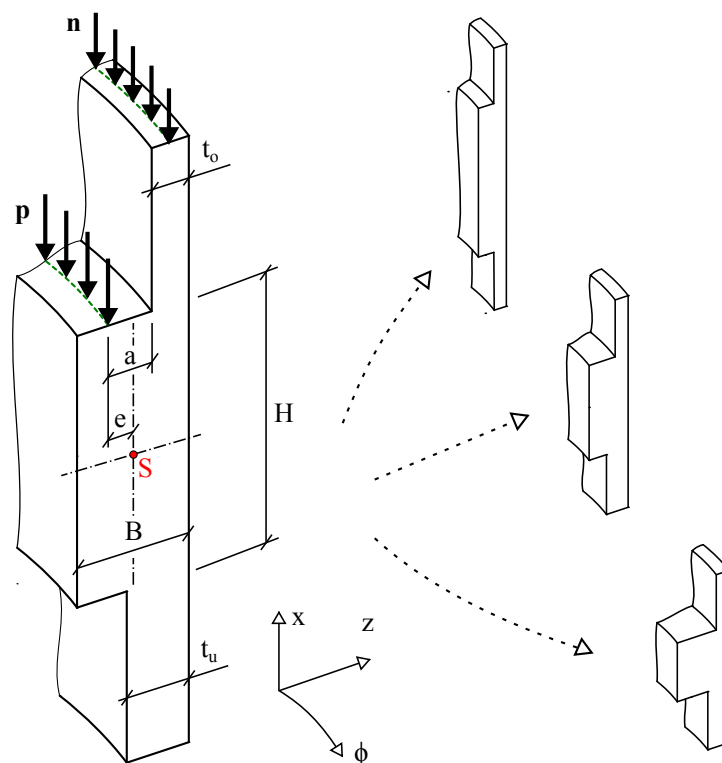


Abb. 4.1.: Geometriestudie

Neben dem Einfluss der Geometrie auf die Spannungen am Verankerungsdetail spielt auch das Belastungsverhältnis zwischen der Vorspannung  $\mathbf{p}$  und der Normalkraft  $\mathbf{n}$  eine entscheidende Rolle bei der Wahl einer optimalen Geometrie. Dieser Einfluss der Belastung auf die kritischen Spannungspunkte wird im Abschnitt 4.3.5 genauer erläutert.

Für die Variation der Parameter werden folgende Grenzen festgelegt. Die Höhe  $H$  des Kreisringträgers wird von  $0,6\text{ m}$  bis  $2,4\text{ m}$  und die Breite  $B$  von  $0,4\text{ m}$  bis  $0,6\text{ m}$  variiert. Die Schalenwandstärken werden schrittweise von  $0,15\text{ m}$  bis  $0,30\text{ m}$  verändert.

## 4.2. Kritische Spannungspunkte

Die Abbildung 4.2 zeigt die kritischen Punkte für den Bauzustand (LF1) den Zustand nach Fertigstellung (LF1+LF2) und den Betriebszustand (LF3). In diesen Punkten ist eine Überschreitung der zulässigen Zug- oder Druckspannungen möglich. Bei der Geometriestudie werden nur rotationssymmetrische Belastungen aus dem Lastfall 1 und 2 betrachtet. Die Spannungen aus dem Lastfall 3 werden in den vier Spannungspunkten 5, 2, 3, und 6 mit den Werten aus Lastfall 1 und 2 überlagert. In der Tabelle 4.1 sind die kritischen Punkte je Lastfall aufgelistet. In diesen Punkten müssen bei einer späteren Detailauslegung bestimmte Kriterien eingehalten werden. Zum Beispiel die Begrenzung der Betondruck- und Zugspannungen oder das Kriterium der Dekompression.

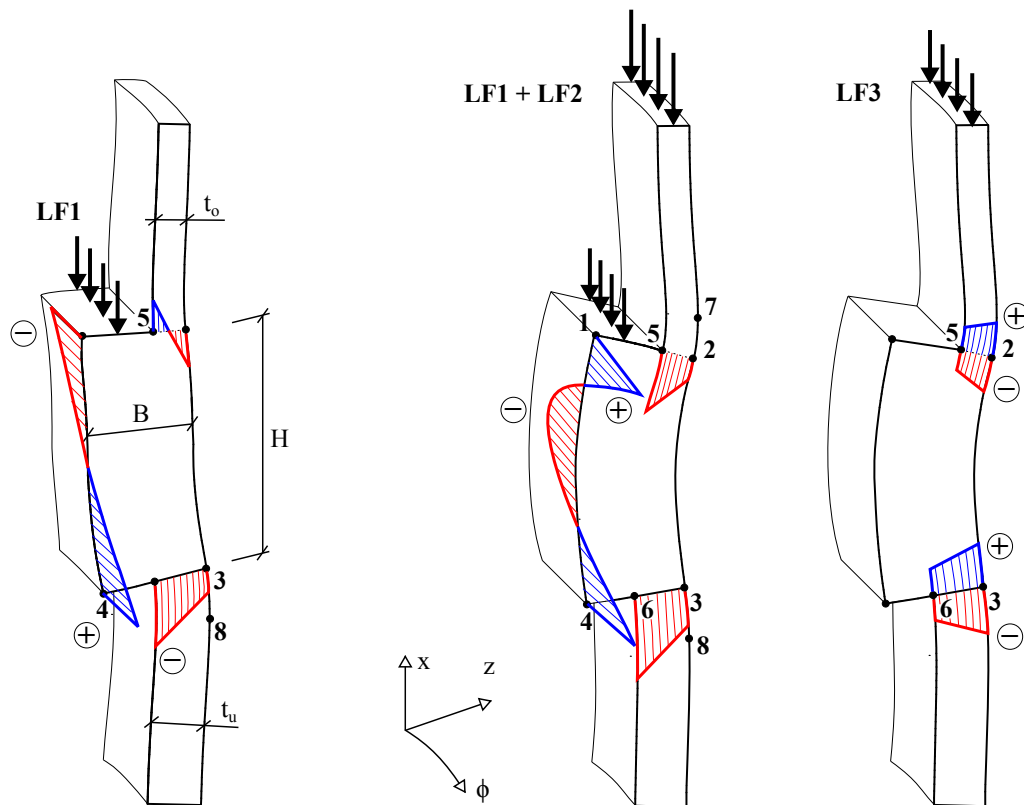


Abb. 4.2.: Kritische Punkte am Verankerungsdetail

**Tab. 4.1.:** Maßgebende Spannungskomponenten in den kritischen Punkten

Nr.:	<b>Betriebszustand: Lastfall 1 + 2 + 3</b>
1; 4	Zugspannung in Umfangsrichtung am Kreisringträger
7; 8	Zugspannung in Umfangsrichtung an den Kreiszyinderschalen
5; 6	Druckspannung in Längsrichtung am Schalenanschluss
2; 3	Soll überdrückt bleiben!

Nr.:	<b>Bauzustand: Lastfall 1</b>
4	Zugspannung in Umfangsrichtung an den Kreiszyinderschalen
5	Zugspannungen in Längsrichtung am oberen Schalenanschluss
8	Zugspannung in Umfangsrichtung an den Kreiszyinderschale
3	Soll überdrückt bleiben!

### 4.3. Geometriestudie

Die Geometriestudie gliedert sich in vier wesentliche Bereiche.

- Einfluss der exzentrischen Vorspannkrafteinleitung
- Biegespannungen in Längsrichtung der Kreiszyinderschalen
- Normalspannungen am Umfang der Kreiszyinderschalen
- Spannungen am Kreisringträger in Umfangsrichtung

Die geometrischen Einflüsse wurden alle am Verankerungsdetail C analysiert. Das Verhalten der geringer belasteten Details A und B kann aus den Erkenntnissen am Detail C abgeleitet werden. Zur Kontrolle dieser Vorgehensweise wurden auch zahlreiche Berechnungen mit den Lasten aus Detail A und B durchgeführt.

Die Werte der dargestellten Spannungsverläufe wurden mit einer Finite-Elemente Berechnung am FE-Modell 2 ermittelt. Sie gelten jeweils für eine bestimmte, im Diagramm angegebene, Geometrie. Bei der Geometriestudie ist allerdings der genaue Spannungswert nicht entscheidend, sondern die Größenordnung und vor allem der Trend der Spannungsentwicklung bei Veränderung der Geometrie.

#### 4.3.1. Einfluss der exzentrischen Vorspannkrafteinleitung

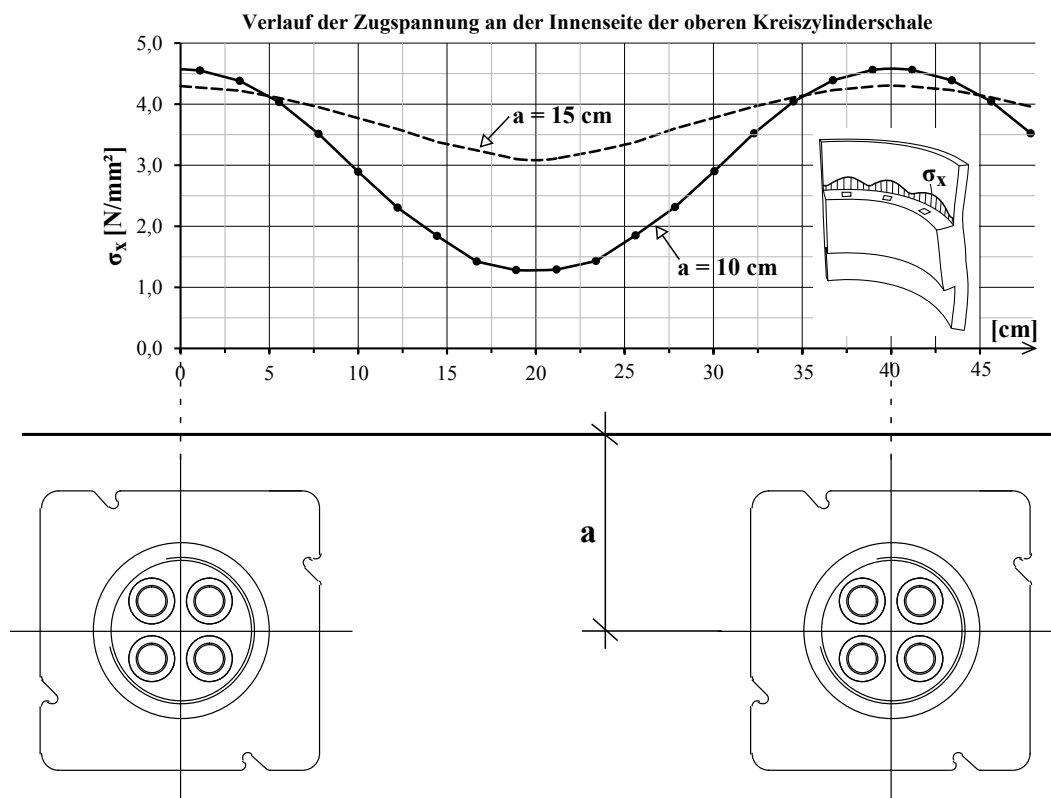
Wird der Abstand  $a$  laut Abbildung 4.1 und somit auch die Exzentrizität  $e$  vergrößert nimmt die Momentenbelastung für den Kreisringträger zu. Das Streckenmoment  $m_x = p \cdot e$  um den Schwerpunkt bewirkt eine Zunahme der Verdrehung des Kreisringträgers um die  $\phi$ -Achse. Dies wiederum führt zu größeren Schnittkräften und somit zu höheren Spannungen in den kritischen Punkten.

Die Spannungserhöhung fällt aber je nach Spannungspunkt unterschiedlich aus. So erhöhen sich die Druckspannungen im LF1+LF2 am Spannungspunkt 6 bei einer Vergrößerung des



Abstandes  $a$  nur geringfügig. Bei einer gegebenen Geometrie ( $t_o = 20$ ;  $t_u = 25$ ;  $H = 130$ ;  $B = 50$  cm) bewirkt zum Beispiel die Vergrößerung von  $a = 10$  cm auf  $a = 15$  cm einen Zunahmen dieser Spannungen von  $\sigma_x = -24,1$  auf  $\sigma_x = -24,3$  N/mm<sup>2</sup>. Diese Zunahmen ist bei niedrigen Kreisringträgerhöhen etwas größer als bei hohen. Insgesamt hat der Abstand  $a$  aber kaum einen Einfluss auf die Spannungen im unteren Schalenanschluss.

Auf die Spannungen am oberen Schalenanschluss hat der Abstand  $a$  hingegen einen großen Einfluss. Bei gleicher Geometrie wie oben ist in Abbildung 4.3 der Verlauf der Zugspannungen  $\sigma_x$  an der Innenseite der Schale im LF 1 dargestellt. Die lokale Krafteinleitung an den Ankerplatten bewirkt einen wellenförmigen Zugspannungsverlauf am Umfang. Beim Abstand  $a = 15$  cm ist die Amplitude des Verlaufs geringer aber der Mittelwert der Zugspannungen deutlich höher als bei  $a = 10$  cm. Die Spitzenzugspannung nehmen im Bereich der Ankerplatte bei kleinerem Abstand  $a$  zu. Im vorliegenden Beispiel kommt es bei  $a = 10$  cm lokal zu höheren Zugspannungen als bei  $a = 15$  cm der Mittelwert der Zugspannungen ist aber deutlich geringer.



**Abb. 4.3.:** Verlauf der Zugspannungen  $\sigma_x$  im LF1 am Spannungspunkt 5 bei fortschreiten in Umfangsrichtung - Einfluss der lokalen Lasteinleitung durch die Ankerplatten

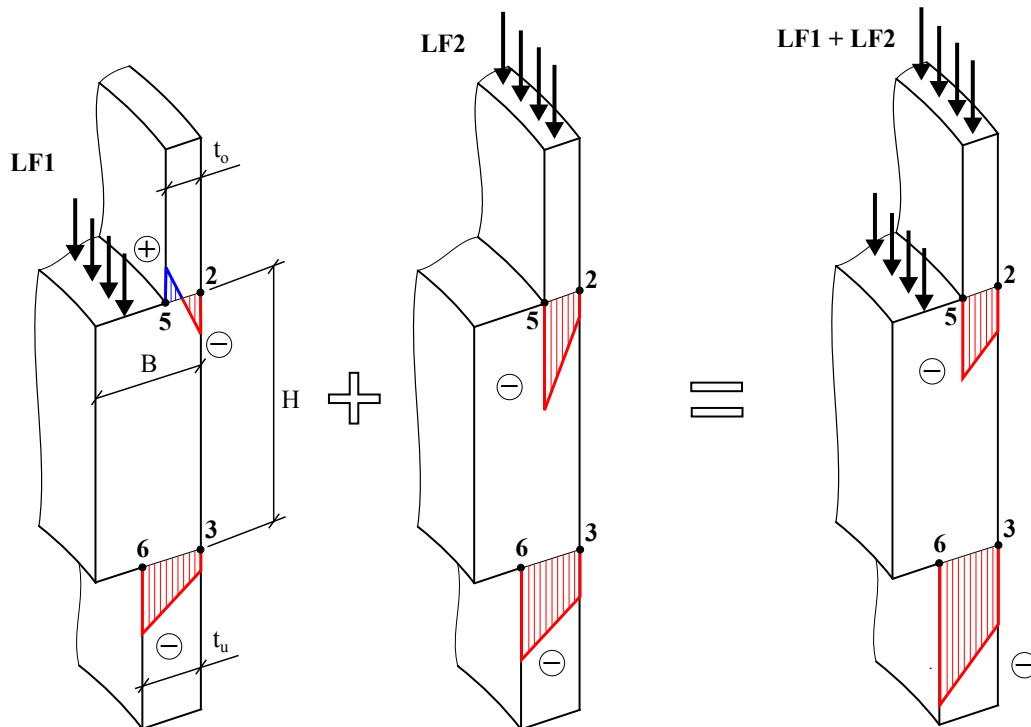
Die kritischen Umfangszugspannungen  $\sigma_\phi$  in den Spannungspunkten 1 und 4 nehmen bei einer Vergrößerung von  $a$  ebenfalls zu.

Um die Kräfte im Verankerungsdetail und damit auch die kritischen Spannungen möglichst gering zu halten ist generell ein kleiner Abstand  $a$  anzustreben. Die dabei auftretenden Spannungspitzen durch die lokale Krafteinleitung an den Ankerplatten müssen aber bei der Wahl eines geringen Abstandes zwischen Ankerplatte und Schalenrand beachtet werden.

### 4.3.2. Biegespannungen in Längsrichtung der Kreiszyinderschalen

Die maximalen Zug- und Druckspannungen treten am Anschlusspunkt der Kreiszyinderschalen zum Kreisringträger auf. Im Bauzustand kommt es beim Aufbringen der Vorspannkraft zu Zugspannungen im Spannungspunkt 5 an der Innenseite der Schale. Im Betriebszustand treten sowohl im oberen als auch im unterem Anschlussbereich Druckspannungen auf.

Die in den folgenden Abbildungen dargestellten Spannungswerte wurden in einem Schnitt bei der Vorspannkrafteinleitung mittig durch die Ankerplatte ausgewertet. Für die Zugspannungen ergeben sich daher Spitzenwerte wie in Abbildung 4.3 dargestellt.



**Abb. 4.4.:** Qualitativer Verlauf der Biegespannungen am Anschluss der Kreiszyinderschalen für den Lastfall 1 und 2 sowie für die Lastfallkombination

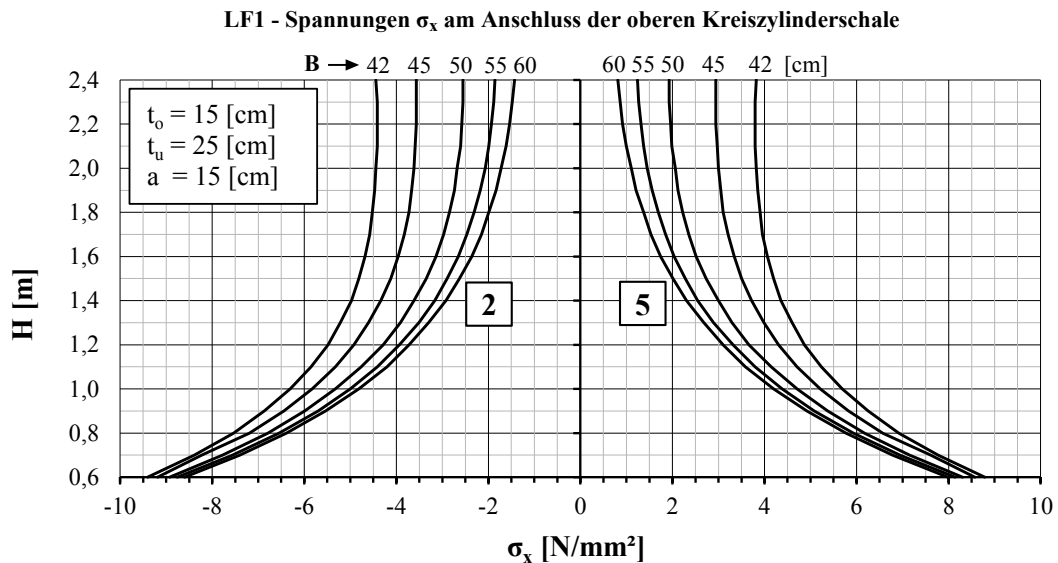
#### Variation der Kreisringträgerhöhe $H$ und der Breite $B$

Mit der Variation der Kreisringträgergeometrie können die Anschlussbiegemomente (Krempelmomente) und somit auch die Spannungen erheblich beeinflusst werden.

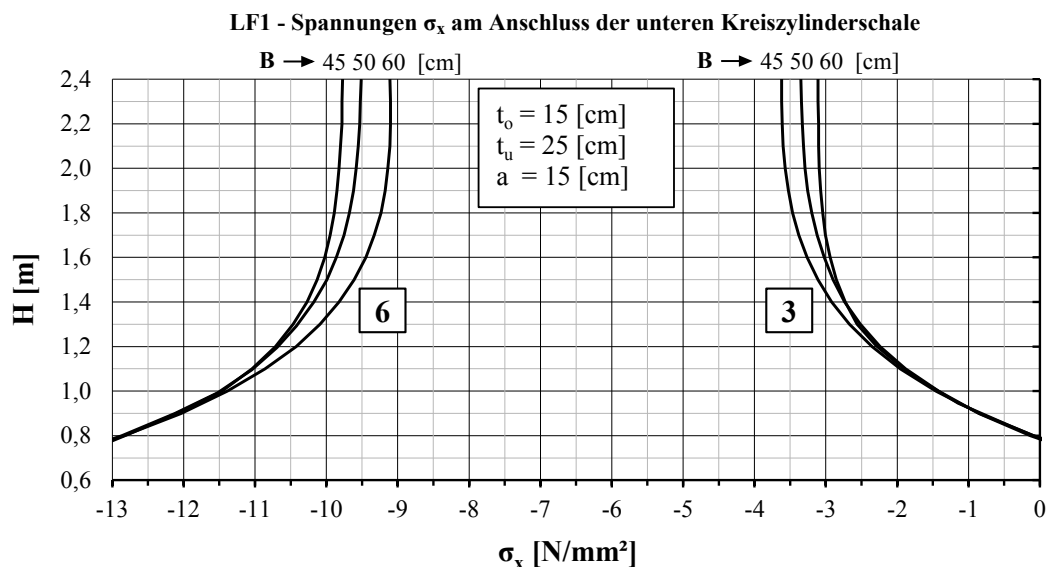
Durch das Vorspannen im Bauzustand entsteht ein negatives Krempelmoment am Anschluss der oberen Kreiszyinderschale. Dieses Biegemoment aus Lastfall 1 verursacht Zug an der Innenseite und Druck an der Außenseite der Schale. Der Verlauf der Spannungen bei Variation der Kreisringträgerhöhe ist für unterschiedliche Kreisringträgerbreiten in Abbildung 4.5 dargestellt. Mit zunehmender Höhe  $H$  nehmen die Zug- und Druckspannungen ab. Diese Abnahmen ist bei breiteren Kreisringträgern größer als bei schmalen.

Die Spannungen am unteren Anschluss sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Das positive Krempelmoment verursacht Druckspannungen an der Innenseite und Zugspannungen an der Außenseite. Diese werden jedoch durch Längsdruckspannungen aus der vertikalen Belastung überlagert.

Ab einer Trägerhöhe von  $H = 0,8 \text{ m}$  werden die Zugspannungen an der Außenseite vollständig überdrückt und es treten im Anschnitt nur noch Druckspannungen auf. Mit zunehmender Höhe nimmt das Biegemoment und somit auch die Druckspannungen an der Innenseite ab.



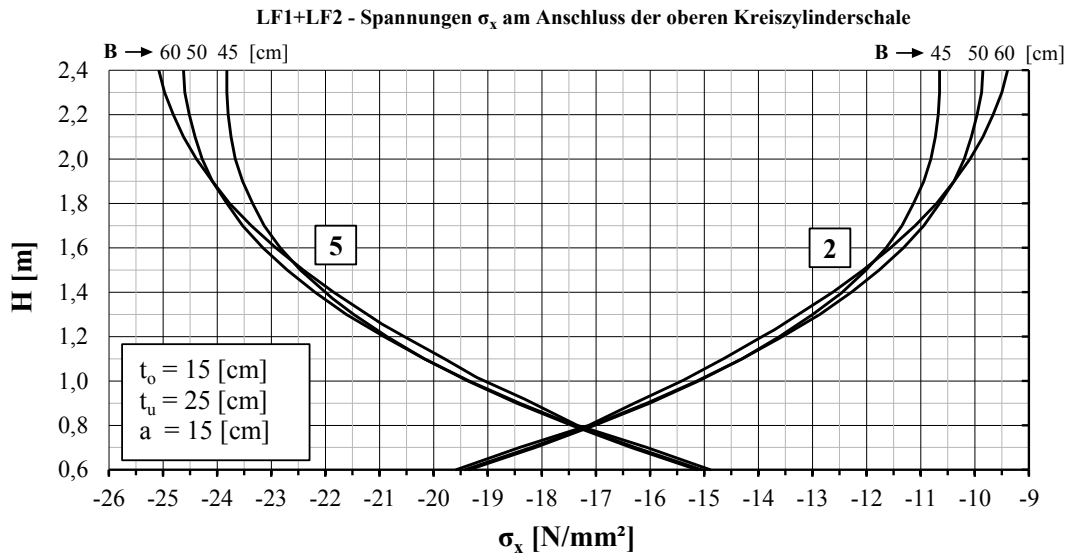
**Abb. 4.5.:** Verlauf der Spannungen im LF1 am Spannungspunkt 2 und 5 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m für verschiedenen Breiten  $B$ ;



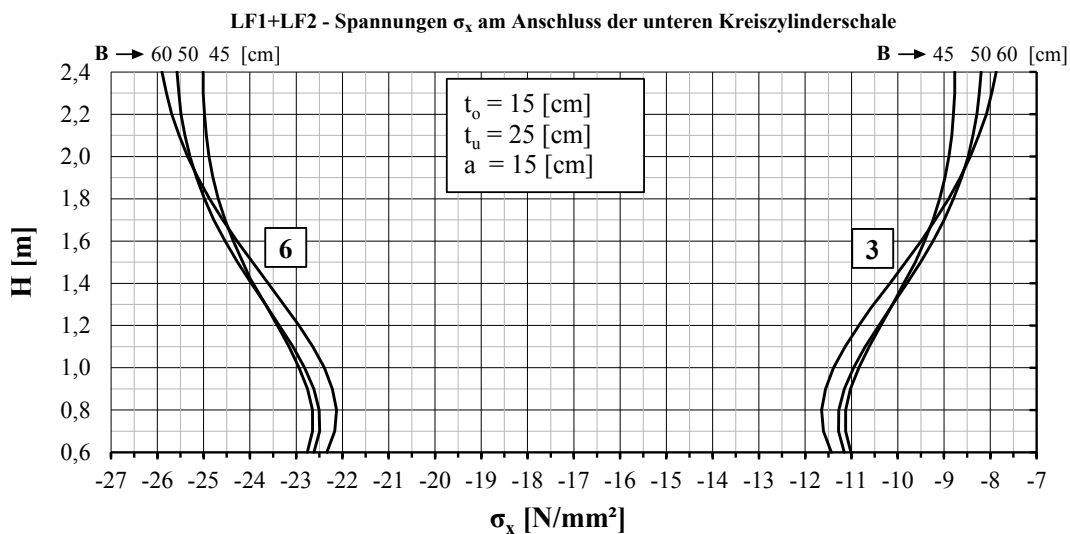
**Abb. 4.6.:** Verlauf der Spannungen im LF1 am Spannungspunkt 6 und 3 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m für verschiedenen Breiten  $B$ ;

Durch die exzentrische Belastung des Kreisringträgers infolge der, an der Schale angreifenden, Normalkraft im Lastfall 2 entsteht ein großes positives Krepelmoment am oberen Schalenschalenanschluss. Die Überlagerung mit Lastfall 1 ist in Abbildung 4.4 qualitativ dargestellt. Die Kombination der beiden Lastfälle führt zur reinen Druckspannungen im Anschnitt. Wie in Abbildung 4.7 dargestellt, nehmen die Druckspannungen bei zunehmender Trägerhöhe an

der Außenseite der Schale ab und an der Innenseite zu. Der Einfluss der Trägerbreite auf die Biegespannungen ist erst bei sehr hohen Trägern zu erkennen.



