V. Berücksichtigung der Randzugspannungen in Eiseneinlagen von verhältnismässig sehr grosser Höhe.

a) Einiges aus der allgemeinen Querschnittstheorie des homogenen Körpers, sowie ihre Anwendung auf Eisenbeton- und Steineisenkonstruktionen.

Bedeuten:

x und h—x die Abstände der Nullinie nn von der oberen bezw. unteren Randfaser,

F_1 den oberhalb und F_2 den unterhalb nn belegenen Querschnittsteil,

e die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche F_1 von nn,

$s = h_1 - x$ wie vor von Fläche F_2,

y den Abstand des Druckkraftmittelpunktes von nn,

r den Abstand des Zugkraftmittelpunktes von nn,

$z = y + r$ die Entfernung zwischen beiden Kraftmittelpunkten, also den Hebelsarm des inneren Kräftepaares $D = Z$,

S das statische Moment der Flächenelemente von F_1 oder F_2 bezogen auf nn, also $S = S_{n1} = S_{n2}$,

J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittsteiles F_1 bezogen auf seine parallel zu nn gerichtete eigene Schwerachse,

J_2 wie vor von F_2,

$J_n = J_{n1} + J_{n2}$ das auf nn bezogene Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes,

so ist bei homogenem Querschnitt allgemein:

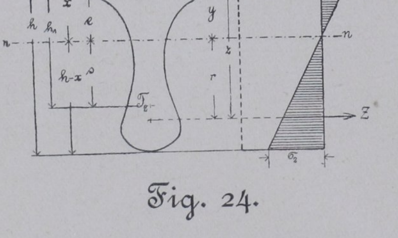


Fig. 24.

$$1)\ y = \frac{J_{n1}}{S} = \frac{F_1 \cdot e^2 + J_1}{F_1 \cdot e} = e + \frac{J_1}{S}$$

$$2)\ r = \frac{J_{n2}}{S} = \frac{F_2 \cdot s^2 + J_2}{F_2 \cdot s} = s + \frac{J_2}{S}$$

$$3)\ z = \frac{J_n}{S} = \frac{J_{n1} + J_{n2}}{S} = e + s + \frac{J_1 + J_2}{S}$$

Bei $\sigma_1 = 1{,}0$ kg/qcm Kantenpressung wird:

$$4)\ D_1 = Z_1 = 1{,}0 \cdot \frac{S}{x}$$

Aus $W = D \cdot z$ folgt nach 4) und 3)

$$5)\ W_1 = 1{,}0 \cdot \frac{S}{x} \cdot \frac{J_n}{S} = \frac{J_n}{x}$$

Bei $\sigma_2 = 1{,}0$ kg/qcm Randzugspannung wird:

$$6)\ Z_2 = D_2 = 1{,}0 \cdot \frac{S}{h-x}$$

Aus $W = Z \cdot z$ folgt nach 6) und 3)

$$7)\ W_2 = 1{,}0 \cdot \frac{S}{h-x} \cdot \frac{J_n}{S} = \frac{J_n}{h-x}$$

Soll bei solchen **Eisenbeton- oder Steineisen-konstruktionen,** deren Eiseneinlagen eine verhältnismäßig sehr große Höhe haben, abweichend von der üblichen vereinfachten Rechnungsweise die innerhalb des Eisenquerschnittes f_e nach dem Verhältnis zum Abstande der Nullinie anwachsende Beanspruchung berücksichtigt werden, so gelten auch hier die Gl. 1) bis 7), wenn das Fünfzehn- bezw. Fünfundzwanzigfache von f_e für F_2 und der Abstand der äußersten Faser der Eiseneinlage von nn, also $h_2 - x$ für $h - x$ eingesetzt wird.

Bei $\sigma_e = 1{,}0$ kg/qcm Randzugspannung des Eisens ist dann:

$$6a)\ Z = D = 1{,}0 \cdot \frac{S}{h_2-x} \text{ und}$$

$$7a)\ W_e = Z \cdot z = 1{,}0 \cdot \frac{S}{h_2-x} \cdot \frac{J_n}{S} = \frac{J_n}{h_2-x}$$

b) Berechnung der Randzugspannungen mit Hülfe der Tabellen I bis III.

