

Jürgen GRILL

**Anwendung eines halbglatten
Newtonverfahrens
auf unilaterale Kontaktprobleme der
linearen Elastizität**

MASTERARBEIT

**zur Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieur**

Masterstudium Technomathematik



Graz University of Technology

Technische Universität Graz

Betreuer:

Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Olaf Steinbach

Institut für Numerische Mathematik

Graz, im April 2015

Vorwort

Zu allererst bedanke ich mich sehr herzlich bei Univ.-Prof. Dr. Olaf Steinbach für die Betreuung und sein Engagement während der Masterarbeit, besonders wenn das Korrekturlesen fällig war oder ich einen Ratschlag benötigte.

Bei zwei Mitarbeitern des Institutes für Numerische Mathematik, Dr. Martin Neumüller und Dr. Günther Of, möchte ich mich für die hilfreichen Diskussionen bedanken, die mir neue Perspektiven eröffneten, als ich die Algorithmen des Simulationsprogrammes erstellte.

Den Mitstudenten Christian Sattlecker, Florian Lehner, Daniel Krenn und allen anderen Kollegen bin ich sehr dankbar, dass sie mir immer zuhörten und Antworten gaben, wenn ich eine Meinung eines anderen Mathematikers brauchte.

Michael Kerber, Benedikt Kien, Alexander Aufreiter, Dominik Feiersinger, Philipp Kiblböck, Isabel Hanghofer danke ich für die mentale Unterstützung und für die vielen anderen Unternehmungen neben der Arbeit.

Meinem Bruder Manuel Grill danke ich für den Gedankenaustausch und die vielen Fachgespräche, die mir einen Einblick in die physikalische Modellierung gewährten. Außerdem danke ich ihm für die besser klingenden Phrasen und die Verbesserung meines Schreibstils.

Meiner Familie und den näheren Verwandten und Bekannten danke ich für deren Geduld, Ausdauer und Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	7
Abstract	9
Einleitung	11
1 Physikalisches Modell	13
1.1 Elastomechanische Grundgleichungen	13
1.2 Materialgesetze	16
1.2.1 Verzerrungs- und Spannungstensoren in der Referenzkonfiguration	17
1.2.2 Lineare Elastizität	18
1.3 Kontaktbedingung	21
1.3.1 Normalkontakt	21
1.3.2 Tangentialkontakt	24
1.4 Zusammenfassung der betrachteten Modelle	25
1.4.1 Reibungsfreies Signorini-Problem	26
1.4.2 Signorini-Problem mit Trescascher Reibung	26
2 Analysis der Modellgleichungen	29
2.1 Funktionenräume	29
2.2 Definitionen aus der Funktionalanalysis	35
2.2.1 Grundbegriffe	36
2.2.2 Begriffe zu Operatoren	40
2.2.3 Sätze zu monotonen Operatoren	44
2.2.4 Sätze zu pseudomonotonen Operatoren	46
2.2.5 Sätze zu maximalmonotonen Operatoren	48
2.3 Konvexe Analysis	51
2.3.1 Konvexe Funktionale	51
2.3.2 Konvexe unterhalbstetige Funktionale	53
2.4 Konvexe Optimierung	57
2.4.1 Konvexes Funktional auf einer konvexen Menge	57
2.4.2 Subdifferenzial	58
2.4.3 Variationsungleichungen mit einer Bilinearform und einem Subdifferenzial des konvexen, unterhalbstetigen Funktionals	63
2.5 Variationsformulierung der Modelle	65
2.5.1 Analysis des reibungsfreien Zustandes	66
2.5.2 Analysis des Signorini-Problems mit Trescascher Reibung	67

3	Diskrete Variationsformulierung	69
3.1	Raumdiskretisierung	69
3.1.1	Formulierung ohne Reibungsgesetz	70
3.1.2	Formulierung mit Trescaschem Reibungsgesetz	71
3.2	Knotenbasierte Umformulierung	72
3.2.1	Reibungsfrei	72
3.2.2	Trescasche Reibung	75
3.3	Halbglatte Newton-Verfahren für den reibungsfreien Zustand	77
3.3.1	Nicht differenzierbare Newton-Verfahren	77
3.3.2	Komplementärfunktion	79
3.3.3	Elimination der Lagrangemultiplikatoren	81
3.4	Halbglatte Newton-Verfahren für den Zustand Trescascher Reibung	83
3.4.1	Komplementärfunktion	83
3.4.2	Regularisierung	86
3.4.3	Erweiterung des Verfahrens	88
3.4.4	Elimination der Lagrangemultiplikatoren	88
4	Numerische Studien	93
4.1	Kontaktproblem ohne Reibung	94
5	Ausblick	99

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt unilaterale stationäre Kontaktprobleme, die sich auf homogene isotrope linear hyperelastische Materialien beschränken. Die dazugehörigen mathematischen Modelle, die durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden, beinhalten eine reibungsfreie und eine weitere Formulierung, die einem Reibungsgesetz mit vorgegebenen Reibungskoeffizienten genügt. Jedoch sind die analytischen Lösungen im Allgemeinen nicht bekannt. Ausgehend von zugehörigen Variationsungleichungen ist es aber möglich, eine Finite-Elemente-Formulierung anzugeben, in der die Kontaktnebenbedingungen knotenweise erfüllt werden. Die resultierenden diskreten Systeme liefern in Verbindung mit geeigneten Lösungsverfahren näherungsweise Lösungen des ursprünglichen Modells.

Anstatt die Ungleichungen des diskreten Systems zu betrachten, wird durch die Einführung von Lagrangemultiplikatoren eine äquivalente Ausgangslage geschaffen, in der man nichtlineare Gleichungen zu lösen hat. Die Gleichungen, die Lagrangemultiplikatoren beinhalten, besitzen die Eigenschaften der Kontaktnebenbedingungen, die Lagrangemultiplikatoren beschreiben aber keine entsprechenden Kontaktkräfte des gegebenen kontinuierlichen Modells. Im Rahmen dieser Arbeit wird jeweils ein effizienter iterativer Lösungsalgorithmus, der einer exakten Aktive-Mengen-Strategie entspricht und aus einem halbglatten Newtonverfahren hervorgeht, für jedes algebraische nichtlineare Gleichungssystem der beiden Modelle erstellt.

Abgerundet wird die Arbeit mit einer numerischen Studie des Hertzischen Kontaktproblems eines elastischen Zylinders auf einer starren Platte. Dabei wird die Untersuchung auf den reibungsfreien Fall und dessen Spannungsverteilung beschränkt.

Abstract

In many technical and engineering applications one has to investigate contact problems with friction. Therefore a set of partial differential equations should be solved. In this thesis the mathematical modeling is restricted to a problem without friction and a second formulation using a friction law with an a priori known friction force. Additionally a homogeneous isotropic hyperelastic material law of linear elasticity is used. But in general we do not know an analytical solution of the partial differential equations. Thus, it is searched for a useful design of discretization techniques and efficient solution strategies within the given unilateral stationary contact problems.

Using finite elements and Lagrange multipliers, the related variational inequalities can be transformed into algebraic equations and inequalities, which are a node-to-segment approach, i.e. the discrete inequalities are fulfilled point-wise. These inequalities including Lagrange multipliers possess the same abilities as the contact side conditions, but the multipliers do not describe any contact forces related to the given problems. After a reformulation of the inequalities we have to solve a set of nonlinear algebraic equations. To construct an efficient numerical solution algorithm semi-smooth Newton methods are used.

Finally, a numerical study of a Hertz contact problem, involving an elastic cylinder on a rigid plate, is given to investigate the solution algorithm. The example is restricted to a problem without friction and the related stress distribution.

Einleitung

Numerische Simulationen haben heutzutage durch den Einsatz leistungsfähigerer Rechensysteme enorm an Bedeutung in Forschung und Ingenieurwesen gewonnen. Dadurch können beispielsweise zu teure oder unmöglich scheinende Experimente zumindest simuliert oder tiefere Einsichten der Wechselwirkung zwischen dem Experiment und des theoretischen Modells erlangt werden. In der Serienproduktion kann eine Überschreitung kritischer Werte genauer prognostiziert werden, was zu einer Materialkostenersparnis führen kann.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Erstellung eines spezifisch angepassten Simulationsprogramms für Randwertprobleme aus der Kontaktmechanik. Die Modellgleichungen sollen durch ein Diskretisierungsverfahren programmierbar werden, so dass das Programm numerische Lösungen liefert. Ziel dabei ist es, zwei Modelle mathematisch so aufzubereiten, dass ein praktisches Problem katalogisiert werden kann, damit das Simulationsprogramm numerische Lösungen, die bei einer Übereinstimmung der mathematischen Charakteristika zur gesuchten Lösung konvergiert, finden kann. Es werden zwei Modelle der Kontaktmechanik bearbeitet und für die Simulation so modifiziert, dass zweidimensionale Modelle, die das lineare Hookesche Gesetz erfüllen, numerisch gelöst werden können.

Das erste Modell, das ursprünglich im Jahre 1933 von Dr. Antonio Signorini formuliert wurde, behandelt neben den elastomechanischen Grundgleichungen und dem linearen Materialgesetz auch die geometrische Bedingung, dass sich zwei disjunkte Körper nicht durchdringen können. Das zweite Modell stellt eine Erweiterung des ersten dar. Ein Körper kann laut dem Signorini-Modell einen anderen Körper zwar nicht durchdringen, aber sie berühren sich reibungsfrei. Nun beschreibt dieses erweiterte Modell auch jene Reibungsgesetze, die die Regeln für die Berührung zwischen den Objekten festlegen.

Innerhalb der mathematischen Analysis entsteht die Variationsformulierung jener Modelle durch Integration der Differenzialgleichungen über das zu betrachtende Gebiet. Das heißt, in dieser Arbeit soll ein stationäres Randwertproblem in der Ebene gelöst werden. Diese Umformulierung beinhaltet nun einige Funktionale, die über geeignete Funktionenräume auf die reellen Zahlen abbilden, und hat bei beiden Modellen die Gestalt einer Variationsungleichung. Während die Formulierung der elastomechanischen Grundgleichungen zu einer Operatorgleichung über eine lineare Untermenge des gegebenen Funktionenraumes führt, wird durch die Reibung und der Nichtdurchdringung eine Variationsungleichung über eine abgeschlossene konvexe Untermenge forciert. Diese Ungleichung wird mit Hilfe der konvexen Analysis und der konvexen Optimierung in bestimmten Funktionenräumen analysiert. Die Theorie dazu soll Aussagen über die Existenz, manchmal zusätzlich über die Eindeutigkeit, der Variationsformulierung lie-

fern.

Besitzt die Variationsungleichung die richtigen Charakteristika, soll, wie oben bereits erwähnt, das Simulationsprogramm eine Näherungslösung bestimmen. Dabei kommt eine Finite-Elemente-Methode (FEM) mit einem Ansatzraum der stückweise linearen und global stetigen Funktionen zum Einsatz. Diese Wahl erlaubt eine Analysis der FEM mit Standardinterpolationsoperatoren. Es wird aber nicht weiter darauf eingegangen, ob eine numerische Lösung unter verschiedenen Regularitätsbedingungen des Gebietes und der Randdaten zur Lösung konvergiert oder welche Regularität und Konvergenzgeschwindigkeit diese besitzt.

Jetzt wird in dieser Arbeit ein halbglattes Newton-Verfahren für einen Lösungsalgorithmus zugrunde gelegt, das einer Aktive-Mengen-Strategie entspricht. Anders als die Analysis der FEM wird die Herleitung jener Strategie im Detail behandelt. Das Simulationsprogramm soll Problemstellungen lösen, die die Eigenschaften eines der beiden Modelle und deren mathematischen Voraussetzungen besitzen.

Dass nur stationäre Randwertprobleme in der Ebene mit einem linearen Hookeschen Gesetz betrachtet werden, stellt eine bewusst gewählte Einschränkung der Modelle und der Modularität des Programms aufgrund des Zeitrahmens dar. In dieser Arbeit liegt der Fokus auf der Funktionalanalysis der Modelloperatoren und der Erstellung des numerischen Lösungsalgorithmus. Denn man hat keine lineare Variationsgleichung, die zu einem linearen Gleichungssystem führt, sondern eine Variationsungleichung, die zu einem nichtlinearen Gleichungssystem mit nicht stetig differenzierbaren Funktionen führt. Dafür soll ein Algorithmus im Rahmen der halbglatten Newton-Verfahren hergeleitet werden.

Die numerischen Studien beinhalten die Daten bereits bekannter Testfälle, um die Ergebnisse abgleichen und testen zu können. Besonders das Signorini-Problem eines elastischen Zylinders auf einer starren Platte ist sehr gut zum Testen geeignet, da die Geometrie und passend glatte Randdaten auch analytische Lösungen zulassen.

1 Physikalisches Modell

In der Kontaktmechanik interessieren die Eigenschaften von Körpern, die wegen Oberflächen-, äußerer Kräfte und einer Anfangsbewegung aufeinander stoßen. Die Körper sind elastisch und dadurch verformbar, jedoch dürfen sie sich nicht durchdringen. Sie sollen voneinander abprallen oder auf den Oberflächen entlangrutschen. Das Entlangrutschen wird durch zwei vereinfachende Ansätze modelliert. Eine Annahme ist, dass die Körper reibungsfrei rutschen. Im erweiterten Ansatz soll in Tangentialrichtung das Trescasche Reibungsgesetz gelten.

Ein Körper soll zur einfacheren Darstellung als starrer Untergrund angenommen werden. Aus angenommenen Symmetriegründen reicht eine Modellformulierung in der Ebene, siehe Abbildung 1.1.

Die Feldgleichungen, die die Verschiebung der Körper und deren Spannungsverteilungen innerhalb erklären, werden im nächsten Abschnitt beschrieben. Danach folgen die hyperelastischen Materialgesetze, die die Zusammenhänge zwischen den Spannungen und den Verzerrungen der Körper definieren, siehe [2] und [13].

Die Nichtdurchdringungsbedingung oder die normale Kontaktbedingung, welche das Ineinanderdringen der Körper verhindert, wird in weiterer Folge hergeleitet. Zusätzlich werden die Reibungsgesetze, die in dieser Masterarbeit Verwendung finden, mitangegeben.

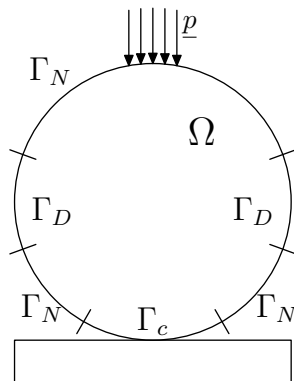


Abbildung 1.1: Elastischer Zylinder auf einer starren Platte

1.1 Elastomechanische Grundgleichungen

Der elastische Körper in der Anfangs- oder Referenzkonfiguration wird mit einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, bezeichnet. Der Rand des Körpers Ω

wird mit $\Gamma = \partial\Omega$ erklärt, der jedoch in drei offene disjunkte Teilmengen Γ_D, Γ_N und Γ_c aufgespalten wird, so dass $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_c$ gilt. Die Menge Γ_D soll kompakt in $\Gamma \setminus \bar{\Gamma}_c$ eingebettet sein. Das heißt, dass sich die Teiltränder $\bar{\Gamma}_D$ und $\bar{\Gamma}_c$ in keinem Punkt überlappen. Dieser Sachverhalt wird in der Abbildung 1.1 anhand des in dieser Arbeit verwendeten geometrischen Modells illustriert. Ein Neumannrand Γ_N trennt die anderen beiden Teiltränder. Wenn in weiterer Folge eine instationäre Problemstellung betrachtet wird, so gilt für das Zeitintervall $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$ mit $T > 0$.