**Abb. 4.7.:** Verlauf der Spannungen in der Lastfallkombination LF1+LF2 am Spannungspunkt 2 und 5 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m für verschiedenen Breiten  $B$ ;

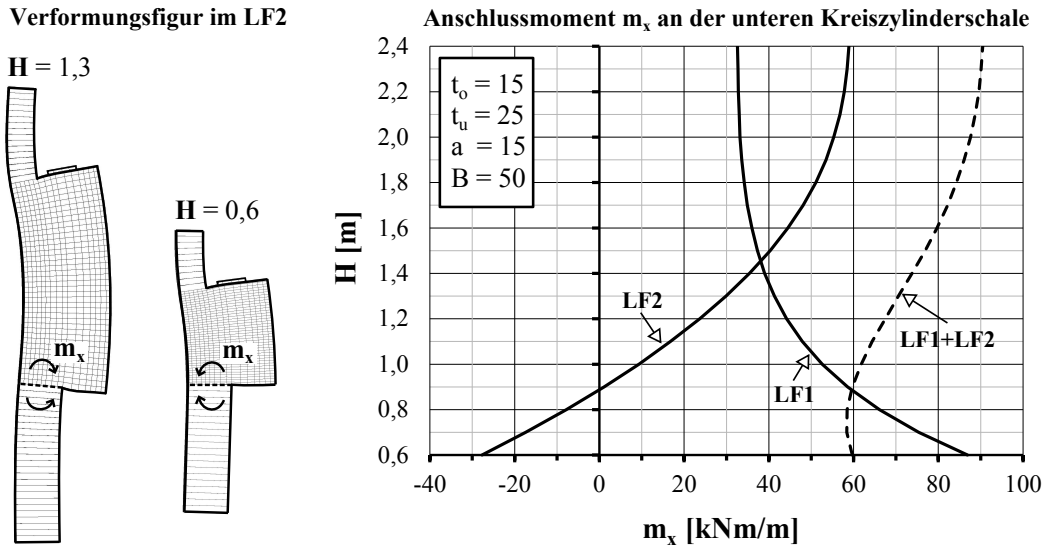


**Abb. 4.8.:** Verlauf der Spannungen in der Lastfallkombination LF1+LF2 am Spannungspunkt 3 und 6 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m für verschiedenen Breiten  $B$

Der Verlauf der Spannungen am unteren Anschluss ist für die Lastfallkombination in Abbildung 4.8 dargestellt. Die Druckspannungen im Spannungspunkt 6 an der Innenseite der Schale steigen mit zunehmender Trägerhöhe an. Der Einfluss der Kreisringträgerbreite auf die Spannungen ist wiederum gering. Das Minimum der Druckspannungen tritt nicht bei der kleinsten Höhe  $H = 0,6$  m auf. Je nach Geometrie- und Belastungsverhältnis werden die minimalen Druckspannungen in diesem Punkt mit Trägerhöhen zwischen 0,7 und 1,1 m erreicht. Dies geht auch aus Abbildung 4.11 sehr gut hervor.

Um zu erläutern warum die die Druckspannungen im Punkt 6 bei sehr kleinen Trägerhöhen wieder ansteigen ist in Abbildung 4.9 der Verlauf das Anschlussmoment an der unteren

Kreiszynderschale getrennt für jeden Lastfall dargestellt. Im Lastfall 2 kommt es bei niedrigen Trägern zu einem negativen Biegemoment. Ab einer Höhe von  $0,9\text{ m}$  wird das Moment am unteren Schalenanschluss positiv. Dieser Nulldurchgang des Verlaufes im Lastfall 2 bewirkt bei der Lastfallkombination, welche durch Summieren der Verläufe aus LF1 und LF2 gebildet wird, die Gegenkrümmung bei niedrigen Trägerhöhen. In der linken Darstellung in Abbildung 4.9 ist für zwei unterschiedliche Trägerhöhen die verformte Geometrie dargestellt. Bei  $H = 0,6\text{ m}$  kommt es durch die Belastung aus LF2 an der Schalenaußenseite zu Druckspannungen.



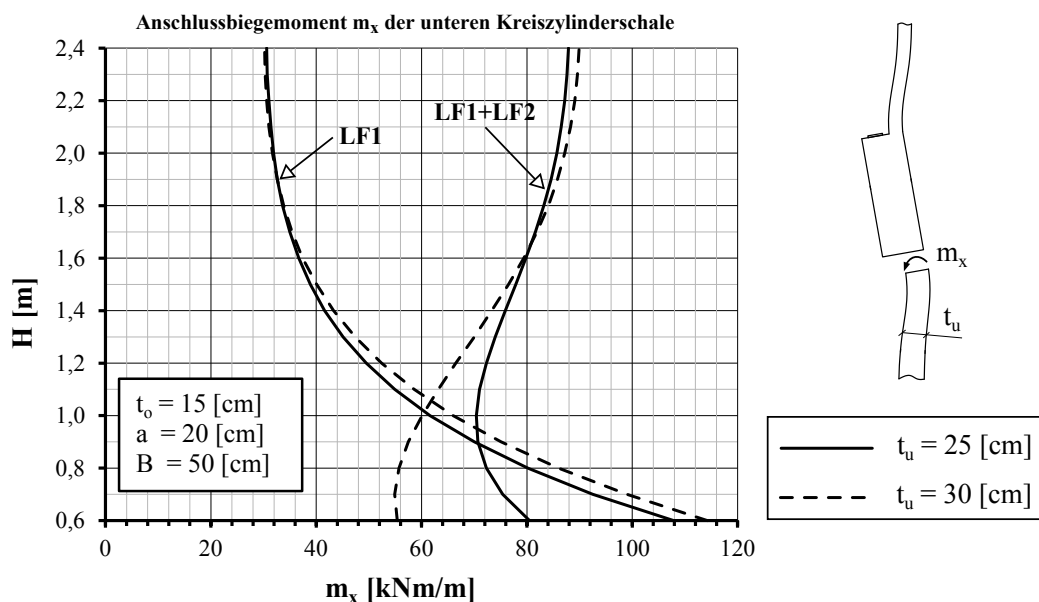
**Abb. 4.9.:** Anschlussmomente an der unteren Kreiszynderschale bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von  $0,6$  bis  $2,4\text{ m}$  für die Lastfälle 1 und 2 sowie für die Lastfallkombination

### Variation der Schalenwandstärken $t_o$ und $t_u$

Die Biegespannungen am Anschluss der Kreiszyinderschalen werden nach Gleichung 4.1 ermittelt. Unter gleichbleibender Schnittgrößen  $n_x$  und  $m_x$  nehmen die Spannungen bei Vergrößerung der Wandstärke  $t$  ab.

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{W} = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x \cdot 6}{t^2} \quad (4.1)$$

Am Verankerungsdetail bleibt aber nur die Schnittgröße  $n_x$  gleich und das Biegemoment  $m_x$  verändert sich beim Erhöhen der Wandstärke. Diese Veränderung des Anschlussbiegemoments wird durch die Änderung der Steifigkeitsverhältnisse am Detail hervorgerufen und ist in Abbildung 4.10 für die Änderung von  $t_u = 25$  auf  $t_u = 30$  cm dargestellt.



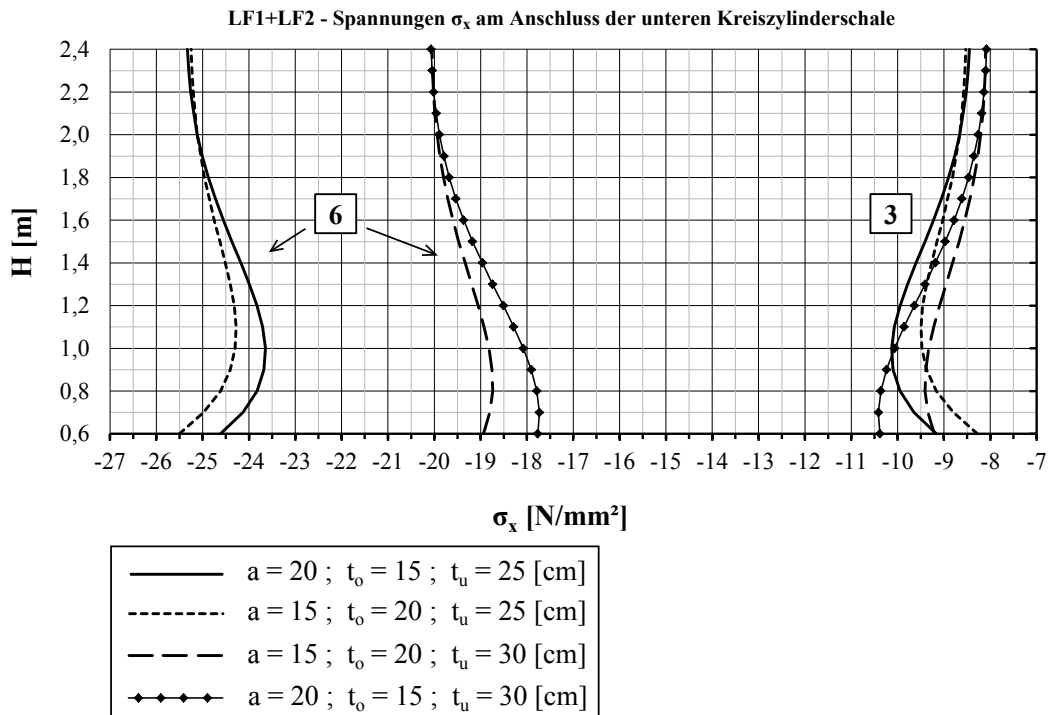
**Abb. 4.10.:** Anschlussmoment an der unteren Kreiszyinderschale bei Änderung der Schalenwandstärke von 25 cm auf 30 cm

Die Anschlussmomente  $m_x$  erhöht sich im Lastfall 1 bei einer Vergrößerung der Schalenwandstärke nur geringfügig. Bei der Lastfallkombination kommt es bei niedrigen Ringträgern zu einer deutlichen Abnahme des Biegemoments. Ab einer Höhe von  $H = 1,7$  m ist wieder eine leichte Zunahme von  $m_x$  erkennbar.

Eine Erhöhung der unteren oder oberen Wandstärke bewirkt bei den untersuchten Geometrie-Verhältnissen nie eine deutliche Erhöhung des Anschlussbiegemoments. Daher kommt es laut Gleichung 4.1 immer zu einer Verringerung der maximalen Zug- und Druckspannungen am Anschluss der jeweiligen Schale wenn  $t$  vergrößert wird. Die Spannungen am oberen (unteren) Anschluss werden durch eine Änderung der unteren (oberen) Wandstärke nur geringfügig beeinflusst.

In Abbildung 4.11 sind die Anschlussspannungen bei unterschiedlichen Trägerhöhe für vier Kombinationen von Wandstärken dargestellt. Bei der Wahl der Kombinationen wurde darauf geachtet, dass der Abstand zwischen dem Punkt der Vorspannkrafteinleitung und dem

Schwerpunkt des Kreisringträgers immer gleich ist. Somit ist der Kreisringträger in allen vier Varianten durch das gleiche resultierende Moment belastet. Die Reduzierung der maximalen Druckspannungen im Punkt 6 durch die Vergrößerung der unteren Wandstärke ist deutlich zu erkennen.



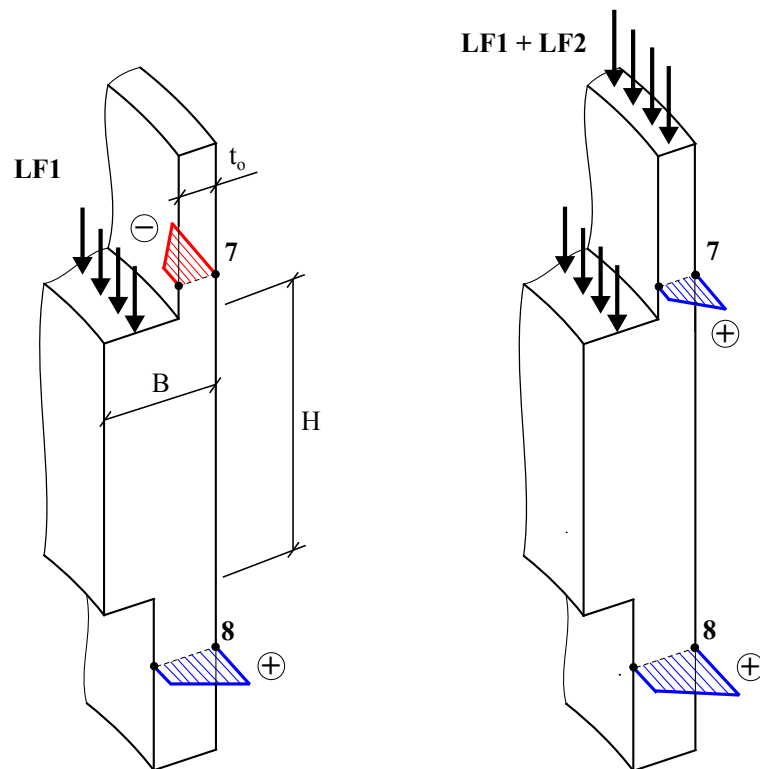
**Abb. 4.11.:** Verlauf der Spannungen in der Lastfallkombination LF1+LF2 am Spannungspunkt 3 und 6 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m für verschiedenen Kombinationen von Schalenwanddicken  $t$ ;

### 4.3.3. Normalspannungen am Umfang der Kreiszyinderschalen

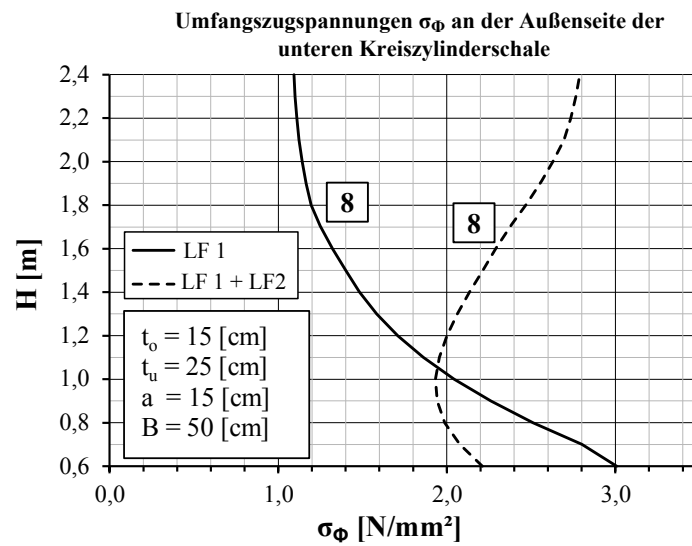
Die Normalspannungen in Umfangsrichtung haben ihr Maximum immer an der Schalenaußenseite in einem Abstand zwischen 1,0 bis  $2,5 \cdot t$  vom Anschlusspunkt am Ringträger. Der Verlauf dieser Umfangsspannungen ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Beim Vorspannen im Bauzustand (LF1) kommt es nur an der unteren Kreiszyinderschale zu Zugspannungen. Am fertigen Turm (LF1+LF2) treten sowohl an der unteren als auch an der oberen Kreiszyinderschale Zugspannungen auf.

In Abbildung 4.13 ist zu erkennen, dass die Umfangsspannungen im Lastfall 1 mit zunehmender Trägerhöhe abnehmen. Dagegen ist im Lastfall 1+2 bei höheren Kreisringträgern mit höheren Umfangsspannungen zu rechnen. Die optimale Trägerhöhe liegt im Bereich von  $H = 1,1$  m. Die Umfangszugspannungen an den Kreiszyinderschalen liegen generell bei allen untersuchten Geometrien unter  $3,0$  N/mm<sup>2</sup>.



**Abb. 4.12.:** Qualitativer Verlauf der Spannungen an den Kreiszyinderschalen in Umfangsrichtung für Lastfall 1 und Lastfall 1+2

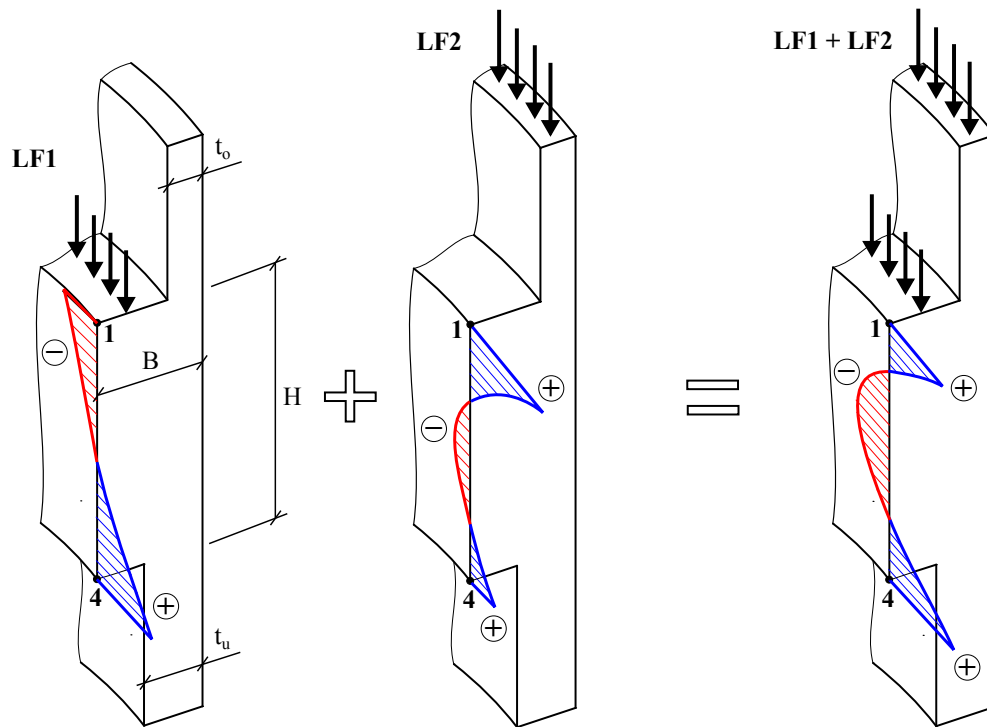


**Abb. 4.13.:** Verlauf der Umfangszugspannungen am Spannungspunkt 8 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m



#### 4.3.4. Spannungen am Kreisringträger in Umfangsrichtung

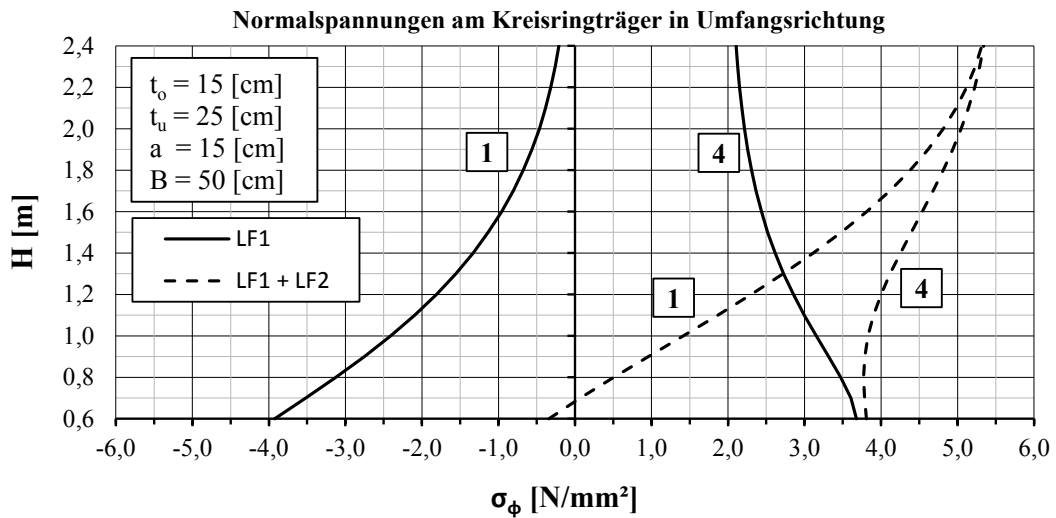
Beim Vorspannen entstehen am Kreisringträger unten Zugspannungen und oben Druckspannungen. Nach Fertigstellung des Turmes treten an der Unter- und Oberkante des Trägers Zugspannungen auf. Diese Umfangsspannungen sind an der Innenseite des Kreisringes immer höher als an der Außenseite. Daher werden nur die Spannungen in den Punkten 1 und 4 betrachtet.



**Abb. 4.14.:** Qualitativer Verlauf der Spannungen in Umfangsrichtung für Lastfall 1 und Lastfall 1+2

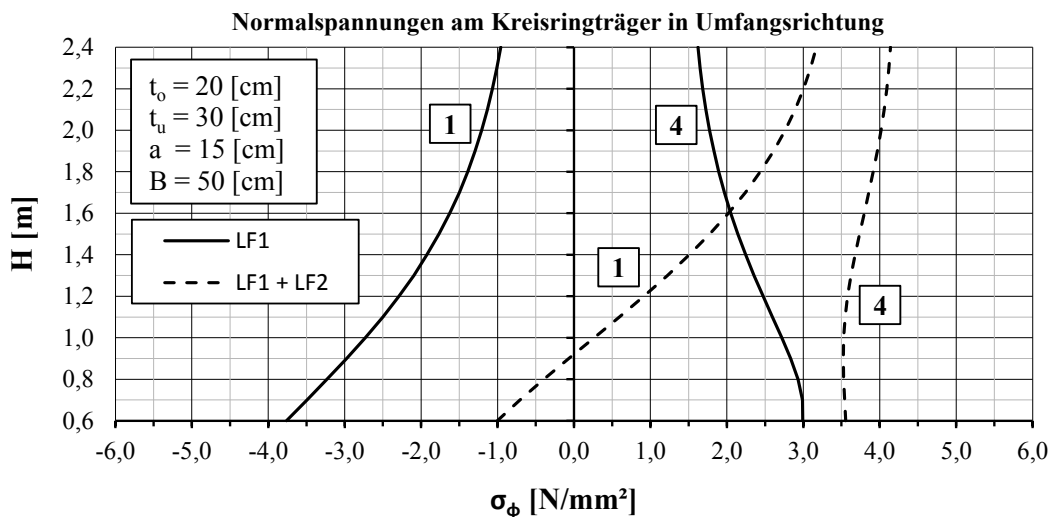
#### Variation der Kreisringträgerhöhe $H$

Die Spannungen  $\sigma_\phi$  in Umfangsrichtung werden durch die Höhe des Kreisringträgers stark beeinflusst. Im Lastfall 1 führt eine Vergrößerung der Höhe  $H$  des Kreisringträgers zu einer Reduzierung der Zug- und Druckspannungen am unteren und oberen Rand. Bei der Lastfallkombination aus Lastfall 1 und 2 steigen die Zugspannungen in den Punkten 1 und 4 bei einer Vergrößerung der Höhe  $H$  an. Die Zunahme der Zugspannungen ist dabei am oberen Rand des Kreisringträgers deutlich größer als am unteren Rand.



**Abb. 4.15.:** Verlauf der Normalspannungen am Umfang des Kreisringträgers an den Spannungspunkten 1 und 4 bei Variation der Höhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m

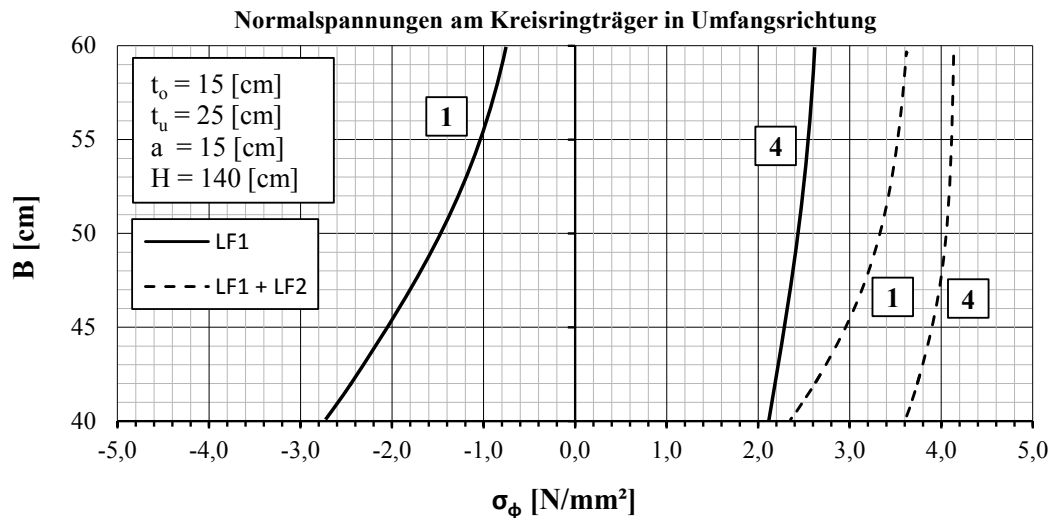
Eine Vergrößerung der oberen und unteren Schalenwandstärke um jeweils 5 cm bewirkt eine geringe Änderung der Verläufe. Der Trend aus Abbildung 4.15 und 4.16 bleibt gleich.



**Abb. 4.16.:** Verlauf der Normalspannungen am Umfang des Kreisringträgers an den Spannungspunkten 1 und 4 bei Variation der Höhe  $H$  von 0,6 bis 2,4 m

### Variation der Kreisringträgerbreite $B$

Bei einer Vergrößerung der Breite  $B$  des Kreisringträgers erhöhen sich die Zugspannungen am inneren Umfang des Kreisringträgers. Dieses Verhalten gilt für alle untersuchten Trägerhöhen. Als Beispiel sind die Verläufe in Abbildung 4.17 an einem 140 cm hohen Kreisringträger dargestellt.

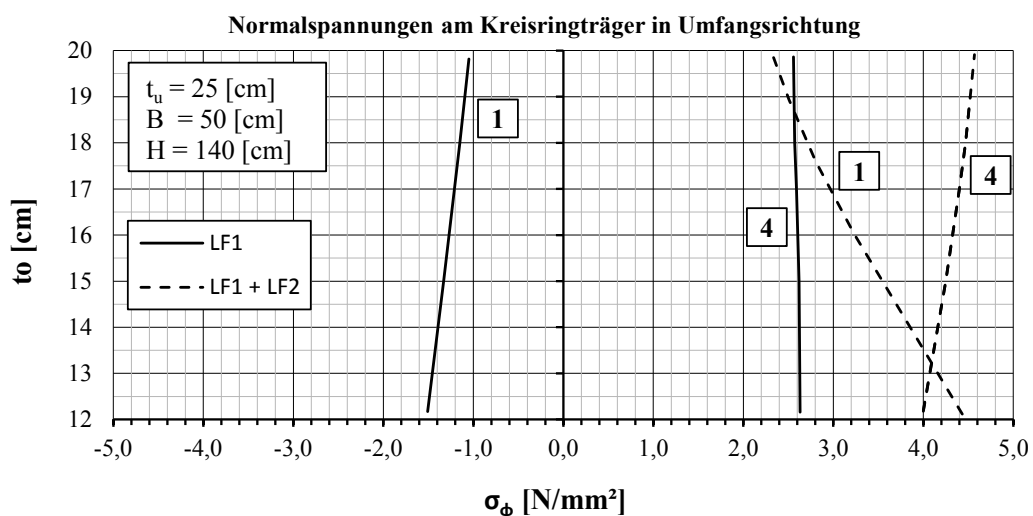


**Abb. 4.17.:** Verlauf der Normalspannungen am Umfang des Kreisringträgers an den Spannungspunkten 1 und 4 bei Variation der Breite  $B$  von 42 bis 60 cm

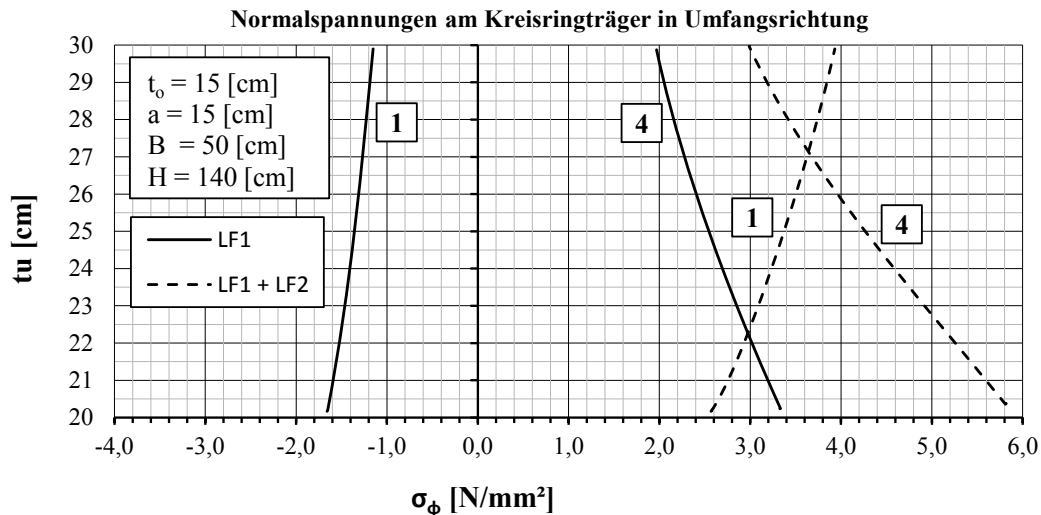
#### Variation der Schalenwandstärke $t_o$ oder $t_u$

Mit einer Vergrößerung der oberen Wandstärke nehmen die Zugspannungen im Lastfall 1+2 im Spannungspunkt 1 an der Oberkante des Kreisringträgers ab und die Zugspannung an der Unterkante geringfügig zu. Im Lastfall 1 können die Zugspannungen im Punkt 4 durch eine Vergrößerung der oberen Wandstärke nicht reduziert werden. Dies ist in Abbildung 4.18 gut erkennbar.