Von der üblichen, den Tabellen I, II und III zu Grunde gelegten Berechnungsweise ergeben sich demnach folgende Abweichungen (zum Unterschiede wird das aus der Tabelle erhaltene z mit z_T bezeichnet): $z_T = y + h_1 - x = y + s$,

nach 1) bis 3) ist dagegen:

$z = y + r$, also um die Strecke $r-s$*) $= \frac{J_e}{S}$ größer,

daher

$z = z_T + r - s$*) und

$$(55)\quad \frac{z}{z_T} = \frac{y+r}{y+s} = \frac{z_T + r - s}{z_T} = 1 + \frac{r-s}{z_T}$$

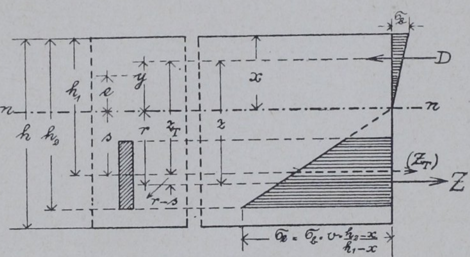


Fig. 25.

Nach diesem Verhältnis erhöhen sich folglich außer z_T die aus der Tabelle erhaltenen Werte W_b oder W_s sowie auch W_e, das außerdem noch eine Verminderung nach dem Verhältnis $\frac{h_1-x}{h_2-x}$ erfährt. Denn nach 7a) ist $W_e = \frac{J_n}{h_2-x}$ an Stelle der vereinfachten Berechnungsweise $W_e = \frac{J_n}{h_1-x}$ zu setzen, sowie $v = v \cdot \frac{h_2-x}{h_1-x}$.

Daraus folgt:

$$(56)\quad W_e = W_e \cdot \frac{z}{z_T} \cdot \frac{h_1-x}{h_2-x} \text{ und}$$

*) r—s, Siehe Gl. (59) u. (59a).

$$(57)\begin{cases} W_b = W_b \cdot \dfrac{z}{z_T} \\ W_s = W_s \cdot \dfrac{z}{z_T} \end{cases}$$

$$(58)\begin{cases} \sigma_e = v \cdot \dfrac{h_2 - x}{h_1 - x} \cdot \sigma_b \text{ oder } \sigma_s \\ \sigma_e = v \cdot \dfrac{h_2 - x}{h_1 - x} \cdot \dfrac{z}{z_T} \cdot \sigma_{b_T} \text{ oder } \sigma_{s_T} \end{cases}$$

Zur Bestimmung von $r - s = \frac{J_e}{S}$ genügt die Berücksichtigung eines Einzelquerschnittes der Eiseneinlagen. Bezeichnet man diesen mit F und das auf seine parallel zu nn gerichtete eigene Schwerachse bezogene Trägheitsmoment mit J, so ist:

$$(59)\quad r - s = \frac{J}{F \cdot (h_1 - x)} = \frac{J}{F \cdot s}$$

Bei rechteckigem Eisenquerschnitt mit den Abmessungen b_e und h_e, z. B. bei hochkantig eingebetteten Bandeisen, ist

$\frac{J}{F \cdot s} = \frac{b_e \cdot h_e^3}{12} \cdot \frac{1}{b_e \cdot h_e \cdot s} = \frac{h_e^2}{12 \cdot s}$, folglich allgemein:

$$(59a)\quad r - s = \frac{h_e^2}{12 \cdot s} = \frac{h_e^2}{12(h_1 - x)}$$

Zahlenbeispiel zu Aufgabe 10.

Bei Aufgabe 10 war $h_1 = 8$ cm, $z = 6{,}99$ cm, $x = 3{,}03$ cm und $\mathbf{h_e = 2}$ **cm**, $W_s = 1058\ \text{cm}^3$, $W_e = 25{,}73\ \text{cm}^3$, $v = 41{,}11$, $\sigma_s = 24{,}2$ u. $\sigma_e = 995$ kg/qcm

folglich: $h_2 = h_1 + \frac{h_e}{2} = 8{,}0 + 1{,}0 = 9{,}0$ cm

$$h_2 - x = 9 - 3{,}03 = 5{,}97 \text{ cm}$$

$$s = h_1 - x = 8 - 3{,}03 = 4{,}97 \text{ cm}$$

$$\frac{h_2 - x}{h_1 - x} = \frac{5{,}97}{4{,}97} = 1{,}20$$

Daher nach Gl. (59a)

$$r - s = \frac{2^2}{12 \cdot 4{,}97} = 0{,}067 \text{ cm}$$

und nach Gl. (55).