Die Deformation

$$\underline{\varphi} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \Omega \times [0, T] \ni (\underline{x}, t) \mapsto \underline{\varphi}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^d,$$

beinhaltet die möglichen Bewegungen des elastischen Körpers unter den vorgegebenen Volumen- und Oberflächenkräften. Das heißt, $\underline{\varphi}(\underline{x}, t)$ ist die Deformation unter der momentanen Konfiguration zum Zeitpunkt t . Der Vektor \underline{x} bezeichnet den Positionspunkt in der Referenzkonfiguration. Zusätzlich wird die Verschiebung

$$\underline{u}(\underline{x}, t) := \underline{\varphi}(\underline{x}, t) - \underline{x} \quad (1.1)$$

eingeführt. Der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} := \nabla \underline{\varphi} = (\varphi_{k,l})_{1 \leq k, l \leq d}, \quad \varphi_{k,l} := \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}, \quad (1.2)$$

definiert den rechten Cauchyschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{C} := (\mathbf{F})^\top \mathbf{F} = (\nabla \underline{\varphi})^\top \nabla \underline{\varphi},$$

und besitzt die Jacobi-Determinante

$$J := \det(\mathbf{F}),$$

vergleiche für die letzten drei Definitionen [21]. Dieser führt auf den Green-Saint Venant Verzerrungstensor, siehe [9],

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - Id_d) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^\top + (\nabla \underline{u})^\top \nabla \underline{u}), \quad (1.3)$$

wobei Id_d den Einheitstensor in $\mathbb{R}^{d \times d}$ bezeichnet. Wenn nur starre Körperbewegungen stattfinden, gilt $\mathbf{C} = Id_d$ und $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ [9]. Ein zugehöriger Verzerrungstensor in der Momentankonfiguration lautet nach [21]

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(Id_d - \mathbf{b}^{-1}). \quad (1.4)$$

Dieser Almansi Verzerrungstensor ist durch den linken Cauchy-Green Verzerrungstensor $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\top$ definiert. Für \mathbf{E} aus (1.3) gilt mit (1.4) der Zusammenhang

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^\top \mathbf{e}\mathbf{F}. \quad (1.5)$$

Dies ist die Pull-Back Operation von der Momentankonfiguration zurück zur Referenzkonfiguration. In der linearen Elastizitätstheorie gilt [19]

$$E_{ij}(\underline{\mathbf{u}}) \equiv \varepsilon_{ij}(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.6)$$

Dies ist durch die Voraussetzungen $u_i \ll 1$ und $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$, $i, j = 1, \dots, d$, gegeben. Mit der Annahme, dass zwischen Referenz- und Momentankonfiguration nicht unterschieden wird, gilt $\mathbf{F} \approx Id_d$ und ist $J \approx 1$.

Nach der Definition der Verzerrungstensoren werden jetzt jene Bewegungsgleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Spannungen des Körpers Ω und der Volumen- und Oberflächenkräfte beinhalten, angegeben. Der momentane Positionspunkt lautet $\underline{\mathbf{y}} := \underline{\varphi}(\underline{\mathbf{x}}, t)$. Die Volumenkräfte in der momentanen Konfiguration werden mit $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\mathbf{y}})$ und die Oberflächenkräfte werden mit $\tilde{\underline{\mathbf{p}}}(\underline{\mathbf{y}})$ bezeichnet. Die momentane Dichte $\tilde{\varrho}(\underline{\mathbf{y}})$ muss in den Bewegungsgleichungen genau so berücksichtigt werden, wie der Cauchysche Spannungsvektor $\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{y}})$. Dieser kann durch den symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{y}})$ wie folgt beschrieben werden, [2],

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{y}}) = \tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{y}})\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{y}}), \quad \underline{\mathbf{y}} \in \underline{\varphi}(\Omega, t).$$

Dabei bezeichnet $\underline{\mathbf{n}}$ den äußeren Normalenvektor auf einem beliebigen Kontrollvolumen innerhalb des elastischen Körpers. Die Spannungen am Teilrand Γ_N können auch durch die Druckverteilung an der Oberfläche erklärt werden, das heißt

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{y}}) = \tilde{\underline{\mathbf{p}}}(\underline{\mathbf{y}}), \quad \underline{\mathbf{y}} \in \underline{\varphi}(\Gamma_N, t).$$

Die Bewegungsgleichungen in der momentanen Konfiguration [2, 9, 21] lauten

$$\tilde{\varrho}(\underline{\mathbf{y}})\ddot{\underline{\mathbf{y}}} - \operatorname{div}^{\underline{\mathbf{y}}} \tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{y}}) = \tilde{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\mathbf{y}}), \quad \underline{\mathbf{y}} \in \underline{\varphi}(\Omega, t), \quad (1.7a)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{y}})\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{y}}) = \tilde{\underline{\mathbf{p}}}(\underline{\mathbf{y}}), \quad \underline{\mathbf{y}} \in \underline{\varphi}(\Gamma_N, t), \quad (1.7b)$$

wobei $\operatorname{div}^{\underline{\mathbf{y}}}$ der Divergenzoperator in Abhängigkeit der momentanen Position $\underline{\mathbf{y}}$ ist. Wenn die Bewegungsgleichungen (1.7) in der Referenzkonfiguration formuliert werden sollen, müssen Variablentransformationen eingeführt werden. Daher wird der erste Piola-Kirchhoff Verzerrungstensor

$$\mathbf{P}(\underline{\mathbf{x}}, t) := J(\underline{\mathbf{x}}, t)\mathbf{T}(\underline{\mathbf{x}}, t)\mathbf{F}^{-\top}(\underline{\mathbf{x}}, t),$$

wobei der Zusammenhang

$$\mathbf{T}(\underline{\mathbf{x}}, t) := \tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{y}}) = \tilde{\mathbf{T}}(\underline{\varphi}(\underline{\mathbf{x}}, t))$$

gilt, und der zweite Piola-Kirchhoff Verzerrungstensor

$$\mathbf{S}(\underline{\mathbf{x}}, t) := \mathbf{F}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, t)\mathbf{P}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (1.8)$$

eingeführt [21]. Da der Tensor \mathbf{T} symmetrisch ist, besitzt \mathbf{S} die gleiche Eigenschaft. Die Gleichung (1.8) beschreibt auch die Pull-Back Operation für den Spannungstensor. Die Volumenkräfte \underline{f} und die Oberflächenkräfte \underline{p} in Abhängigkeit der Referenzkonfiguration sind durch

$$\begin{aligned}\underline{f}(\underline{x}, t) &:= J(\underline{x}, t) \tilde{\underline{f}}(\varphi(\underline{x}, t)), \\ \underline{p}(\underline{x}, t) &:= J(\underline{x}, t) \|\mathbf{F}^{-\top}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t)\| \tilde{\underline{p}}(\varphi(\underline{x}, t))\end{aligned}\quad (1.9)$$

definiert [9]. $\underline{n}(\underline{x}, t)$ ist der äußere Normalenvektor der Referenzkonfiguration Ω im Punkt \underline{x} zum Zeitpunkt t und $\|\cdot\|$ ist die Euklidische Norm in \mathbb{R}^d . Mit der Referenzdichte $\varrho(\underline{x}, t)$ und der Relation $\underline{\ddot{u}} = \underline{\ddot{y}}$, folgend aus (1.1), lautet das Anfangsrandwertproblem des betrachteten Modells [9]

$$\varrho(\underline{x}, t) \underline{\ddot{u}}(\underline{x}, t) - \operatorname{div} \mathbf{P}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}, t), \quad (\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{P}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{p}(\underline{x}, t), \quad (\underline{x}, t) \in \Gamma_N \times [0, T], \quad (1.10b)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}_D(\underline{x}, t), \quad (\underline{x}, t) \in \Gamma_D \times [0, T], \quad (1.10c)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (1.10d)$$

$$\underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (1.10e)$$

Die Gleichung (1.10c) beschreibt die Dirichlet-Randbedingungen und (1.10d) und (1.10e) sind die Anfangsbedingungen mit der Anfangsgeschwindigkeit \underline{v}_0 .

In der linearen Elastizitätstheorie setzt man $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) \approx \mathbf{T}(\underline{x}, t)$ wegen $J(\underline{x}, t) \approx 1$ und $\mathbf{F} \approx Id_d$. Damit wird die Gleichung (1.10) zu

$$\varrho(\underline{x}, t) \underline{\ddot{u}}(\underline{x}, t) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}, t), \quad (\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.11a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{p}(\underline{x}, t), \quad (\underline{x}, t) \in \Gamma_N \times [0, T], \quad (1.11b)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}_D(\underline{x}, t), \quad (\underline{x}, t) \in \Gamma_D \times [0, T], \quad (1.11c)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (1.11d)$$

$$\underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0, \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (1.11e)$$

1.2 Materialgesetze

Die gleiche Geometrie und Belastung eines Körpers Ω rufen bei unterschiedlichen Materialien andere Spannungs- und Verschiebungszustände hervor. Um das Materialverhalten zu charakterisieren, werden konstitutive Beziehungen oder Materialgleichungen eingeführt. Sie stellen einen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen her. Dadurch vervollständigen sie die Feldgleichungen.

In der Materialtheorie werden vier physikalische Annahmen oder Prinzipien vorausgesetzt [18]. Im Prinzip des Determinismus wird der aktuelle Zustand eines Kontinuums durch die aktuelle Beanspruchung und die gesamte Vergangenheit charakterisiert. Die abhängigen Zustandsvariablen werden durch die Vorgeschichte der unabhängigen Variablen des Körpers bestimmt.

Im Prinzip der lokalen Wirkung werden die konstitutiven Variablen durch eine differentiell nahe Umgebung beeinflusst. Die konstitutiven Gleichungen sind dann lokal formuliert, deren Größen und ihre Ableitungen erster Ordnung nach dem Ort bekannt sein müssen.

Im Prinzip der materiellen Objektivität dürfen die Wahl des Bezugssystems und die Bewegungen eines Beobachters die Eigenschaften des Materials nicht beeinflussen. Die Materialgleichungen müssen gegenüber konstanten Zeitverschiebungen, Starrkörpertranslationen und -rotationen invariant sein.

Im Prinzip der physikalischen Konsistenz müssen die Materialgesetze den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen.

1.2.1 Verzerrungs- und Spannungstensoren in der Referenzkonfiguration

Es werden Materialgesetze mit den oben genannten Prinzipien benötigt, die einen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor \mathbf{S} aus (1.8), dem Deformationsgradienten \mathbf{F} aus (1.2) und dem Verzerrungstensor \mathbf{E} aus (1.3) herstellen. Im nächsten Abschnitt wird in der Referenzkonfiguration das Hookesche Gesetz der linearen Elastizität hergeleitet. Auf die Darstellung in der Momentankonfiguration wird verzichtet, da in den linearisierten Modellen, die nur infinitesimale Verschiebungen zulassen, die Bewegungen zu verschiedenen Zeitpunkten in der Referenzkonfiguration beschreibbar bleiben. Schränkt man auf elastische Materialien ein, sucht man eine eindeutige Zuweisung der aktuellen abhängigen Zustandsvariablen zu den aktuellen unabhängigen [18]. Das heißt, der Be- und Entlastungsvorgang eines elastischen Materials ist reversibel. Ein Zusammenhang der Energiefunktion \tilde{W} und \mathbf{S} existiert, wenn die Betrachtung auf hyperelastische Materialien beschränkt wird. Denn in diesem Fall kann durch die Energiefunktion \tilde{W} auch die Gleichung des Spannungstensors \mathbf{S} abgeleitet werden. Bei zusätzlich homogenen Materialien hängt die Energiefunktion \tilde{W} nur noch von \mathbf{F} ab. Aufgrund des Prinzips der materiellen Objektivität kann eine äquivalente Energiefunktion W oder \widehat{W} gefunden werden, die nur von \mathbf{C} oder \mathbf{E} bestimmt wird. Der Spannungstensor \mathbf{S} kann daher nur implizit von den Ortskoordinaten abhängen und wird durch komponentenweiser Ableitungen der Energiefunktion W oder \widehat{W} nach \mathbf{C} oder \mathbf{E} beschrieben. Das heißt, dass nach [13] gilt,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \mathbf{E}}, \\ S_{AB} &= 2 \frac{\partial W}{\partial C_{AB}} \quad \text{oder} \quad S_{AB} = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial E_{AB}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

In dieser Arbeit werden lineare homogene hyperelastische isotrope Materialien verwendet. Isotropie bedeutet, dass die Eigenschaften des Materials richtungsunabhängig sind. Das liefert

$$W(\mathbf{CQ}) = W(\mathbf{C}),$$

wobei \mathbf{Q} eine orthonormale Transformationsmatrix ist. Die Energiefunktion aus (1.12) hängt von den drei Invarianten des rechten Cauchyschen Verzerrungstensors ab,

$$I_C := \operatorname{tr}(\mathbf{C}), \quad II_C := \frac{1}{2}((\operatorname{tr}(\mathbf{C}))^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{C}^2)), \quad III_C := \det(\mathbf{C}) = J^2.$$

Diese lautet nun [21]

$$W(\mathbf{C}) = W(I_C, II_C, III_C). \quad (1.13)$$

Die Gleichung (1.12) ist der Startpunkt für die Betrachtungen der linearen Elastizität. Berücksichtigt man die Gleichung (1.13), so liefert eine Taylorreihenentwicklung das lineare Hookesche Gesetz.

1.2.2 Lineare Elastizität

Die Linearisierung der Energiefunktion \widehat{W} in Abhängigkeit des Verzerrungstensors \mathbf{E} führt auf das verallgemeinerte lineare Hookesche Gesetz [6]. Die Taylorreihenentwicklung der Energiefunktion liefert

$$\widehat{W}(\mathbf{E}) = \widehat{W}_0 + S_{ij}^0 E_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \dots, \quad (1.14)$$

dabei gilt für ein homogenes hyperelastisches Material

$$C_{ijkl} := \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}}.$$

Setzt man die Taylorreihenentwicklung (1.14) in (1.12), dazu benötigt man die komponentenweise definierte partielle Ableitung von \widehat{W} nach \mathbf{E} , zur Bestimmung von \mathbf{S} ein und vernachlässigt Terme zweiter und höherer Ordnung der Taylorreihenentwicklung, führt das auf

$$S_{ij} = S_{ij}^0 + C_{ijkl} E_{kl} \quad (1.15)$$

in der Indexnotation. S_{ij}^0 sind die Spannungen im nicht verzerrten Zustand. Hier werden die Spannungen S_{ij}^0 Null gesetzt, das heißt man betrachtet einen spannungsfreien Zustand in der Referenzkonfiguration. Das verallgemeinerte lineare Hookesche Gesetz lautet

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (1.16)$$

und in der kompakten Schreibweise

$$\mathbf{S} = \mathcal{C}[\mathbf{E}].$$

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors \mathbf{S} gilt $C_{ijkl} = C_{jikl}$. Wegen der Symmetrie des Verzerrungstensors \mathbf{E} interessiert komponentenweise nur das Produkt mit der

Summe $\mathcal{C}_{ijkl} + \mathcal{C}_{ijlk}$. Somit kann ein homogenes elastisches Material mit 36 Komponenten des Materialtensors beschrieben werden. Ist weiter das Material hyperelastisch, gilt $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$ und der Materialtensor hat nur noch 21 verschiedene Komponenten. Damit lautet das lineare Hookesche Gesetz in Matrixnotation

$$\underline{\underline{S}} := \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{E}} := \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

und kompakt

$$\underline{\underline{S}} = \mathbf{D}\underline{\underline{E}}. \quad (1.18)$$

Ist ein homogenes hyperelastisches Material zusätzlich isotrop, ist die Energiefunktion nur noch von den Invarianten abhängig. Nach der Taylorreihenentwicklung und komponentenweiser partieller Differentiation nach \mathbf{E} ist das verallgemeinerte lineare Hookesche Gesetz durch zwei unabhängige Konstanten erklärbar. Die beiden Materialparameter werden auch die Laméschen Konstanten genannt [19]. Der Materialtensor lautet daher

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.19)$$

und das lineare Hookesche Gesetz für isotrope Materialien schreibt sich in der Indexnotation

$$S_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij}. \quad (1.20)$$

Die Elastizitätsmatrix lautet

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Wenn die Energiefunktion über den rechten Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} definiert ist, kann wegen des Zusammenhanges $\mathbf{C} = Id_d - 2\mathbf{E}$, vergleiche (1.3), wieder ein Spannungs-Verzerrungsverhältnis angegeben werden, das vom Green-Saint-Venant Tensor \mathbf{E} abhängt.

In der linearen Elastizitätstheorie werden \mathbf{S} durch $\boldsymbol{\sigma}$ aus (1.11) und \mathbf{E} durch $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus (1.6) ersetzt. Dadurch gilt für (1.20)

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}.$$

Das ist das lineare Hookesche Gesetz der linearen Elastizitätstheorie. Dieses lautet in der kompakten Schreibweise

$$\boldsymbol{\sigma} := \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) Id_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.22)$$

und für den Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus (1.6)

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2}(\nabla \underline{\mathbf{u}} + (\nabla \underline{\mathbf{u}})^\top). \quad (1.23)$$

Im zweidimensionalen Fall in der Ebene gibt es zwei Modellansätze: den ebenen Verzerrungs- und den ebenen Spannungszustand [19]. Der Erstgenannte wird hier in dieser Arbeit eingesetzt.