In Abbildung 4.19 wird die untere Schalenwandstärke variiert. Das Verhalten ist im Lastfall 1+2 in etwa gegengleich zur Abbildung 4.18. Die Zugspannung an der Unterkante nehmen ab und die an der Oberkante zu wenn die Wandstärke erhöht wird. Die Zugspannungen im Lastfall 1 im Punkt 4 werden durch eine Vergrößerung der unteren Schalenwandstärke deutlich reduziert.



**Abb. 4.18.:** Verlauf der Normalspannungen am Umfang des Kreisringträgers an den Spannungspunkten 1 und 4 bei Variation der oberen Schalenwandstärke  $t_o$  von 12 bis 20 cm



**Abb. 4.19.:** Verlauf der Normalspannungen am Umfang des Kreisringträgers an den Spannungspunkten 1 und 4 bei Variation der unteren Schalenwandstärke  $t_u$  von 20 bis 30 cm

#### 4.3.5. Einfluss des Belastung

Entscheidend für den Einfluss der Belastung auf die Spannungen ist das Verhältnis zwischen Vorspannkraft  $\mathbf{P}$  und Normalkraft  $\mathbf{N}$ .

Wie im Kapitel 3.2.1 erläutert unterscheidet sich das Tragverhalten der Ringträger bei großen Vorspannkraften und kleinen Normalkraften (LF1) deutlich vom Tragverhalten bei der Lastfallkombination (LF1+LF2). Dies hat Auswirkungen auf die Anschlussmomente. In Abbildung 4.20 wird ausgehend vom Bauzustand (LF1) mit einer geringen vertikalen Belastung von  $N = 0,6$  MN die Normalkraft schrittweise bis zur Fertigstellung des Turmes (LF1+LF2) auf  $N = 33,7$  MN gesteigert. Die Vorspannkraft bleibt dabei konstant bei  $P = 20$  MN. Bei einer bestimmten Trägerhöhe kann das Verhältnis  $N/P$  so gewählt werden, dass kein oberes Anschlussmoment auftritt. Dies ist zum Beispiel laut Abbildung 4.20 bei einem Träger  $H = 1,1$  m und  $N/P = 1$  der Fall. Gleichzeitig ist bei dieser bestimmten Trägerhöhe auch das Anschlussmoment an der unteren Kreiszyinderschale nahe beim Minimum. Für ein bestimmtes Belastungsverhältnis kann auf diesem Weg eine zugehörige optimale Trägerhöhe für möglichst niedrige Anschlussmomente gefunden werden.

Die Veränderung der unteren Anschlussspannungen in den Punkten 3 und 6 sind als Beispiel in Abbildung 4.21 dargestellt. Je nach Belastungsverhältnis zwischen Vorspannung  $\mathbf{P}$  und Normalkraft  $\mathbf{N}$  nehmen die Spannungen bei Vergrößerung der Trägerhöhe ab oder zu. Bei geringer vertikaler Belastung  $N$  können die Druckspannungen im Punkt 6 durch eine Vergrößerung der Trägerhöhe gut reduziert werden. Je höher die vertikale Belastung des Ringträgers ausfällt, desto weniger kann durch diese Maßnahmen erreicht werden. Ab einem Verhältnis von  $N/P = 10/20 = 0,5$  nehmen die Druckspannungen im Punkt 6 durch eine Vergrößerung der Trägerhöhe wieder zu.

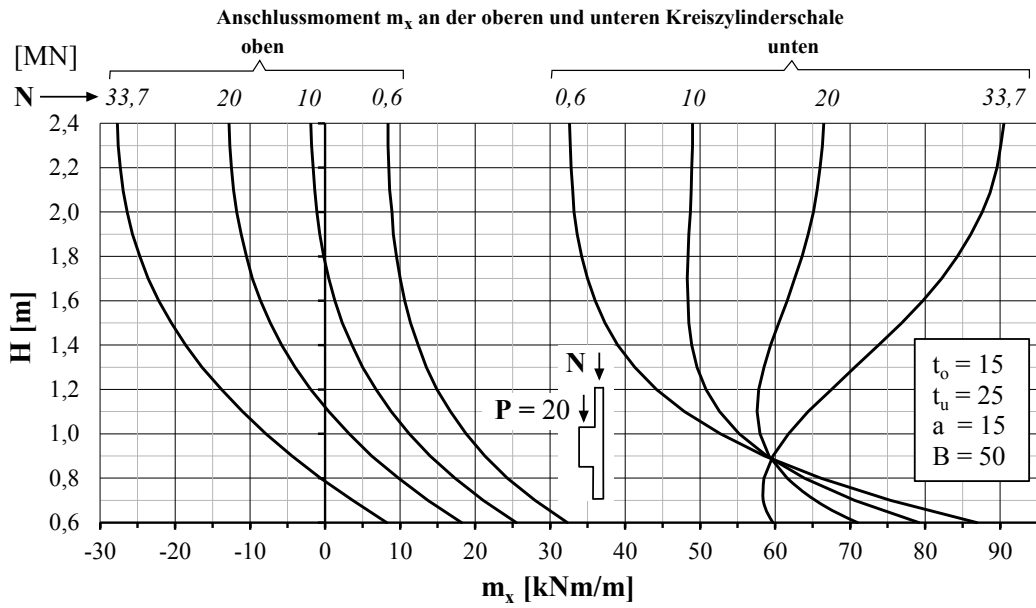


Abb. 4.20.: Verlauf der Anschlussmomente bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4  $m$  für verschiedene Belastungsverhältnisse  $N/P$

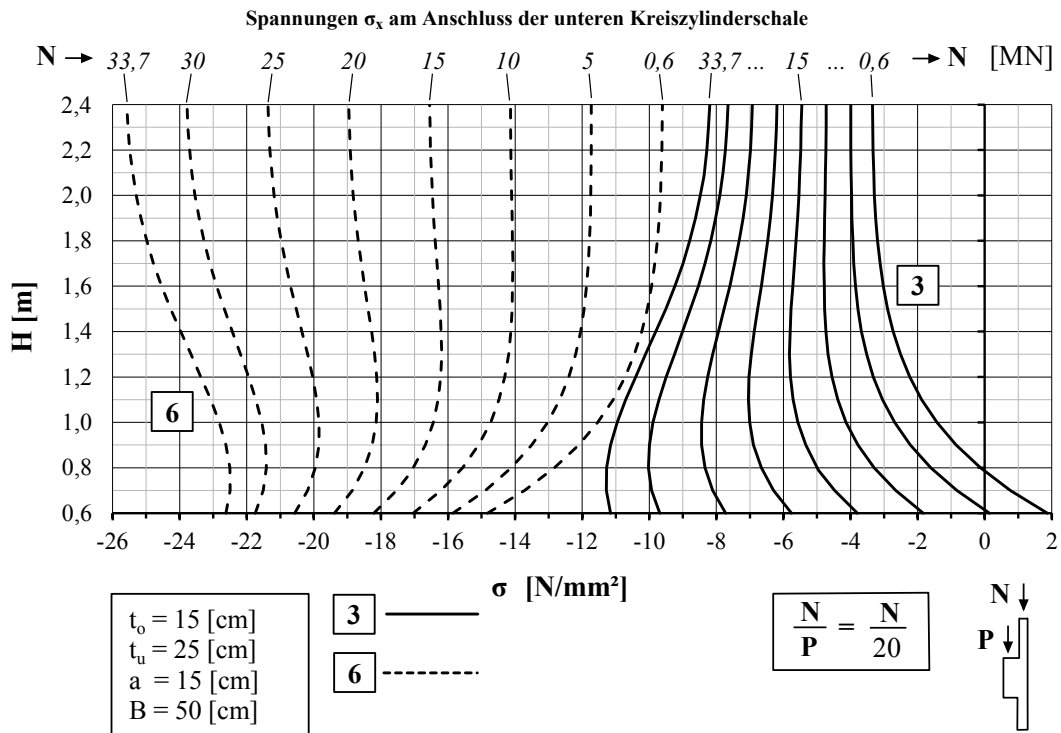


Abb. 4.21.: Verlauf der Spannungen am Spannungspunkt 3 und 6 bei Variation der Kreisringträgerhöhe  $H$  von 0,6 bis 2,4  $m$  für verschiedene Belastungsverhältnisse  $N/P$

## 4.4. Empfehlungen zur Auslegung der Verankerungsdetails

Je nach Belastungsverhältnis  $N/P$  aus vertikaler Belastung und Vorspannung kann eine optimale Geometrie für das jeweilige Verankerungsdetail gefunden werden.

Nachfolgend werden zwei wesentliche Belastungszustände betrachtet und die optimale Auslegung der Geometrie für diese Zustände beschrieben. Im Bauzustand ist  $N/P = 0,6/20 = 0,03$  und im Betriebszustand wird der Fall mit  $N/P = 33,7/20 = 1,69$  betrachtet.

### Bauzustand

Im Bauzustand, bei voller Vorspannung und geringer vertikaler Belastung, ist ein hoher Träger anzustreben. Je nach Breite ist ab einer bestimmten Höhe keine weitere Reduzierung der kritischen Anschlussspannungen im Punkt 5 und 6 möglich. So können zum Beispiel laut Abbildung 4.5 bei einer Trägerbreite von  $B = 42 \text{ cm}$  ab einer Höhe von  $H = 1,8 \text{ m}$  die Zugspannungen im Punkt 5 durch eine höheren Träger nicht weiter reduziert werden. Durch eine Vergrößerung der Trägerbreite  $B$  ist allerdings noch eine deutliche Reduzierung der kritischen Spannungen möglich.

Um die Zugspannungen am Umfang des Kreisringträgers bei dieser Belastungssituation gering zu halten ist laut Abbildung 4.15 ebenfalls ein hoher Träger anzustreben. Für geringe Umfangzugspannungen im Punkt 4 sollte jedoch die Breite  $B$  nicht zu groß gewählt werden.

### Betriebszustand mit hoher vertikaler Belastung

Im Betriebszustand mit hoher vertikaler Belastung sollte der Kreisringträger möglichst niedrig ausgeführt werden. Für die in Abbildung 4.11 ausgewerteten Geometrieverhältnisse sind Höhen von  $80 \text{ cm}$  bis  $110 \text{ cm}$  optimal um die Druckspannungen im Punkt 6 gering zu halten. Mit einer Vergrößerung der Trägerbreite  $B$  kann bei dieser Belastungssituation keine deutliche Reduktion der Anschlussspannungen erreicht werden. Am effektivsten können die kritischen Spannungen im Anschlussbereich der Schalen durch die Vergrößerung der Wandstärke  $t$  reduziert werden. So bewirkt zum Beispiel laut Abbildung 4.11 eine Vergrößerung der unteren Schalenwandstärke um  $5 \text{ cm}$  eine Reduktion der Druckspannungen im Punkt 6 um ca. 30%.

Um die Umfangzugspannungen gering zu halten sind laut Abbildung 4.15 ebenfalls niedrige Kreisringträger anzustreben. Eine geringe Trägerbreite führt auch zu einer Reduzierung der Zugspannungen im Punkt 1 und 4. Diese Zugspannungen können laut Abbildung 4.18 auch durch eine Vergrößerung der Schalenwandstärken verringert werden. Sollen die Zugspannungen oben im Punkt 1 reduziert werden, muss demnach die obere Wandstärke erhöht werden. Um die unteren Zugspannung im Punkt 4 zu verringern muss die untere Wandstärke erhöht werden.

## 5. Detailuntersuchung

Die im Kapitel 2.3 vorgestellten Verankerungsdetails wurden anhand der Erkenntnisse aus der Geometriestudie für die gegebene Belastungssituation optimiert. In diesem Kapitel sind die optimierten Geometrien und die Berechnungsergebnisse für die drei Details dargestellt.

### 5.1. Allgemeines

Vor der genaueren Erläuterung der Details A, B und C wird kurz auf die Geometriefindung eingegangen. Des Weiteren werden einige allgemeine Angaben und Festlegungen zur Detailuntersuchung gemacht.

Hinsichtlich der Geometriefindung wird folgende Vorgangsweise vorgeschlagen. Zunächst ist es wichtig, die Entwurfskriterien, die Belastung sowie eine Ausgangsgeometrie festzulegen. In einem ersten Schritt sollte die Höhe  $H$  für den Kreisringträger laut Abbildung 4.20 so gewählt werden, dass beim gegebenen Belastungsverhältnis  $N/P$  ein möglichst geringes Anschlussmoment auftritt. Mit der gewählten Höhe kann in einem zweiten Schritt eine analytische Berechnung durchgeführt und die Grenzspannungen in den kritischen Punkten überprüft werden. Werden die in den Entwurfskriterien festgelegten Grenzspannungen überschritten, muss die Geometrie laut den Angaben in Kapitel 4 entsprechend angepasst werden. Nachdem die Geometrie durch die analytische Berechnung festgelegt ist, erfolgt eine Finite-Elemente Berechnung, um lokale Effekte zu untersuchen.

Mit dieser Vorgehensweise konnte für alle drei Verankerungsdetails eine optimale Geometrie gefunden werden.

#### 5.1.1. Entwurfskriterien

Als wesentliches Entwurfskriterium wird die Spannungsbegrenzung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (GZG) herangezogen. Bei möglichst kleinen Bauteilabmessungen sollen die auftretenden Betondruckspannungen am Verankerungsdetail die im Eurocode 2 festgelegten Grenzwerte für den GZG nicht überschreiten. Durch die Einhaltung dieses Kriteriums können Längsrisse, eine vermehrte Mikrorissbildung im Bauteil oder starkes Kriechen verhindert werden. Des Weiteren sollen die auftretenden Zugspannungen die Betonzugfestigkeit nicht überschreiten. Dieses Kriterium bildet die Voraussetzung für eine linear elastische Berechnung. Der ungerissene Beton kann dabei als homogenes Material betrachtet werden. Ein weiteres Kriterium ist die Sicherstellung der Dekompression in der horizontalen Fuge. Die Fuge soll so angeordnet werden, dass sie immer überdrückt bleibt.

- Begrenzung der Betondruckspannungen auf  $|\sigma_{c,perm}| \leq 0,45 \cdot f_{ck}$
- Begrenzung der Betondruckspannungen auf  $|\sigma_{c,rare}| \leq 0,6 \cdot f_{ck}$
- Begrenzung der Betonzugspannungen auf  $\sigma_{ct} \leq f_{ctk0,05}$

Für die Begrenzung der Betondruckspannungen laut ÖNORM EN 1992-1-1 Abschnitt 7.2 werden vereinfacht folgende Einwirkungskombinationen festgelegt.

Quasi Ständige Bemessungssituation (perm)	→	LF1+LF2 Zustand nach Fertigstellung des Turmes
Seltenen Bemessungssituation (rare)	→	LF1+LF2+LF3 Betriebszustand mit Spitzenbelastung

Bei der Modellierung und Nachweisführung wird für alle Verankerungsdetails Beton der Festigkeitsklasse C70/85 mit folgenden Materialeigenschaften laut EN 1992-1-1 gewählt.

Betonfestigkeitsklassen:	C70/85
	$f_{ck} = 70 \text{ N/mm}^2$
	$f_{ctm} = 4,6 \text{ N/mm}^2$
	$f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$
	$E_{cm} = 41000 \text{ N/mm}^2$
	$\nu = 0,2$

Aus diesen Materialeigenschaften resultieren folgende Grenzwerte für die Betondruck- und zugspannungen.

$$|\sigma_{c,perm}| \leq 0,45 \cdot f_{ck} = 0,45 \cdot 70 = 31,5 \text{ N/mm}^2$$

$$|\sigma_{c,rare}| \leq 0,6 \cdot f_{ck} = 0,6 \cdot 70 = 42,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ct} \leq f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$$

Beim SLS Nachweis werden diese Grenzspannungen den berechneten Spannungen am Verankerungsdetail in den kritischen Punkten gegenübergestellt.

### 5.1.2. Spannungsberechnung

Die Spannungsberechnung für den Lastfall 1 und 2 wird mittels linear elastischen Finite-Elemente-Berechnung am FE-Modell 1 durchgeführt. Die Auswertung der Elementmittelspannungen erfolgt an den in Abbildung 5.1 dargestellten Schnittflächen und Spannungspunkten.

Die Anschlussspannungen aus dem Lastfall 3 werden nach Gleichung 5.1 berechnet. Diese in Abbildung 2.9 dargestellten Biegerandspannungen sind je nach Wirkungsrichtung von  $F_H$  entweder Zug- oder Druckspannungen. Sie werden in den vier Punkten 5, 2, 6 und 3 mit den Spannungen aus der Finite-Elemente-Berechnung überlagert.

$$M = F_H \cdot h \qquad I = \frac{(R_a^4 - R_i^4) \cdot \pi}{4} \qquad \sigma_x = \frac{M}{I} \cdot R \qquad (5.1)$$



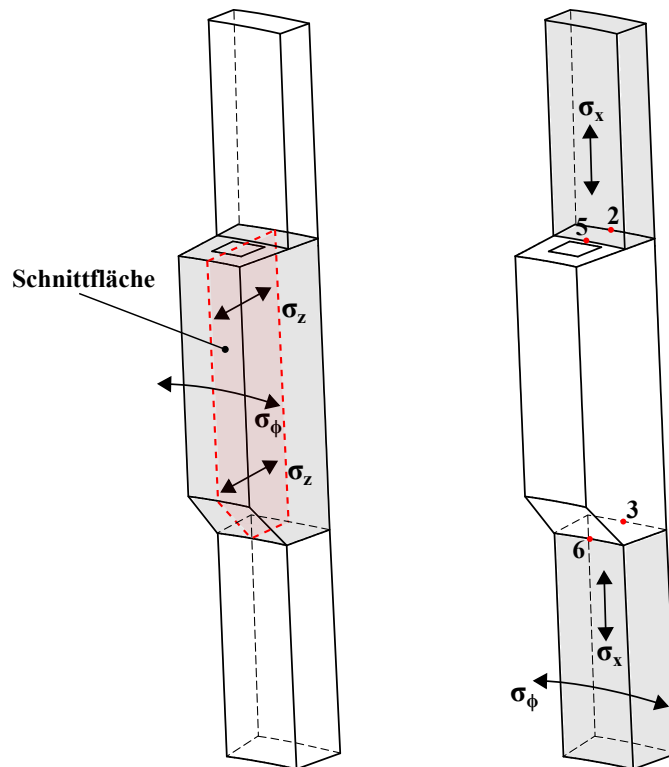


Abb. 5.1.: Übersicht Schnittführung und Spannungspunkte

### 5.1.3. Allgemeine Überlegungen zur Ausführung

Diese Überlegungen betreffen die Anordnung der horizontalen Fuge sowie die Abschrägung der Ringträger. Sie werden bei allen drei Details entsprechend umgesetzt.

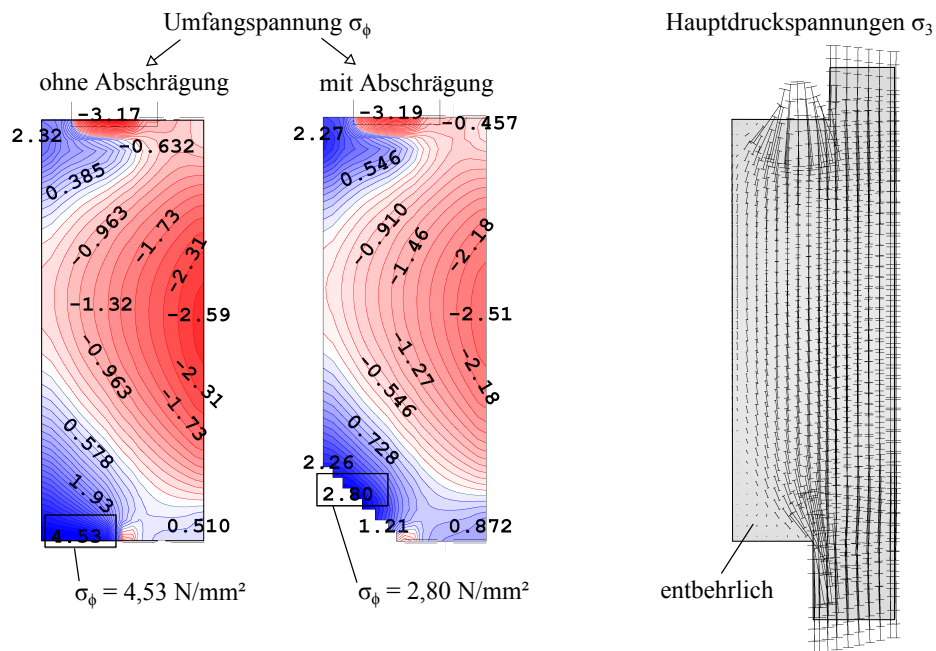
#### Anordnung der horizontalen Fuge

Im ersten Entwurf der Verankerungsdetails laut Abbildung 2.5 sind die horizontalen Fugen zwischen den einzelnen Fertigteilesegmenten bei Detail A und B in der Mitte und bei Detail C am unteren Ende des Kreisringträgers angeordnet. Bei einer Anordnung in der Mitte kann das Kriterium der Dekompression für alle Belastungssituationen eingehalten werden. Im Gegensatz dazu kommt es bei einer Anordnung am unteren Ende des Kreisringträgers zum Klaffen der Fuge im Betriebszustand.

Um den Kraftfluss in Kreisringträger nicht zu stören und klaffende Fugen zu vermeiden wird die Anordnung der Fuge in der jeweils unteren Kreiszyinderschale vorgeschlagen. Die Position wird so gewählt, dass im Betriebszustand kein Schalenbiegemoment an der Fuge auftritt. In Abbildung 5.4 ist die Position für Detail A dargestellt. Die Fuge wird im Abstand von 60 cm vom unteren Rand des Kreisringträgers angeordnet. Die Randspannungen sind an dieser Stelle gleich groß und konstant über die Schalendicke. Die Position der Fuge für Detail B und C ist in Abbildung 5.11 und 5.17 dargestellt.

## Abschrägung des Kreisringträgers

Durch die Abschrägung des Kreisringträgers an der Unterseite können die Zugspannungen in Umfangsrichtung reduziert werden. Die Abbildung 5.17 zeigt eine Gegenüberstellung der Umfangsspannungen  $\sigma_\phi$  am Kreisringträger für die Lastfallkombination (LF1+LF2). In der rechten Darstellung sind die zugehörigen Hauptdruckspannungen dargestellt. Wie bei Konsolen des üblichen Hochbaus treten an untere Ecke beinahe keine Druckspannungen auf. Das abschrägen der unteren Ecke wirkt sich nur sehr gering auf die Lastabtragung des Kreisringträgers aus. So erhöhen sich zum Beispiel das Anschlussmoment der unteren Schale um ca. 2% gegenüber einem nicht abgeschrägten Ringträger. Diese geringe Änderung der Schnittkräfte konnte bei allen untersuchten Details beobachtet werden.



**Abb. 5.2.:** Einfluss der Abschrägung des Kreisringträgers auf die Umfangsspannungen  $\sigma_\phi$

## 5.2. Detail A

### 5.2.1. Allgemeine Angaben zur Detailausführung

In Abbildung 5.3 ist der optimierte Entwurf für Detail A dargestellt.

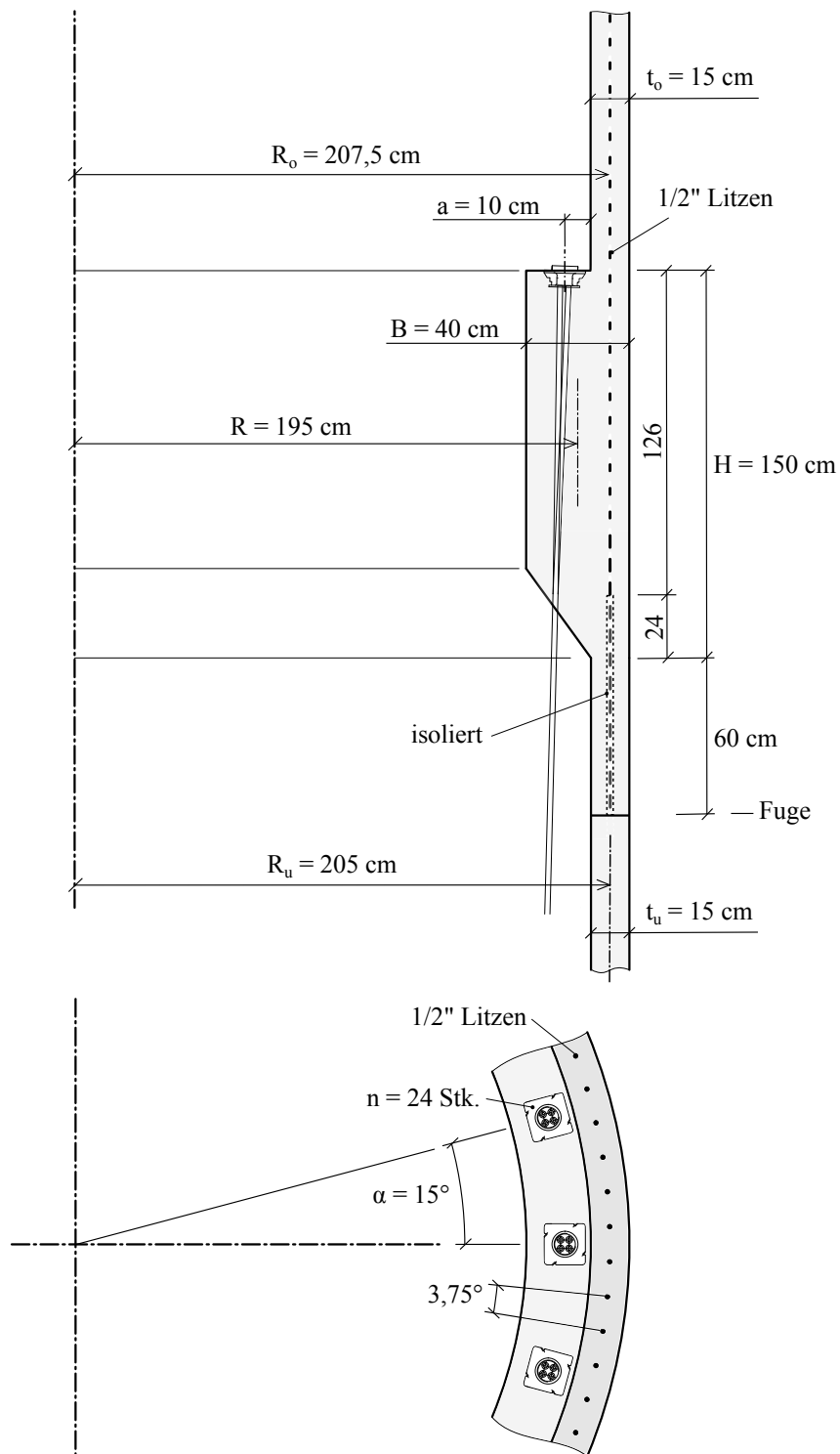


Abb. 5.3.: Detail A

Das Detail A ist im Betriebszustand bei hoher Vorspannung nur sehr geringfügig durch eine vertikale Last  $N$  belastet. Dieses geringe Belastungsverhältnis von  $N/P = 2,5/15 = 0,167$  führt laut Geometriestudie zu einem hohen Kreisringträger. Bei einer Höhe von  $H = 1,5\text{ m}$  und einer Breite von  $B = 0,4\text{ m}$  ergibt sich bei den vorgesehenen Schalenwandstärken ein optimale Geometrie. Die Fuge wird  $60\text{ cm}$  unterhalb des Kreisringträgers in der unteren Kreiszyinderschale laut Abbildung 5.4 angeordnet. Die Lage und Auslegung der Spannbettvorspannung ist im nächsten Abschnitt 5.2.2 ausführlich beschrieben.