$$\frac{z}{z_T} = \frac{6{,}99 + 0{,}067}{6{,}99} = \frac{7{,}057}{6{,}99} = 1{,}01$$

folglich nach Gl. (57)

$$W_s = 1058 \cdot 1{,}01 = \sim 1069 \text{ cm}^3$$

und nach Gl. (56)

$$W_e = 25{,}73 \cdot \frac{1{,}01}{1{,}20} = 25{,}73 \cdot 0{,}842 = 2166 \text{ cm}^3$$

ferner:

$$\sigma_s = \frac{M}{1058 \cdot 1{,}01} = 24{,}2 \cdot \frac{1}{1{,}01} = 23{,}96 \text{ kg/qcm}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{25{,}73 \cdot 0{,}842} = 995 \cdot \frac{1}{0{,}842} = 1182 \text{ kg/qcm}$$

oder nach Gl. (58)

$$\sigma_e = v \cdot \sigma_s \cdot \frac{h_2 - x}{h_1 - x} = 41{,}11 \cdot 23{,}96 \cdot 1{,}2 = 1182 \text{ kg/qcm}$$

wie vor.

$$\sigma_e = \frac{v \cdot \sigma_{s_T}}{0{,}842} = \frac{41{,}11 \cdot 24{,}2}{0{,}842} = 1182 \text{ kg/qcm wie vor.}$$

Aufgabe 14.

Kommt es in einem besonderen Falle darauf an, bei Herstellung einer gegen Grundwasserauftrieb wirkenden Eisenbetonfundamentplatte zufällig verfügbar gewordene I Träger Normalprofil Nr. 28 mit $F = 61$ cm², $J_x = 7575$ cm⁴ und $J_y = 363$ cm⁴ zu verwenden und werden diese unzweckmäßigerweise, wie nebenstehend angegeben, hochkantig eingebaut, so ist für $b = 1{,}0$ m $f_e = \frac{F}{B} = \frac{61}{1{,}27^{*)}}$ $= 48$ cm² und $\frac{f_e}{h_1} = \frac{48}{43} = 1{,}116$. Hierfür findet man in Tabelle I den Wert 1,115, wobei $v = 19{,}5$, $I = \frac{15}{34{,}5}$, $III = 0{,}8551$, $IV = 18{,}589$ und $V = 0{,}9533$

$x = 15/34{,}5 \cdot 43 = 18{,}7$ cm,

folglich $s = h_1 - x = 43 - 18{,}7 = 24{,}3$ cm

nach Gl. (59)

$$r - s = \frac{J_x}{F \cdot s} = \frac{7575}{61 \cdot 24{,}3} = 5{,}11 \text{ cm}$$

$$z_T = 0{,}8551 \cdot 43 = 36{,}77 \text{ cm}$$

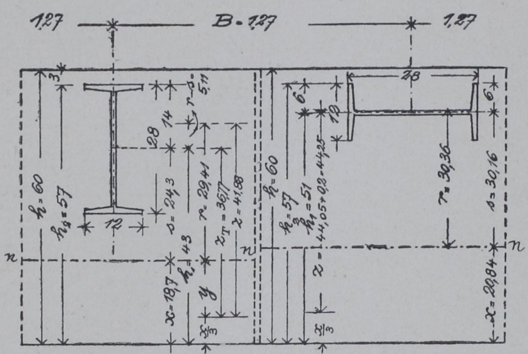
nach Gl. (55)

$$\frac{z}{z_T} = \frac{36{,}77 + 5{,}11}{36{,}77} = 1 + \frac{5{,}11}{36{,}77} = 1{,}139 \infty 1{,}14$$

$$\frac{h_1 - x}{h_2 - x} = \frac{43 - 18{,}7}{57 - 18{,}7} = \frac{24{,}3}{38{,}3} = 0{,}635 = \frac{1}{1{,}576}$$

$$\text{folglich } \sigma_b = \frac{M}{43^2 \cdot 1{,}14} \cdot \frac{1}{18{,}589} = \frac{M}{2107{,}9} \cdot \frac{1}{18{,}589} = \frac{M}{39184}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{2107{,}9} \cdot \frac{1{,}576}{0{,}9533} = \frac{M}{1275}$$



Zu Aufgabe: 14. Zu Aufgabe: 15.