Im Modell des ebenen Verzerrungszustandes hängen die Komponenten von $\boldsymbol{\varepsilon}$ von zwei Ortskoordinaten ab, und es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\underline{\mathbf{u}}, x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{ij}(\underline{\mathbf{u}}, x_1, x_2) \text{ für } i, j = 1, 2, \\ \varepsilon_{i3}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{x}}) &= \varepsilon_{3i}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{x}}) = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Das Hookesche Gesetz wird zu

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{u}}) &= \lambda \delta_{ij}(\varepsilon_{11}(\underline{\mathbf{u}}) + \varepsilon_{22}(\underline{\mathbf{u}})) + 2\mu \varepsilon_{ij}(\underline{\mathbf{u}}) \text{ für } i, j = 1, 2, \\ \sigma_{i3}(\underline{\mathbf{u}}) &= \sigma_{3i}(\underline{\mathbf{u}}) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \\ \sigma_{33}(\underline{\mathbf{u}}) &= \lambda(\varepsilon_{11}(\underline{\mathbf{u}}) + \varepsilon_{22}(\underline{\mathbf{u}})). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Die Laméschen Konstanten sind durch das Elastizitätsmodul $E > 0$ und die Querkontraktionszahl (Poissonzahl) $\nu \in (0, \frac{1}{2})$

$$\lambda := \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu := \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.25)$$

gegeben. Gelte der ebene Spannungszustand, so werden

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{u}}, x_1, x_2, x_3) &= \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{u}}, x_1, x_2) \text{ für } i, j = 1, 2, \\ \sigma_{i3}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{x}}) &= \sigma_{3i}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{x}}) = 0 \text{ für } i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

verwendet. Dadurch vereinfachen sich die Verzerrungen zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3}(\underline{\mathbf{u}}) &= \varepsilon_{3i}(\underline{\mathbf{u}}) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \\ \varepsilon_{33}(\underline{\mathbf{u}}) &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}(\underline{\mathbf{u}}) + \sigma_{22}(\underline{\mathbf{u}})). \end{aligned}$$

Ansonsten gilt (1.24) mit $\sigma_{33} = 0$ und (1.25) mit

$$\lambda := \frac{E\nu}{(1-\nu^2)}, \quad \mu := \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

1.3 Kontaktbedingung

Im bisher betrachteten Modell fehlt noch die Kontaktbedingung auf dem Rand Γ_c , wenn der Körper Ω auf den starren Untergrund trifft. Dabei werden Nichtdurchdringungs- und Reibungskontaktbedingungen benötigt. Die Reibungskontaktbedingung muss auf dem Kontaktrand Γ_c zwei Zustände beschreiben können. In einem haftet und in dem anderen rutscht der Körper, wenn dieser den starren berührt. Zur Beschreibung dieser Bedingung soll das Coulombsche Reibungsgesetz verwendet werden, welches einen Reibungskoeffizienten beinhaltet, der darüber entscheidet, ob ein Punkt des elastischen Körpers rutscht oder haftet. Eine Vereinfachung stellt das Trescasche Reibungsgesetz dar, welches a priori gegebene Reibungskoeffizienten voraussetzt, siehe [4]. Begonnen wird mit der Herleitung der Nichtdurchdringungsbedingung und der notwendigen Zerlegung des Kontaktdrucks, der Verschiebung und der Abstandsfunktion in einen Anteil der Normalenrichtung und der Tangentialrichtung.

1.3.1 Normalkontakt

Für einen Punkt $\underline{x} \in \Gamma_c$ in der Referenzkonfiguration soll die kinematische Normalkontaktbedingung formuliert werden. Dafür wird eine Abbildung R_t

$$\begin{aligned} R_t : \Gamma_c &\rightarrow s; \underline{x} \mapsto R_t(\underline{x}), \text{ für } d = 2, \\ R_t : \Gamma_c &\rightarrow (s, r); \underline{x} \mapsto R_t(\underline{x}), \text{ für } d = 3, \end{aligned}$$

für jedes $t \in [0, T]$ eingeführt, die einen Zusammenhang der Punkte des Kontaktrandes Γ_c zum starren Untergrund $\underline{\Psi}$ erklärt, wobei

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(s) &:= \begin{pmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ für } d = 2, \\ \underline{\Psi}(s, r) &:= \begin{pmatrix} \Psi_1(s, r) \\ \Psi_2(s, r) \\ \Psi_3(s, r) \end{pmatrix}, \quad s, r \in [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ für } d = 3, \end{aligned}$$

eine parametrische Vektorfunktion ist. Der Punkt in der momentanen Konfiguration

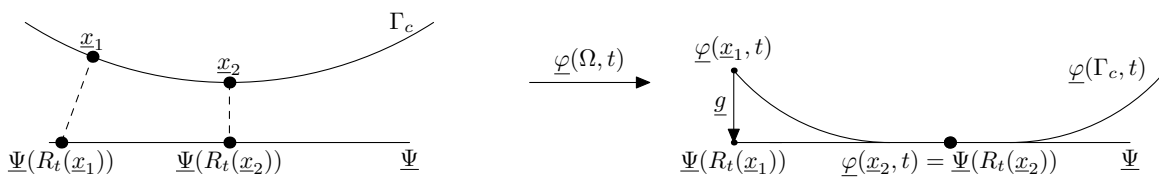


Abbildung 1.2: Zuweisung der Parameter durch R_t beim Normalkontakt

$\underline{\varphi}(\underline{x}, t) := \underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \in \underline{\varphi}(\Gamma_c, t)$ berührt $\underline{\Psi}$ oder diesem wird ein Punkt von $\underline{\Psi}$ zugeordnet, so dass der minimale Normalabstand zwischen $\underline{\varphi}(\underline{x}, t)$ und $\underline{\Psi}$ angenommen wird. In der Abbildung 1.2 sieht man diesen Vorgang. Entweder ein Berührungspunkt $\underline{\varphi}(\underline{x}, t) =$

$\underline{\Psi}(R_t(\underline{x}))$ oder ein Punkt $\underline{\Psi}(R_t(\underline{x}))$ der Vektorfunktion, der durch den minimalen Normalabstand wie oben charakterisiert wird, kann jedem Punkt $\underline{\varphi}(\underline{x}, t) \in \underline{\varphi}(\Gamma_c, t)$ und somit jedem zugehörigen $\underline{x} \in \Gamma_c$ zugewiesen werden. Das heißt, wenn für R_t Wohldefiniertheit vorausgesetzt wird, können zu jedem Punkt $\underline{x} \in \Gamma_c$ und zu jedem Zeitpunkt t die Parameterwerte von $\underline{\Psi}$ aus der Momentankonfiguration zugewiesen werden, so dass $s = R_t(\underline{x})$ oder $(s, r) = R_t(\underline{x})$ für alle $t \in [0, T]$ gilt.

Sei $\underline{n}(\underline{x}, t) := \underline{n}(\underline{\Psi}(R_t(\underline{x})), t)$ der äußere Normalenvektor von $\underline{\Psi}$ in der momentanen Konfiguration $\underline{\varphi}(\Gamma_c, t)$, der dem Punkt $\underline{x} \in \Gamma_c$ in der Referenzkonfiguration zugeordnet ist und in die Richtung des elastischen Körpers Ω zeigt. Dann ist die momentane Abstandsvektorfunktion \underline{g} in einem Punkt $\underline{x} \in \Gamma_c$ zum Zeitpunkt t

$$\underline{g}(\underline{x}, t) := \left(\underline{\Psi}(R_t(\underline{x})) - \underline{\varphi}(\underline{x}, t) \right). \quad (1.26)$$

In der Abbildung 1.2 ist \underline{g} in die Normalenrichtung richtig eingezeichnet, nämlich senkrecht auf die starre Platte. Die Euklidische Norm liefert den minimalen Normalabstand. Die Abstandsvektorfunktion $\underline{g}(\underline{x}, t)$ wird in die Normal- und Tangentialkomponenten

$$g_n(\underline{x}, t) := \underline{g}(\underline{x}, t)\underline{n}(\underline{x}, t), \quad \underline{g}_\tau(\underline{x}, t) := \underline{g}(\underline{x}, t) - g_n(\underline{x}, t)\underline{n}(\underline{x}, t), \quad (1.27)$$

zerlegt. Für den momentanen Normalabstand g_n gilt

$$g_n(\underline{x}, t) \leq 0, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.28)$$

siehe Abbildung 1.3. Die Bedingung (1.28) wird auch Nichtdurchdringungsbedingung

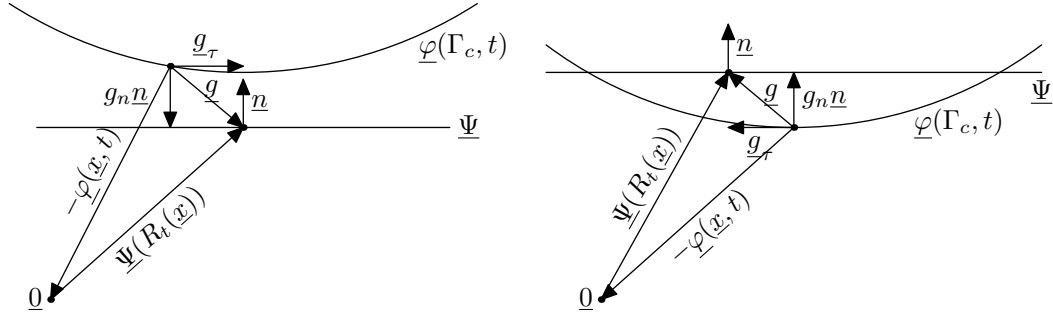
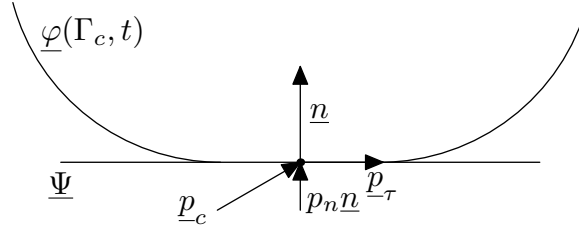


Abbildung 1.3: Zerlegung der Abstandsvektorfunktion \underline{g}

genannt. Diese Nichtdurchdringungsbedingung beschränkt die Abstandsfunktion auf negative Werte. Wenn die Normalabstandsfunktion auch positive Werte annehmen könnte, würde sich die Orientierung des Richtungsvektors (1.26) ändern, der durch die Ortsvektoren eines Körperpunktes $\underline{\varphi}(\underline{x}, t)$ und eines Punktes des Untergrundes $\underline{\Psi}(R_t(\underline{x}))$ berechnet wird. Das heißt, der elastische Körper würde in den starren Untergrund eindringen, wenn $g_n \underline{n}$ und \underline{n} mit der gleichen Orientierung parallel sind. Umgekehrt kann der Körper Ω das nicht, wenn $g_n \underline{n}$ und \underline{n} antiparallel sind, vergleiche Abbildung 1.3 links. Daher soll in diesem Modell die Gleichung (1.28) gelten. Auf $\underline{\varphi}(\Gamma_c, t)$ herrscht aber der momentane Kontaktdruck \underline{p}_c . Dieser wird auch in eine

Abbildung 1.4: Zerlegung des Kontaktdruckes \underline{p}_c

Normal- und eine Tangentialkomponente zerlegt,

$$p_n(\underline{x}, t) := \underline{p}_c(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t), \quad \underline{p}_\tau(\underline{x}, t) := \underline{p}_c(\underline{x}, t) - p_n(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t). \quad (1.29)$$

Damit lautet die Normalkontaktbedingung in der Momentankonfiguration

$$g_n(\underline{x}, t) \leq 0, \quad p_n(\underline{x}, t) \geq 0, \quad g_n(\underline{x}, t) p_n(\underline{x}, t) = 0. \quad (1.30)$$

Diese konstitutive Gleichung (1.30) beinhaltet die Nichtdurchdringungsbedingung als erste Ungleichung. In der zweiten Ungleichung wirkt ein Druck \underline{p}_c von außen auf den elastischen Körper und kein durch andere Kräfte, zum Beispiel Kohäsion, hervorgerufener. In (1.30) wird der Normaldruck p_n in die Richtung von \underline{n} berücksichtigt. Dieser kann nur mit der gleichen Orientierung des Normalenvektors \underline{n} zu diesem parallel sein, siehe Abbildung 1.4. Daraus folgt die zweite Bedingung $p_n(\underline{x}, t) \geq 0$. Die dritte Gleichung aus (1.30) besagt noch, dass ein Kontaktdruck nur bei Berührung des starren Untergrunds größer Null sein kann. Sonst herrscht kein Druck vor und der elastische Körper kann sich frei bewegen, solange er den starren Untergrund nicht berührt.

Wenn man kleine Deformationen betrachtet, wird die Bedingung (1.30) linearisiert. Eine vollständige mathematische Herleitung dazu findet man in [10]. Dabei ändert sich der Normalenvektor \underline{n} nicht mit der nächsten momentanen Konfiguration. Denn bei kleinen Deformationen wird als Näherung die Normal- und Tangentialrichtung der Zerlegungen nicht geändert. Das heißt, die Zerlegung in die Normalkomponente und den Tangentialvektor erfolgt über $\underline{n}(\underline{x}) := \underline{n}(\underline{\Psi}(R_0(\underline{x})))$ der Referenzkonfiguration im Punkt $\underline{x} \in \Gamma_c$. Der Referenzkontaktdruck \underline{p}_{0c} , der auf den Teilrand Γ_c wirkt, hängt mit dem momentanen Druck \underline{p}_c durch (1.9) wie folgt

$$\underline{p}_{0c}(\underline{x}, t) := J(\underline{x}, t) \|\mathbf{F}^{-\top}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x})\| \underline{p}_c(\underline{\varphi}(\underline{x}, t)) \quad (1.31)$$

zusammen. Dieser Druck \underline{p}_{0c} wird in der Beschreibung der linearisierten Normalkontaktbedingung (1.30) verwendet. Die Zerlegung in Normal- und Tangentialkomponenten erfolgt über

$$p_n(\underline{x}, t) := \underline{p}_{0c}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}), \quad \underline{p}_\tau(\underline{x}, t) := \underline{p}_{0c}(\underline{x}, t) - p_n(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}). \quad (1.32)$$

Es gilt die Definition aus (1.26). Der Anfangsabstand $g_{0n}(\underline{x})$ sei durch $R_0(\underline{x})$ mit

$$g_{0n}(\underline{x}) := \|\underline{x} - \underline{\Psi}(R_0(\underline{x}))\| = -\left(\underline{\Psi}(R_0(\underline{x})) - \underline{x}\right) \underline{n}(\underline{x})$$

definiert. Mit $\underline{\varphi}(\underline{x}, t) = \underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t)$ wird (1.30) zu

$$-u_n(\underline{x}, t) \leq g_{0n}(\underline{x}), \quad p_n(\underline{x}, t) \geq 0, \quad p_n(\underline{x}, t) \left(-u_n(\underline{x}, t) - g_{0n}(\underline{x}) \right) = 0. \quad (1.33)$$

Die Zerlegung der Verschiebung \underline{u} auf Γ_c lautet

$$u_n(\underline{x}, t) := \underline{u}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}), \quad \underline{u}_\tau(\underline{x}, t) := \underline{u}(\underline{x}, t) - u_n(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}). \quad (1.34)$$

Für den stationären Fall sei \widehat{R} die Abbildung von \underline{x} auf $\underline{\Psi}$, bestimmt durch den minimalen Abstand von $\underline{\varphi}(\underline{x})$ in der Endkonfiguration auf $\underline{\Psi}$ und $\underline{n}(\underline{x}) := \underline{n}(\underline{\Psi}(\widehat{R}(\underline{x})))$. Mit $\underline{\varphi}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{u}(\underline{x})$ werden (1.30) zu

$$g_n(\underline{x}) \leq 0, \quad p_n(\underline{x}) \geq 0, \quad g_n(\underline{x}) p_n(\underline{x}) = 0 \quad (1.35)$$

und im Fall kleiner Deformationen die linearisierten Bedingungen (1.33) zu

$$-u_n(\underline{x}) \leq g_{0n}(\underline{x}), \quad p_n(\underline{x}) \geq 0, \quad p_n(\underline{x}) \left(-u_n(\underline{x}) - g_{0n}(\underline{x}) \right) = 0. \quad (1.36)$$

1.3.2 Tangentialkontakt

Hier müssen zwei Zustände betrachtet werden. Der Haftzustand zwingt den Körper in einem Punkt dazu, dass dieser sich dort nicht in tangentialer Richtung bewegen kann, wenn dieser den Untergrund berührt. Im Rutschzustand kann der Körper jedoch genau dieses.