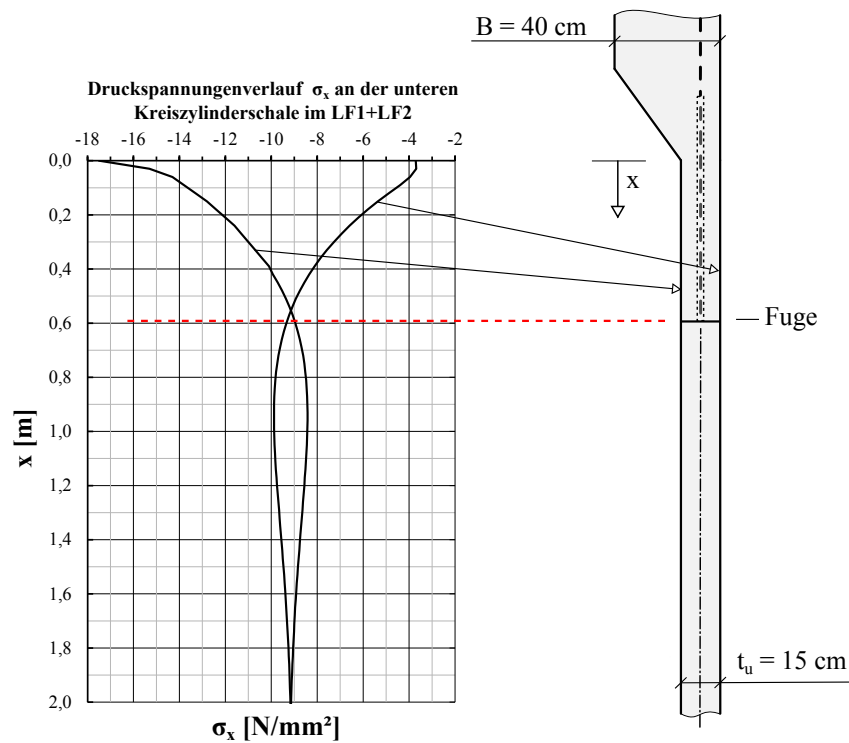


Abb. 5.4.: Position der unteren Fuge

### 5.2.2. Verbundverankerung der Spannlitzen

In diesem Abschnitt wird zuerst die erforderliche Anzahl an Spannlitzen ermittelt und anschließend die Übertragungslänge zur Modellierung der Verbundverankerung berechnet.

Zur Spannbettvorspannung des obersten Rohrsegments werden Spannlitzen St 1570/1770 aus sieben kaltgezogenen, glatten Einzeldrähten laut Zulassung Z-12.3-4 eingesetzt.

Spannstahllitze 1/2":	<b>St 1570/1770</b>
Nenndurchmesser:	$d_p = 12,9\text{ mm}$
Nennquerschnitt:	$A_p = 100\text{ mm}^2$
Dehngrenze:	$f_{p0,1k} = 1500\text{ N/mm}^2$
Zugfestigkeit:	$f_{pk} = 1770\text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul:	$E_p = 195000\text{ N/mm}^2$

### Erforderliche Spannlitzenanzahl

Zum Aufbringen der geforderte Vorspannkraft ist eine bestimmte Anzahl an Spannlitzen am Umfang erforderlich. Diese Anzahl  $n$  wird nachfolgend über die maximale Vorspannkraft je Spannlitze und unter Berücksichtigung von Spannkraftverlusten ermittelt.

Die maximale Vorspannkraft je Spannlitze während des Spannvorganges und nach dem Kappen der Litzen ergeben sich laut ÖNORM EN 1992-1-1 Abschnitt 5.10 wie folgt.

$$\sigma_{p,max} = \min \begin{cases} 0,8 \cdot f_{pk} = 1416 \text{ N/mm}^2 \\ 0,9 \cdot f_{p0,1k} = 1350 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \rightarrow P_{max} = 135 \text{ kN} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{pm0,max} = \min \begin{cases} 0,7 \cdot f_{pk} = 1239 \text{ N/mm}^2 \\ 0,8 \cdot f_{p0,1k} = 1200 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \rightarrow P_{m0,max} = 120 \text{ kN} \quad (5.3)$$

Die sofortige Verluste nach dem Absetzen der Spannkraft bei  $t = t_0$  durch die elastische Verkürzung des Betonbauteils werden mit Formel 5.4 abgeschätzt.

$$P_{m0} = P_{max} \cdot \frac{A_c}{\alpha_e \cdot A_p + A_c} = 135 \cdot \frac{203}{4,756 \cdot 1,0 + 203} = 132 \text{ kN} \quad (5.4)$$

$$\alpha_e = \frac{E_p}{E_c} = 4,756 ; A_c = 203 \text{ cm}^2 ; A_p = 1,0 \text{ cm}^2$$

Die sofortigen Verluste betragen ca. 2,2 % von  $P_{max}$ . Die Mittlere Vorspannkraft nach dem Kappen der Spannlitzen ergibt sich aus der Bedingung 5.3 zu  $P_{m0} = 120 \text{ kN}$ . Die zeitabhängigen Spannkraftverluste werden mit ca. 20 % abgeschätzt. Daraus resultierend einen mittlere Vorspannkraft zum Zeitpunkt  $t = \infty$  von  $P_{mt} = 96 \text{ kN}$  je Spannglied.

Die gesamte Spannbettvorspannung für das obere Fertigteilstegsegment soll laut Vorbemessung  $P = 9000 \text{ kN}$  betragen. Mit der abgeschätzten Vorspannkraft  $P_{mt}$  sind somit 94 Spannlitzen erforderlich. Gewählt werden  $n = 96$  Stück 1/2"-Litzen am Umfang. Der Winkel zwischen den Litzen beträgt  $3,75^\circ$  und der Abstand ca.  $13,5 \text{ cm}$ . Die Anordnung ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

### Ermittlung der Übertragungslänge

Die Verankerung der Spannlitzen im sofortigen Verbund wird laut ÖNORM EN 1992-1-1 Abschnitt 8.10.2 ausgelegt. Dabei wird für die Spannstahlspannung  $\sigma_p$  ein linearer Verlauf angesetzt. Sie nimmt im Bereich der Übertragungslänge  $l_{bp}$  linear zu bis die volle Spannkraft auf den Beton übertragen ist. Die Annahme eines linearen Spannkraftverlaufs entspricht einer konstanten Verbundspannung im Verankerungsbereich die laut Gleichung 5.5 ermittelt wird.

Der Grundwert der Übertragungslänge errechnet sich laut Gleichung 5.6. Um auf den Bemessungswert der Übertragungslänge zu erhalten, muss dieser Wert laut Gleichung 5.7 reduziert werden. Diese Abminderung beim Nachweis der örtlichen Spannungen um 20 % berücksichtigt

die Streuung der Verbundeigenschaften [14]. Der Bemessungswert der Übertragungslänge  $l_{pt1}$  wird zur Modellierung der Spannkrafteinleitung verwendet.

Konstante Verbundspannung:

$$f_{bpt} = \eta_{p1} \cdot \eta_1 \cdot f_{ctd}(t) = 4,0 \text{ N/mm}^2 \quad (5.5)$$

mit:  $\eta_{p1} = 3,2$  und  $\eta_1 = 1,0$

$$f_{ctd}(t) = \alpha_{ct} \cdot f_{ctm}(t) / \gamma_c = 1,0 \cdot 0,7 \cdot 2,66 / 1,5 = 1,24 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ctm}(t) = (\beta_{cc}(t))^\alpha \cdot f_{ctm} = 0,85^{1,0} \cdot 4,6 = 2,66 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ctm} = 4,6 \text{ N/mm}^2 \text{ für Betonfestigkeitsklasse C70/85}$$

$$\beta_{cc}(t) = 0,58 \text{ bei } t = 2 \text{ Tagen und einem Zement mit hoher Festigkeitsklasse}$$

Grundwert der Übertragungslänge:

$$l_{pt} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \phi \cdot \sigma_{pm0} / f_{bpt} = 926 \text{ mm} \quad (5.6)$$

mit:  $\alpha_1 = 1,25$  und  $\alpha_2 = 0,19$

$$\phi = 12,9 \text{ mm}$$

$$\sigma_{pm0} = 1200 \text{ N/mm}^2$$

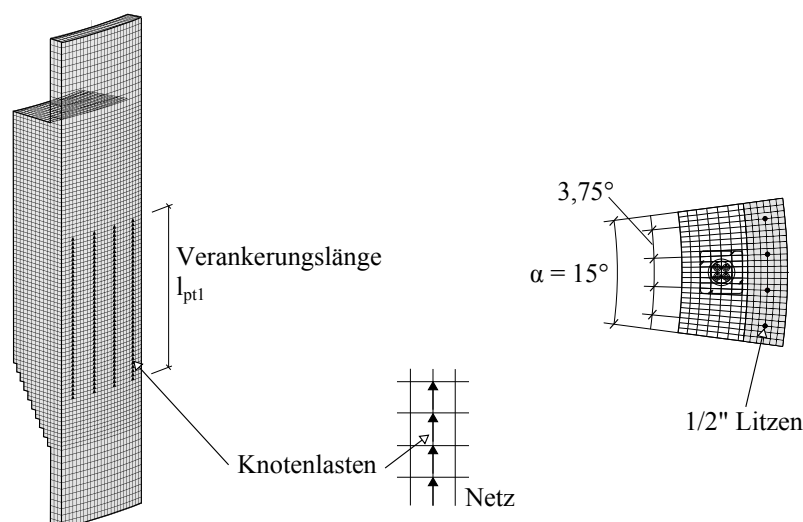
Bemessungswert der Übertragungslänge:

$$l_{pt1} = 0,8 \cdot l_{pt} = 741 \text{ mm} \quad (5.7)$$

### Modellierung der Verbundverankerung

Die Verbundverankerung wird durch einzelnen Knotenlasten modelliert. In Abbildung 5.6 ist das FE-Modell 1 mit den vier Knotenlastzügen dargestellt.

Um die berechnete Vorspannkraft von  $P_{m0} = 120 \text{ kN}$  in das Volumenmodell einzuleiten sind je Spannlitze 40 Knoten mit jeweils  $3,0 \text{ kN}$  zu belasten. Bei einem Abstand der Knoten von  $19 \text{ mm}$  ergibt dies die Verankerungslänge von  $l_{pt1} = 19 \cdot 39 = 741 \text{ mm}$ .



**Abb. 5.5.:** Knotenlasten und Lage der Litzen im Netz

### 5.2.3. Position der Spannkrafteinleitung

Um die günstigste Position für die Spannkrafteinleitung zu finden, wurden verschieden Varianten untersucht und die kritischen Spannungen verglichen. Am Detail A sind vor allem die Zugspannungen  $\sigma_1$  am oberen Schalenanschluss und die Umfangszugspannung  $\sigma_\phi$  an der unteren Kreiszyinderschale maßgebend.

In Abbildung 5.6 sind vier Varianten dargestellt. Bei a) werden die Spannlitzen in der unteren Kreiszyinderschale verankert. Dies führt zu erhöhten Umfangszugspannung im unteren Anschlussbereich. Eine deutliche Reduzierung dieser Umfangsspannungen kann durch eine Spannkrafteinleitung am oberen Ende des Kreisringträgers laut Variante d) erreicht werden. Allerdings kommt es in diesem Fall zu hohen Zugspannungen am oberen Schalenanschluss. Eine sehr gute Position für die Verankerung der Litzen ist in der Variante c) dargestellt. Hier sind sowohl die Zugspannungen oben als auch die Umfangszugspannungen unten ausgeglichen. Im konkreten Fall liegen die Zugspannungen im Bereich der Betonzugfestigkeit  $f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$  der Betonklasse C70/85. Diese Variante wurde auch beim Vorschlag zur Detailausführung gewählt.

Wird die Fuge, wie in Abschnitt 5.1.3 vorgeschlagen, an der unteren Kreiszyinderschale angeordnet, dann müssen bei der Variante c) die Spannlitzen am Anfang auf einer Länge von  $84 \text{ cm}$  abisoliert werden. Dies stellt sicher, dass die Einleitung der Vorspannkraft erst im Kreisringträger erfolgt.

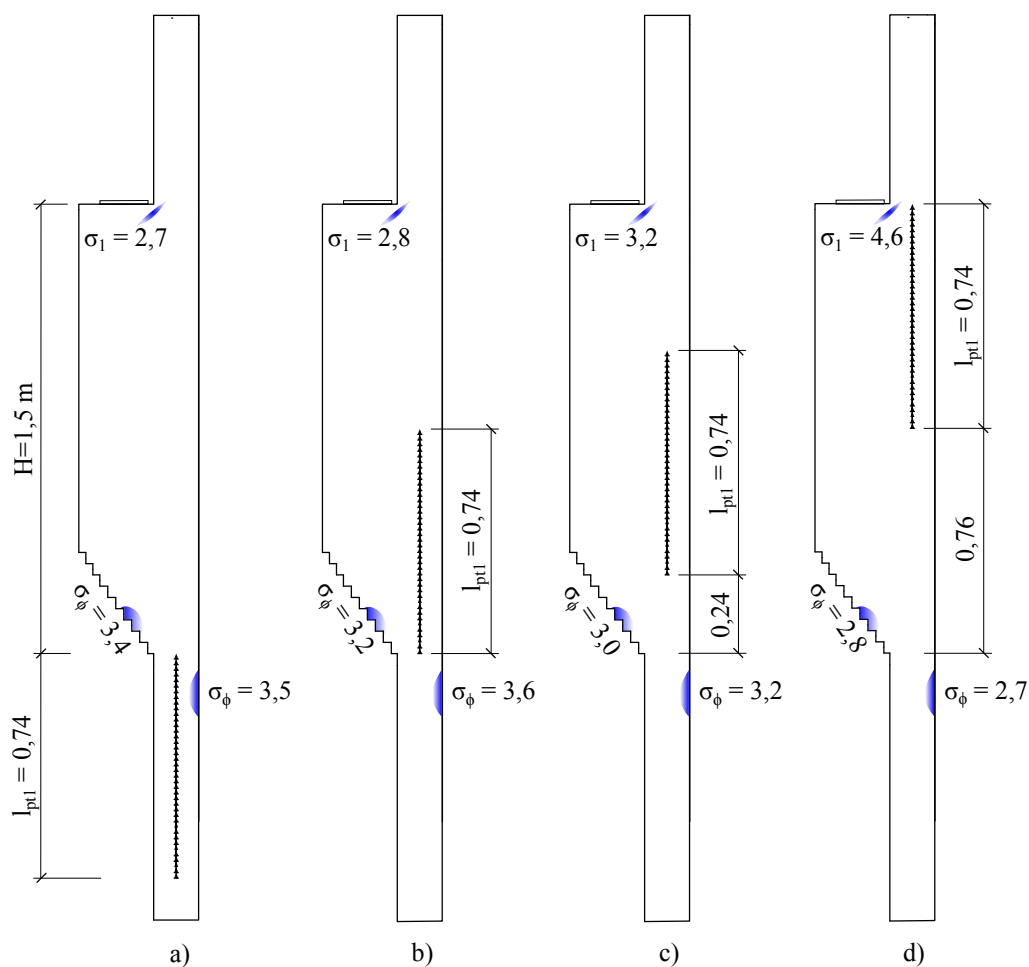


Abb. 5.6.: Position der Spannkrafteinleitung - Verbundverankerung

## 5.2.4. Berechnungsergebnisse und Nachweise

### Druckspannungen in Längsrichtung

In der Abbildung 5.7 sind die Hauptdruckspannungen  $\sigma_3$  für den Spannbettzustand und den Zustand nach Fertigstellung des Turmes dargestellt. Die Spannungen aus der Lastfallkombination LF1+LF2 werden mit den Anschlussspannungen aus dem Lastfall 3 überlagert.

Der Nachweis der maximalen Druckspannungen wird an der Innenseite am unteren Schalenanschluss geführt. Im Betriebszustand bei maximaler horizontaler Belastung des Turmes ergeben sich Druckspannungen von  $\sigma_{c,rare} = -21,8 \text{ N/mm}^2$ . Diese über den Umfang konstanten Spannungen sind kleiner als die zulässigen Betondruckspannungen. Neben dem Kriterium für die seltenen Bemessungssituation kann bei diesem Spannungsniveau auch das Kriterium  $\sigma_c < 0,45 \cdot f_{ck}$  für die ständige Bemessungssituation eingehalten werden. Ein weiterer Nachweis betrifft die Anschlussspannungen im Punkt 3 und 5. Im Betriebszustand dürfen die dort auftretenden Zugspannungen die Betonzugfestigkeit nicht überschreiten. Bei der vorliegenden Detailausführung bleiben die Zugspannungen in der seltenen Bemessungssituation immer unter  $1,0 \text{ N/mm}^2$ .

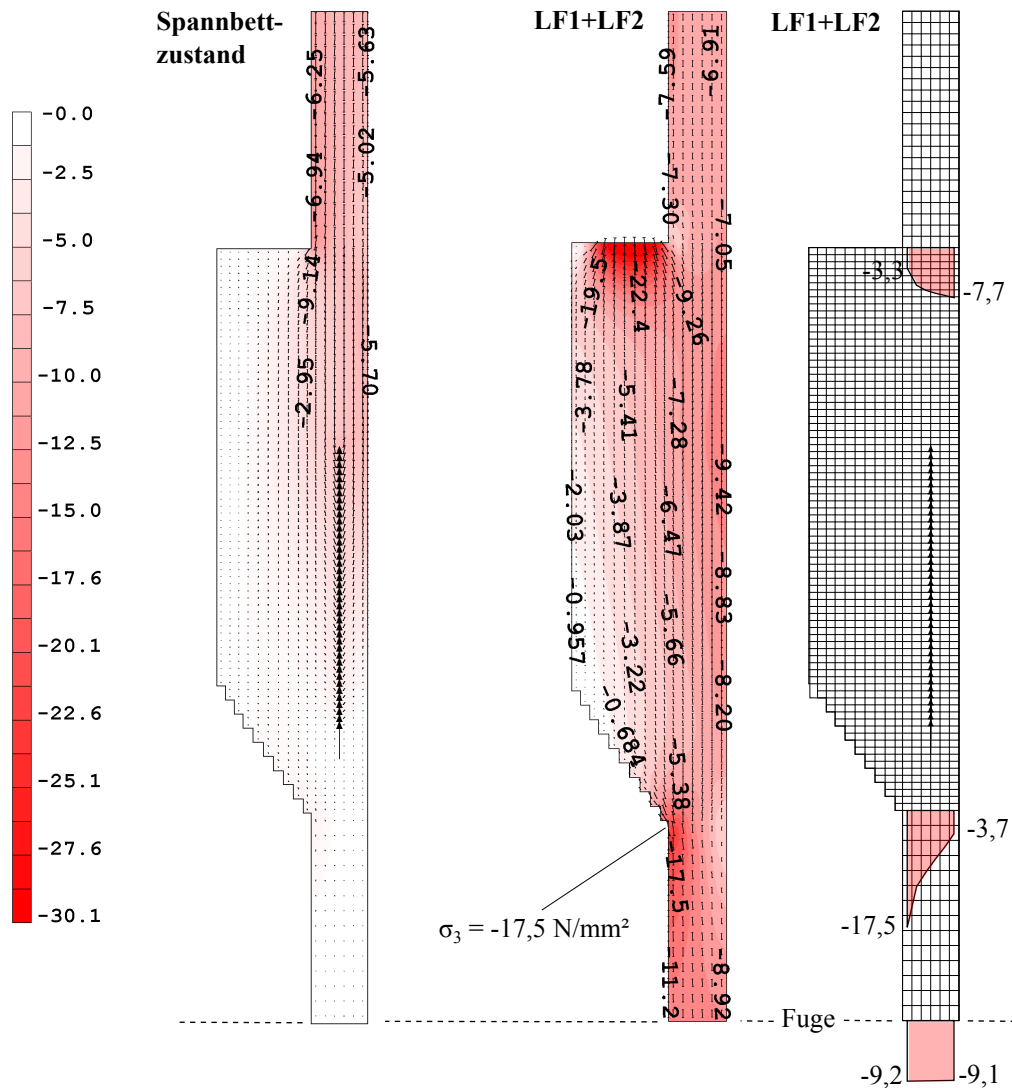


Abb. 5.7.: Hauptspannungen  $\sigma_3$



### Anschlussspannungen aus der Biegebeanspruchung im Lastfall 3

Die folgenden Längsspannungen im Lastfall 3 am Anschluss der oberen und unteren Kreiszy-linderschale wurden laut Abschnitt 5.1.2 berechnet.

	Biegemoment:	Trägheitsmoment:	Anschlussspannungen:	
oben:	$M = 7500 \text{ kNm}$	$I = 4,2156 \text{ m}^4$	$\sigma_{x,5} = 3,6 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{x,2} = 3,8 \text{ N/mm}^2$
unten:	$M = 9000 \text{ kNm}$	$I = 4,2156 \text{ m}^4$	$\sigma_{x,6} = 4,3 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{x,3} = 4,6 \text{ N/mm}^2$

### Nachweise zu den Anschlussspannungen

Maximale Druckspannungen an der Innenseite unten im Punkt 6:

$$\begin{aligned} \sigma_{c,perm} &= -17,5 \text{ N/mm}^2 < 0,45 \cdot f_{ck} = -31,5 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{c,rare} &= -17,5 - 4,3 = -21,8 \text{ N/mm}^2 < 0,60 \cdot f_{ck} = -42,0 \text{ N/mm}^2 \\ & < 0,45 \cdot f_{ck} \end{aligned}$$

Spannungen an der Außenseite unten im Punkt 3:

$$\sigma_c = -3,7 + 4,6 = 0,9 \text{ N/mm}^2 < f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$$

Spannungen an der Innenseite oben im Punkt 5:

$$\sigma_c = -3,3 + 3,6 = 0,3 \text{ N/mm}^2 < f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$$

### Lokale Zugspannungen am oberen Anschluss

In Abbildung 5.8 sind die Hauptzugspannungen für die Lastfallkombination LF1+LF2 dargestellt. Sie sind radial orientiert und werden daher nicht mit den Spannungen Längsrichtung aus dem Lastfall 3 überlagert. Der lokale Maximalwert der Zugspannungen beträgt  $\sigma_1 = 3,17 \text{ N/mm}^2$  und liegen damit im Bereich der zulässigen Betonzugfestigkeit  $f_{ctk0,05}$ .

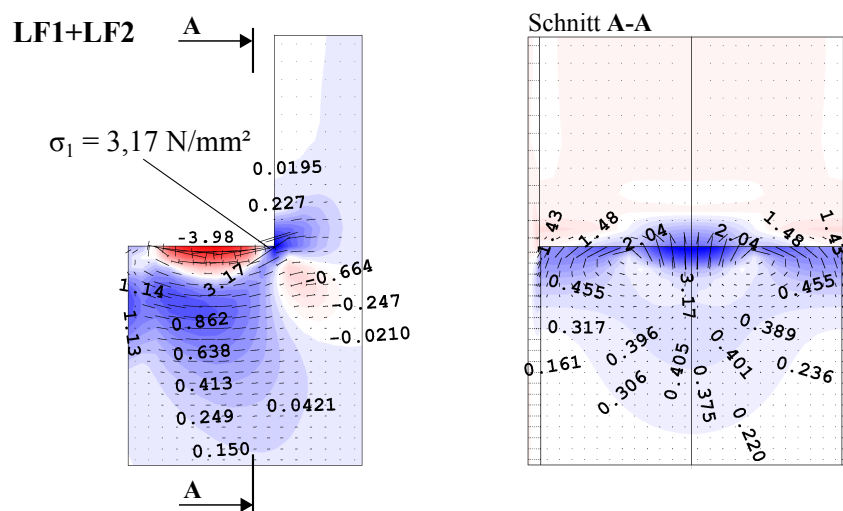


Abb. 5.8.: Hauptspannungen  $\sigma_1$  im LF1+LF2

Im Bauzustand bei voller externer Vorspannung sind diese Zugspannungen mit  $\sigma_1 = 3,81 \text{ N/mm}^2$  höher als im Betriebszustand. Diese Zugspannungen können allerdings leicht reduziert werden, indem im LF1 nicht die volle externe Vorspannung aufgebracht wird. Wird im Bauzustand zum Beispiel nur 80 % der erforderlichen externen Vorspannung aufgebracht reduzieren sich die Zugspannungen auf  $\sigma_1 = 2,3 \text{ N/mm}^2$ .

Generell kann bei diesem Ausführungsvorschlag eine lokale Rissbildung im Anschlussbereich der oberen Kreiszyklinderschale nicht ausgeschlossen werden. Durch das ausreichend vorhandene Umlagerungspotential am Ringumfang, kann aber ein starkes Risswachstum ins Bauteilinnere weitgehend ausgeschlossen werden. Die Anordnung einer entsprechenden Bügelbewehrung in diesen Bereichen trägt ebenfalls zur Begrenzung der lokalen Rissentwicklung bei. Diese Maßnahmen werden allerdings im Zuge der Arbeit nicht näher untersucht.

### Umfangsspannungen

In Abbildung 5.9 sind die Umfangsspannungen am Kreisringträger für den reinen Spannbettzustand ohne externer Belastung, für den Bauzustand und den Betriebszustand dargestellt.

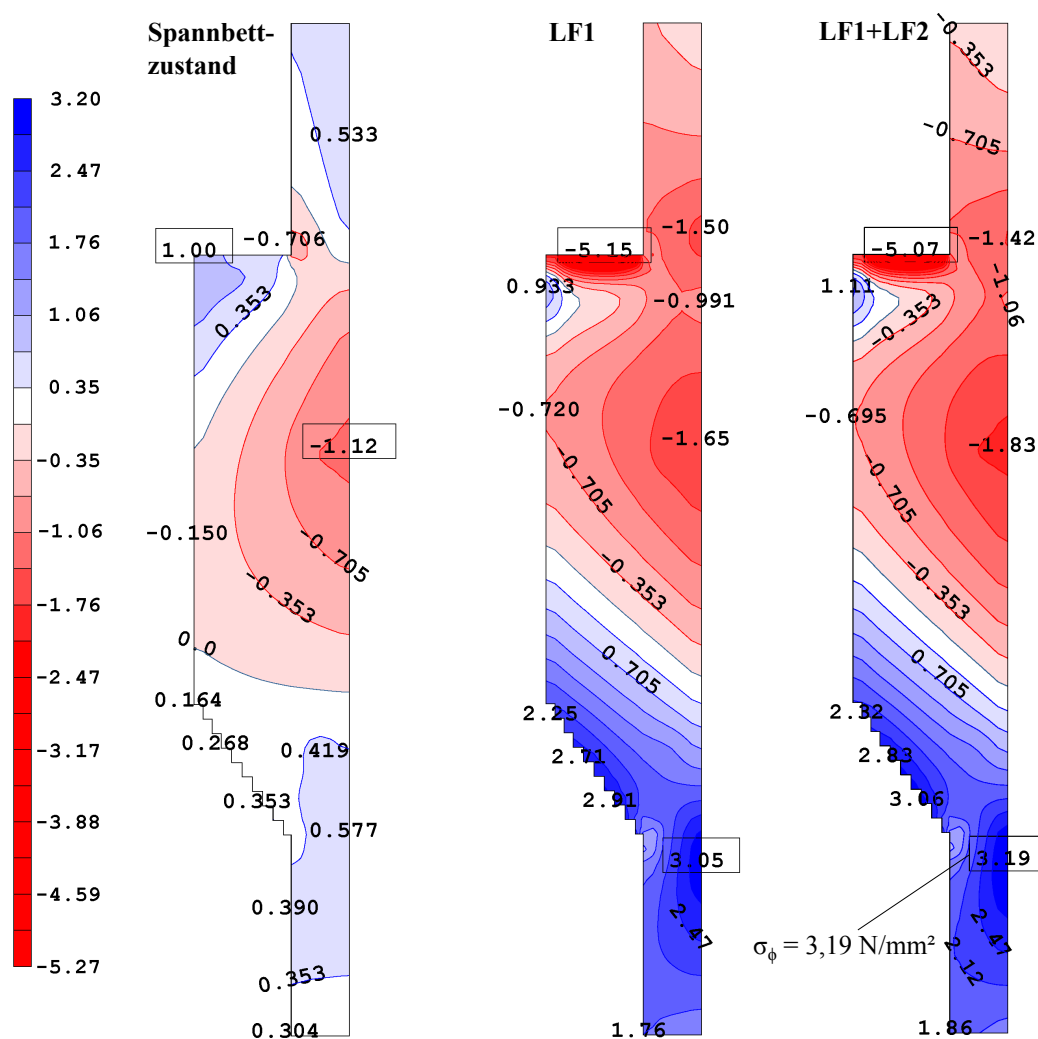


Abb. 5.9.: Umfangsspannungen  $\sigma_\phi$

Durch die geringe vertikale Belastung des Details, ist dass durch die externe Vorspannung hervorgerufene Tragverhalten, bestehend aus Zug- und Druckring, gut zu erkennen. Sowohl im LF1 als auch im LF1+LF2 kommt es am oberen Teil des Trägers zu Druck- und am unteren Teil zu Zugspannungen. Die Umfangszugspannungen erreichen an der Außenseite der unteren Kreiszyinderschale gerade die zulässige Betonzugfestigkeit  $f_{ctk0,05}$ .