Fig. 26.

---

*) Entsprechend der in § 14, Ziffer 6 der ministeriellen Bestimmungen gezogenen Grenze für die wirksame Breite der Plattenbalken, darf auch hier sinngemäß nur ein Betonstreifen von einer solchen Breite B als wirksam in Ansatz gebracht werden, daß $\frac{B}{2}$ von Mitte Trägereinlage ab nach jeder Seite nicht mehr als $^1/_6$ Freilänge beträgt. Voraussetzung ist also hier $\frac{B}{2} \cdot 6 \leqq l$ und $l \geqq \frac{1{,}27}{2} \cdot 6 \geqq 3{,}81$ m.

oder nach Gl. (58)

$$\sigma_e = v \cdot 1{,}576 \cdot \sigma_b = 19{,}5 \cdot 1{,}576 \cdot \sigma_b = 30{,}73 \cdot \sigma_b$$
$$= \frac{39184}{1275} \cdot \sigma_b$$

Aufgabe 15.

Es soll nun noch untersucht werden, wie sich die Ergebnisse stellen, wenn bei der gleichen Betonhöhe h und der gleichen Teilungsweite B die Trägerprofile zweckmäßigerweise **flachseitig** eingebettet werden. (Siehe Figur 26.)

Unter Beibehaltung von $h_2 = 57$ cm erhöht sich h_1 um $\frac{28-11{,}9}{2} = 8$ cm, also auf $43 + 8 = 51$ cm, daher $\frac{f_e}{h_1} = \frac{48}{51} = 0{,}942$.

Hierzu erhält man in Tabelle I
$v = 21{,}7$, $I = 15/36{,}7$, $III = 0{,}8638$, $IV = 17{,}652$ und $V = 0{,}8134$

$$x = \frac{15}{36{,}7} \cdot 51 = 20{,}84 \text{ cm}$$

$$s = h_1 - x = 51 - 20{,}84 = 30{,}16 \text{ cm.}$$

In Gl. (59) ist hier $J_y = 363$ cm^4 einzusetzen, folglich:

$$r - s = \frac{363}{61 \cdot 30{,}16} = 0{,}197 \sim 0{,}20 \text{ cm}$$

$$z_T = 0{,}8638 \cdot 51 = 44{,}05 \text{ cm}$$

daher: $\frac{z}{z_T} = \frac{44{,}05 + 0{,}20}{44{,}05} = 1{,}0045$ also unerheblich,

$$\frac{h_1 - x}{h_2 - x} = \frac{51 - 20{,}84}{57 - 20{,}84} = \frac{30{,}16}{36{,}16} = 0{,}834 = \frac{1}{1{,}2}$$

folglich:

$$W_b = h_1^2 \cdot \frac{z}{z_T} \cdot IV = 51^2 \cdot 1{,}0045 \cdot 17{,}652$$
$$= 2613 \cdot 17{,}652 = 46\,125 \text{ cm}^3$$

$$W_e = 2613 \cdot 0{,}834 \cdot V = 2613 \cdot 0{,}834 \cdot 0{,}8134 = 1773 \text{ cm}^3$$

$$v = 21{,}7 \cdot 1{,}2 = \frac{46125}{1773} = \sim 26{,}0$$

Gegenüberstellung der bei Aufgabe 14 und 15 ermittelten Werte.

$W_b = 39\,184 : 46\,125 = 1 : 1{,}177$
$W_e = 1275 : 1773 = 1 : 1{,}391.$

Dieser Vergleich macht die bei Aufgabe 14 gewählte unzweckmäßige Lage des Eisens deutlich erkennbar und zeigt zugleich, daß **in Eisenbeton-**

decken etwa zu verwendende **Bandeisen** mit Vorteil **flachseitig einzubetten** sind, im Gegensatz zu der bei Steineisendecken durch die Fugen bedingten hochkantigen Stellung.

c) Lage der Schwerachse bei zweireihigen Eiseneinlagen in Plattenbalken.