Für die tangentiale Kontaktbedingung gilt mit dem Coulombschen Reibungsgesetz und dem Reibungskoeffizienten $\nu_R \in \mathbb{R}_0^+$, [9, 21],

$$\begin{aligned} \|\underline{p}_\tau(\underline{x}, t)\| &\leq \nu_R |p_n(\underline{x}, t)|, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x}, t)\| < \nu_R |p_n(\underline{x}, t)| &\Rightarrow \underline{\dot{g}}_\tau(\underline{x}, t) = \underline{0}, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x}, t)\| = \nu_R |p_n(\underline{x}, t)| &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{p}_\tau(\underline{x}, t) = \alpha^2 \underline{\dot{g}}_\tau(\underline{x}, t). \end{aligned} \quad (1.37)$$

In Gleichung (1.37) gilt die Zerlegung (1.29) des momentanen Kontaktdrucks \underline{p}_c . Die Haftbedingung gilt mit der Zerlegung (1.27) und $\underline{\dot{g}}_\tau$ ist das totale Differenzial nach der Zeitvariable t . Das bedeutet, dass ein Massenpunkt $\underline{x} \in \Gamma_c$ keine tangentiale Geschwindigkeit aufnimmt, wenn er den starren Untergrund berührt. Somit findet auch keine Verschiebung des Massenpunktes statt, das heißt $\underline{g}_\tau = \underline{0}$. Die dritte Zeile beschreibt die Rutschbedingung. Sie setzt die Richtung und Orientierung fest, in die $\underline{\dot{g}}_\tau$ zeigen soll, wenn der tangentialer Anteil des Kontaktdrucks \underline{p}_c bekannt ist. Eine äquivalente Formulierung von (1.37) lautet nach [9]

$$\|\underline{p}_\tau\| \leq \nu_R |p_n|, \quad \underline{p}_\tau = \alpha^2 \underline{\dot{g}}_\tau, \quad \|\underline{\dot{g}}_\tau\| (\|\underline{p}_\tau\| - \nu_R |p_n|) = 0. \quad (1.38)$$

Das Coulombsche Reibungsgesetz lautet im linearisierten Fall

$$\begin{aligned} \|\underline{p}_\tau(\underline{x}, t)\| &\leq \nu_R |p_n(\underline{x}, t)|, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x}, t)\| < \nu_R |p_n(\underline{x}, t)| &\Rightarrow \underline{\dot{u}}_\tau(\underline{x}, t) = \underline{0}, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x}, t)\| = \nu_R |p_n(\underline{x}, t)| &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{p}_\tau(\underline{x}, t) = \alpha^2 \underline{\dot{u}}_\tau(\underline{x}, t). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Das heißt, die Normal- und Tangentialrichtungen ändern sich nicht [21]. Für den hier eingesetzten Referenzkontaktstress \underline{p}_{0c} mit der Zerlegung (1.32) und dem totalen Differential nach t der Verschiebung \underline{u} mit der Zerlegung (1.34) beschreibt die konstitutive Gleichung (1.39) einen Zusammenhang des Referenzkontaktstresses und der Geschwindigkeit einer Verschiebung. Dabei gelten die obigen Erläuterungen zu (1.37).

Im stationären Fall beeinflusst das Coulombsche Gesetz nicht die Geschwindigkeiten in tangentialer Richtung, sondern den tangentialen Anteil der Abstandsfunktion \underline{g} aus (1.26), die Verschiebung \underline{u} aus (1.34) im linearisierten Fall, direkt [10]. Die Gleichung (1.37) wird zu

$$\begin{aligned} \|\underline{p}_\tau(\underline{x})\| &\leq \nu_R |p_n(\underline{x})|, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x})\| < \nu_R |p_n(\underline{x})| &\Rightarrow \underline{g}_\tau(\underline{x}) = \underline{0}, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x})\| = \nu_R |p_n(\underline{x})| &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{p}_\tau(\underline{x}) = \alpha^2 \underline{g}_\tau(\underline{x}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

und (1.39) zu

$$\begin{aligned} \|\underline{p}_\tau(\underline{x})\| &\leq \nu_R |p_n(\underline{x})|, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x})\| < \nu_R |p_n(\underline{x})| &\Rightarrow \underline{u}_\tau(\underline{x}) = \underline{0}, \\ \|\underline{p}_\tau(\underline{x})\| = \nu_R |p_n(\underline{x})| &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{p}_\tau(\underline{x}) = \alpha^2 \underline{u}_\tau(\underline{x}). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Dabei gelten die Zerlegungen (1.29) und (1.27) in (1.40). Der Vektor $\underline{n}(\underline{x}, t)$ dieser Zerlegungen wird durch $\underline{n}(\underline{\Psi}(\widehat{R}(\underline{x})))$ der Endkonfiguration und die Zerlegungen (1.32) und (1.34) in (1.41) mit dem Normalenvektor $\underline{n}(\underline{x}) := \underline{n}(\underline{\Psi}(R_0(\underline{x})))$ ersetzt.

1.4 Zusammenfassung der betrachteten Modelle

Das stationäre Signorini-Problem lautet

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) = \underline{f}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (1.42a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) \underline{n}_0(\underline{x}) = \underline{p}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_N, \quad (1.42b)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Gamma_D, \quad (1.42c)$$

$$-u_n(\underline{x}) \leq g_0(\underline{x}), \quad \sigma_n(\underline{u}(\underline{x})) \geq 0, \quad \sigma_n(\underline{u}(\underline{x})) (u_n(\underline{x}) + g_0(\underline{x})) = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.42d)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x}))\| &\leq \nu_R |\sigma_n(\underline{u}(\underline{x}))|, \\ \|\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x}))\| < \nu_R |\sigma_n(\underline{u}(\underline{x}))| &\Rightarrow \underline{u}_\tau(\underline{x}) = \underline{0}, \\ \|\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x}))\| = \nu_R |\sigma_n(\underline{u}(\underline{x}))| &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x})) = \alpha^2 \underline{u}_\tau(\underline{x}) \end{aligned} \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.42e)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) := \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x}))) Id_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x})), \quad (1.42f)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x})) := \frac{1}{2} (\nabla \underline{u}(\underline{x}) + (\nabla \underline{u})^\top(\underline{x})), \quad (1.42g)$$

mit dem Hookeschen Gesetz (1.22), dem Verzerrungstensor (1.23) und den Materialparametern aus (1.25). Die Vorgaben \underline{p} auf dem Neumannrand Γ_N und \underline{p}_c auf dem Kontakttrand Γ_c werden durch den Zusammenhang mit dem Cauchy'schen Spannungstensor

durch $\underline{\sigma}_n$ ersetzt. Damit gilt mit dem Normalenvektor $\underline{n} := \underline{n}(\Psi(R_0(\underline{x})))$ der Referenzkonfiguration $\sigma_n := (\underline{\sigma}_n)\underline{n}$. Für den tangentialen Anteil führt man $\underline{\sigma}_\tau := \underline{\sigma}_n - \sigma_n \underline{n}$ ein. Somit hat man wie für \underline{p}_c in (1.29) eine analoge Zerlegung. Die selbe gilt auch für \underline{u} in (1.42d) und (1.42e). Für den Kontaktrand gelten die linearisierten Bedingungen (1.36) und (1.41), wobei $g_0 := g_{0n}$ gesetzt wird. Für den Neumannrand aus (1.42b) gilt der äußere Normalenvektor $\underline{n}_0(\underline{x})$. Dieser hängt nur von der Oberfläche des Kontinuums ab und unterscheidet sich von \underline{n} des Kontaktrandes Γ_c . Die Bedingung (1.42c) muss wegen des betrachteten spannungsfreien Zustandes der Referenzkonfiguration am Anfang gelten. Die nächsten beiden vereinfachten Modelle sollen später durch Variationsmethoden bearbeitet werden.

1.4.1 Reibungsfreies Signorini-Problem

In (1.42) wird das Reibungsgesetz (1.42e) durch $\underline{\sigma}_\tau = \underline{0}$ ersetzt. Damit lautet das Signorini-Problem

$$- \operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) = \underline{f}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (1.43a)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{x}))\underline{n}_0(\underline{x}) = \underline{p}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_N, \quad (1.43b)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Gamma_D, \quad (1.43c)$$

$$- u_n(\underline{x}) \leq g_0(\underline{x}), \quad \sigma_n(\underline{u}(\underline{x})) \geq 0, \quad \sigma_n(\underline{u}(\underline{x})) (u_n(\underline{x}) + g_0(\underline{x})) = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.43d)$$

$$\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x})) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.43e)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) := \lambda \operatorname{tr}(\underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x}))) Id_d + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x})), \quad (1.43f)$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x})) := \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}(\underline{x}) + (\nabla \underline{u})^\top(\underline{x})). \quad (1.43g)$$

1.4.2 Signorini-Problem mit Trescascher Reibung

Im Fall des Trescaschen Reibungsgesetzes wird $\nu_R |p_n(\underline{x}, t)|$ durch $g_R(\underline{x})$ ersetzt, wobei die nicht negative Funktion $g_R(\cdot) : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}$ a priori gegeben ist [9]. Das Signorini-Problem lautet

$$- \operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) = \underline{f}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (1.44a)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{x}))\underline{n}_0(\underline{x}) = \underline{p}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_N, \quad (1.44b)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Gamma_D, \quad (1.44c)$$

$$- u_n(\underline{x}) \leq g_0(\underline{x}), \quad \sigma_n(\underline{u}(\underline{x})) \geq 0, \quad \sigma_n(\underline{u}(\underline{x})) (u_n(\underline{x}) + g_0(\underline{x})) = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.44d)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x}))\| &\leq g_R, \\ \|\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x}))\| < g_R &\Rightarrow \underline{u}_\tau(\underline{x}) = \underline{0}, \\ \|\underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x}))\| = g_R &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{\sigma}_\tau(\underline{u}(\underline{x})) = \alpha^2 \underline{u}_\tau(\underline{x}) \end{aligned} \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma_c, \quad (1.44e)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{u}(\underline{x})) := \lambda \operatorname{tr}(\underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x}))) Id_d + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x})), \quad (1.44f)$$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{x})) := \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}(\underline{x}) + (\nabla \underline{u})^\top(\underline{x})). \quad (1.44g)$$

Bei der Trescaschen Reibung gibt es einen vierten theoretisch möglichen Zustand. Dieser besitzt die Eigenschaft, dass ein Punkt $\underline{x} \in \Gamma_c$ haften kann, obwohl er den starren Untergrund nicht berührt.

Im Fall finiter Deformationen, die zum Beispiel in [9] und [21] behandelt werden, führt die Einführung der Abbildung $R_t(\underline{x})$ zu einer erheblich schwierigeren Herleitung geeigneter numerischer Lösungsverfahren, da sich die Normal- und Tangentialrichtungen der Zerlegungen in jedem Zeitschritt ändern können. Die Richtungen in dieser Arbeit verhalten sich anders, weil unter den Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie diese für jeden Zeitpunkt durch die Referenzkonfiguration festgelegt sind.

2 Analysis der Modellgleichungen

Die Differentialoperatoren in den Modellen des Kapitels 1.4 sollen so bearbeitet werden, dass sie durch funktionalanalytische Methoden und Begriffe erklärt und katalogisiert werden können. Sie sollen folglich Stetigkeits- und Beschränktheitseigenschaften bestimmter reeller Funktionale

$$F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$$

und Monotoniebedingungen bestimmter zugehöriger Abbildungen

$$A : X \rightarrow X^*$$

eines Funktionenraumes X auf dessen Dualraum X^* erfüllen.

In dieser Arbeit werden die Differentialoperatoren von (1.43) und (1.44) zu Funktionalen umgeformt. Dazu benötigt man einen passenden Funktionenraum, aus dem die Lösung stammen kann. Dieser Funktionenraum hängt von den Voraussetzungen an die Regularität der Modellparameter ab. Ein Funktionenraum, der die nötigen Umformungen zulässt, ist jener der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2(\Omega)$ über ein beschränktes Gebiet Ω und dessen Erweiterung auf die Sobolev-Räume und die dazugehörigen Dualräume.

Auch die Differenzierbarkeit und die benötigten Verallgemeinerungen dieses Begriffs sind essentiell. Denn verallgemeinerte Ableitungen ermöglichen die Charakterisierung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen einer Minimierungsaufgabe im Rahmen der konvexen Analysis, siehe Abschnitt 2.3. Innerhalb dieses Funktionenraumes werden nun speziell konvexe unterhalbstetige (stetig lineare) Funktionale betrachtet, deren Subdifferenziale existieren und für die Variationsformulierung der Modelle (1.43) und (1.44) explizit angegeben werden können. Die konvexe Optimierung aus dem Abschnitt 2.4 liefert dann die Variationsungleichungen der im Kapitel 1.4 angegebenen Modelle. Zum Schluss werden Existenzaussagen zur Lösbarkeit der Funktionale und deren Variationsungleichungen angegeben, die den beiden Modellen zugewiesen werden.

2.1 Funktionenräume

Die Differentialoperatoren des physikalischen Modells werden bekanntlich durch eine Variationsformulierung in Funktionale gewandelt. In dieser Arbeit werden zur Umwandlung die Sobolev-Räume verwendet.

Der Rand Γ des Gebietes Ω muss gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen. In dieser

Arbeit wird der Raum der Hölder-stetigen Funktionen verwendet, um die Regularität zu beschreiben. Dieser Funktionenraum wird $C^{k,\lambda}$ genannt. Das heißt, dass die Funktionen ϕ aus diesem Funktionenraum und deren Ableitungen $D^\alpha\phi$ bis zur Ordnung k , $0 \leq |\alpha| \leq k$, die Hölder-Bedingung erfüllen, vergleiche [10, S. 13, 14]. Dabei soll der Rand Γ nach einer lokalen Koordinatentransformation durch endlich viele Parameterfunktionen f_r beschrieben werden [10, S. 14]. Sind die Funktionen f_r aus $C^{k,\lambda}$, ist das Gebiet Ω aus der Klasse $\mathcal{C}^{k,\lambda}$. Gilt für $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, wird Ω auch Lipschitz-Gebiet genannt.

Bemerkung 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein Lipschitz-Gebiet. Der Rand Γ soll hinreichend glatt sein. Das heißt, $\Gamma \in C^\infty$.

Bevor die in dieser Arbeit relevanten Funktionenräume eingeführt werden können, folgen die Definitionen jener, die zur Festlegung der Sobolev-Räume benötigt werden.

Definition 2.2. [10, S. 14, 15]

1. $C^m(\Omega)$: ist der lineare Raum der Funktionen v mit den Ableitungen $D^\alpha v$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, dessen v und alle $D^\alpha v$ stetig auf Ω sind. m ist eine natürliche Zahl.
2. $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$
3. $C_0^m(\Omega)$: ist der Raum der Funktionen v , die einen kompakten Träger haben, das heißt $\text{supp}(f)$ ist kompakt.
4. $L^2(\Omega)$: ist der Raum der zueinander äquivalenten Klassen der messbaren Funktionen v , die quadratintegrierbar und mit der folgenden Norm ausgestattet sind,

$$\|v\|_0 = \left\{ \int_{\Omega} |v(\underline{x})|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

5. $L^\infty(\Omega)$: ist der Raum der messbaren Funktionen v , die essentiell beschränkt sind, das heißt, ein v ist bis auf das Maß Null beschränkt. Die Norm lautet

$$\|v\|_\infty = \text{ess sup} |v(\underline{x})| \text{ für ein } x \in \Omega.$$

Der Raum $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt,

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} uv \, dx, \tag{2.1}$$

und reellen u und v [1, S. 27]. Der Träger wird in der nächsten Definition festgelegt.

Definition 2.3. [22, S. 202] Der Träger einer reellwertigen Funktion ist

$$\text{supp}(f) := \overline{N(f)}, \quad N(f) := \{x : f(x) \neq 0\}.$$

Sei X ein kompakter topologischer oder ein metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Menge U_α von X eine Funktion f_β mit diesen Eigenschaften,

1. $f_\beta: X \rightarrow [0, 1]$.

2. $\sum_{\beta} f_{\beta}(x) = 1$ für alle $x \in X$.
3. Zu jedem β existiert ein α mit $\text{supp}(f_{\beta}) \subset U_{\alpha}$.
4. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, sodass nur endlich viele f_{β} auf $U(x)$ nicht identisch Null sind.

Handelt es sich um endlich viele U_1, \dots, U_n , dann können f_1, \dots, f_n mit den oben genannten Eigenschaften und $\text{supp}(f_i) \subset U_i, i = 1, \dots, n$, gewählt werden. Das System der Funktionen f_{β} für alle β heißt Zerlegung der Eins.

In dieser Arbeit kommt die Zerlegung der Eins implizit in der Definition der Normen für Funktionenräume auf dem Rand Γ vor, vergleiche [10, S. 83]. Da auch partielle Ableitungen $D^{\alpha}v$ einer Funktion im distributionellen Sinn vorkommen, vergleiche [1, S. 18-21], müssen sie Eigenschaften passender Funktionenräume erfüllen. Dies führt zur folgenden Definition.

Definition 2.4. [10, S. 15] Der Sobolev-Raum $H^m(\Omega)$ ist der lineare Raum der Funktionen v in $L^2(\Omega)$, deren partiellen Ableitungen $D^{\alpha}v$ für alle Ordnungen $|\alpha|$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, auch in $L^2(\Omega)$ liegen,

$$H^m(\Omega) = \{v | D^{\alpha}v \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

wobei m eine nicht negative ganze Zahl ist. Die Norm lautet

$$\|v\|_m = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^{\alpha}v(\underline{x})|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Sei $s = k + \kappa$, $s \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\kappa \in (0, 1)$. Der Raum $H^s(\Omega)$ ist die Vervollständigung des Funktionenraumes $C^{\infty}(\Omega)$ mit der Norm

$$\|v\|_s^2 = \|v\|_k^2 + \iint_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^{\alpha}(v(\underline{x}) - v(\underline{y}))|^2}{|\underline{x} - \underline{y}|^{d+2\kappa}} dx dy.$$

Die Vervollständigung bezüglich $C_0^{\infty}(\Omega)$ in $H^s(\Omega)$ wird mit $H_0^s(\Omega)$ bezeichnet.