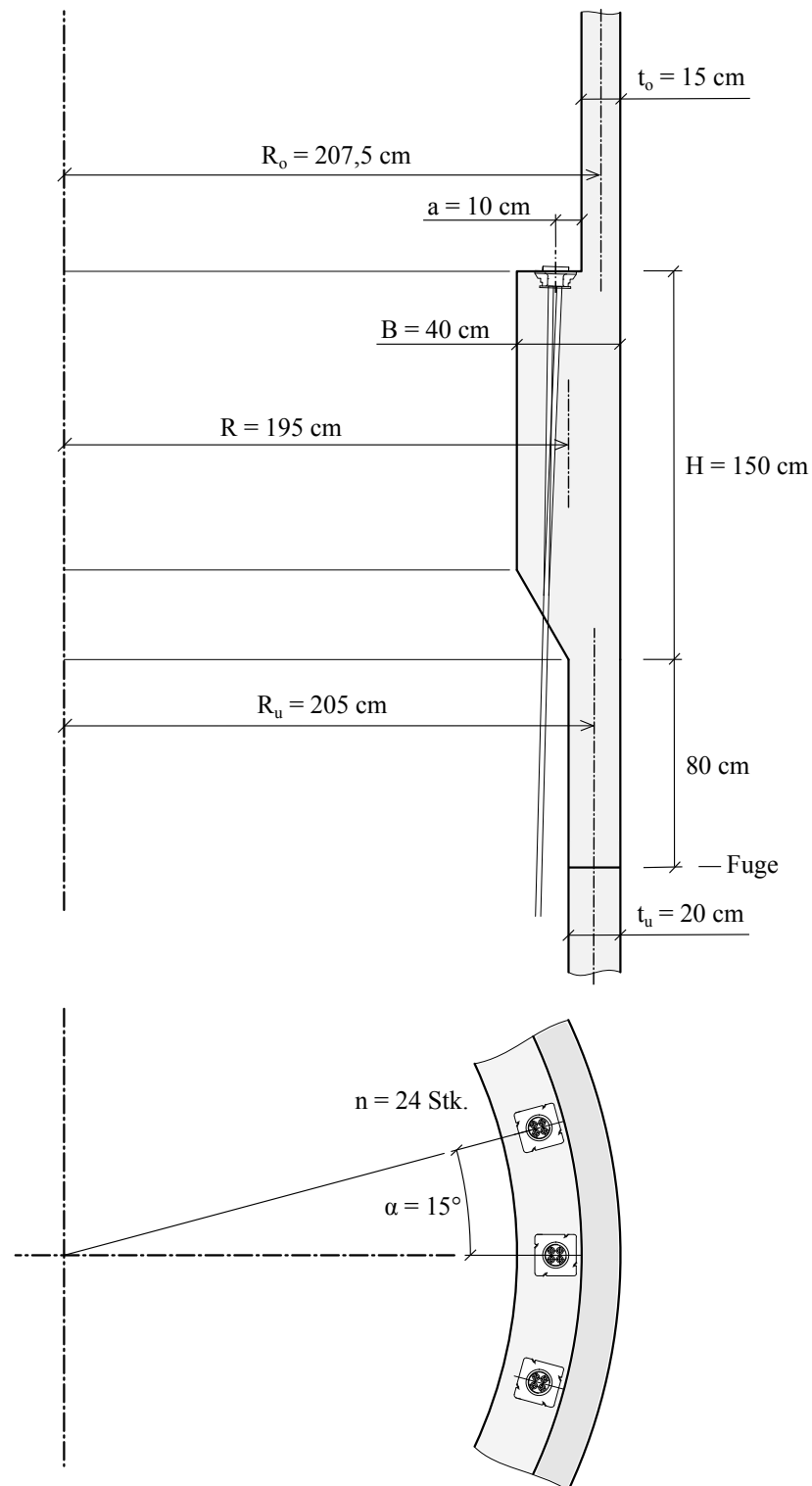
### **Spannungen in radialer Richtung**

Die radialen Querspannungen erreichen Maximalwerte von  $\sigma_z = 1,03 \text{ N/mm}^2$  unter der Ankerplatte im oberen Bereich des Ringträgers. Sie sind damit etwas geringer als jene am Detail B welche in Abbildung 5.15 dargestellt sind.

## 5.3. Detail B

### 5.3.1. Allgemeine Angaben zur Detailausführung

In Abbildung 5.10 ist der optimierte Entwurf für Detail B dargestellt.



**Abb. 5.10.:** Detail B

Am Detail B ist die abgesetzte externe Vorspannkraft  $P$  in etwa gleich groß wie die vertikale Belastung  $N$ . Dieses ausgeglichene Belastungsverhältnis führt zu geringen Anschlussmomenten im Betriebszustand und damit auch zu geringen erforderlichen Trägerhöhen für diesen Lastfall. Um jedoch die Längszugspannungen im oberen Anschlussbereich im Bauzustand gering zu halten, wird wie für Detail A ein hoher Träger mit  $H = 1,5 \text{ m}$  erforderlich. Die untere Schalenwandstärke von  $t = 20 \text{ cm}$  bedingt die Auslegung von Detail C und wird hier übernommen. Die Fuge wird  $80 \text{ cm}$  unterhalb des Kreisringträgers in der unteren Kreiszyinderschale laut Abbildung 5.11 angeordnet.

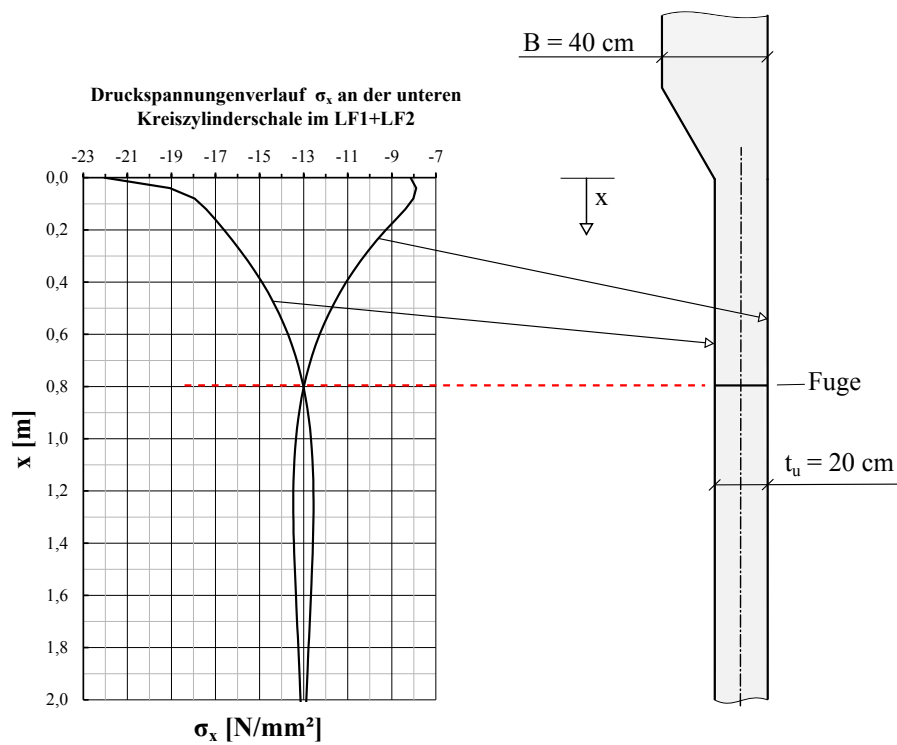


Abb. 5.11.: Position der unteren Fuge

### 5.3.2. Berechnungsergebnisse

#### Druckspannungen in Längsrichtung

In der Abbildung 5.12 sind die Hauptdruckspannungen  $\sigma_3$  für den Bauzustand und den Zustand nach Fertigstellung des Turmes dargestellt.

Die maximalen Druckspannungen im Betriebszustand betragen  $\sigma_{c,rare} = -29,1 \text{ N/mm}^2$  und sind über den Ringumfang konstant. Der Nachweis der Betondruckspannung für die ständige und seltene Lastfallkombination ist erfüllt. Der Nachweis mit der seltenen Lastfallkombination kann zusätzlich auch für das Kriterium  $\sigma_c < 0,45 \cdot f_{ck}$  erbracht werden. Demnach wäre dieses Kriterium zur Spannungsbegrenzung auch dann eingehalten, wenn die Spitzenbelastung ständig wirken würde.

Zugspannungen am Anschluss treten im Betriebszustand nur im Punkt 5 auf. Der Maximalwert beträgt  $\sigma_c = 0,5 \text{ N/mm}^2$  und ist somit deutlich kleiner als die Betonzugfestigkeit.

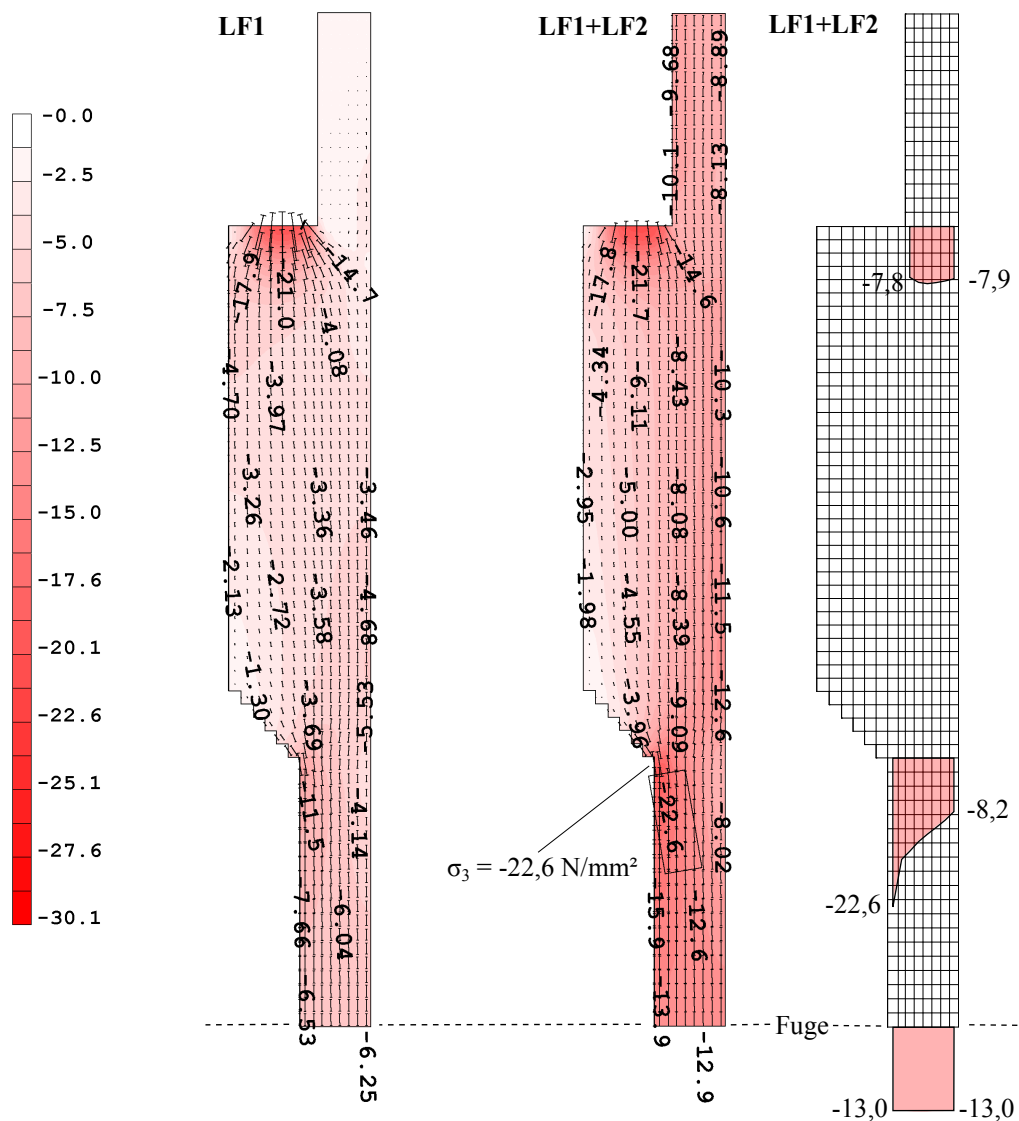


Abb. 5.12.: Hauptspannungen  $\sigma_3$



Die hohen lokalen Zugspannungen könne durch geringeres Vorspannen im Bauzustand reduziert werden. Wird anstatt der vollen externen Vorspannung nur 40 % der erforderlichen Vorspannkraft aufgebracht, dann können die Zugspannungen im Bereich der Ankerplatte auf  $\sigma_1 = 2,7 \text{ N/mm}^2$  reduziert werden. Durch diese Maßnahme kommt es zu keiner Rissbildung im Anschlussbereich. Nach Fertigstellung des Turmes wird die restliche Vorspannkraft aufgebracht.

### Umfangsspannungen

In Abbildung 5.14 sind die Umfangsspannungen für den Bauzustand und den Betriebszustand dargestellt. Die Maximalen Zugspannungen treten bei der Lastfallkombination LF1+LF2 an der Unterseite des Kreisringträgers auf. Sie betragen  $\sigma_\phi = 2,36 \text{ N/mm}^2$ . Die Werte der Zugspannungen an der Außenseite der unteren Kreiszylinderschale liegen ebenfalls in diesem Bereich.

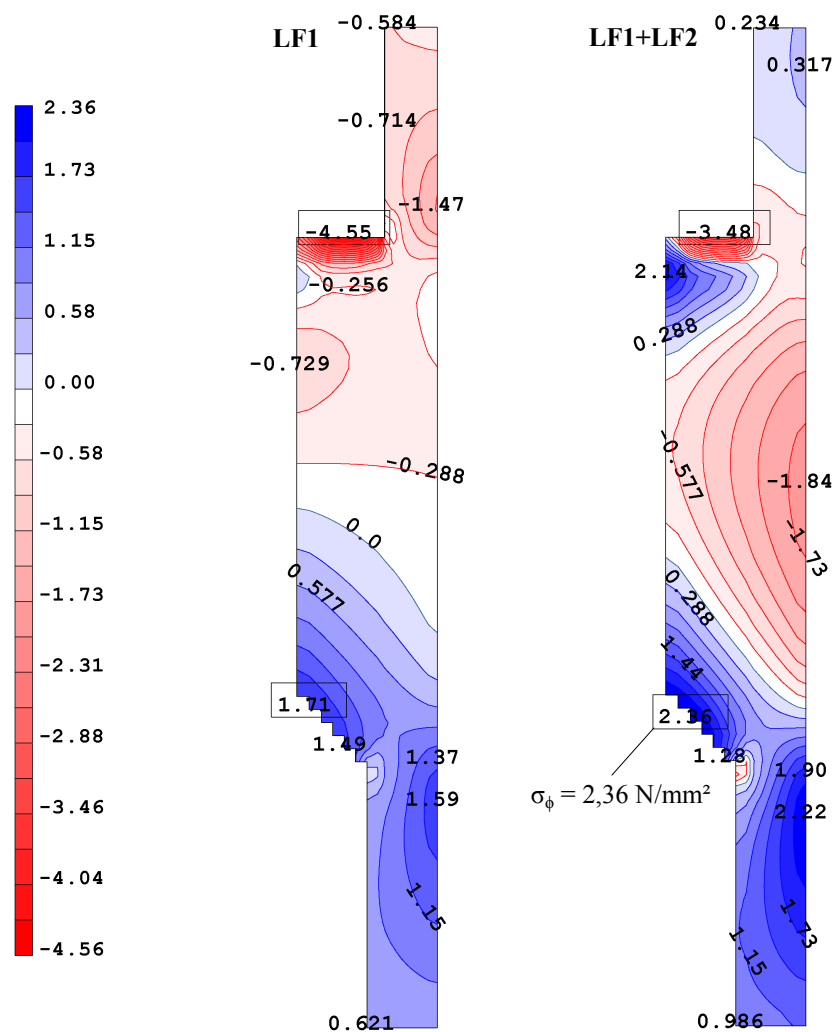


Abb. 5.14.: Umfangsspannungen  $\sigma_\phi$



### Spannungen in radialer Richtung

In Abbildung 5.15 sind die Spannungen  $\sigma_z$  in radialer Richtung dargestellt. Die maximalen Querkzugspannungen unter der Ankerplatte treten im Bauzustand auf. Mit  $\sigma_z = 1,23 \text{ N/mm}^2$  sind sie geringer als die zulässige Betonzugfestigkeit. Die Querkzugspannungen unter der Ankerplatte in Umfangsrichtung werden im Lastfall 1 laut Abbildung 5.14 durch die Druckspannungen im oberen Teil des Ringträgers überdrückt.

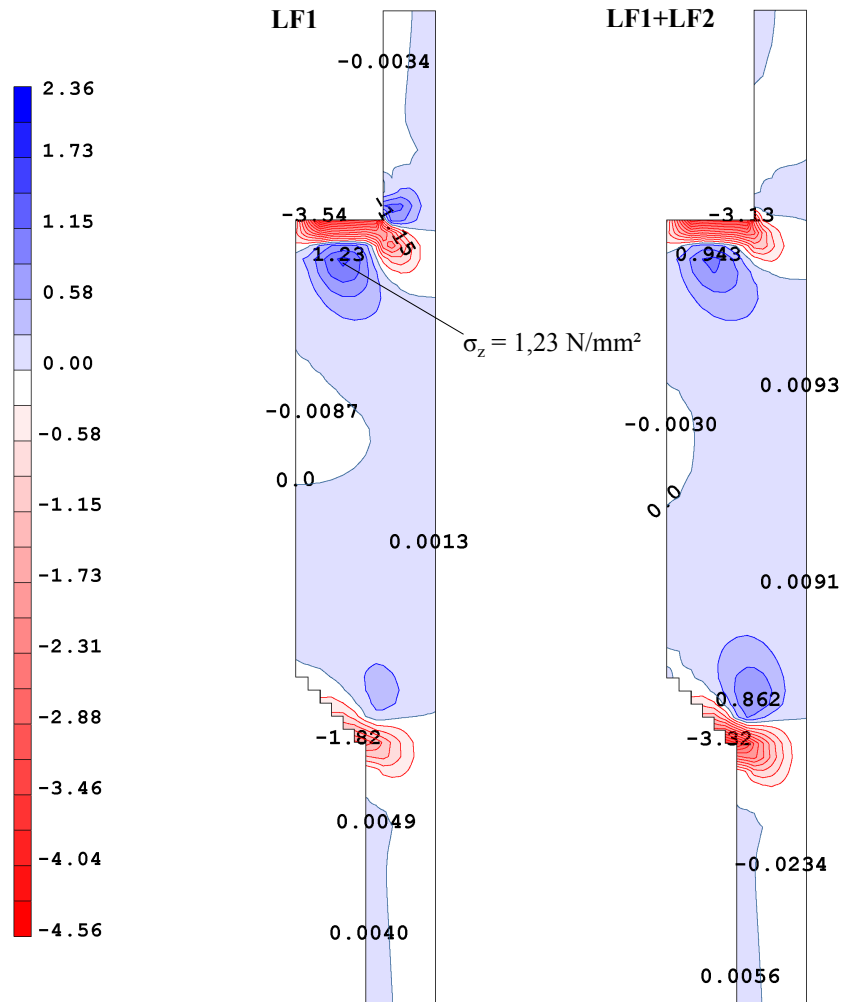


Abb. 5.15.: Querkzugspannungen  $\sigma_z$

## 5.4. Detail C

### 5.4.1. Allgemeine Angaben zur Detailausführung

In Abbildung 5.16 ist der optimierte Entwurf für Detail C dargestellt.

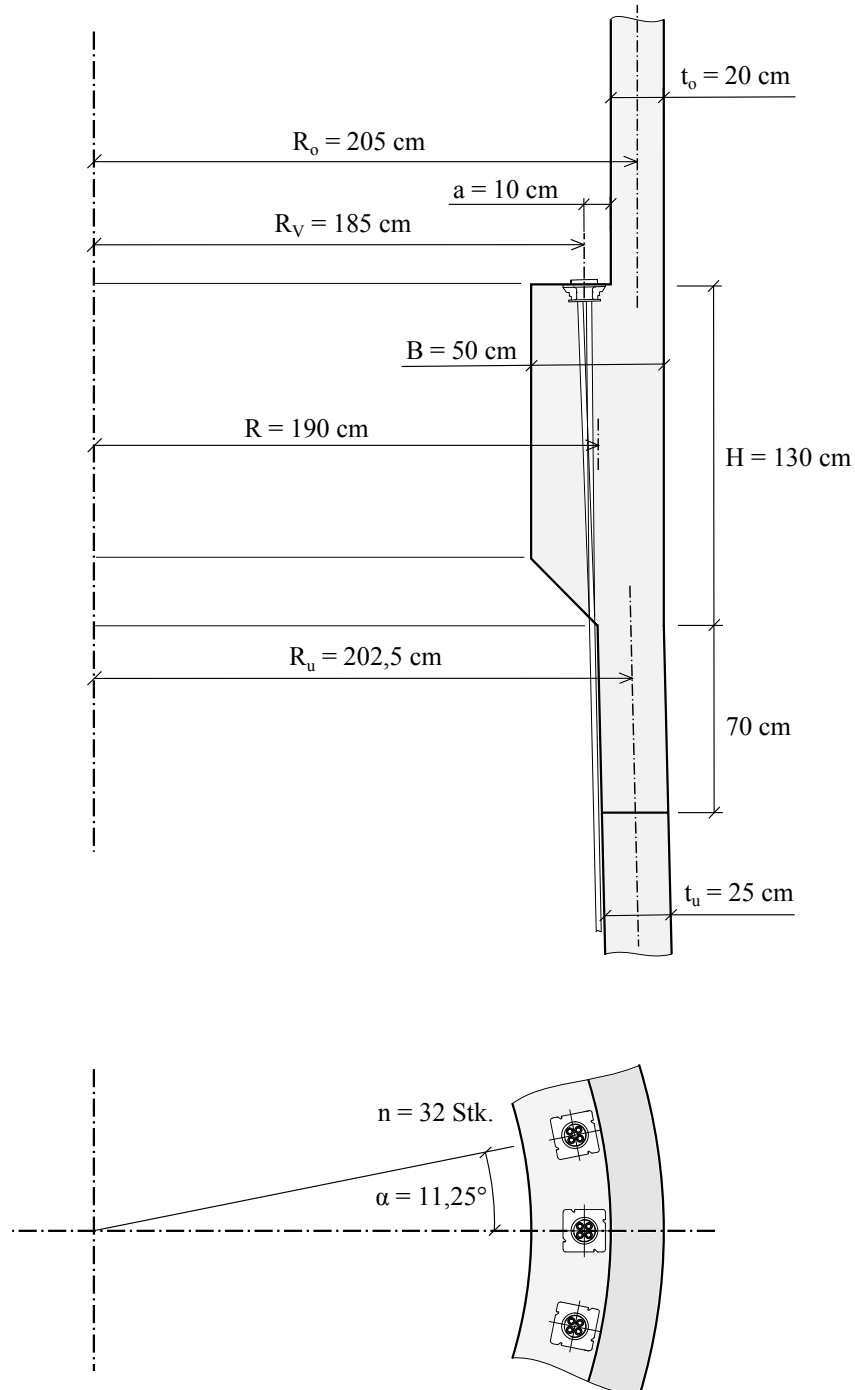
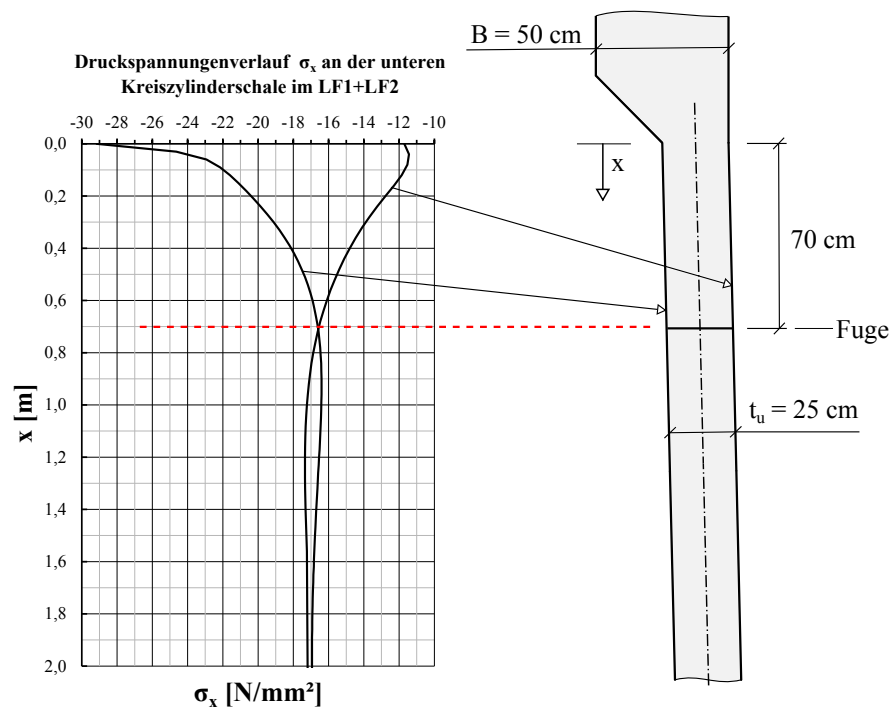


Abb. 5.16.: Detail C

Am Detail C ist die abgesetzte externe Vorspannkraft  $P$  kleiner als die vertikale Belastung  $N$ . Für das Belastungsverhältnis von  $N/P = 33,7/20 \approx 1,7$  ist laut Geometriestudie und Abbildung 4.20 eine kleine Kreisringträgerhöhe anzustreben.

Für die Ausführung von Detail C wird eine Trägerhöhe von  $H = 1,3 \text{ m}$  und eine Breite von  $B = 0,5 \text{ m}$  vorgeschlagen. Die im ersten Entwurf laut Abbildung 2.5 vorgeschlagene oberer Schalenwandstärke von  $t = 15 \text{ cm}$  wird auf  $t = 20 \text{ cm}$  geändert und die horizontale Fuge in der unteren Schale angeordnet. Aus den Randspannungen ergibt sich laut Abbildung 5.17 ein Abstand der Fuge vom Kreisringträger von  $70 \text{ cm}$ .



**Abb. 5.17.:** Position der horizontalen Fuge

## 5.4.2. Berechnungsergebnisse und Nachweise

### Druckspannungen in Längsrichtung

In der Abbildung 5.18 sind die Hauptdruckspannungen  $\sigma_3$  für den Bauzustand und den Zustand nach Fertigstellung des Turmes dargestellt.

Die maximalen Druckspannungen im Betriebszustand betragen  $\sigma_{c,rare} = -37,9 \text{ N/mm}^2$  am unteren Schalenanschluss. Die Begrenzung der Betondruckspannungen auf  $0,6 \cdot f_{ck}$  ergibt einen Grenzwert von  $-42,0 \text{ N/mm}^2$ . Der Nachweis für die seltenen Kombination ist damit erfüllt. Wird bei der ständigen Lastfallkombination, wie im Abschnitt 5.1.1 beschrieben, nur LF1+LF2 kombiniert, kann am Detail C auch dieser Nachweis erbracht werden. Soll zusätzlich zu dieser Kombination ein Anteil aus LF3 ständig wirken, kann das Kriterium  $\sigma_c < 0,45 \cdot f_{ck}$  nicht mehr eingehalten werden. Aus diesem Grund wird für das Rohrsegment bei Detail C eine Erhöhung der Betonfestigkeitsklasse vorgeschlagen. Wird anstatt C70/85 Beton der Festigkeitsklasse C80/95 verwendet, ergibt sich der Grenzwert für die ständige Lastfallkombination zu  $0,45 \cdot 80 = 36 \text{ N/mm}^2$ . Damit könnten zusätzlich 75 % der Lasten aus LF3 als ständig wirkend angesetzt werden.