Anschließend an die hier erörtete zweckmäßige Lage des verfügbaren Eisenmaterials bleibt — ohne Rücksicht auf die Randzugspannungen — noch die Bestimmung der Höhenlage der Schwerachse solcher Eisenanlagen zu behandeln, die bei Plattenbalken in zwei Reihen so übereinander angeordnet werden müssen, daß der Gesamtquerschnitt der einen Reihe größer ist als derjenige der anderen. Dies ist entweder bei ungerader Gesamtzahl gleich großer Einzelquerschnitte der Fall oder bei Verwendung von Einzelquerschnitten verschiedener Größe, um einen dem berechneten f_e möglichst genau entsprechenden Gesamtquerschnitt zu erhalten. (Siehe auch Seite 32, zweite Hälfte des ersten Absatzes der Vorbemerkung.)

Bedeutet:

F_o den Gesamtquerdurchschnitt der oberen Reihe,
F_u denjenigen der unteren Reihe,
e die Entfernung beider Reihenachsen,
s den Abstand der Schwerachse von der unteren Reihenachse, so erhält man bei der wiederholt angewendeten Gleichsetzung der statischen Momente der Flächenelemente inbezug auf die Schwerachse

$$F_u \cdot s = F_o \cdot (e-s) = F_o \cdot e - F_o \cdot s$$

$$F_u \cdot s + F_o \cdot s = F_o \cdot e = s \cdot (F_u + F_o)$$

und

$$\textbf{(60)} \quad s = \frac{F_o \cdot e}{F_u + F_o}$$

Man kann auch beide Gesamtquerschnitte als entsprechend große, in ihrer Reihenachse angreifende Kräfte ansehen. Um diese im Gleichgewicht zu halten, ist dann eine entgegengesetzt gerichtete Kraft von der Größe $F_u + F_o$ erforderlich, die so angreifen muß, daß für jeden beliebigen Drehpunkt die Summe aller Momente = Null wird. Für die untere Reihenachse als Drehkante ist dann:

$$F_o \cdot e - (F_u + F_o) \cdot s = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$F_o \cdot e = (F_u + F_o) \cdot s$$

und daraus folgt wieder: **(60)** $s = \dfrac{F_o \cdot e}{F_u + F_o}$

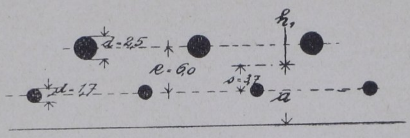


Fig. 27.

Zahlenbeispiel.

Nach der nebenstehenden Anordnung der Eiseneinlagen ist

$$e = 6 \text{ cm}, \quad F_o = 3 \cdot 2{,}5^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 4{,}91 = 14{,}73 \text{ cm}^2$$

$$F_u = 4 \cdot 1{,}7^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 \cdot 2{,}27 = \underline{9{,}08 \quad „}$$

$$F_o + F_u = 23{,}81 \text{ cm}^2$$

Daher nach Gl. (60)

$$s = \frac{14{,}73 \cdot 6{,}0}{23{,}81} = 3{,}71 \infty 3{,}7 \text{ cm und}$$

$$e - s = 6{,}0 - 3{,}7 = \infty 2{,}3 \text{ cm.}$$

Bei Vertauschung von F_o und F_u und Beibehaltung des gleichen Abstandes des untersten Randes der Eiseneinlagen von der Stegunterkante würde die untere Reihenachse zwar um $\frac{2{,}5-1{,}7}{2} = 0{,}4$ cm höher gelegt werden müssen, der Abstand der Schwerachse würde aber von da ab nur 2,3 statt 3,7 cm betragen und diese folglich um 3,7—2,3—0,4 = 1,0 cm tiefer liegen als bei der jetzigen Anordnung. Der Abstand a würde also zugunsten der Konstruktionshöhe h_1 um 1 cm kleiner werden. Es empfiehlt sich daher, die größere der beiden Gesamtquerschnittsflächen nach unten zu legen, zumal der erwähnte Unterschied von 1 cm auch das Verhältnis $\frac{h_2 - x}{h_1 - x}$ günstiger gestaltet und mithin nach Gl. (58) die Randzugspannungen auch insofern entsprechend geringer ausfallen.