Für die Funktionenräume aus Definition 2.4 können innere Produkte $(u, v)_s$ angegeben werden. Die Festlegung dieser Produkte folgt der Beschreibung in [19, S. 30]. Wenn für $H^s(\Omega)$ und $H_0^s(\Omega)$ $s < 0$ gesetzt wird, können diese als Dualräume von $H_0^{-s}(\Omega)$ beziehungsweise $H^{-s}(\Omega)$ erklärt werden. Die Norm für $H^s(\Omega)$ wird über die Dualnorm

$$\|u\|_s := \sup_{0 \neq v \in H_0^{-s}(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle_s|}{\|v\|_{-s}} \quad (2.2)$$

abgeleitet [19, S. 31]. Ersetzt man $0 \neq v \in H_0^{-s}(\Omega)$ durch $0 \neq v \in H^{-s}(\Omega)$, hat man die Norm für $H_0^s(\Omega)$. Die Dualnorm selbst wird über ein Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert [19, S. 27]. Die Eigenschaften von $H_0^s(\Omega)$ aus der Definition 2.4 gelten für alle

$s \notin \{1/2, 3/2, 5/2, \dots\}$ [19, S. 39]. Das ist aber in dieser Arbeit ausreichend.

Man benötigt auch Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten, da auch Randbedingungen behandelt werden müssen. Mit dem Einsatz der Bemerkung 2.1, sind die Räume $H^s(\Gamma)$ nur für $|s| \leq 1$ definiert. Auch die Zerlegung der Eins aus Definition 2.3 tritt nun in Erscheinung [19, S. 41]. Hier interessiert vor allem der Fall, der für $s \in (0, 1)$ gilt. Dafür wird die Norm

$$\|v\|_{s,\Gamma} := \left\{ \|v\|_{0,\Gamma}^2 + \iint_{\Gamma} \frac{|v(\underline{x}) - v(\underline{y})|^2}{|\underline{x} - \underline{y}|^{d-1+2s}} ds_x ds_y \right\}^{1/2}$$

definiert. Der Dualraum $H^{-s}(\Gamma)$ wird über die Dualnorm und das Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s,\Gamma}$ festgelegt [19, S. 42]. Für ein offenes Randstück $\Sigma \subset \Gamma$ eines hinreichend glatten Randes Γ sei der Sobolev-Raum $H^{1/2}(\Sigma)$ mit dem Dualraum $H^{-1/2}(\Sigma)$, vergleiche [19, S. 43], [17, S. 20], gegeben. Der Raum $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ kann mit der Nullfunktion fortgesetzt werden und liegt dann in $H^{1/2}(\Gamma)$, weiters gilt $H_{00}^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma)$ und der Dualraum wird $H_{00}^{-1/2}(\Sigma)$ gesetzt. [17, S. 20].

Die oben genannten Funktionenräume gelten für skalare Funktionen. In dieser Arbeit werden diese auf vektorwertige Funktionen erweitert.

Definition 2.5. [10, S. 17] Eine Funktion \underline{v} ist dann aus $[H^s(\Omega)]^d$, $d = 2, 3$, wenn sie komponentenweise für alle v_i , $1 \leq i \leq d$ in $H^s(\Omega)$ festgelegt ist. Das heißt,

$$[H^s(\Omega)]^d = \{\underline{v} | v_i \in H^s(\Omega), 1 \leq i \leq d\}.$$

Auf die gleiche Weise wird $[H_0^s(\Omega)]^d$ erklärt. Die Dualräume werden mit $[H_0^{-s}(\Omega)]^d$ für $[H^s(\Omega)]^d$ und mit $[H^{-s}(\Omega)]^d$ für $[H_0^s(\Omega)]^d$ deklariert.

Auch der Funktionenraum und der Dualraum auf Γ für $|s| \leq 1$ kann komponentenweise mit $[H^s(\Gamma)]^d$ und $[H^{-s}(\Gamma)]^d$ beschrieben werden.

Man benötigt für die Analysis von Randwertproblemen einen Zusammenhang zwischen den Funktionenräumen auf Ω und dem Rand Γ . Speziell in dieser Arbeit wird

$$\gamma_{\Gamma}^{int} : [H^1(\Omega)]^d \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma)]^d \quad (2.3)$$

verwendet. Der Spuroperator γ_{Γ}^{int} ist für einen hinreichend glatten Rand Γ stetig und surjektiv [17, S. 24]. Der Rand wird in weiterer Folge in einen Dirichlet-Rand Γ_D und in ein zweites Randstück Σ aufgeteilt. Es gilt $\Sigma := \text{int}(\Gamma - \Gamma_D)$, $\Gamma_D \cup \Sigma = \Gamma$ und $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Sigma} = \emptyset$. Die hier verwendeten Funktionenräume werden in der nächsten Definition erklärt.

Definition 2.6. [19, S. 83] Eine Funktion \underline{v} soll die homogenen Dirichlet-Randbedingungen komponentenweise erfüllen. Das heißt,

$$V = \{\underline{v} \in [H^1(\Omega)]^d | \gamma_D^{int} v_i(\underline{x}) = 0, \underline{x} \in \Gamma_D, 1 \leq i \leq d\}.$$

Der Dualraum wird $[H_0^{-1}(\Omega)]^d$ gesetzt. Für Γ sind $\gamma_D^{int} \underline{v}$ aus $[H^{1/2}(\Gamma_D)]^d$ und $\gamma_{\Sigma}^{int} \underline{v}$ aus $[H_{00}^{1/2}(\Sigma)]^d$ mit den Dualräumen $[H^{-1/2}(\Gamma_D)]^d$ und $[H_{00}^{-1/2}(\Sigma)]^d$.

Die Spurooperatoren

$$\gamma_D^{int} : V \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_D)]^d, \quad (2.4)$$

$$\gamma_\Sigma^{int} : V \rightarrow [H_{00}^{1/2}(\Sigma)]^d, \quad (2.5)$$

sind wieder surjektiv und stetig [10, S. 85]. Die Aufteilung in einen Teilrand Γ_D und Σ reicht noch nicht, da auch mit einem Kontaktrand Γ_c gearbeitet wird. In dieser Arbeit wird $\bar{\Gamma}_c \subset \Sigma$, damit gilt $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^d \subset [H_{00}^{1/2}(\Sigma)]^d$, vorausgesetzt. Das heißt, Γ_c muss streng in Σ enthalten sein. Ist zusätzlich der Rand hinreichend glatt, dann ist eine Funktion aus $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^d$ mit Null auf $[H_{00}^{1/2}(\Sigma)]^d$ fortsetzbar. Der Spuroperator γ_Σ^{int} aus (2.5) kann somit in zwei aufgeteilt werden. Daher werden drei Spurooperatoren, die stetig und surjektiv sind, vergleiche [10, S. 88,89],

$$\gamma_D^{int} : V \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_D)]^d, \quad (2.6)$$

$$\gamma_N^{int} : V \rightarrow [H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)]^d, \quad (2.7)$$

$$\gamma_c^{int} : V \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_c)]^d, \quad (2.8)$$

für die Analysis verwendet. Betrachtet man die Normalkontaktbedingung (1.43d), fällt einem auf, dass die Komponenten der Spannung und der Verschiebung auf Γ_c in eine Normal- und Tangentialkomponente zerlegt werden. Hierfür müssen die Komponenten n_i , $1 \leq i \leq d$, des Normalenvektors zumindest aus $L^\infty(\Gamma_c)$ sein, damit eine Variationsformulierung möglich ist. Wenn jedoch auch noch Reibungseffekte wie in (1.44e) eine Rolle spielen, muss eine Zerlegung innerhalb der Variationsformulierung möglich sein. Das bedeutet, dass für eine Funktion $\underline{v} \in [H^{1/2}(\Gamma_c)]^d$ die einzelnen Produkte $v_i n_i$ aus $H^{1/2}(\Gamma_c)$ sein sollen, damit die Zerlegung $\underline{v} \rightarrow \{v_n, \underline{v}_\tau\}$ in eine Normal- und Tangentialkomponente einen Isomorphismus von $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^d$ auf die Unterräume $[H^{1/2}(\Gamma_c)]_n^d \times [H^{1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d$,

$$[H^{1/2}(\Gamma_c)]_n^d := \{\underline{v} \in [H^{1/2}(\Gamma_c)]^d \mid \underline{v} = v_n \underline{n}, v_n = v_i n_i \in H^{1/2}(\Gamma_c)\}, \quad (2.9)$$

$$[H^{1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d := \{\underline{v} \in [H^{1/2}(\Gamma_c)]^d \mid v_n = 0\}, \quad (2.10)$$

darstellt [10, S. 87]. Daher ist der Raum $[H^{1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d$ abgeschlossen in $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^d$ und der Raum $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^d$ hat die weitere Darstellung $[H^{1/2}(\Gamma_c)]^d = [H^{1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d \oplus [H^{1/2}(\Gamma_c)]_n^d$ als direkte Summe dieser beiden Räume. Das heißt für eine Funktion $\underline{u} \in V$, siehe Definition 2.6, folgen die beiden Spurooperatoren mit (2.8)

$$\gamma_{c,n}^{int} : V \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_c)]_n^d, \underline{u} \mapsto \gamma_c^{int}(\underline{u}) \cdot \underline{n}, \quad (2.11)$$

$$\gamma_{c,\tau}^{int} : V \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d, \underline{u} \mapsto \gamma_c^{int}(\underline{u}) - \gamma_{c,n}^{int}(\underline{u}) \underline{n}. \quad (2.12)$$

Der Operator $\gamma_{c,n}^{int}$ ist ein skalarer und für $\gamma_{c,\tau}^{int}$ gilt $\gamma_{c,\tau}^{int} \in [H^{1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d$ [10, S. 87]. In der Definition 2.6 werden die homogenen Dirichlet-Randbedingungen behandelt. Zusätzlich werden folgenderweise die Normalkontaktbedingungen (1.43d) und (1.44d) in einem Funktionenraum eingebunden.

Definition 2.7. [10, S. 89] Sei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ aus $\mathcal{C}^{0,1}$ und eine Funktion $\underline{n}(\underline{x})$ gegeben, die für alle $\underline{x} \in \Gamma_c$ existiert und deren Komponenten n_i , $1 \leq i \leq d$, aus $L^\infty(\Gamma_c)$ sind. Dann ist der Funktionenraum mit dem wohldefinierten Operator $\gamma_{c,n}^{int}$ aus (2.11) gegeben,

$$K := \{\underline{v} \in V \mid \gamma_{c,n}^{int}(\underline{v}) + g \geq 0 \text{ in } H^{1/2}(\Gamma_c)\},$$

wobei $g \in H^{1/2}(\Gamma_c)$ eine skalare Funktion ist. K ist eine abgeschlossene, konvexe Untermenge von $V \subset [H^1(\Omega)]^d$.

Damit die oben genannten Spurooperatoren zum Einsatz kommen, werden die Modelle (1.43) und (1.44) mit Hilfe der Greenschen Formel durch eine Multiplikation mit einer Testfunktion und anschließender Integration über das Gebiet Ω zu einer Variationsformulierung übergeführt. Zuerst wird ein Satz über die Greensche Formel angeben.

Satz 2.8 (Greensche Formel). [17, S. 26] *Die partielle Integration gilt für ein Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \, dx - \int_{\Gamma} \pi_{\Gamma}^{int}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \gamma_{\Gamma}^{int}(\underline{u}) \, ds_x = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{u} \, dx,$$

für alle $\underline{u} \in [H^1(\Omega)]^d$, $\boldsymbol{\sigma} \in H_{sym}(\operatorname{div})$. Das Integral $\int_{\Gamma} \pi_{\Gamma}^{int}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \gamma_{\Gamma}^{int}(\underline{u}) \, ds_x$ erklärt ein Dualitätsprodukt auf $[H^{-1/2}(\Gamma)]^d \times [H^{1/2}(\Gamma)]^d$. Der Spuroperator oder innere Konormalenableitung

$$\pi_{\Gamma}^{int} : H_{sym}(\operatorname{div}) \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma)]^d$$

ist surjektiv und stetig [17, S. 25].

Mit den Notationen von (1.24), (1.43) und (1.44) wird im nächsten Schritt der Raum $H_{sym}(\operatorname{div})$ eingeführt. Dabei sollen symmetrische tensorwertige Funktionen folgende Eigenschaft besitzen,

$$L_{sym}^2(\Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} \mid \sigma_{ij} \in L^2(\Omega), \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, 1 \leq i, j \leq d\}. \quad (2.13)$$

Solche Funktionen aus (2.13) sollen eine schwache Divergenz erfüllen,

$$H_{sym}(\operatorname{div}) := \{\boldsymbol{\sigma} \in L_{sym}^2(\Omega) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in [L^2(\Omega)]^d\}. \quad (2.14)$$

Der Spuroperator π_{Γ}^{int} kann wiederum in surjektive und stetige zerlegt werden [10, S. 93]. Sie erhalten folgende Bezeichnungen,

$$\pi_D^{int} : H_{sym}(\operatorname{div}) \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma_D)]^d, \quad (2.15)$$

$$\pi_N^{int} : H_{sym}(\operatorname{div}) \rightarrow [H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)]^d, \quad (2.16)$$

$$\pi_c^{int} : H_{sym}(\operatorname{div}) \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma_c)]^d. \quad (2.17)$$

π_c^{int} kann nochmals zerlegt werden, wenn alle Voraussetzungen, die auch die Räume aus (2.9) und (2.10) erfüllen, gegeben sind. Dabei werden die Dualräume mit $[H^{-1/2}(\Gamma_c)]_n^d$ und $[H^{-1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d$ beschrieben [10, S. 87]. Die Spurooperatoren bekommen die Bezeichnungen,

$$\pi_{c,n}^{int} : H_{sym}(\text{div}) \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma_c)]_n^d, \quad (2.18)$$

$$\pi_{c,\tau}^{int} : H_{sym}(\text{div}) \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma_c)]_\tau^d. \quad (2.19)$$

Damit das linearisierte Hookesche Gesetz aus (1.43f) und (1.44f) auch mit den in dieser Arbeit angegebenen funktionalanalytischen Methoden bearbeitet werden kann, müssen die Materialparameter die folgenden Bedingungen erfüllen. Das linearisierte Hookesche Gesetz hat komponentenweise die Gestalt,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq d} C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Für $u_{*,*}$ gilt die Schreibweise aus (1.2). Nun gelten für die Komponenten des Materialensors \mathcal{C} und des Verzerrungstensors ϵ folgende Eigenschaften,

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega), \\ C_{ijkl} &= C_{klij} = C_{jikl} \text{ fast überall in } \Omega, \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq d, \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq d} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} &\geq m \sum_{1 \leq i, j \leq d} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \text{ fast überall in } \Omega, \quad m > 0, \text{ für jedes } \epsilon. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wenn das Hookesche Gesetz die Voraussetzungen (2.20) erfüllt, gilt $\sigma = \mathcal{C}\epsilon \in L_{sym}^2(\Omega)$ [17, S. 33].

2.2 Definitionen aus der Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt werden notwendige Grundbegriffe, Eigenschaften von Hilbert- und Banachräumen, Konvergenzeigenschaften von Operatoren in Banachräumen und Bildmengeneigenschaften eingeführt, da der Einsatz der linearen, stetigen Funktionale zum Beispiel bei der Definition der G-Ableitung im Abschnitt 2.2.2 benötigt wird.

Vor allem das Konzept des Dualraums und den zugehörigen speziellen Abbildungseigenschaften einer Dualabbildung von einem Banachraum auf seinen Dualraum werden angegeben. Eine Dualabbildung für Hilberträume findet man im Abschnitt 2.2.1. Hingegen können Eigenschaften einer Dualabbildung in Banachräumen erst im Abschnitt 2.4.2 angegeben werden.

Für die Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes ist es notwendig, über den Dualraum die (pseudo)monotonen und maximalmonotonen Operatoren einzuführen, vergleiche die Abschnitte 2.2.4 und 2.2.5.

Die Begriffsbildungen der schwachen Konvergenz und der uniformen Konvexität eines Banachraumes sind entscheidend dafür, dass pseudomonotone und maximalmonotone Operatoren und deren Existenzsätze gebildet werden können. Sie bilden ein Fundament, auf dem die konvexe Optimierung beruht.

2.2.1 Grundbegriffe

Die folgenden Begriffe werden an dieser Stelle angegeben, weil sie immer wieder benötigt werden. Es handelt sich um Definitionen aus dem Bereich der topologischen Räume. Um Existenzaussagen bezüglich der Modelle (1.43) und (1.44) zu erhalten, konzentriert sich das Interesse auf die Strukturen eines Banachraumes oder eines Hilbertraumes.

Definition 2.9. [22, S. 200] Ein Unterraum M eines topologischen Raumes (X, τ) mit der strukturgebenden Topologie τ liegt dicht in diesem, wenn der Abschluss $\overline{M} = X$ ist. X ist separabel, wenn ein M existiert, dass abzählbar ist und dicht in X liegt.