Die Punkt 2 und 3 an der Schalenaußenseite sind im Betriebszustand bei der seltenen Lastfallkombination immer unter Druck.

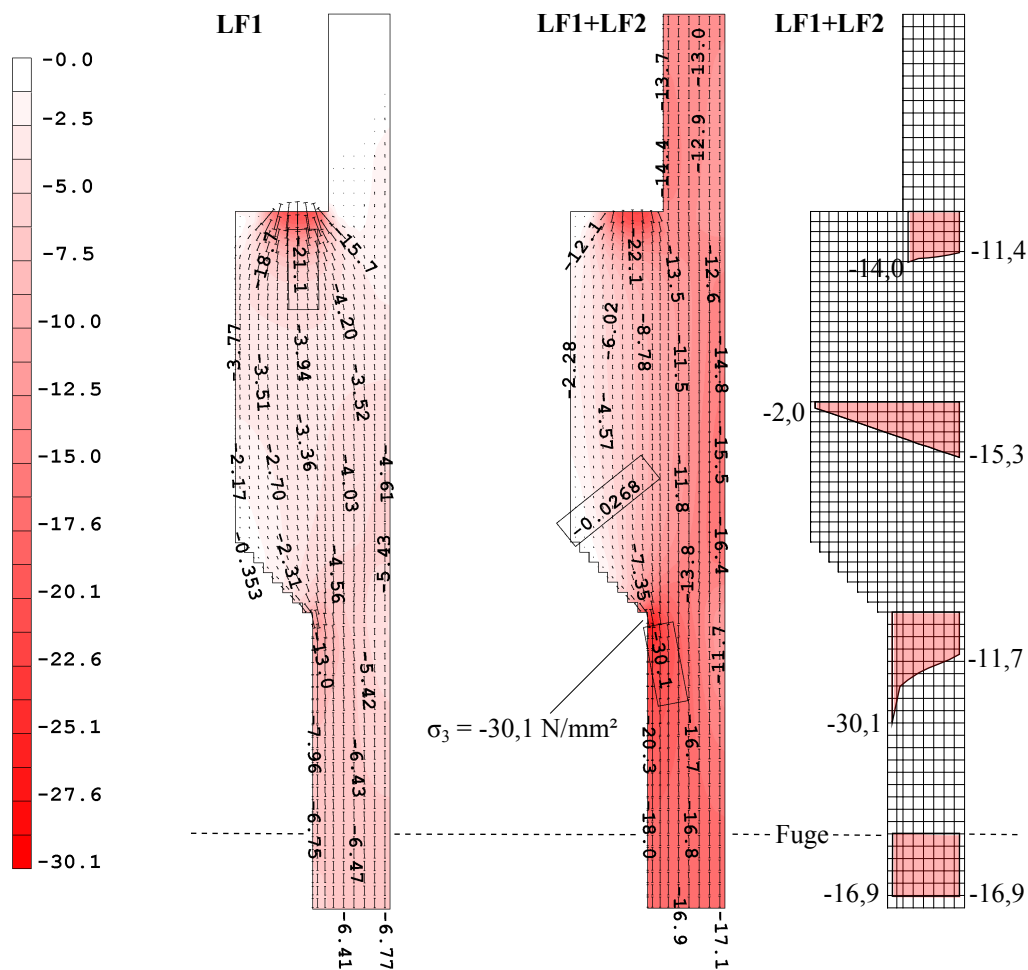


Abb. 5.18.: Hauptspannungen  $\sigma_3$

### Anschlussspannungen aus der Biegebeanspruchung im Lastfall 3

Die folgende Längsspannungen im Lastfall 3 am Anschluss der oberen und unteren Kreiszyinderschale wurden laut Abschnitt 5.1.2 berechnet.

	Biegemoment:	Trägheitsmoment:	Anschlussspannungen:	
oben:	$M = 25500 \text{ kNm}$	$I = 5,4259 \text{ m}^4$	$\sigma_{x,5} = 9,2 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{x,2} = 10,1 \text{ N/mm}^2$
unten:	$M = 27000 \text{ kNm}$	$I = 6,5466 \text{ m}^4$	$\sigma_{x,6} = 7,8 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{x,3} = 8,9 \text{ N/mm}^2$

### Nachweise zu den Anschlussspannungen

Maximale Druckspannungen an der Innenseite unten im Punkt 6:

$$\begin{aligned} \sigma_{c,perm} &= -30,1 \text{ N/mm}^2 < 0,45 \cdot f_{ck} = -31,5 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{c,rare} &= -30,1 - 7,8 = -37,9 \text{ N/mm}^2 < 0,60 \cdot f_{ck} = -42,0 \text{ N/mm}^2 \\ & < 0,45 \cdot f_{ck} \end{aligned}$$

Spannungen an der Außenseite unten im Punkt 3:

$$\sigma_c = -11,7 + 8,9 = -2,8 \text{ N/mm}^2 < f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$$

Spannungen an der Außenseite oben im Punkt 2:

$$\sigma_c = -11,4 + 11,1 = -0,3 \text{ N/mm}^2 < f_{ctk0,05} = 3,2 \text{ N/mm}^2$$

### Lokale Zugspannungen am oberen Anschluss

In Abbildung 5.19 sind die Hauptzugspannungen für den Bauzustand LF1 beim Aufbringen der vollen externen Vorspannung dargestellt. Der Spannungsverlauf am Ringumfang ist laut Abschnitt 4.3.1 wellenförmig. Der lokale Maximalwert ist mit  $\sigma_1 = 7,0 \text{ N/mm}^2$  etwa so groß wie bei Detail B. Durch den geringeren Ankerplattenabstand am Umfang ist die Zugspannung zwischen den Ankerplatten mit  $\sigma_1 = 1,9 \text{ N/mm}^2$  allerdings höher als bei Detail B. Es resultieren höhere mittlere Zugspannungen am Umfang.

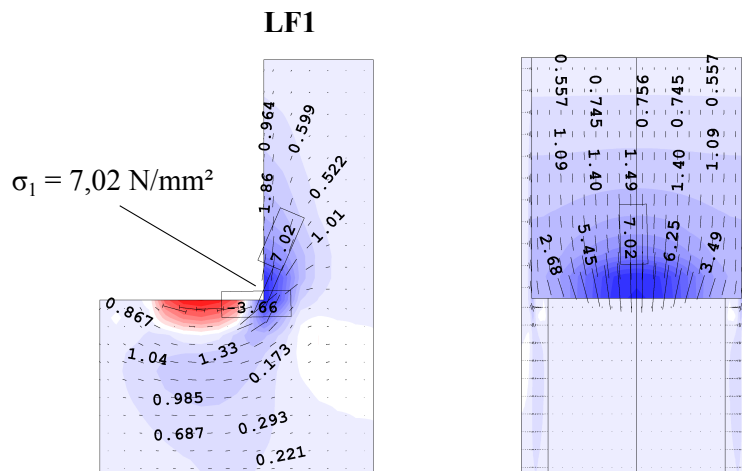


Abb. 5.19.: Hauptspannungen  $\sigma_1$  im LF1

Durch geringeres Vorspannen im Bauzustand können auch am Detail C die Zugspannungen deutlich reduziert werden. Wird anstatt der vollen externen Vorspannung nur 40 % der erforderlichen Vorspannkraft aufgebracht, können die lokalen Zugspannungen von  $7,0 \text{ N/mm}^2$  auf  $2,6 \text{ N/mm}^2$  verringert werden.

### Umfangsspannungen

In Abbildung 5.20 sind die Umfangsspannungen für den Bauzustand und den Betriebszustand dargestellt. Die Maximalen Zugspannungen treten bei der Lastfallkombination LF1+LF2 an der Unterseite des Kreisringträgers auf. Sie betragen  $\sigma_\phi = 2,8 \text{ N/mm}^2$ . Die maximale Umfangsspannung an der unteren Schale sind mit  $\sigma_\phi = 2,45 \text{ N/mm}^2$  etwas geringer.

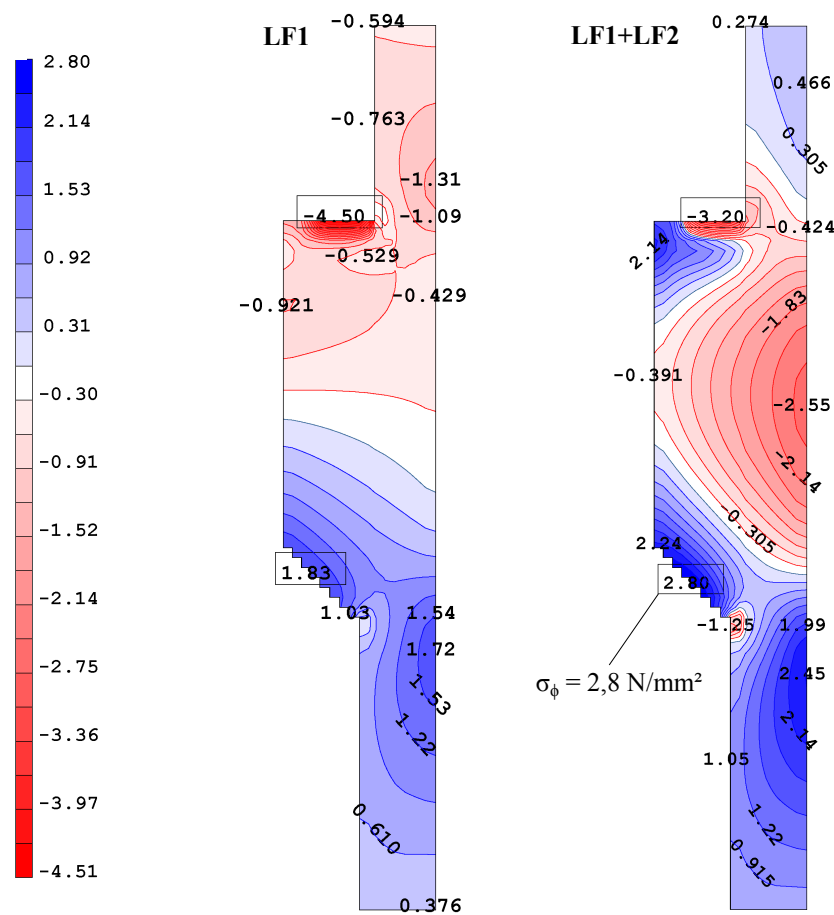
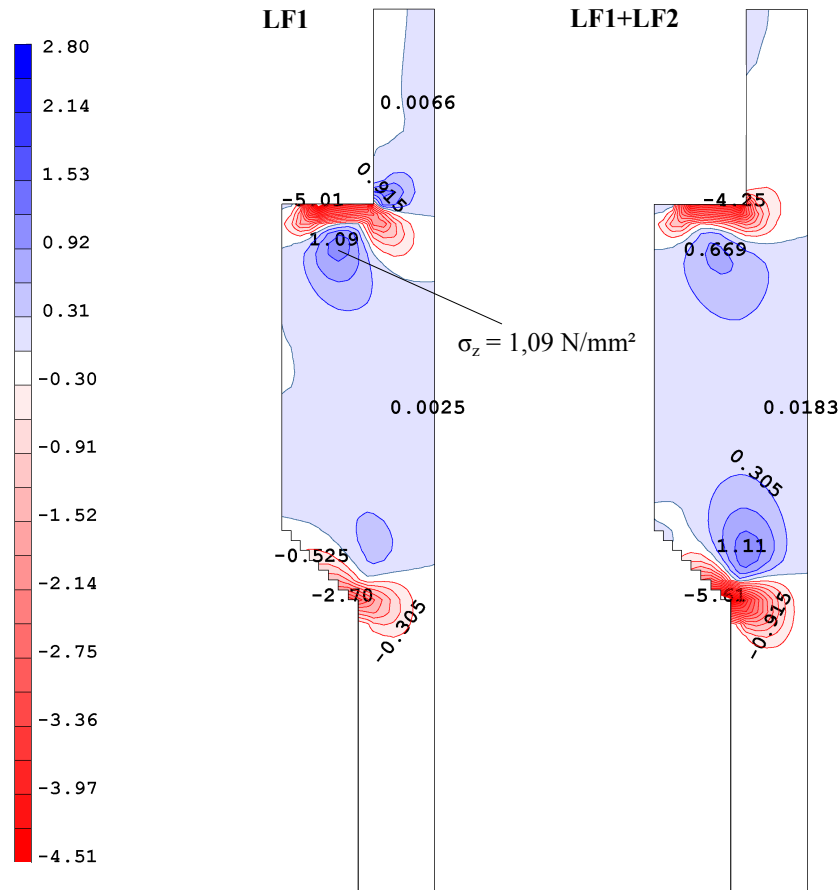


Abb. 5.20.: Umfangsspannungen  $\sigma_\phi$

### Spannungen in radialer Richtung

In Abbildung 5.21 sind die Spannungen  $\sigma_z$  in radialer Richtung dargestellt. Die maximalen Querzugspannungen liegen im Bauzustand als auch im Betriebszustand bei etwa  $\sigma_z = 1,1 \text{ N/mm}^2$ . Die zulässigen Betonzugfestigkeiten werden nicht überschritten.



**Abb. 5.21.:** Querzugspannungen  $\sigma_z$  am Kreisringträger

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Die anhand dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse werden nachfolgend kurz zusammengefasst. Anschließend werden in einem Ausblick einige Anregungen für weiterführende Untersuchungen gegeben.

### 6.1. Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit wurde ein Überblick über die verschiedenen Vorspannsysteme bei Türmen von Windenergieanlagen gegeben bevor auf die Belastung und die Geometrie des konkreten Turmentwurfs eingegangen wurde. Bei diesem Turmentwurf erfolgt die Verankerung der externen Vorspannung an Kreisringträgern am Turm der Windenergieanlage.

Bei der Vorstellung der verschiedenen Berechnungsmodelle im zweiten Teil der Arbeit wurde gezeigt, dass das prinzipielle Tragverhalten dieser Ringträger durch eine analytische Berechnung sehr gut analysiert werden kann. Das Tragverhalten unterscheidet sich je nach Belastungszustand. Wird der Kreisringträger nur durch die externe Vorspannung belastet, dann stellt sich ein Biegetragverhalten in Umfangsrichtung ein. Ähnlich einem Biegeträger bildet sich oben eine Druck- und unten eine Zugzone. Bei zusätzlich hoher vertikaler Belastung kommt es zu einer Biegeverformung des Ringträgers in radialer Richtung.

Neben den analytischen Berechnungen wurden auch linear elastische Finite-Elemente Berechnungen an Teilsegmenten durchgeführt. Die dafür entwickelten Modelle aus Volumen- und Schalenelementen sind rotationssymmetrisch gelagert und belastet. Durch die Auswertung der Hauptspannungen konnten mit diesen Modellen lokale Effekte bei der Krafteinleitung und der Kraftfluss untersucht werden.

Durch die effiziente Modellierung des Kreisringträgers mit Schalenelementen konnte auch die Geometriestudie im dritten Teil der Arbeit am FE-Modell durchgeführt werden. Dabei wurde gezeigt, wie durch die Änderung der Geometrie des Kreisringträgers das Verankerungsdetail für eine bestimmte Belastungssituation optimiert werden kann. Die wesentlichen Erkenntnisse aus der Geometriestudie werden hier wiedergegeben.

- Bei großen Vorspannkräften und geringer vertikaler Belastung, ist ein hoher Ringträger anzustreben. Eine Vergrößerung der Trägerbreite bewirkt bei dieser Belastungssituation eine Reduzierung der Längsspannungen am Übergang vom Träger zur Kreiszyinderschale. Mit zunehmender Trägerbreite steigen allerdings die Umfangszugspannungen an. Die Wahl eines hohen Trägers mit mittlerer Trägerbreite scheint daher optimal.
- Bei hoher vertikaler Belastung und geringer Vorspannung sollte der Kreisringträger möglichst niedrig ausgeführt werden. Die Trägerbreite hat bei dieser Belastungssituation keinen großen Einfluss auf die Längsspannungen. Ein breiter Träger ist etwas günstiger als ein schmaler. Um die Umfangsspannungen gering zu halten sollte der Träger allerdings nicht zu breit ausgeführt werden.



- Die Vergrößerung der Wandstärke der anschließenden Kreiszyinderschalen ist eine sehr effektivste Maßnahme zur Reduzierung der kritischen Spannungen am Kreisringträger. Sowohl die hohen Längsdruck- und zugspannungen als auch die Umgangzugspannungen können damit deutlich verringert werden.

Aufbauend auf diese Erkenntnisse wurden im vierten Teil der Arbeit Vorschläge zur Ausführung der Verankerungsdetails am konkreten Turmentwurf entwickelt. Als wichtiges Entwurfskriterium dient zum einen die Begrenzung der Betondruckspannungen auf  $0,45 \cdot f_{ck}$  für die ständigen bzw.  $0,6 \cdot f_{ck}$  für die seltenen Lastfallkombination und zum anderen die Forderung, dass die Zugspannungen am Verankerungsdetail kleiner als  $f_{ctk0,05}$  sein müssen.

Für Detail A und B wurden die optimalen Trägerabmessungen mit  $H = 1,5 \text{ m}$  und  $B = 0,4 \text{ m}$  festgelegt. Für das vertikal hoch belastete Detail C wird eine gedrungene Trägergeometrie mit  $H = 1,3 \text{ m}$  und  $B = 0,5 \text{ m}$  sowie eine Vergrößerung der oberen Schalenwandstärke vorgeschlagen. Die Anordnung der horizontalen Fuge zwischen den einzelnen Rohrsegmenten erweist sich in der jeweils unteren Kreiszyinderschalen als günstig. Mit diesen Abmessungen und einer zusätzlichen Abschrägen der Kreisringträger an der Unterseite können die geforderten Entwurfskriterien im Betriebszustand eingehalten werden. Im Bauzustand kommt es beim Aufbringen der vollen Vorspannkraft lokal zur Überschreitung der zulässigen Zugspannungen. Daher sollte im Bauzustand nur ein Teil der externen Vorspannung aufgebracht werden.

Bei den ausgearbeiteten Details A und C liegen die berechneten Spannungen in einigen Punkten nur geringfügig unter den festgelegten Grenzwerten. Beim Ausführungsvorschlag für Detail A kann demnach eine lokale Rissbildung im Anschlussbereich der oberen Kreiszyinderschale nicht ausgeschlossen werden. Durch das ausreichend vorhandene Umlagerungspotential am Ringumfang, kann aber ein starkes Risswachstum ins Bauteilinnere weitgehend ausgeschlossen werden. Die Anordnung einer entsprechenden Bügelbewehrung in diesen Bereichen trägt ebenfalls zur Begrenzung der lokalen Rissentwicklung bei. Diese Maßnahmen wurden allerdings im Zuge dieser Arbeit nicht näher untersucht. Am Detail C treten am unteren Schalenanschluss sehr hohe Druckspannungen auf. Um auch in diesem Bereich Reserven zu haben kann entweder die Betongüte für dieses Segment erhöht werden, oder die Wandstärke der unteren Kreiszyinderschale erhöht werden.

## 6.2. Ausblick

Empfehlungen für weitere Untersuchungen betreffen zum Beispiel die analytische Lösung. Diese könnte anhand der im Anhang vorgestellten Berechnungsschritte in einem Excel File umgesetzt werden. Damit wäre eine schnelle Bemessung der Kreisringträger für verschiedenen Belastungen und Geometrien möglich. Ein weiterer Punkt betrifft die Belastung des Kreisringträgers. Im Rahmen dieser Arbeit konnte zunächst nur der Kreisringträger mit symmetrischer Belastung untersucht werden. Die Auswirkung einer antisymmetrischen Beanspruchung aus einer Windbelastung könnte der Inhalt einer weiterführenden Arbeit sein. Auch eine detaillierte Untersuchung des Verankerungsdetails am Turmkopf wäre wünschenswert.

# Verwendete Symbole und Abkürzungen

WEA	Windenergieanlage
KRT	Kreisringträger
KZS	Kreiszyinderschale
LF	Lastfall
$H$	Höhe des Kreisringträgers [ $m$ ]
$B$	Breite des Kreisringträgers [ $m$ ]
$t_o$	Wandstärke der oberen Kreiszyinderschale [ $m$ ]
$t_u$	Wandstärke der unteren Kreiszyinderschale [ $m$ ]
$a$	Abstand der Vorspannkrafteinleitung [ $m$ ]
$e$	Exzentrizität der Vorspannkrafteinleitung zum Schwerpunkt [ $m$ ]
$R$	Radius der Schalenmittelfläche [ $m$ ]
$R_a$	Aussenradius der Schale [ $m$ ]
$R_i$	Innenradius der Schale [ $m$ ]
$R_V$	Radius bei der Vorspannkrafteinleitung [ $m$ ]
$U$	Umfang der Schalenmittelfläche [ $m$ ]
$n$	Anzahl der Verankerungsstellen am Umfang [ $Stk$ ]
$\alpha$	Öffnungswinkel des Segments [ $^\circ$ ]
$I$	Trägheitsmoment des Rohrquerschnitts [ $m^4$ ]
$W$	Widerstandsmoment des Rohrquerschnitts [ $m^3$ ]
$M$	Globales Biegemoment am Turm [ $kNm$ ]
$P_n$	Vorspannkraft je Ankerplatte [ $MN$ ]
$P$	Vorspannkraft aus externer Vorspannung [ $MN$ ]
$N$	Vertikale Belastung im Schnitt [ $MN$ ]
$p$	Vorspannkraft aus externer Vorspannung - Streckenlast [ $MN/m$ ]
$n$	Vertikale Belastung im Schnitt - Streckenlast [ $MN/m$ ]
$q_x$	Vertikale Streckenlast [ $MN/m$ ]
$F_G$	Vertikalkraft aus dem Eigengewicht der Rotorplattform [ $MN$ ]
$F_R$	Vertikalkraft aus dem Eigengewicht eines Rohrsegments [ $MN$ ]

---

$F_H$	Horizontale Ersatzlast am Turmkopf [ $MN$ ]
$L_{Abkl}$	Abklinglänge der Biegerandstörungen [ $m$ ]
$L_{Gew}$	Gewählte Länge zur Modellierung der FE-Schalenelemente [ $m$ ]
$\sigma_c$	Betonspannungen [ $N/mm^2$ ]
$\sigma_{ct}$	Betonzugspannungen [ $N/mm^2$ ]
$\sigma_x$	Spannung in Längsrichtung des Turmes [ $N/mm^2$ ]
$\sigma_\phi$	Spannung in Umfangsrichtung des Turmes [ $N/mm^2$ ]
$\sigma_z$	Spannung in Radialrichtung des Turmes [ $N/mm^2$ ]
$m_x$	Schalenbiegemoment in Längsrichtung [ $kNm/m$ ]
$n_x$	Membranschnittkraft in Längsrichtung [ $kN/m$ ]
$m_\phi$	Schalenbiegemoment in Umfangsrichtung [ $kNm/m$ ]
$n_\phi$	Membranschnittkraft in Umfangsrichtung [ $kN/m$ ]
$E_{cm}$	mittlerer E-Modul (Sekantenwert) [ $N/mm^2$ ]
$\nu$	Querdehnzahl für Beton
$f_{ck}$	charakteristische Zylinderdruckfestigkeit [ $N/mm^2$ ]
$f_{ctm}$	Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit [ $N/mm^2$ ]
$f_{ctk0,05}$	charakteristischer Wert des 5%-Quantils der zentrischen Zugfestigkeit [ $N/mm^2$ ]
$f_{pk}$	charakteristischer Wert der Zugfestigkeit des Spannstahls [ $N/mm^2$ ]
$f_{p0,1k}$	charakteristischer Wert der 0,1%-Dehngrenze des Spannstahls [ $N/mm^2$ ]
$d_p$	Nenndurchmesser der Litze [ $m$ ]
$A_p$	Querschnittsfläche des Spannstahls [ $m$ ]
$E_p$	Elastizitätsmodul von Spannstahl [ $N/mm^2$ ]

# A. Erläuterung zur analytischen Berechnung - Formelwerk

In diesem Anhang wird das Vorgehen bei der analytischen Berechnung des Kreisringträgers als kurze Kreiszyinderschale dargestellt. Im wesentlichen handelt sich um ein aufbereitetes Formelwerk zur Berechnung der Schnittkräfte und Spannungen am Verankerungsdetail. Der Kreisringträger wird dabei als kurze Kreiszyinderschale mit zwei gekoppelten unendlich langen Kreiszyinderschalen modelliert.

## A.1. Gekoppelte Kreiszyinderschalen

Das Schalensystem aus drei Einzelementen wird mittels matrixorientierter Lösungsmethodik laut [10] berechnet. Diese Methode erlaubt eine sehr kompakte und übersichtliche Berechnung der Schnittgrößen bei gekoppelten Schalensystemen.

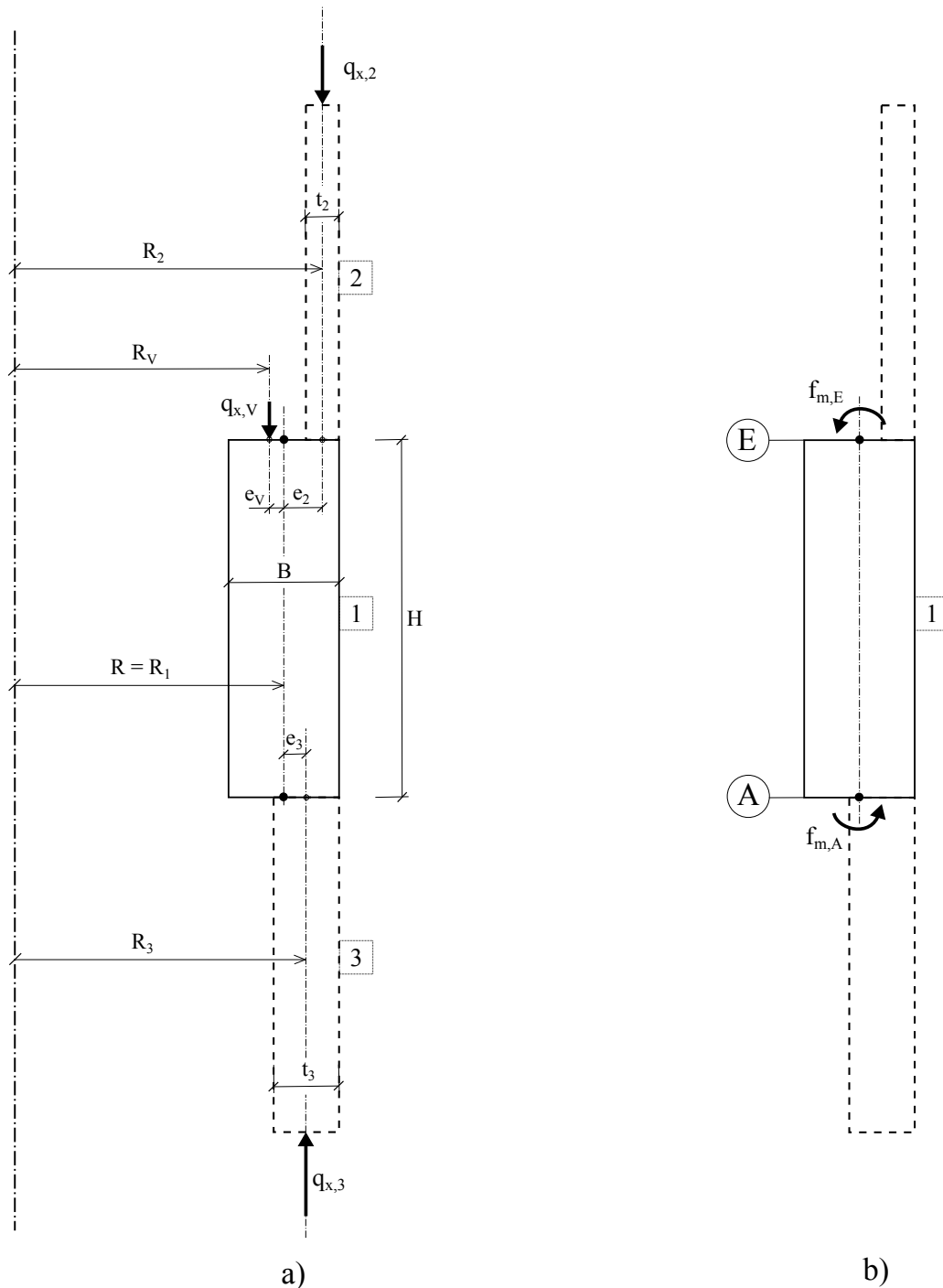
Der Kreisringträger zur Vorspannkrafteinleitung wird als kurze Kreiszyinderschalen betrachtet. Durch die rotationssymmetrischen Belastungen entstehen Biegemomente an den Rändern der kurzen Schale. Diese Krepelmomente erzeugen Biegerandstörungen an der kurzen Schale und an den gekoppelten Kreiszyinderschalen. Mit der in [10] vorgestellten Biegetheorie der Rotationsschalen könne die Schnittkräfte in den Schalen berechnet werden.