Die Separabilität eines Funktionenraumes X ist eine notwendige Bedingung, dass die Operatoren eines numerischen Verfahrens, die in einem Raum endlicher Dimension gegeben sind, eine Approximationseigenschaft haben können und somit das Verfahren eventuell zu einer Lösung für das tatsächliche Problem im gegebenen Raum X , $\dim X = \infty$, konvergieren kann.

Der nächste Begriff spielt eine zentrale Rolle in der linearen Funktionalanalysis. Diese Eigenschaft wird immer wieder in verschiedensten Sätzen und Theoreme vorausgesetzt.

Definition 2.10. [22, S. 202] Ein topologischer Unterraum $M \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sich aus jeder Überdeckung von M mit offenen Mengen endlich viele auswählen lassen, die bereits M überdecken.

M ist relativ kompakt, wenn der Abschluss \overline{M} kompakt ist.

Jedoch wird in der programmiertechnischen Umsetzung häufig mit Folgen gearbeitet. Daher stellt sich folgende Frage. Welche Bedingungen müssen Mengen erfüllen, damit die Grenzwerte der Folgen in den gewählten Funktionenräumen liegen, das heißt, dass die Mengen folgenabgeschlossen oder sogar folgenkompakt sind? Jetzt folgen Definitionen, die sich auf Folgen beziehen.

Definition 2.11. [22, S. 204] Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und x deren Grenzwert.

Eine Funktion f ist folgenstetig, wenn $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Sei $M \subseteq X$ und X ein topologischer Raum.

M ist folgenabgeschlossen, wenn $x_n \rightarrow x, x_n \in M \Rightarrow x \in M$.

M ist relativ folgenkompakt, wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge besitzt.

M ist folgenkompakt, wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in M liegt.

Die Analysis der Modellgleichungen (1.43) und (1.44) führt über die Einführung eines Banachraumes.

Definition 2.12. [22, S. 209] Ein Banachraum X ist ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ über \mathbb{K} , der als metrischer Raum folgenvollständig ist.

Die zwei letzten Definitionen 2.10 und 2.11 sind sehr eng miteinander verbunden, wenn X ein Banachraum ist. Denn in einem Banachraum sind die Definitionen kompakt und folgenkompakt, abgeschlossen und folgenabgeschlossen äquivalent [22, S. 207, Absatz (21)].

Ein wichtiges Konzept ist der Dualraum eines Banachraumes, der in dieser Arbeit immer wieder die Bildmenge eines Operators sein wird.

Definition 2.13. [22, S. 212] Sei X ein Banachraum über \mathbb{K} . Eine lineare, stetige Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt lineares stetiges Funktional. Alle linearen stetigen Funktionale bilden mit

$$\|f\|_* := \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

einen Banachraum über \mathbb{K} , der mit X^* bezeichnet und dualer Raum zu X genannt wird.

Mit der Symbolik $\langle f, x \rangle := f(x)$, $f \in X^*$, $x \in X$ kann die Reflexivität erklärt werden. Existiert eine bijektive Abbildung $b : X^{**} \rightarrow X$ von $X^{**} := (X^*)^*$ auf X mit $b(x^{**}) = x$ und

$$\langle x^{**}, f \rangle = \langle f, x \rangle, \quad \|x^{**}\| = \|x\| \quad \text{für alle } f \in X^*, x^{**} \in X^{**},$$

dann heißt X reflexiv oder in Kurzform notiert, $X^{**} = X$. Durch die Eigenschaft der Linearität des Banachraums gilt für die Norm des Dualraums X^* alternativ

$$\|f\|_* = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Die lokale Konvexität eines Banachraumes wird wie folgt festgelegt.

Definition 2.14. [22, S. 215] Ein lokal konvexer Raum $(X, (p_j))$ besteht aus einem linearen Raum X über \mathbb{K} und einem System von Halbnormen $(p_j)_{j \in I}$, so dass

$$p_j(x) = 0, \quad \forall j \in I \rightarrow x = 0.$$

Eine Menge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und Indizes $j_1, \dots, j_n \in I$ existieren, so dass

$$\{x : p_{j_i}(x - x_0) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\} \subseteq U.$$

Diese Mengen bilden eine Topologie τ . Mit τ wird X ein separierter topologischer Raum.

Wegen der lokalen Konvexität ist auch die nächste Definition möglich, die die Begriffe der schwachen und starken Topologie des Banachraumes X einführt.

Definition 2.15. [22, S. 215] Ist X ein lokal konvexer Raum über \mathbb{K} , dann sei X^* die Menge aller Abbildungen der Form

$$f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ linear, stetig.}$$

Das System der Halbnormen

$$p_M(f) := \sup_M |f(x)|, \quad M \subseteq X, \quad M \text{ beschränkt, beliebig,}$$

erzeugt auf X^* die starke Topologie τ_S^* und

$$p_x(f) := |f(x)|, \quad x \in X, \quad \text{beliebig,}$$

erzeugt auf X^* die schwache Topologie τ_W^* . (X^*, τ_S^*) und (X^*, τ_W^*) heißen dualer und schwach dualer Raum zu X .

Weiters kann auch eine schwache Topologie für den Banachraum X zusätzlich erklärt werden.

Definition 2.16. [22, S. 216] Das System der Halbnormen

$$p_f(x) := |f(x)|, \quad f \in X^*, \quad \text{beliebig,}$$

erzeugt auf X die schwache Topologie τ_W

Jeder Banachraum X ist mit $p(\cdot) := \|\cdot\|$ ein lokal konvexer Raum. Daher sind alle Topologien der Definitionen 2.15 und 2.16 und die Normtopologie (X, τ) mit $p(\cdot) := \|\cdot\|_X$ erklärt. Die Norm der Topologie (τ_S^*) stimmt mit der Norm der Definition 2.13 überein. Alle Begriffe, die sich auf τ_W und τ_W^* beziehen, werden mit schwach beziehungsweise mit schwach* versehen. Ohne diesen Bezeichnungen gelten die funktionalanalytischen Begriffe für die Normtopologien τ oder τ_S^* . Vor allem lassen sich nun Konvergenzarten für den Banachraum X und dessen Dualraum X^* erklären. In der nächsten Definition werden eine Normkonvergenz, die der starken Topologie zugeordnet ist, und eine schwache Konvergenz der oben eingeführten schwachen Topologie festgelegt. Die Einführung der schwachen Konvergenz liegt darin begründet, dass bereits unter sehr geringen Voraussetzungen Folgen einen eindeutigen Grenzwert haben können und somit als konvergente Folgen existieren.

Definition 2.17. [22, S. 213] Auf Banachräumen gibt es für die Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in X$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in X^*$, folgende Konvergenzarten,

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0, \\ f_n \rightarrow f &\Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0, \\ x_n \rightharpoonup x &\Leftrightarrow \langle h, x_n \rangle \rightarrow \langle h, x \rangle, \quad \forall h \in X^*, \\ f_n \xrightarrow{*} f &\Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in X, \\ f_n \rightharpoonup f &\Leftrightarrow \langle F, f_n \rangle \rightarrow \langle F, f \rangle, \quad \forall F \in X^{**}. \end{aligned}$$

Dabei nennt man die Normkonvergenz \rightarrow auch starke Konvergenz bezüglich der Topologien τ beziehungsweise τ_S^* und die andere \rightharpoonup schwache Konvergenz bezüglich τ_W . Jene, der das Symbol $\overset{*}{\rightharpoonup}$ zugewiesen wird, nennt man auch schwach*-Konvergenz bezüglich der Topologie τ_W^* . Es gilt für die starke und schwache Konvergenz folgende Proposition.

Proposition 2.18. [22, S. 213] *Aus der starken Konvergenz folgt immer die schwache Konvergenz.*

Wenn X reflexiv ist, gilt $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow f_n \overset{}{\rightharpoonup} f$.*

Wenn $\dim X < \infty$, dann gilt $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$.

Der nächste Satz garantiert zumindest eine schwach konvergente Teilfolge für beschränkte Mengen, wenn der Banachraum reflexiv und separabel ist.

Satz 2.19. [22, S. 217] *Sei X ein Banachraum, $M \subseteq X$, $M^* \subseteq X^*$.*

1. *M konvex, abgeschlossen $\Rightarrow M$ schwach abgeschlossen.*
2. *Sei M reflexiv.
 M beschränkt $\Leftrightarrow M$ schwach relativ folgenkompakt.
 M beschränkt, abgeschlossen, konvex $\Rightarrow M$ schwach kompakt und schwach folgenkompakt.*
3. *Sei X separabel.
 M^* beschränkt $\Leftrightarrow M^*$ schwach* relativ folgenkompakt.
 M^* beschränkt, schwach* abgeschlossen $\Leftrightarrow M^*$ schwach* kompakt.
 M schwach kompakt \Rightarrow die schwache Topologie auf M lässt sich aus einer Metrik gewinnen.*
4. *M schwach kompakt $\Rightarrow \overline{\text{co}} M$ schwach kompakt. Dabei ist $\overline{\text{co}} M$ der Abschluss von $\text{co } M$ in der Normtopologie.*
5. *M beschränkt $\Leftrightarrow M$ schwach beschränkt.
 M^* beschränkt $\Leftrightarrow M^*$ schwach* beschränkt.*

In dieser Arbeit wird der Begriff eines Hilbertraumes benötigt, der die Voraussetzungen des Banachraumes verschärft.

Definition 2.20. [22, S. 217] Ein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf einem linearen Raum X über \mathbb{K} ist eine Abbildung $(x, y) \rightarrow (x|y)$ von $X \times X$ in \mathbb{K} , wobei für alle $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt,

$$(x|\alpha y + \beta z) = \alpha(x|y) + \beta(x|z), \quad \overline{(x|y)} = (y|x), \quad x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0.$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes folgt die Festlegung des Hilbertraumes.

Definition 2.21. [22, S. 218] Ein Hilbertraum $(X, (\cdot|\cdot))$ über \mathbb{K} besteht aus einem linearen Raum X über \mathbb{K} und einem Skalarprodukt, wobei $(X, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := (x|x)^{1/2}$, $x \in X$, ein Banachraum ist.

In diesem Raum gilt die Rieszsche Abbildung. Damit können Elemente aus dem Dualraum eines Hilbertraumes charakterisiert werden.

Satz 2.22. [22, S. 218] *Sei $(X, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum. Zu jedem linearen, stetigen Funktional $x^* \in X^*$ gibt es genau ein Element $x' \in X$, so dass*

$$\langle x^*, x \rangle = (x'|x), \quad \|x^*\| = \|x'\|, \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Abbildung $\mathcal{J} : X \rightarrow X^$, $x \mapsto x^*$ nennt man Dualitätsabbildung (Rieszsche Abbildung). In einem reellen Hilbertraum X ist \mathcal{J} linear, stetig und der inverse Operator $\mathcal{J}^{-1} : X^* \rightarrow X$, $x^* \mapsto x'$ existiert auch als linearer stetiger Operator [23, S. 38]. Die Abbildung \mathcal{J}^{-1} bildet X^* eineindeutig auf X ab.*

Ein Banachraum oder ein Hilbertraum sind die Grundmengen der in dieser Arbeit verwendeten Operatoren und Funktionale.

2.2.2 Begriffe zu Operatoren

Auch die Operatoren und Funktionale sollen gewissen Voraussetzungen unterliegen. Es wird mit einigen Ableitungsbegriffen der Funktionalanalysis begonnen, die später in den notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Darstellung eines Minimums eingebaut sind, wenn dieses von einem konvexen Funktional stammt. Für die nächsten drei Definitionen sei

$$F : D(F) \subseteq X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ein Funktional auf einem lokal konvexen Raum } X, \quad (2.21)$$

und u_0 ein fest vorgegebener innerer Punkt der Definitionsmenge $D(F)$.

Definition 2.23. [24, S. 191] Wenn die Voraussetzung (2.21) gilt, sei

$$\delta^n F(u_0; h) := \left. \frac{d^n F(u_0 + th)}{dt^n} \right|_{t=0} \quad (2.22)$$

die n-te Variation von F im Punkt u_0 in die Richtung $h \in X$. Weiters muss die Ableitung auf der rechten Seite existieren. Für δ^1 wird δ geschrieben.

Die einseitige Richtungsableitung lautet

$$\delta_+ F(u_0; h) := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}. \quad (2.23)$$

Definition 2.24. [24, S. 191] Unter den Voraussetzungen (2.21) ist das Funktional F G-ableitbar im Punkt u_0 genau dann, wenn ein lineares stetiges Funktional $F'(u_0) \in X^*$ existiert, so dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} = \langle F'(u_0), h \rangle, \quad \text{für alle } h \in X.$$

$F'(u_0)$ ist die G-Ableitung (Gâteaux Ableitung) von F in u_0 und $\langle F'(u_0), h \rangle$ ist das G-Differenzial von F in u_0 in die Richtung h .

Die G-Ableitung $F'(u_0)$ existiert genau dann, wenn die Variation $\delta F(u_0; h)$ existiert und für alle $h \in X$ die Abbildung $h \mapsto \delta F(u_0; h)$ ein lineares stetiges Funktional ist. Dann gilt [24, S. 191]

$$\delta F(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle \quad \text{für alle } h \in X.$$

Definition 2.25. [24, S. 192] Sei X aus (2.21) ein normierter Raum. Das Funktional aus (2.21) ist F-differenzierbar im Element $u_0 \in D(F)$ genau dann, wenn ein stetiges lineares Funktional $F'(u_0) \in X^*$ existiert, so dass der Ausdruck

$$F(u_0 + h) = F(u_0) + \langle F'(u_0), h \rangle + o(\|h\|), \quad \text{wenn } h \rightarrow 0, \quad (2.24)$$

für alle h in einer Nullumgebung $U_\delta(0)$ gilt. $F'(u_0)$ ist die F-Ableitung (Fréchet-Ableitung) von F im Element u_0 . Das F-Differenzial von F in u_0 in die Richtung h ist durch $dF(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle$ gegeben. Die G- oder die F-Ableitung von F in u_0 existiert, wenn F in einer Umgebung von u_0 definiert ist.

Das Ordnungssymbol (Landausymbol) o soll anzeigen, dass die Gleichung (2.24) langsamer anwächst als die angegebene Funktion in der Klammer des Landausymbols. Das heißt, wenn das Funktional $r : U(0) \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, X Banachraum, gegeben ist,

$$\begin{aligned} r(x) = o(\|x\|), x \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \frac{r(x)}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0, \\ r(x) = o(1), x \rightarrow 0 &\Leftrightarrow r(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für die Definition 2.24 der G-Ableitung und der Definition 2.25 der F-Ableitung gelten folgende Eigenschaften und Beziehungen untereinander. Jede F-Ableitung $F'(u_0)$ ist auch eine G-Ableitung und es gilt [24, S. 192]

$$\delta F(u_0; h) = dF(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle, \quad \text{für alle } h \in X.$$

Wenn die G-Ableitung $F'(u_0)$ von F für alle u in einer Umgebung von u_0 , $U(u_0)$, definiert und $F' : U(u_0) \subseteq X \rightarrow X^*$ stetig ist, dann ist $F'(u_0)$ eine F-Ableitung [24, S. 192]. Wenn $F'(u_0)$ eine F-Ableitung ist, ist F stetig in u_0 .

Vor allem werden die G-Ableitungen und G-Funktionale zur Charakterisierung der hinreichenden Minimierungsbedingungen eines konvexen Funktionals eingesetzt, oder um eine Möglichkeit zu haben die Konvexität eines Funktionals festzulegen, siehe Abschnitt 2.3.1.

Wie bereits erwähnt wurde, sind die G- und F-Funktionale linear und stetig. Die ersten zwei Definitionen handeln daher von linearen, stetigen Operatoren.

Definition 2.26. [22, S. 209] Sei $A : X \rightarrow Y$, X, Y lineare Räume über \mathbb{K} . A heißt linear genau dann, wenn für alle $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Für jedes \mathbb{K} gilt in diesem Abschnitt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definition 2.27. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banach-Räume X, Y gegeben. Der Operator A ist stetig in u_0 , wenn für eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt,

$$u_n \rightarrow u_0 \implies Au_n \rightarrow Au_0.$$

Das heißt, konvergiert die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stark in der Normtopologie zu u_0 auf X , dann konvergieren die Bilder Au_n stark zu Au_0 in der Normtopologie auf Y .

Die Abbildungsmenge $L(X, Y)$ der linearen, stetigen Operatoren,

$$A \in L(X, Y) \Leftrightarrow A : X \rightarrow Y, \text{ linear, stetig, } X, Y \text{ Banachräume über } \mathbb{K}, \quad (2.25)$$

von X nach Y bilden mit der Operatornorm $\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty$ einen Banachraum über \mathbb{K} [22, S. 211]. Lineare beschränkte Operatoren sind stetig und lineare stetige Operatoren sind beschränkt, wenn sie aus der Menge $L(X, Y)$ sind.

Im Sinne der Dualität aus der Definition 2.13 setzt man folgende Definition für lineare stetige Operatoren.

Definition 2.28. [22, S. 213] Seien X, Y Banachräume über \mathbb{K} . Zu jeder linearen, stetigen Abbildung $A : X \rightarrow Y$ gibt es eine eindeutig bestimmte lineare, stetige Abbildung $A^* : Y^* \rightarrow X^*$, so dass

$$\langle f, Ax \rangle = \langle A^* f, x \rangle \quad \text{für alle } f \in Y^*, x \in X.$$

A^* heißt duale Abbildung oder dualer Operator.

Für Hilberträume folgt folgende Definition, dabei wird die Rieszsche Abbildung \mathcal{J} aus dem Satz 2.22 verwendet.

Definition 2.29. [22, S. 218] Sei X ein Hilbertraum. Zu jedem linearen, stetigen Operator $A : X \rightarrow X$ gibt es genau einen linearen Operator $A' : X \rightarrow X$ mit

$$(x|Ay) = (A'x|y), \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

A' heißt adjungierter Operator und ist stetig.

In einem Hilbertraum gilt nun $A^* = A'$, wenn der Operator $A \in L(X, X)$. Operatoren $A \in L(X, X^*)$ können mit einem $A \in L(X, X)$ identifiziert werden [23, S. 39].

Weiters werden folgende Kompaktheits- und Beschränktheitsbegriffe von Operatoren in Banachräumen verwendet.

Definition 2.30. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banach-Räume X, Y gegeben. Der Operator A ist kompakt, wenn die Bildmenge von A , $R(A)$, relativ kompakt ist, das heißt, der Abschluss $\overline{R(A)}$ ist kompakt.

Definition 2.31. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banach-Räume X, Y gegeben. Der Operator A ist vollstetig, wenn A stetig ist und beschränkte Mengen $M \subseteq X$ in relativ kompakte Mengen $A(M) \subseteq Y$ übergehen.

Die Begriffe kompakter und vollstetiger Operator besitzen folgenden Zusammenhang. Ist ein kompakter Operator $K : X \rightarrow Y$, X, Y sind Banachräume, gegeben, dann ist er auch vollstetig. Aber ein vollstetiger Operator $B : X \rightarrow Y$ ist nur dann kompakt, wenn X zusätzlich reflexiv ist [3, Kap. VI, §3]. In dieser Arbeit bedeuten vollstetig und kompakt das selbe, weil die verwendeten Sobolev-Räume reflexive Banachräume sind, siehe Abschnitt 2.1. Als nächste der Operatoreigenschaften werden die Begriffe zur Beschränktheit eines Operators aufgelistet.

Definition 2.32. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banachräume X, Y gegeben. Der Operator A ist beschränkt, wenn beschränkte Mengen $M \subseteq X$ in beschränkte Mengen $A(M) \subseteq Y$ übergehen.

Definition 2.33. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banachräume X, Y gegeben. Der Operator A ist lokal beschränkt, wenn jedes $u \in X$ eine Umgebung $V(u)$ besitzt, so dass die Menge $A(V(u)) \subseteq Y$ beschränkt ist.

Die nächsten drei Definitionen werden zu einem späteren Zeitpunkt benötigt, wenn das Subdifferenzial, siehe Abschnitt 2.4.2, eingeführt wird um den benötigten Ableitungsbegriff zu erweitern, denn die in dieser Arbeit auftretenden Funktionale können nicht differenzierbar im oben erwähnten Sinn sein.

Definition 2.34. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banachräume X, Y gegeben. Der Operator A ist demistetig in u_0 , wenn für eine Folge (u_n) gilt

$$u_n \rightarrow u_0 \implies Au_n \rightharpoonup Au_0.$$

Das heißt, konvergiert die Folge u_n stark in der Normtopologie zu u_0 auf X , dann konvergieren die Bilder Au_n in der schwachen Topologie zu Au_0 auf Y .

Definition 2.35. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow X^*$ und seien der Banachraum X über \mathbb{K} und sein dualer X^* gegeben. Der Operator A ist hemistetig, wenn ein t auf $[0, 1]$ für alle $u, v, w \in X$ existiert, so dass

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle \text{ stetig, } [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}.$$

Definition 2.36. [23, S. 122] Sei der Operator $A : X \rightarrow Y$ und seien die Banachräume X, Y gegeben. Der Operator A ist verstärkt stetig in u_0 , wenn für eine Folge (u_n) gilt

$$u_n \rightharpoonup u_0 \implies Au_n \rightarrow Au_0.$$

Es handelt sich um Stetigkeitsbegriffe, die notwendigerweise in der Theorie der (pseudo-)monotonen Operatoren Verwendung finden. Diese Operatoren werden in den nächsten Kapiteln behandelt. Ein weiterer Aspekt ist eine Erweiterung der Dualitätsabbildung, vergleiche Satz 2.22, auf jene des Banachraumes. Die Konvexität und Glattheit der Norm eines Banachraumes ist eng verknüpft mit den Eigenschaften der Dualitätsabbildung.

Definition 2.37. [24, S. 603,604] Sei X ein reeller Banachraum. X ist lokal uniform konvex, wenn für jedes ε , $0 < \varepsilon \leq 2$, und für jedes x , $\|x\| = 1$, ein $\delta(\varepsilon, x) > 0$ existiert, so dass für zwei Elemente $x, y \in X$ gilt

$$\|x - y\| \geq \varepsilon, \|x\| = \|y\| = 1 \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon, x).$$

X ist uniform konvex, wenn X lokal uniform konvex und δ unabhängig von x ist.

X ist streng konvex, wenn $\|tx + (1 - t)y\| < 1$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $t \in]0, 1[$.

Nach der Definition der Konvexität folgt noch die Glattheit.

Definition 2.38. [24, S. 604] X ist glatt, wenn die Norm $\|x\|$ G-ableitbar für alle $x \in X \setminus \{0\}$ ist.

X ist uniform glatt, wenn die Norm $\|x\|$ F-ableitbar für alle $x \in X \setminus \{0\}$ ist und

$$\|x + h\| - \|x\| = \langle f'(x), h \rangle_X + \varepsilon(h)\|h\|$$

für alle $h \in X$ gilt. Weiters wird $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, wenn $h \rightarrow 0$ und dies ist uniform für alle x , $\|x\| = 1$.

In der folgenden Proposition werden einige Zusammenhänge für die letzten beiden Definitionen angegeben.

Proposition 2.39. [24, S. 604] *Sei X ein reeller Banachraum.*

Ist X uniform konvex, dann ist X auch lokal uniform konvex. Daher ist X auch streng konvex.

Ist X uniform konvex, dann ist X auch reflexiv. Ist X uniform glatt, dann ist X auch glatt.

Jeder reelle Hilbertraum X ist uniform konvex und uniform glatt mit

$$f'(x) = \|x\|^{-1}x, \quad \text{für alle } x \in X \setminus \{0\}.$$

Nicht nur Hilberträume haben F-ableitbare Normen, sondern auch reflexive Banachräume.

Satz 2.40. [24, S. 604, Kadec-Troyanski] *In jedem reflexiven Banachraum kann immer eine äquivalente Norm eingeführt werden, so dass X und der Dualraum X^* lokal uniform konvex und daher streng konvex sind. Somit sind die Normen auf $X \setminus \{0\}$ und $X^* \setminus \{0\}$ F-ableitbar.*

2.2.3 Sätze zu monotonen Operatoren

Stellt man fest, dass die Variationsformulierungen der Modelle (1.43) und (1.44) den zuvor erwähnten Beschränktheits-, Konvergenz- und Stetigkeitsbegriffen unterliegen, können mit zusätzlichen Eigenschaften der (pseudo)monotonen und der maximalmonotonen Operatoren Existenzaussagen bezüglich der Lösbarkeit dieser Variationsformulierungen getroffen werden. Nun folgen die funktionalanalytischen Werkzeuge und Begriffe dafür, die danach auch im Abschnitt 2.4.2 in den Sätzen und Lemmas vorkommen. Sie dienen dann dazu, eine Minimallösung der Variationsformulierungen zu charakterisieren.

Definition 2.41. [23, S. 80] Seien der Operator $A : X \rightarrow X^*$ und der Banachraum X gegeben. A heißt monoton genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

A heißt streng monoton genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \quad \text{für alle } u, v \in X, u \neq v.$$

A heißt gleichmäßig monoton genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq a(\|u - v\|)\|u - v\|, \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Dabei ist $a : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende, stetige Funktion mit $a(0) = 0$, $a(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

A heißt stark monoton genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2, \quad \text{für alle } u, v \in X, c > 0, \text{ fest.}$$

A heißt koerzitiv genau dann, wenn

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Für die einzelnen Begriffe der Definition 2.41 liegt eine Abhängigkeitskette vor. Der nächste Satz setzt die Reihenfolge fest.

Satz 2.42. [23, S. 81] *Ist ein Operator $A : X \rightarrow X^*$ stark monoton, ist er auch gleichmäßig monoton. Weiters folgt, dass ein gleichmäßig monotoner auch streng monoton und koerzitiv ist. Weiters ist ein streng monotoner Operator monoton.*

Hat ein Operator eine dieser Eigenschaften, dann besagt der folgende Satz, dass eine zum Operator gehörende Gleichung eine Lösung besitzt, wenn die gegebenen Voraussetzungen erfüllt sind.

Satz 2.43. [23, S. 125] *Satz über monotone Operatoren von Browder und Minty. Seien $A : X \rightarrow X^*$ monoton, koerzitiv, hemistetig und X ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum. Dann existiert eine Basis $\{w_1, w_2, \dots\}$ in X . Sei die lineare Hülle $\text{lin}\{w_1, \dots, w_n\}$ die Basis im Raum $X_n < \infty$. Betrachtet werden die Operatorgleichung*

$$Au = b, \tag{2.26}$$

und die zugehörigen Galerkin-Gleichungen,

$$\langle Au_n, w_k \rangle = \langle b, w_k \rangle, \quad u_n := \sum_{k=1}^n c_{kn} w_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.27}$$

Für jedes $b \in X^*$ besitzt die Gleichung (2.26) eine Lösung u . Die Lösungsmenge ist beschränkt, konvex und abgeschlossen, das heißt schwach kompakt in X .

Ist $\dim X = \infty$, dann gibt es eine Zahl $R > 0$, so dass (2.27) für alle $n \in \mathbb{N}$ lösbar ist mit $\|u_n\| < R$. Es existiert eine Teilfolge $u_{n'} \rightharpoonup u$, $n \rightarrow \infty$, wobei u Lösung von (2.26) ist.

Ist A streng monoton, dann sind (2.26) und (2.27) eindeutig lösbar in X beziehungsweise X_n und $u_n \rightharpoonup u$, $n \rightarrow \infty$, für $\dim X = \infty$. Der inverse Operator $A^{-1} : X^* \rightarrow X$ ist streng monoton, demistetig und beschränkt.

Ist A gleichmäßig monoton, dann ist A^{-1} stetig und $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$, für $\dim X = \infty$. Ist A stark monoton, dann ist A^{-1} Lipschitz-stetig. Jeder gleichmäßig monotone und stetige Operator A ist streng monoton, koerzitiv und hemistetig.

Der Beweis des Satzes 2.43 wird über Approximationsräume X_n geführt. Man sieht hier die Ergebnisse, die man auch für Operatorungleichungen erreichen will. Denn nicht nur die Existenz einer Lösung im Raum X wird gezeigt, sondern auch, dass Näherungsverfahren über endliche Räume möglich sind. Jedoch sind die benötigten Voraussetzungen des Operators A zu einschränkend.

2.2.4 Sätze zu pseudomonotonen Operatoren

Die Idee ist, Bedingungen anzugeben, so dass eine Operatorgleichung im Raum X durch Lösungen der Galerkin-Gleichungen in den Approximationsräumen X_n selbst eine Lösung hat. Dafür müssen aber die Lösungen u_n eine Folge im Raum X sein. Deren Grenzwert soll existieren und eben eine Lösung der Operatorgleichung in X sein.

Die nächste Definition gibt Bedingungen an, die hinreichend sind, um die Konvergenz eines Galerkin-Verfahrens zu zeigen.

Definition 2.44. [23, S. 125] Seien der Operator $A : X \rightarrow X^*$ und der reflexive Banachraum X gegeben. A genügt den Bedingungen (M) , (S) , $(S)_+$, $(S)_0$ genau dann, wenn für $n \rightarrow \infty$ immer gilt,

$$(M) : u_n \rightharpoonup u, Au_n \rightharpoonup v, \overline{\lim} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle v, u \rangle \Rightarrow Au = v$$

$$(S)_+ : u_n \rightharpoonup u, \overline{\lim} \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \leq 0 \Rightarrow u_n \rightarrow u$$

$$(S) : u_n \rightharpoonup u, \lim \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle = 0 \Rightarrow u_n \rightarrow u$$

$$(S)_0 : u_n \rightharpoonup u, Au_n \rightharpoonup v, \lim \langle Au_n, u_n \rangle = \langle v, u \rangle \Rightarrow u_n \rightarrow u.$$

Die Bedingung (M) beschreibt eine Lösung in der schwachen Konvergenz und die anderen erläutern eine Lösung in der Normkonvergenz. In der Proposition 2.45 findet man die Reihenfolge der Abhängigkeiten der Bedingungen $(S)_+$, (S) , $(S)_0$. Zusätzlich werden Operatoren, die diese Konvergenzbedingungen erfüllen, angegeben.

Proposition 2.45. [23, S. 125] Seien $A_1, A_2 : X \rightarrow X^*$, X reflexiver Banachraum gegeben.

Es gilt $(S)_+ \Rightarrow (S) \Rightarrow (S)_0$.

Ist A_1 gleichmäßig monoton, dann genügt A_1 $(S)_+$.

Genügt A_1 $(S)_+$ und ist A_2 vollstetig, dann gilt für $A := A_1 + A_2$ $(S)_+$.

Genügt A_1 (S) und ist A_2 verstärkt stetig, dann gilt für $A := A_1 + A_2$ (S) .

Die Definition 2.46 der Pseudomonotonie ist der zentrale Begriff um eine Lösung und eine Konvergenz der Galerkin-Gleichungen zu garantieren.

Definition 2.46. [23, S. 127] Seien $A : X \rightarrow X^*$ und der reflexive Banachraum X gegeben. A heißt pseudomonoton genau dann, wenn

$$u_n \rightharpoonup u, \overline{\lim} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle Au, u - w \rangle \leq \underline{\lim} \langle Au_n, u_n - w \rangle, \quad \text{für alle } w \in X.$$

A genügt der Bedingung (P) genau dann, wenn

$$(P) : u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \overline{\lim} \langle Au_n, u_n - u \rangle \geq 0.$$

Jetzt folgen einige Operatoren, die Pseudomonotonie oder die Bedingung (P) erfüllen.

Proposition 2.47. [23, S. 127] Seien $A, A_1 : X \rightarrow X^*$, X reflexiver Banachraum gegeben.

Ist A monoton, hemistetig und A_1 verstärkt stetig, dann ist $A + A_1$ pseudomonoton.

Ist A demistetig und genügt (S_+) , dann ist A pseudomonoton.

Ist A verstärkt stetig oder monoton, dann genügt A (P).

Der nächste Satz erläutert die Kernaussage des Abschnitts. Die Pseudomonotonie garantiert nämlich die schwache Konvergenz der Galerkin-Gleichungen, wenn jede Gleichung eine Lösung besitzt.

Satz 2.48. [23, S. 127] Eigenschaften pseudomonotoner Operatoren.

Seien $A, A_1, A_2 : X \rightarrow X^*$ und X reflexiver Banachraum gegeben.

A pseudomonoton $\Rightarrow A$ genügt (M).

A pseudomonoton $\Rightarrow A$ genügt (P).

A pseudomonoton, lokal beschränkt $\Rightarrow A$ demistetig.

A monoton, hemistetig $\Rightarrow A$ demistetig.

A_1 pseudomonoton, A_2 monoton, hemistetig $\Rightarrow A := A_1 + A_2$ pseudomonoton.

Der nächste Satz bündelt die getroffenen Aussagen.

Satz 2.49. [23, S. 126, 129] Satz über pseudomonotone Operatoren von Brézis. Seien $A : X \rightarrow X^*$, pseudomonoton, beschränkt, koerzitiv und X ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum, $\dim X = \infty$. Sei die Basis $\{w_1, w_2, \dots\}$ in X gegeben. Die lineare Hülle $\text{lin}\{w_1, \dots, w_n\}$ sei die Basis von X_n , dabei gelten die Voraussetzungen des Satzes 2.43. Betrachtet werden die Operatorgleichung

$$Au = b, \tag{2.28}$$

und die zugehörigen Galerkin-Gleichungen,

$$\langle Au_n, w_k \rangle = \langle b, w_k \rangle, \quad u_n := \sum_{k=1}^n c_{kn} w_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.29}$$

Dafür sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen $u_n : \|u_n\| \leq R$, R fest, voranzusetzen. Ist nur die Konvergenz der Galerkin-Gleichungen (2.29) zu gewährleisten, benötigt man die Voraussetzungen, dass A beschränkt ist, und (M) aus der Definition 2.44 erfüllt, und $b \in X^*$ fest gewählt ist.