Für die praktische Berechnung wird laut [10] folgende Vorgehensweise vorgeschlagen.

- Berechnung der Membranlösung
- Ermittlung der Steifigkeitsmatrix für die kurze Kreiszyinderschale und die unendlich langen Kreiszyinderschalen
- Zusammenbau der Systemsteifigkeitsmatrix
- Ermittlung des Systembelastungsvektors
- Aufstellen des Systemgleichgewicht und lösen des Gleichungssystems um die Systemverformungen zu erhalten
- Rückrechnung der Schalenrandschnittgrößen
- Rückrechnung der Schnittkraftverläufe im Inneren der er einzelnen Schalenteile
- Spannungsberechnung

### A.1.1. Systemdarstellung

In der Abbildung A.1 ist links das idealisierte System der gekoppelten Kreiszyinderschalen dargestellt. Die rechte Skizze zeigt das reduzierte System mit den angreifenden Randmomenten. Die Umrechnung der vertikalen Streckenlasten in Streckenmomente sowie die Aufstellung des Belastungsvektors ist in A.1.6 dargestellt.



**Abb. A.1.:** a) Schalensystem mit Belastung; b) reduziertes Schalensystem mit Belastung

### A.1.2. Berechnung der Membranlösung

Die Membranlösung ist im vorliegenden Fall eine reine Radialverschiebung der Kreiszyinderschalen. Diese wird durch die vertikale Belastung hervorgerufen.

$$q_{x,3} = \frac{q_{x,2} \cdot R_2 + q_{x,V} \cdot R_V}{R_3}$$

$$q_{x,1} = \frac{q_{x,2} \cdot R_2 + q_{x,V} \cdot R_V}{R}$$

Kurze Kreiszyinderschale (Kreisringträger):

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},1} = \begin{bmatrix} w_A \\ \beta_A \cdot R \\ w_E \\ \beta_E \cdot R \end{bmatrix}_{\text{part},1} = \begin{bmatrix} \frac{\nu \cdot R \cdot q_{x,1}}{E_{cm} \cdot B} \\ 0 \\ \frac{\nu \cdot R \cdot q_{x,1}}{E_{cm} \cdot B} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{part},1}$$

Obere Kreiszyinderschale:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},2} = \begin{bmatrix} w_E \\ \beta_E \cdot R_2 \end{bmatrix}_{\text{part},2} = \begin{bmatrix} \frac{\nu \cdot R_2 \cdot q_{x,2}}{E_{cm} \cdot t_2} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{part},2}$$

Untere Kreiszyinderschale:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},3} = \begin{bmatrix} w_E \\ \beta_E \cdot R_3 \end{bmatrix}_{\text{part},3} = \begin{bmatrix} \frac{\nu \cdot R_3 \cdot q_{x,3}}{E_{cm} \cdot t_3} \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{part},3}$$

### A.1.3. Steifigkeitsmatrix für die kurze Kreiszyinderschale

Der Kreisringträger für die Einleitung der Vorspannkraft wird als kurze Kreiszyinderschale abgebildet. Die Steifigkeitsmatrix für die kurze Kreiszyinderschale ist in Gleichung A.1 dargestellt.

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \frac{K_{S,1}}{R^3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b & c & e \\ b & a_2 & -e & d \\ c & -e & a_1 & -b \\ e & d & -b & a_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned}
N &= \left[ 1 - 4e^{-2\bar{\chi}} + 2e^{-2\bar{\chi}} \cos(2\bar{\chi}) + e^{-4\bar{\chi}} \right] \\
a_1 &= 4 \cdot \chi^3 \cdot \left[ 1 + 2e^{-2\bar{\chi}} \sin(2\bar{\chi}) - e^{-4\bar{\chi}} \right] \\
a_2 &= 2 \cdot \chi \cdot \left[ 1 - 2e^{-2\bar{\chi}} \sin(2\bar{\chi}) - e^{-4\bar{\chi}} \right] \\
b &= -2 \cdot \chi^2 \cdot \left[ 1 - 2e^{-2\bar{\chi}} \cos(2\bar{\chi}) + e^{-4\bar{\chi}} \right] \\
c &= -8 \cdot \chi^3 \cdot e^{-\bar{\chi}} \left[ (\sin \bar{\chi} + \cos \bar{\chi}) + e^{-2\bar{\chi}} (\sin \bar{\chi} - \cos \bar{\chi}) \right] \\
d &= 4 \cdot \chi e^{-\bar{\chi}} \cdot \left[ (\sin(\bar{\chi}) - \cos \bar{\chi}) + e^{-2\bar{\chi}} (\sin \bar{\chi} + \cos \bar{\chi}) \right] \\
e &= -8 \cdot \chi^2 \cdot \sin(\bar{\chi}) \cdot e^{-\bar{\chi}} \cdot \left[ 1 - e^{-2\bar{\chi}} \right]
\end{aligned}$$

Hilfsgrößen:

$$\chi = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R}{B}} \approx 1,3 \cdot \sqrt{\frac{R}{B}}$$

$$\bar{\chi} = \chi \cdot \frac{H}{R} \approx 1,3 \cdot \sqrt{\frac{R}{B}} \cdot \frac{H}{R}$$

Plattenbiegesteifigkeit:

$$K_{S,1} = \frac{E_{cm} \cdot B^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E_{cm} \cdot B^3}{11,52}$$

#### A.1.4. Steifigkeitsbeziehung für die unendlich langen Kreiszyinderschalen

Die gekoppelten Rohrsegmente werden als unendlich lange Kreiszyinderschalen abgebildet. Die Steifigkeitsmatrix ist in Gleichung A.2 und A.3 dargestellt.

Obere Kreiszyinderschale:

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \frac{K_{S,2}}{R_2^3} \cdot \begin{bmatrix} 4\chi^3 & -2\chi^2 \\ -2\chi^2 & 2\chi \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Untere Kreiszyinderschale:

$$\hat{\mathbf{K}}_3 = \frac{K_{S,3}}{R_3^3} \cdot \begin{bmatrix} 4\chi^3 & 2\chi^2 \\ 2\chi^2 & 2\chi \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Hilfsgröße:

$$\chi = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R_i}{t_i}} \approx 1,3 \cdot \sqrt{\frac{R_i}{t_i}}$$

Plattenbiegesteifigkeit:

$$K_{S,i} = \frac{E_{cm} \cdot t_i^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E_{cm} \cdot t_i^3}{11,52}$$

### A.1.5. Zusammenbau der Systemsteifigkeitsmatrix

Aus den Steifigkeitsbeziehungen der einzelnen Schalenteile kann durch summieren die Systemsteifigkeitsmatrix zusammengebaut werden.

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_2 + \hat{\mathbf{K}}_3$$

$$\hat{K}_{\text{sys}} = \frac{K_{S,1}}{R^3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b & c & e \\ b & a_2 & -e & d \\ c & -e & a_1 & -b \\ e & d & -b & a_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{R_2}{R} \cdot \frac{K_{S,2}}{R_2^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\chi^3 & -2\chi^2 \\ 0 & 0 & -2\chi^2 & 2\chi \end{bmatrix} + \frac{R_3}{R} \cdot \frac{K_{S,3}}{R_3^3} \cdot \begin{bmatrix} 4\chi^3 & 2\chi^2 & 0 & 0 \\ 2\chi^2 & 2\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### A.1.6. Systembelastungsvektor

Der Systembelastungsvektor beinhaltet die Knotenbelastungen für das Schalensystem. Er setzt sich zusammen aus dem Starreinspannfesthaltekräftevektor und dem externen Knotenbelastungsvektor.

Starreinspannfesthaltekräftevektor:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{starr},i} = \hat{\mathbf{K}}_i \cdot (-\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},i})$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{starr}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{starr},1} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{starr},2} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{starr},3}$$

Externer Knotenbelastungsvektor:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} f_{Q,A} \\ f_{M,A}/R \\ f_{Q,E} \\ f_{M,E}/R \end{bmatrix}$$

$$f_{Q,A} = f_{Q,E} = 0$$

$$f_{M,A} = q_{x,3} \cdot e_3 \cdot \frac{R_3}{R}$$

$$f_{M,E} = q_{x,V} \cdot e_V \cdot \frac{R_V}{R} - q_{x,2} \cdot e_2 \cdot \frac{R_2}{R}$$



$f_M$  ... resultierendes Moment am Anfang und am Ende der kurzen Kreiszyinderschale

$q_{x,2}$  ... Linienlast am Umfang der oberen Kreiszyinderschale

$q_{x,V}$  ... Linienlast am Umfang aus der Vorspannung

$q_{x,3}$  ... Linienlast am Umfang der unteren Kreiszyinderschale

$$q_{x,3} = \frac{q_{x,2} \cdot R_2 + q_{x,V} \cdot R_V}{R_3}$$

$e_2 ; e_V ; e_3$  ... Hebelarme

Systembelastungsvektor:

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{r}}_{\text{ext}} + (-\hat{\mathbf{r}}_{\text{starr}})$$

### A.1.7. Systemgleichgewicht und Systemverformungen

Durch das Lösen des Gleichungssystems erhält man den Systemverschiebungsvektor.

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{sys}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{sys}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \beta_A \cdot R \\ w_E \\ \beta_E \cdot R \end{bmatrix}$$

$\hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}}$  ... Systemverschiebungsvektor

### A.1.8. Schnittkräfte der kurzen Kreiszyinderschale

Schalenschnittgrößen am Anfangsrand:

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x/R \\ q_x \end{bmatrix}_A = \frac{K_{S,1}}{R^3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ -b & -a_2 & e & -d \\ -a_1 & -b & -c & -e \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} w_A \\ \beta_A \cdot R \\ w_E \\ \beta_E \cdot R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_A \\ 0 \\ w_E \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{part},1} \right) \quad (\text{A.4})$$

Schalenschnittgrößen am Endrand:

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x/R \\ q_x \end{bmatrix}_E = \frac{K_{S,1}}{R^3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & f & 0 \\ e & d & -b & a_2 \\ c & -e & a_1 & -b \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} w_A \\ \beta_A \cdot R \\ w_E \\ \beta_E \cdot R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_A \\ 0 \\ w_E \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{part},1} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{mit: } f = 12(1 - \nu^2) \left( \frac{R}{B} \right)^2 \cdot N$$

### A.1.9. Schnittkräfte der gekoppelten Kreiszyinderschalen

Schalenschnittgrößen an der oberen Kreiszyinderschale

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x/R_2 \\ q_x \end{bmatrix} = \frac{K_{S,2}}{R_2^3} \cdot \begin{bmatrix} f & 0 \\ 2\chi^2 & -2\chi \\ -4\chi^3 & 2\chi^2 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} w_E \\ \beta_E \cdot R_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_E \\ \beta_E \cdot R_2 \end{bmatrix}_{part,2} \right) \quad (\text{A.6})$$

mit:  $f = 12(1 - \nu^2) \left( \frac{R_2}{t_2} \right)^2$

Schalenschnittgrößen an der unteren Kreiszyinderschale

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x/R_3 \\ q_x \end{bmatrix} = \frac{K_{S,3}}{R_3^3} \cdot \begin{bmatrix} f & 0 \\ 2\chi^2 & 2\chi \\ 4\chi^3 & 2\chi^2 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} w_E \\ \beta_E \cdot R_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_E \\ \beta_E \cdot R_3 \end{bmatrix}_{part,3} \right) \quad (\text{A.7})$$

mit:  $f = 12(1 - \nu^2) \left( \frac{R_3}{t_3} \right)^2$

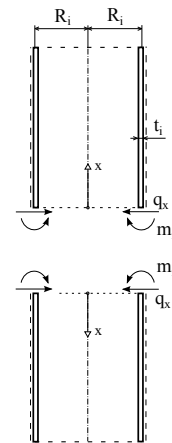
### A.1.10. Schnittkraftverläufe am Kreisringträger

Die Gleichungen zur Berechnung der Verläufe in der kurzen Kreiszyinderschale können [10] entnommen werden.

### A.1.11. Schnittkraftverläufe an den gekoppelten Kreiszyinderschalen

Die Schnittkraftverläufe in den gekoppelten Kreiszyinderschalen könne mit den folgenden Gleichungen berechnet. Wichtige Eingangsgrößen sind dabei die Anschlussschnittkräfte  $m_x$  und  $q_x$ .

Die Abbildung zeigt die Richtung der positiven Anschlussschnittkräfte  $m_x$  und  $q_x$ . Die Konvention für die Schnittkräfte ist wie in [10] festgelegt. Die Normalkraft  $n_x$  ist bei Zugbeanspruchung positiv. Die Querkraft  $q_x$  ist immer zur Rotationsachse hin, also nach innen gerichtet positiv. Das Moment  $m_x$  wirkt positiv, wenn die Außenseite der Schale Zug erhält. Die Kennfaser befindet sich demnach außen.



### Obere Kreiszyinderschale

$$n_{\phi(x)} = \frac{1}{2R_i\lambda^2} \cdot \frac{E_{cm} \cdot t_i}{K_{S,i}} \cdot e^{-\lambda x} \cdot (-m_x(\cos \lambda x - \sin \lambda x) - \frac{1}{\lambda} q_x \cos \lambda x)$$

$$m_{x(x)} = e^{-\lambda x} \cdot (m_x(\cos \lambda x + \sin \lambda x) + \frac{1}{\lambda} q_x \sin \lambda x)$$

$$q_{x(x)} = e^{-\lambda x} \cdot (-2\lambda m_x \sin \lambda x - q_x(\cos \lambda x + \sin \lambda x))$$

$$m_{\phi(x)} \approx \nu \cdot m_{x(x)}$$

Bestimmungsgleichung für den Ort der maximalen Membranschnittkraft  $n_{\phi}$

$$e^{-\lambda x} \cdot ((2\lambda m_x + q_x) \cos \lambda x + q_x \sin \lambda x) = 0 \Rightarrow x = \dots$$

### Untere Kreiszyinderschale

$$n_{\phi(x)} = \frac{1}{2R_i\lambda^2} \cdot \frac{E_{cm} \cdot t_i}{K_{S,i}} \cdot e^{-\lambda x} \cdot (-m_x(\cos \lambda x - \sin \lambda x) + \frac{1}{\lambda} q_x \cos \lambda x)$$

$$m_{x(x)} = e^{-\lambda x} \cdot (m_x(\cos \lambda x + \sin \lambda x) - \frac{1}{\lambda} q_x \sin \lambda x)$$

$$q_{x(x)} = e^{-\lambda x} \cdot (2\lambda m_x \sin \lambda x + q_x(\cos \lambda x + \sin \lambda x))$$

$$m_{\phi(x)} \approx \nu \cdot m_{x(x)}$$

Bestimmungsgleichung für den Ort der maximalen Membranschnittkraft  $n_{\phi}$

$$e^{-\lambda x} \cdot ((2\lambda m_x - q_x) \cos \lambda x - q_x \sin \lambda x) = 0 \Rightarrow x = \dots$$

Hilfsgrößen:

$$\chi = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R_i}{t_i}} \approx 1,3 \cdot \sqrt{\frac{R_i}{t_i}}$$

$$\lambda = \frac{\chi}{R_i}$$

#### A.1.12. Spannungen am Kreisringträger

Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_{\phi} = \frac{n_{\phi}}{B} \pm \frac{m_{\phi}}{W} = \frac{n_{\phi}}{B} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{B^2} \quad (\text{A.8})$$

#### A.1.13. Spannungen an den gekoppelten Kreiszyinderschalen

Biegespannungen in Längsrichtung am Anschluss der Kreiszyinderschalen:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{W} = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x \cdot 6}{t^2} \quad (\text{A.9})$$

Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_{\phi} = \frac{n_{\phi}}{t_i} \pm \frac{m_{\phi}}{W} = \frac{n_{\phi}}{t_i} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{t_i^2} \quad (\text{A.10})$$

## B. Beispiel zur analytischen Berechnung

In folgendem Beispiel wird ein 1,7 m hoher und 0,5 m breiter Kreisringträger mit den Belastungen aus Detail C laut Formelwerk im Anhang A berechnet.

### B.1. Systemangaben

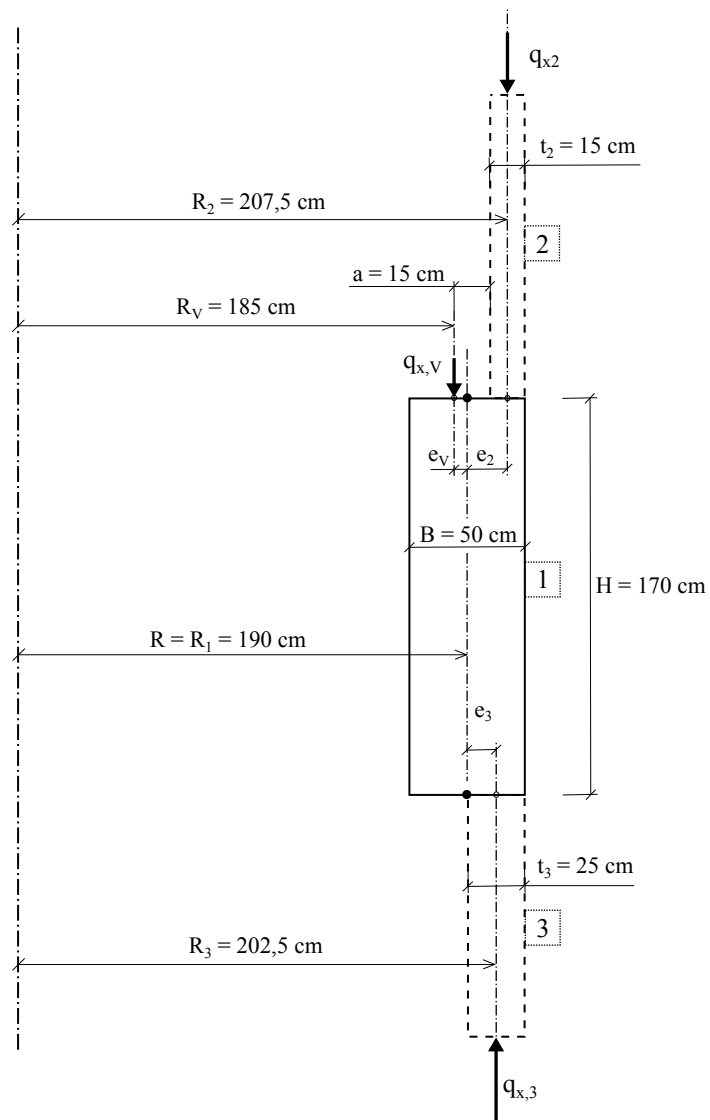


Abb. B.1.: Systemangaben

Geometrische Abmessungen:

Nr.	Bezeichnung	Radius $R$ [cm]	Dicke $t$ [cm]	Länge $H$ [cm]
1	mittlerer Schalenteil = Ringträger	190	50	170
2	oberer Schalenteil	207,5	15	$\infty$
3	unterer Schalenteil	202,5	25	$\infty$

Abstand bei der Vorspannkrafteinleitung:  $a = 15 \text{ cm}$

Radius bei der Vorspannkrafteinleitung:  $R_V = 185 \text{ cm}$

Bezugsradius:  $R = R_1 = 190 \text{ cm}$

Materialkennwerte:  $E_{cm} = 4100 \text{ kN/cm}^2$   
 $\nu = 0,2$

## B.2. Lastfälle

	Einzellast	Streckenlast am Umfang
Belastung LF1:	$F_2 = 0,6 \text{ MN}$	$q_{x,2} = 0,46 \text{ kN/cm}$
	$P_V = 20,0 \text{ MN}$	$q_{x,V} = 17,21 \text{ kN/cm}$
Belastung LF2:	$F_2 = 33,71 \text{ MN}$	$q_{x,2} = 25,86 \text{ kN/cm}$
Belastung LF3:	$F_H = 1,0 \text{ MN}$	

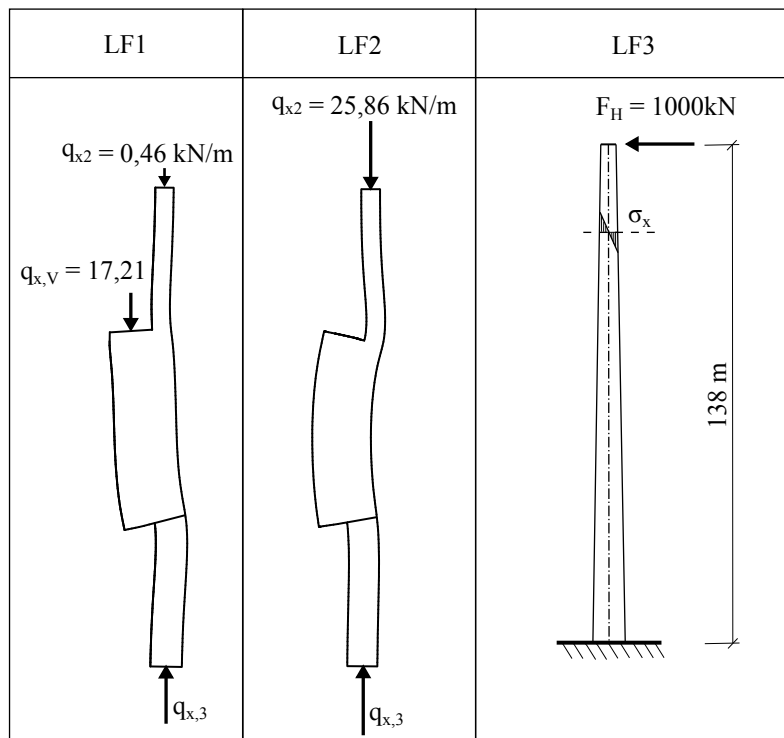


Abb. B.2.: Lastfälle

## B.3. Berechnung für Lastfall 1 - Vorspannen im Bauzustand

### B.3.1. Berechnung der Membranlösung

$$q_{x,3} = \frac{q_{x,2} \cdot R_2 + q_{x,V} \cdot R_V}{R_3} = 16,19 \text{ kN/cm}$$

$$q_{x,1} = \frac{q_{x,2} \cdot R_2 + q_{x,V} \cdot R_V}{R} = 17,26 \text{ kN/cm}$$

Kurze Kreiszyinderschale (Kreisringträger):

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},1} = \begin{bmatrix} \frac{\nu \cdot R \cdot q_{x,1}}{E_{cm} \cdot B} \\ 0 \\ \frac{\nu \cdot R \cdot q_{x,1}}{E_{cm} \cdot B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003199 \\ 0 \\ 0,003199 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Obere und untere Kreiszyinderschale:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},2} = \begin{bmatrix} \frac{\nu \cdot R_2 \cdot q_{x,2}}{E_{cm} \cdot t_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000310 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad \hat{\mathbf{u}}_{\text{part},3} = \begin{bmatrix} \frac{\nu \cdot R_3 \cdot q_{x,3}}{E_{cm} \cdot t_3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,006397 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

### B.3.2. Ermittlung der Steifigkeitsmatrix

Plattenbiegesteifigkeit:

$$K_{S,1} = \frac{E_{cm} \cdot B^3}{12(1-\nu^2)} = 44487800 \text{ kNcm}$$

$$K_{S,2} = \frac{E_{cm} \cdot t_2^3}{12(1-\nu^2)} = 1201170 \text{ kNcm}$$

$$K_{S,3} = \frac{E_{cm} \cdot t_3^3}{12(1-\nu^2)} = 5560980 \text{ kNcm}$$

Hilfsgrößen:

$$\chi_1 = \sqrt{\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R_1}{t_1}} = 2,5395$$

$$\chi_2 = \sqrt{\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R_2}{t_2}} = 4,8452$$

$$\chi_3 = \sqrt{\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R_3}{t_3}} = 3,7075$$

$$\bar{\chi} = \sqrt{\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{B}} \cdot \frac{H}{R} = 2,2721$$

Steifigkeitsmatrix für die kurze Kreiszyinderschale nach Gleichung A.1.

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \begin{bmatrix} 435,957 & -88,006 & -12,2771 & -27,3302 \\ -88,006 & 35,2485 & 27,3302 & 10,0416 \\ -12,2771 & 27,3302 & 435,957 & 88,006 \\ -27,3302 & 10,0416 & 88,006 & 35,2485 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für die langen Kreiszyinderschalen nach Gleichung A.2 und A.3.

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \begin{bmatrix} 66,8052 & -6,89395 \\ -6,89395 & 1,42284 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{K}}_3 = \begin{bmatrix} 145,506 & 19,6227 \\ 19,6227 & 5,29259 \end{bmatrix}$$

Systemsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} 581,462 & -68,3833 & -12,2771 & -27,3302 \\ -68,3833 & 40,5411 & 27,3302 & 10,0416 \\ -12,2771 & 27,3302 & 502,762 & 81,112 \\ -27,3302 & 10,0416 & 81,112 & 36,6713 \end{bmatrix}$$

### B.3.3. Ermittlung des Systembelastungsvektors

Starreinspannfesthaltekräftevektor:

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},1} = \hat{\mathbf{K}}_i \cdot (-\hat{\mathbf{u}}_{\text{part},i})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{starr}} = \hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},1} + \hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},2} + \hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},3}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},1} = \begin{bmatrix} -1,35518 \\ 0,194077 \\ -1,35518 \\ -0,194077 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},2} = \begin{bmatrix} -0,0207368 \\ 0,00213993 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{r}}_{\text{starr},3} = \begin{bmatrix} -0,930824 \\ -0,12553 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{starr}} = \begin{bmatrix} -1,35518 \\ 0,194077 \\ -1,35518 \\ -0,194077 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0207368 \\ 0,00213993 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,930824 \\ -0,12553 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,286 \\ 0,0685469 \\ -1,37591 \\ -0,191937 \end{bmatrix}$$

Externer Knotenbelastungsvektor:

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} f_{Q,A} \\ f_{M,A/R} \\ f_{Q,E} \\ f_{M,E/R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,13523 \\ 0 \\ 0,394602 \end{bmatrix}$$

$$f_{Q,A} = f_{Q,E} = 0$$

$$f_{M,A} = q_{x,3} \cdot e_3 \cdot \frac{R_3}{R} = 16,19 \cdot 12,5 \cdot \frac{202,5}{190} = 215,69 \text{ kNcm/cm}$$

$$f_{M,E} = q_{x,V} \cdot e_V \cdot \frac{R_V}{R} - q_{x,2} \cdot e_2 \cdot \frac{R_2}{R} = 17,21 \cdot 5 \cdot \frac{185}{190} - 0,46 \cdot 17,5 \cdot \frac{207,5}{190} = 74,97 \text{ kNcm/cm}$$

Systembelastungsvektor:

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{r}}_{\text{ext}} + (-\hat{\mathbf{r}}_{\text{starr}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,13523 \\ 0 \\ 0,39460 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,286 \\ -0,0685469 \\ 1,37591 \\ 0,191937 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,286 \\ 1,06668 \\ 1,37591 \\ 0,586538 \end{bmatrix}$$

### B.3.4. Systemgleichgewicht und Systemverformungen

$$\hat{u}_{\text{sys}} = \hat{K}_{\text{sys}}^{-1} \cdot \hat{f}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \beta_A \cdot R \\ w_E \\ \beta_E \cdot R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00924974 \\ 0,039119 \\ -0,00175442 \\ 0,0160568 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

### B.3.5. Schnittkräfte der kurzen Kreiszyinderschale

Schalenschnittgrößen am Anfangsrand und am Endrand nach Gleichung A.4 und A.5:

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 6,529 \text{ kN/cm} \\ -165,7 \text{ kNcm/cm} \\ 1,183 \text{ kN/cm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} -5,344 \text{ kN/cm} \\ 67,93 \text{ kNcm/cm} \\ 0,248 \text{ kN/cm} \end{bmatrix}$$

### B.3.6. Schnittkräfte der gekoppelten Kreiszyinderschalen

Schalenschnittgrößen an der oberen und unteren Kreiszyinderschale

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_{\text{oben}} = \begin{bmatrix} -0,612 \text{ kN/cm} \\ -7,445 \text{ kNcm/cm} \\ 0,237 \text{ kN/cm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_{\text{unten}} = \begin{bmatrix} 1,444 \text{ kN/cm} \\ 52,56 \text{ kNcm/cm} \\ 1,157 \text{ kN/cm} \end{bmatrix}$$

### B.3.7. Schnittkraftverläufe am Kreisringträger

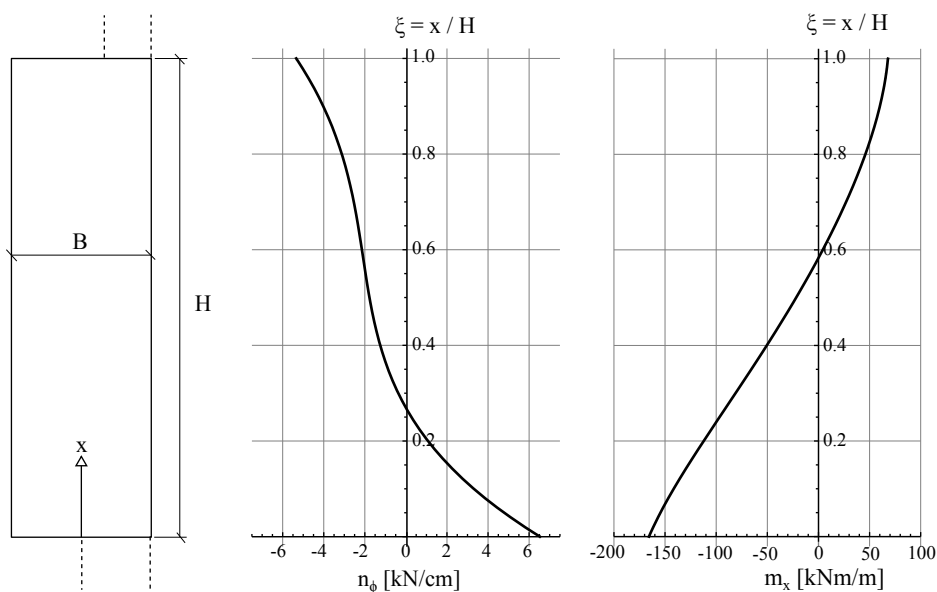


Abb. B.3.: Schnittkraftverläufe am Kreisringträger



### B.3.8. Schnittkraftverläufe an den gekoppelten Kreiszylinderschalen

In der Abbildung B.4 sind die Verläufe der Membranschnittkraft  $n_\phi$  und des Schalenbiegemoments  $m_x$  dargestellt. Das rasche Abklingen der Schnittkräfte aus den Biegerandstörungen ist gut zu erkennen.

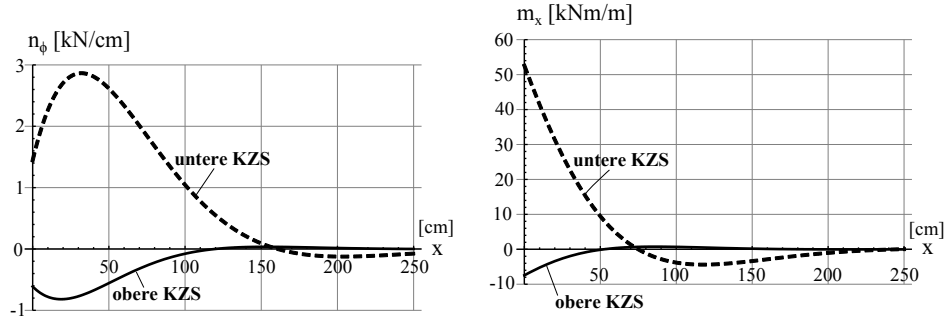


Abb. B.4.: Schnittkraftverläufe an der oberen und unteren Kreiszylinderschale

### B.3.9. Spannungen am Kreisringträger

Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_\phi = \frac{n_\phi}{B} \pm \frac{m_\phi}{W} = \frac{n_\phi}{B} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{B^2}$$

Oberer Rand:

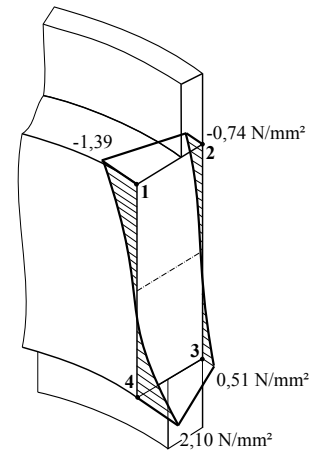
$$\sigma_{\phi,1} = \frac{-5,344}{50} - \frac{13,59 \cdot 6}{50^2} = -0,139 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,2} = \frac{-5,344}{50} + \frac{13,59 \cdot 6}{50^2} = -0,074 \text{ kN/cm}^2$$

Unterer Rand:

$$\sigma_{\phi,3} = \frac{6,529}{50} - \frac{33,14 \cdot 6}{50^2} = 0,051 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,4} = \frac{6,529}{50} + \frac{33,14 \cdot 6}{50^2} = 0,210 \text{ kN/cm}^2$$



### B.3.10. Spannungen an den gekoppelten Kreiszyinderschalen

Biegespannungen in Längsrichtung am Anschluss der Kreiszyinderschalen:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{W} = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x \cdot 6}{t^2}$$

Obere Kreiszyinderschale:

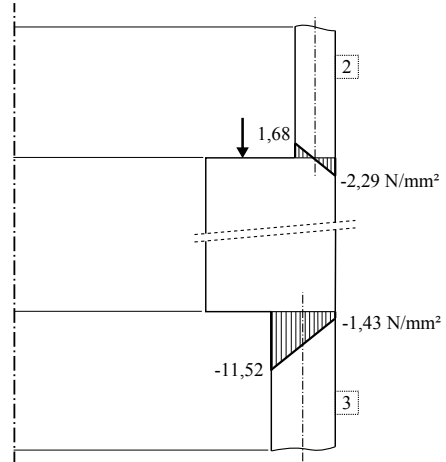
$$\sigma_{x,i} = \frac{-0,46}{15} + \frac{7,45 \cdot 6}{15^2} = 0,168 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{-0,46}{15} - \frac{7,45 \cdot 6}{15^2} = -0,229 \text{ kN/cm}^2$$

Untere Kreiszyinderschale:

$$\sigma_{x,i} = \frac{-16,19}{25} - \frac{52,56 \cdot 6}{25^2} = -1,152 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{-16,19}{25} + \frac{52,56 \cdot 6}{25^2} = -0,143 \text{ kN/cm}^2$$



Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_\phi = \frac{n_\phi}{t_i} \pm \frac{m_\phi}{W} = \frac{n_\phi}{t_i} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{t_i^2}$$

Obere Kreiszyinderschale:

$n_\phi = -0,819 \text{ kN/cm}$  bei  $x = 18,7 \text{ cm}$ .

zugehörig:  $m_\phi = -0,723 \text{ kNcm/cm}$

$$\sigma_{\phi,i} = \frac{-0,819}{15} + \frac{0,723 \cdot 6}{15^2} = -0,035 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,a} = \frac{-0,819}{15} - \frac{0,723 \cdot 6}{15^2} = -0,074 \text{ kN/cm}^2$$

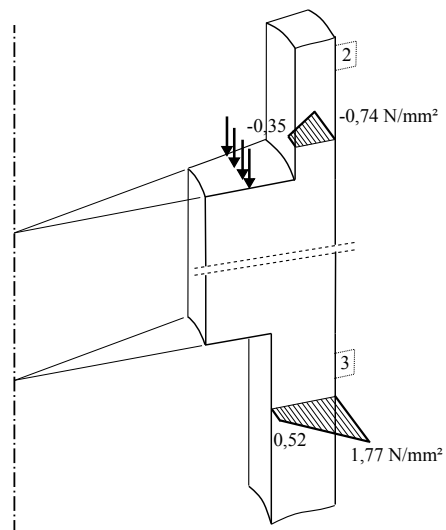
Untere Kreiszyinderschale:

$n_\phi = 2,866 \text{ kN/cm}$  bei  $x = 32,0 \text{ cm}$ .

zugehörig:  $m_\phi = 6,522 \text{ kNcm/cm}$

$$\sigma_{\phi,i} = \frac{2,866}{25} - \frac{6,522 \cdot 6}{25^2} = 0,052 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,a} = \frac{2,866}{25} + \frac{6,522 \cdot 6}{25^2} = 0,177 \text{ kN/cm}^2$$



## B.4. Berechnung für Lastfall 2 - Normalkraft von oben und keine Vorspannung

Der Ablauf der Berechnung für den Lastfall 2 ist ident mit dem für Lastfall 1. Die Systemsteifigkeitsmatrix ändert sich nicht. Der Belastungsvektor wird für diesen Lastfall neu aufgestellt.

### B.4.1. Ermittlung des Systembelastungsvektors

Starreinspannfesthaltekräftevektor:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{starr}} = \begin{bmatrix} -3,74146 \\ 0,11219 \\ -3,38376 \\ -0,197341 \end{bmatrix}$$

Externer Knotenbelastungsvektor:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} f_{Q,A} \\ f_{M,A/R} \\ f_{Q,E} \\ f_{M,E/R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,85802 \\ 0 \\ -2,60122 \end{bmatrix}$$

$$f_{Q,A} = f_{Q,E} = 0$$

$$f_{M,A} = q_{x,3} \cdot e_3 \cdot \frac{R_3}{R} = 26,50 \cdot 12,5 \cdot \frac{202,5}{190} = 353,02 \text{ kNcm/cm}$$

$$f_{M,E} = q_{x,V} \cdot e_V \cdot \frac{R_V}{R} - q_{x,2} \cdot e_2 \cdot \frac{R_2}{R} = -25,86 \cdot 17,5 \cdot \frac{207,5}{190} = -494,23 \text{ kNcm/cm}$$

Systembelastungsvektor:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}} + (-\hat{\mathbf{f}}_{\text{starr}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,85802 \\ 0 \\ -2,60122 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,74146 \\ -0,11219 \\ 3,38376 \\ 0,197341 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,74146 \\ 1,74583 \\ 3,38376 \\ -2,40388 \end{bmatrix}$$

### B.4.2. Systemgleichgewicht und Systemverformungen

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{sys}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} w_A \\ \beta_A \cdot R \\ w_E \\ \beta_E \cdot R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00962154 \\ 0,0758305 \\ 0,0242741 \\ -0,132837 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

### B.4.3. Schnittkräfte der kurzen Kreiszyinderschale

Schalenschnittgrößen am Anfangsrand und am Endrand:

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 4,733 \text{ kN/cm} \\ -279,93 \text{ kNcm/cm} \\ 1,365 \text{ kN/cm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 20,542 \text{ kN/cm} \\ -449,38 \text{ kNcm/cm} \\ -1,372 \text{ kN/cm} \end{bmatrix}$$

### B.4.4. Schnittkräfte der gekoppelten Kreiszyinderschalen

Schalenschnittgrößen an der oberen und unteren Kreiszyinderschale

$$\begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_{\text{oben}} = \begin{bmatrix} 2,022 \text{ kN/cm} \\ 48,157 \text{ kNcm/cm} \\ -1,333 \text{ kN/cm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n_\phi \\ m_x \\ q_x \end{bmatrix}_{\text{unten}} = \begin{bmatrix} -0,430 \text{ kN/cm} \\ 78,108 \text{ kNcm/cm} \\ 1,372 \text{ kN/cm} \end{bmatrix}$$

### B.4.5. Schnittkraftverläufe am Kreisringträger

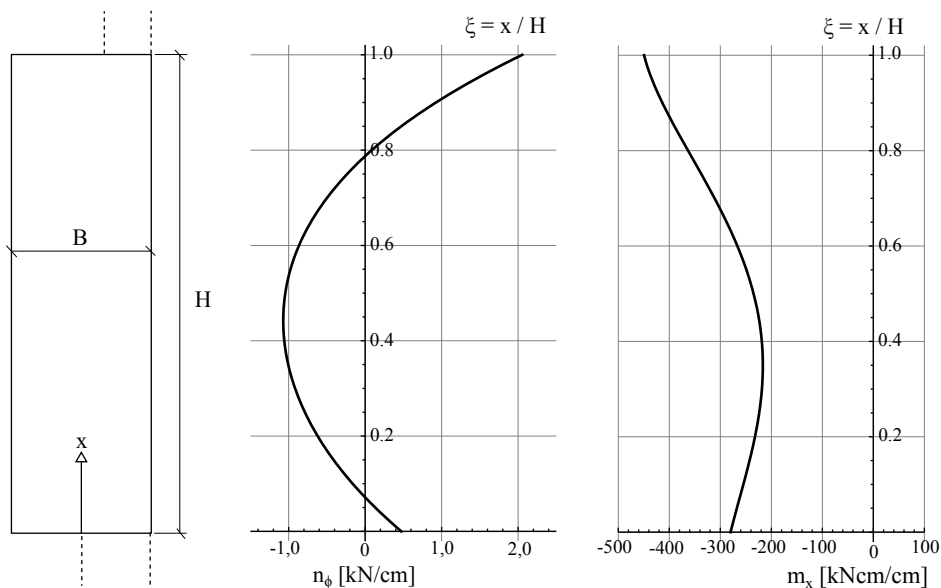


Abb. B.5.: Schnittkraftverläufe am Kreisringträger

### B.4.6. Schnittkraftverläufe an den gekoppelten Kreiszylinderschalen

In der Abbildung B.6 sind die Verläufe der Membranschnittkraft  $n_\phi$  und des Schalenbiegemoments  $m_x$  dargestellt.

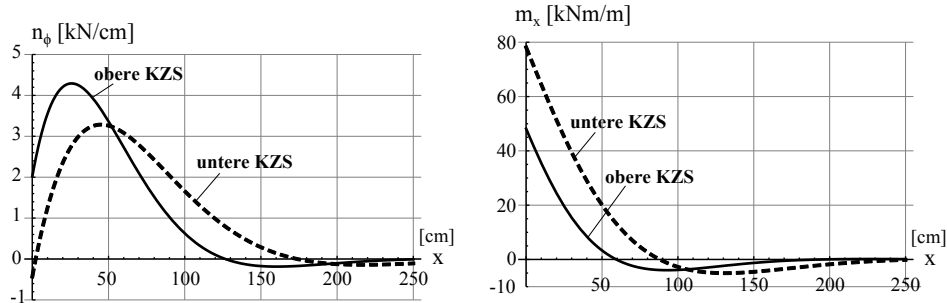


Abb. B.6.: Schnittkraftverläufe an der oberen und unteren Kreiszylinderschale

### B.4.7. Spannungen am Kreisringträger

Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_\phi = \frac{n_\phi}{B} \pm \frac{m_\phi}{W} = \frac{n_\phi}{B} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{B^2}$$

Oberer Rand:

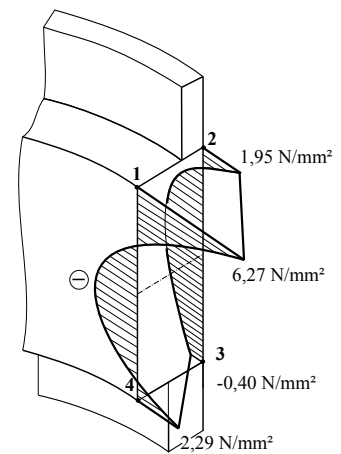
$$\sigma_{\phi,1} = \frac{20,54}{50} + \frac{89,88 \cdot 6}{50^2} = 0,627 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,2} = \frac{20,54}{50} - \frac{89,88 \cdot 6}{50^2} = 0,195 \text{ kN/cm}^2$$

Unterer Rand:

$$\sigma_{\phi,3} = \frac{4,733}{50} - \frac{55,99 \cdot 6}{50^2} = -0,040 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,4} = \frac{4,733}{50} + \frac{55,99 \cdot 6}{50^2} = 0,229 \text{ kN/cm}^2$$



### B.4.8. Spannungen an den gekoppelten Kreiszyinderschalen

Biegespannungen in Längsrichtung am Anschluss der Kreiszyinderschalen:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{W} = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x \cdot 6}{t^2}$$

Obere Kreiszyinderschale:

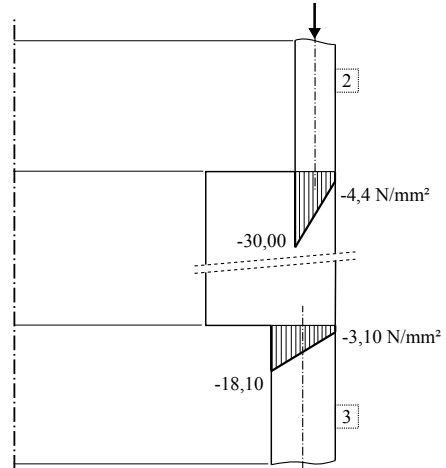
$$\sigma_{x,i} = \frac{-25,86}{15} - \frac{48,16 \cdot 6}{15^2} = -3,008 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{-25,86}{15} + \frac{48,16 \cdot 6}{15^2} = -0,440 \text{ kN/cm}^2$$

Untere Kreiszyinderschale:

$$\sigma_{x,i} = \frac{-26,50}{25} - \frac{78,12 \cdot 6}{25^2} = -1,810 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{-26,50}{25} + \frac{78,12 \cdot 6}{25^2} = -0,310 \text{ kN/cm}^2$$



Normalspannungen in Umfangsrichtung:

$$\sigma_\phi = \frac{n_\phi}{t_i} \pm \frac{m_\phi}{W} = \frac{n_\phi}{t_i} \pm \frac{\nu \cdot m_x \cdot 6}{t_i^2}$$

Obere Kreiszyinderschale:

$n_\phi = 4,293 \text{ kN/cm}$  bei  $x = 25,8 \text{ cm}$ .

zugehörig:  $m_\phi = 3,794 \text{ kNcm/cm}$

$$\sigma_{\phi,i} = \frac{4,293}{15} - \frac{3,794 \cdot 6}{15^2} = 0,185 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,a} = \frac{4,293}{15} + \frac{3,794 \cdot 6}{15^2} = 0,387 \text{ kN/cm}^2$$

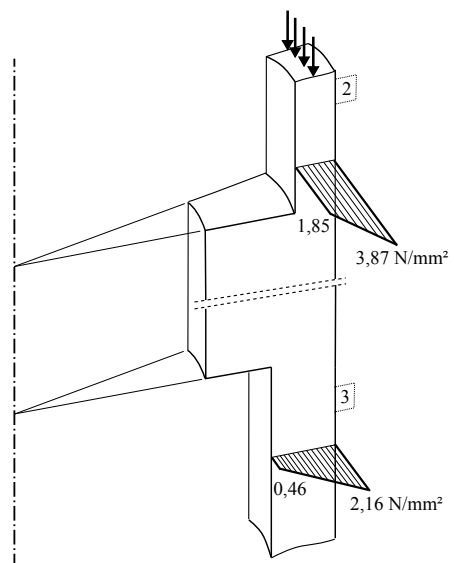
Untere Kreiszyinderschale:

$n_\phi = 3,286 \text{ kN/cm}$  bei  $x = 45,1 \text{ cm}$ .

zugehörig:  $m_\phi = 8,859 \text{ kNcm/cm}$

$$\sigma_{\phi,i} = \frac{3,286}{25} - \frac{8,859 \cdot 6}{25^2} = 0,046 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,a} = \frac{3,286}{25} + \frac{8,859 \cdot 6}{25^2} = 0,216 \text{ kN/cm}^2$$



## B.5. Berechnung für Lastfall 3 - Biegebeanspruchung des Turmes

Aus der Biegebeanspruchung des Turmes resultieren globalen Spannungen in Schalenlängsrichtung (x-Richtung). Die lokalen Spannungen am Kreisringträger aus der antimetrischen Belastung werden nicht erfasst.

$$M_o = F_{H,2} \cdot h_o = 1000 \cdot 25,3 = 25300 \text{ kNm}$$

$$M_u = F_{H,2} \cdot h_u = 1000 \cdot 27,0 = 27000 \text{ kNm}$$

$$I_o = \frac{(R_{oa}^4 - R_{oi}^4) \cdot \pi}{4} = \frac{(2,15^4 - 2,00^4) \cdot \pi}{4} = 4,2156 \text{ m}^4$$

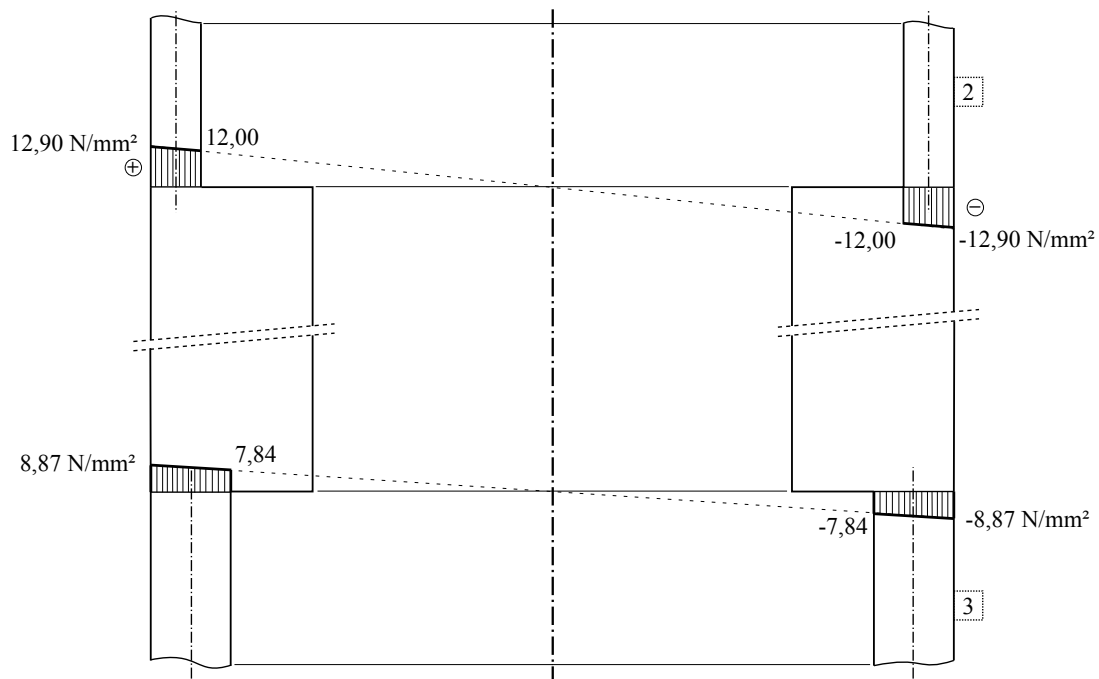
$$I_u = \frac{(R_{ua}^4 - R_{ui}^4) \cdot \pi}{4} = \frac{(2,15^4 - 1,90^4) \cdot \pi}{4} = 6,5466 \text{ m}^4$$

$$\sigma_{x,oi} = \frac{M_o}{I_o} \cdot R_{oi} = \frac{25300}{4,2156} \cdot 2,00 \cdot 10^{-3} = 12,00 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{x,oa} = \frac{M_o}{I_o} \cdot R_{oa} = \frac{25300}{4,2156} \cdot 2,15 \cdot 10^{-3} = 12,90 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{x,ui} = \frac{M_u}{I_u} \cdot R_{ui} = \frac{27000}{6,5466} \cdot 1,90 \cdot 10^{-3} = 7,84 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{x,ua} = \frac{M_u}{I_u} \cdot R_{ua} = \frac{27000}{6,5466} \cdot 2,15 \cdot 10^{-3} = 8,87 \text{ N/mm}^2$$



## B.6. Spannungsüberlagerung - Summe Lastfall 1 bis 3

### B.6.1. Spannungen am Kreisringträger

Summe der Normalspannungen in Umfangsrichtung:

Oberer Rand:

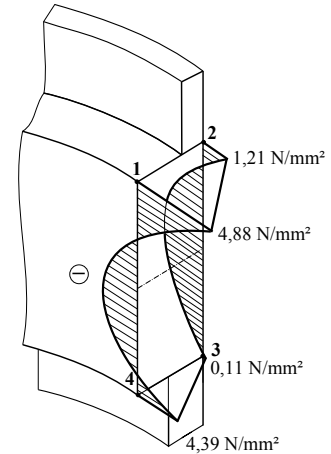
$$\sigma_{\phi,1} = -0,139 + 0,627 = 0,488 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,2} = -0,074 + 0,195 = 0,121 \text{ kN/cm}^2$$

Unterer Rand:

$$\sigma_{\phi,3} = 0,051 - 0,040 = 0,011 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\phi,4} = 0,210 + 0,229 = 0,439 \text{ kN/cm}^2$$



Biegespannungen in Längsrichtung am Anschluss der Kreiszyinderschalen:

Obere Kreiszyinderschale:

$$\sigma_{x,5} = 0,168 - 3,008 - 1,20 = -4,04 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,5} = 0,168 - 3,008 + 1,20 = -1,64 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,2} = -0,229 - 0,44 - 1,29 = -1,96 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,2} = -0,229 - 0,44 + 1,29 = 0,62 \text{ kN/cm}^2$$

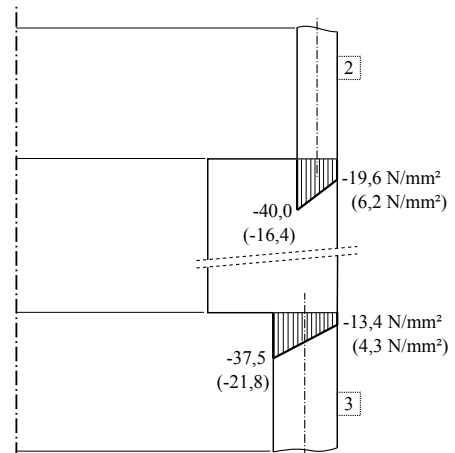
Untere Kreiszyinderschale:

$$\sigma_{x,6} = -1,152 - 1,810 - 0,784 = -3,75 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,6} = -1,152 - 1,810 + 0,784 = -2,18 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,3} = -0,143 - 0,310 - 0,887 = -1,34 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x,3} = -0,143 - 0,310 + 0,887 = 0,43 \text{ kN/cm}^2$$





# Literaturverzeichnis

- [1] BERGMEISTER, Konrad (Hrsg.) ; WÖRNER, Johann-Dietrich (Hrsg.): *Betonkalender 2006*. Bd. 1. Berlin : Verlag Ernst & Sohn, 2006
- [2] DEUTSCHES INSTITUT FÜR BAUTECHNIK (Hrsg.): *Richtlinie für Windenergieanlagen*. Bd. Reihe B, Heft8. Einwirkungen und Standsicherheitsnachweise für Turm und Gründung, 2012
- [3] EUROCODE 2: *Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken*. Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Dezember 2011
- [4] GIRKMANN, Karl: *Flächentragwerke*. 6. Springer-Verlag, 1978
- [5] *Kapitel II*. In: GRÜNBERG, Jürgen ; GÖHLMANN, Joachim: *Betonkalender 2011*. Bd. 1. Berlin : Verlag Ernst & Sohn, 2011, S. 19 – 168
- [6] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.: *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. 10. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009
- [7] GUGGENBERGER, Werner: *Flächentragwerke Studienbehelf 1+2*. 2013
- [8] HAU, Erich: *Windkraftanlagen - Grundlagen, Technik, Einsatz, Wirtschaftlichkeit*. 4. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008
- [9] KÖNIG, Gert ; TUE, Nguyen V. ; SCHENCK, Gunter: *Grundlagen des Stahlbetonbaus, Einführung in die Bemessung nach DIN 1045-1*. 3. Wiesbaden : Vieweg Teubner Verlag, 2008
- [10] LINDER, Chritian: *Theorie der allgemeinen Rotationsschale und Entwicklung eines Kreisringträger-Analogiemodells zur Berechnung axialsymmetrischer Biegerandstörungen*, Technische Universität Graz, Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Diplomarbeit, 2001
- [11] NEUSER, Ulrich: *Zur Krafteinleitung bei externer Vorspannung*, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 2003
- [12] PFLÜGER, Alf: *Elementare Schalenstatik*. 5. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1981
- [13] ROMBACH, Günter: *Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau*. 2. Berlin : Verlag Ernst & Sohn, 2007
- [14] ROMBACH, Günter: *Spannbetonbau*. 2. Berlin : Verlag Ernst & Sohn, 2010
- [15] ZILCH, Konrad ; ZEHETMAIER, Gerhard: *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. 2. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2010