Für jede schwach konvergente Teilfolge $u_{n'} \rightharpoonup u$ von (u_n) ist u eine Lösung von (2.28). Es gibt mindestens eine solche Teilfolge, das heißt (2.28) ist lösbar. Besitzt (2.28) eine eindeutige Lösung u , dann gilt $u_n \rightharpoonup u$. Genügt A statt (M) der Bedingung (S)₀, beide aus der Definition 2.44, und ist A demistetig, dann gelten alle Aussagen, indem man "→", schwache Konvergenz, durch "→", Normkonvergenz, ersetzt.

Speziell besitzen alle Galerkin-Gleichungen (2.29) für hinreichend großes $R > 0$ eine Lösung $u_n : \|u_n\| \leq R$. Die Gleichung (2.28) ist für jedes $b \in X^*$ lösbar, und es gibt eine Teilfolge $(u_{n'})$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u$ für $n \rightarrow \infty$, so dass u eine Lösung von (2.28) ist.

Bemerkung 2.50. [23, S. 126] Die Lösbarkeit von (2.29) kann durch Variationsmethoden oder, wenn A aus Satz 2.49 demistetig ist und

$$\langle Au - b, u \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } u \in X, \|u\| = R,$$

gilt, erzwungen werden. Die Zahl R stammt aus der Definition der Koerzitivität 2.41. Das Bemerkenswerte ist, dass der Beweis für (pseudo)monotone Operatoren über die Approximationsräume X_n geführt wird. Damit hat man eine Grundlage um ein konvergentes Näherungsverfahren zu erstellen.

2.2.5 Sätze zu maximalmonotonen Operatoren

In diesem Abschnitt werden mehrelementige Abbildungen eingeführt, die zur Charakterisierung der Variationsformulierung benötigt werden. Zu Beginn folgt die Definition der maximalmonotonen mehrelementigen Operatoren.

Definition 2.51. [23, S. 174] Sei X ein Banachraum. Sei der mehrdeutige Operator $A : C \subseteq X \rightarrow 2^{X^*}$, C nichtleer, abgeschlossen und konvex gegeben. 2^{X^*} ist die Menge aller Teilmengen von X^* . Dann kann A jedem $u \in C$ auch die leere Teilmenge $A(u) \subseteq X^*$ zuordnen. Der effektive Definitionsbereich von A ist

$$D(A) := \{u \in C : A(u) \neq \emptyset\}.$$

Der Graph von A ist

$$G(A) := \{(u, v^*) \in C \times X^*, u \in D(A), v^* \in A(u)\}.$$

A heißt monoton genau dann, wenn

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } (u, u^*), (v, v^*) \in G(A).$$

A heißt maximalmonoton genau dann, wenn A monoton ist und keine echte monotone Erweiterung $A_1 : C \rightarrow 2^{X^*}$ existiert. Das heißt, dass aus

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0, \quad u^* \in X^*, u \in C, \text{ für alle } (v, v^*) \in G(A)$$

stets folgt $(u, u^*) \in G(A)$, das heißt $u \in D(A)$, $u^* \in A(u)$. Eindeutige Operatoren

$$A : D(A) \subseteq C \rightarrow X^*$$

sind Spezialfälle von $\tilde{A} : C \subseteq X \rightarrow 2^{X^*}$, indem man als Bilder einelementige Mengen oder die leere Menge wählt.

Da in diesem Abschnitt mit mehrelementigen Abbildungen gearbeitet wird, muss die Stetigkeit neu formuliert werden.

Definition 2.52. [22, S. 101] Seien X, Y lokal konvexe Räume, $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$, M nichtleer.

$T : M \rightarrow 2^N$ heißt stetig in $x_0 \in M$ genau dann, wenn zu jeder offenen Menge $O \subseteq Y$ mit $T(x_0) \subseteq O$ eine Umgebung $U(x_0)$ gehört, so dass $T(U(x_0) \cap M) \subseteq O$.

T heißt stetig genau dann, wenn T für alle $x \in M$ stetig ist.

Zur Charakterisierung der Stetigkeit dient der folgende Satz.

Satz 2.53. [22, S. 102] Seien der Operator T und die Räume von der Definition 2.52 gegeben. Ist $T : M \rightarrow 2^N$, M, N kompakt, M nichtleer, $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ und $T(x)$ abgeschlossen für alle $x \in M$, dann gilt

$$T \text{ stetig} \Leftrightarrow G(T) := \{(x, y) : x \in M, y \in T(x)\} \text{ abgeschlossen in } X \times Y.$$

$G(T)$ ist der Graph von T .

Die nächste Definition fasst die Begriffe Pseudomonotonie, Demistetigkeit, Beschränktheit und Koerzitivität für mehrelementige Abbildungen zusammen.

Definition 2.54. [23, S. 177,178] Seien $A : C \subseteq X \rightarrow 2^{X^*}$, X ein reflexiver Banachraum, C nichtleer, abgeschlossen und konvex, gegeben.

A heißt pseudomonoton genau dann, wenn aus

$$u_n \in C \rightarrow u \in C \text{ in } X, \quad \overline{\lim} \langle v_n, u_n - u \rangle \leq 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

mit $v_n \in A(u_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ immer folgt, dass zu jedem $w \in C$ ein $v \in A(u)$ existiert, wobei

$$\langle v, u - w \rangle \leq \langle v_n, u_n - w \rangle, \quad n \rightarrow \infty.$$

A heißt demistetig genau dann, wenn A als mehrdeutige Abbildung stetig ist, vergleiche Definition 2.52, C mit der Normtopologie von X und X^* mit der schwachen Topologie aus Definition 2.16 versehen wird.

A heißt beschränkt genau dann, wenn für jede beschränkte Menge $M \subseteq C$ auch $A(M)$ in der Norm von X^* beschränkt ist.

A heißt koerzitiv bezüglich $b \in X^*$ genau dann, wenn es ein $r > 0$ gibt mit

$$\langle u^*, u \rangle > \langle b, u \rangle, \quad \text{für alle } u^* \in A(u), u \in C : \|u\| > r. \quad (2.30)$$

A heißt koerzitiv genau dann, wenn es zu jedem $R > 0$ ein $r > 0$ gibt mit

$$\frac{\langle u^*, u \rangle}{\|u\|} > R, \quad \text{für alle } u^* \in A(u), u \in C : \|u\| > r. \quad (2.31)$$

Offensichtlich folgt (2.30) aus (2.31).

Es kann laut dem nächsten Satz ein Element u im Raum X gefunden werden, das unter gewissen Voraussetzungen für die Summe eines (pseudo)monotonen und eines maximalmonotonen Operators auf ein $b \in X^*$ abbildet.

Satz 2.55. [23, S. 178] Satz über maximalmonotone Abbildungen von Browder. *Seien $A_1, A_2 : C \subseteq X \rightarrow 2^{X^*}$ und X ein reflexiver Banachraum gegeben. Sei C nichtleer, abgeschlossen und konvex. C enthalte das Nullelement, das heißt $0 \in C$.*

A_1 sei maximalmonoton, $0 \in A_1(0)$.

A_2 sei pseudomonoton, demistetig, beschränkt, koerzitiv bezüglich $b \in X^$. Die Menge $A_2(u)$ sei nichtleer, abgeschlossen, konvex, für alle $u \in C$.*

Es existiert ein $u \in C$, so dass

$$b = b_1 + b_2, \quad b_1 \in A_1(u), b_2 \in A_2(u), \quad \text{das heißt } b \in (A_1 + A_2)(u). \quad (2.32)$$

Ist A_2 koerzitiv, dann gilt (2.32) für alle $b \in X^$.*

Somit kann für eine Operatorungleichung, die in dieser Arbeit die Gestalt von (2.33) annimmt, folgende Existenz einer Lösung gezeigt werden.

Korollar 2.56. [23, S. 178] *Seien $A : C \subseteq X \rightarrow X^*$ und X ein reflexiver, reeller Banachraum gegeben. C sei nichtleer, abgeschlossen, konvex, $0 \in C$.*

Bei einem gegebenen $b \in X^$ wird ein $u \in C$ gesucht, so dass*

$$\langle b - Au, u \rangle \geq \langle b - Au, v \rangle, \quad \text{für alle } v \in C. \quad (2.33)$$

A sei pseudomonoton, demistetig, beschränkt, koerzitiv bezüglich $b \in X^$.*

(2.33) besitzt eine Lösung $u \in C$.

Ist A monoton, dann ist die Lösungsmenge von (2.33) konvex und abgeschlossen.

Ist A streng monoton, das heißt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \quad \text{für alle } u, v \in C, u \neq v,$$

dann besitzt (2.33) genau eine Lösung.

Die Voraussetzungen von A sind erfüllt, wenn $A : X \rightarrow X^$ monoton, hemistetig, beschränkt und koerzitiv ist, vergleiche [23, S. 123, Satz 27.1].*

Ist C beschränkt, dann sind die Voraussetzungen von A erfüllt, wenn A hemistetig, monoton, beschränkt oder wenn A pseudomonoton und beschränkt ist. Die Bedingung $0 \in C$ entfällt hier.

Die Begriffe aus den Definitionen 2.51 und 2.54 gelten auch für die einelementigen Operatoren, das heißt für die (pseudo)monotonen Operatoren aus den Definitionen 2.41 und 2.46.

2.3 Konvexe Analysis

Die Modelle (1.43) und (1.44) können nicht nur mit den (pseudo)monotonen oder maximalmonotonen Operatoren analysiert werden. Die stationären Modelle unterliegen auch einer Potentialformulierung, deren Minimallösung durch die oben genannten Operatoren dargestellt werden kann. Die Ergebnisse sind im Hauptsatz der konvexen Optimierung im Abschnitt 2.4.2 zusammengefasst. Ist die Potentialformulierung ein konvexes unterhalbstetiges Funktional, kann zusätzlich ein Existenzsatz für die Minimallösung angegeben werden.

Die Lösungsmenge, wenn sie existiert, kann durch Subdifferenziale charakterisiert werden. Die Variationsformulierung der Modelle beinhaltet maximalmonotone Operatoren, die durch den Begriff über Subdifferenziale beschreibbar sind. In den folgenden Abschnitten werden die notwendigen Mittel der konvexen Analysis erläutert.

2.3.1 Konvexe Funktionale

Am Anfang stehen die Definition und die Eigenschaften eines konvexen Funktionals im Vordergrund. Man beachte die einschränkenden Voraussetzungen der verwendeten Mengen.

Definition 2.57. [24, S. 245] Sei $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional und X ein topologischer Raum. Die Menge M ist genau dann konvex, wenn gilt

$$u, v \in M, \quad t \in [0, 1] \quad \implies \quad (1 - t)u + tv \in M.$$

Wenn M konvex ist, dann ist F (streng) konvex, wenn gilt

$$F((1 - t)u + tv)(<) \leq (1 - t)F(u) + tF(v),$$

für alle $u, v \in M$, $u \neq v$. Dabei sind alle $t \in]0, 1[$.

Dass die Menge konvex sein muss, kann unter Umständen eine sehr große Einschränkung sein. In dieser Arbeit ist diese Definition aber ausreichend. Nach der Definition 2.57 folgt eine Proposition über einige Rechenregeln der konvexen Funktionale.

Proposition 2.58. [24, S. 401] Wenn $F, G, F_\alpha : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex auf dem linearen Raum X sind, dann sind $F + G, tF, \sup(F, G)$ und $\sup_\alpha F_\alpha$ konvex, $0 < t < \infty$. Weiters soll $F(u) + G(u) := \infty$ definiert werden, wenn $F(u) - G(u) = \pm\infty$.

Die nächste Proposition veranschaulicht eine wichtige Eigenschaft der konvexen Funktionale. Es handelt sich um die Möglichkeit zu zeigen, dass ein lokales Minimum ein globales ist. Dies ist eine herausragende Eigenschaft, denn alle hier angegebenen notwendigen und hinreichenden Charakterisierungen gelten ausschließlich für lokale Minima.

Proposition 2.59. [24, S. 246] Sei $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional auf der konvexen Menge M des reellen lokal konvexen Raumes X . Hat F ein lokales Minimum bei u_0 ,

$$F(u) \geq F(u_0), \quad \text{für alle } u \in U(u_0) \cap M,$$

dabei ist $U(u_0)$ eine passende Umgebung $U(u_0)$ von u_0 , dann ist u_0 auch ein globales Minimum,

$$F(u) \geq F(u_0), \quad \text{für alle } u \in M.$$

Vor allem gilt der folgende Eindeutigkeitsatz.

Satz 2.60. [24, S. 152] Ein Funktional $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ hat höchstens ein Minimum auf der Menge M , wenn gilt, dass M eine konvexe Untermenge eines linearen Raumes X ist und F streng konvex ist.

Nun folgen Eigenschaften und Charakteristika eines konvexen Funktionals mit Hilfe der G -Ableitung aus der Definition 2.24, F -Ableitung aus der Definition 2.25, und monotonen Operatoren, siehe Abschnitt 2.2.3.

Proposition 2.61. [24, S. 247] Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional auf dem reellen Banachraum X . Die G -Ableitung $F' : X \rightarrow X^*$ existiert auf X . Dann gelten folgende Aussagen.

1. Folgende drei Aussagen sind äquivalent.

$$\begin{aligned} F \text{ konvex auf } X &\Leftrightarrow \\ F' \text{ monoton auf } X &\Leftrightarrow \\ F(v) - F(u) &\geq \langle F'(u), v - u \rangle \text{ für alle } u, v \in X. \end{aligned} \tag{2.34}$$

2. Wenn F konvex und der Raum X reflexiv ist, ist F' monoton und demistetig auf X .
3. Folgende drei Aussagen sind äquivalent.

$$\begin{aligned} F \text{ streng konvex auf } X &\Leftrightarrow \\ F' \text{ streng monoton auf } X &\Leftrightarrow \\ F(v) - F(u) &> \langle F'(u), v - u \rangle \text{ für alle } u, v \in X, \text{ wenn } u \neq v. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Wenn F' stark monoton ist, dann folgt wegen des Satzes 2.42 auch die gleichmäßige Monotonie. Wenn jetzt ein Operator F' gleichmäßig monoton ist, dann hat das dazugehörige Funktional F folgende Eigenschaft.

Korollar 2.62. [24, S. 248] Wenn unter den Voraussetzungen der Proposition 2.61 F' gleichmäßig monoton ist,

$$\langle F'(v) - F'(u), v - u \rangle \geq c \|v - u\|^p \quad \text{für alle } u, v \in X, \tag{2.36}$$

für fixe Zahlen $p > 1$, $c > 0$, dann gilt

$$F(v) - F(u) \geq \langle F'(u), v - u \rangle + \frac{c}{p} \|v - u\|^p.$$

Wegen der Bedingung (2.35) ist F streng konvex und koerzitiv.

Auch mit höheren Variationen aus der Definition 2.23 kann ein Funktional F beschrieben werden. Wenn die zweite Variation $\delta^2 F(u; h)$ folgende Eigenschaften hat

$$\delta^2 F(u; h) \geq 0, \quad \text{für alle } u, h \in X, \quad (2.37)$$

$$\delta^2 F(u; h) > 0, \quad \text{für alle } u, h \in X, h \neq 0, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 F(u; h) &\geq c \|h\|^p, \quad \text{für alle } u, h \in X \text{ und feste } p > 1, c > 0, \\ t \mapsto \delta^2 F(u + t(v - u); v - u) &\text{ stetig auf } [0, 1] \text{ für alle } u, v \in X, \end{aligned} \quad (2.39)$$

gilt das folgende Korollar.

Korollar 2.63. [24, S. 248] *Existiert unter den Voraussetzungen der Proposition 2.61 auch die zweite Variation $\delta^2 F(u; h)$ für alle $u, h \in X$ dann gilt*

$$(2.37) \Rightarrow F \text{ konvex auf } X, \quad (2.40)$$

$$(2.38) \Rightarrow F \text{ streng konvex auf } X, \quad (2.41)$$

$$(2.39) \Rightarrow (2.36) \text{ gilt und Korollar 2.62 ist gültig.} \quad (2.42)$$

Für ein konvexes Funktional hat man einen Eindeutigkeitssatz und eine Charakterisierung durch monotone Operatoren. Sie sind, vergleiche mit Korollar 2.62, sogar unter gewissen Bedingungen koerzitiv. Gerade dieser letzte Begriff wird benötigt um einen Existenzsatz für eine Minimallösung zu erhalten. Ein konvexes Funktional reicht aber dafür nicht aus.

2.3.2 Konvexe unterhalbstetige Funktionale

Mit der Definition eines konvexen unterhalbstetigen Funktionals folgen danach Variationsungleichungen, die als Charakterisierung der Lösungsmenge der beiden Modelle (1.43) und (1.44) dienen. Die Verbindung mit verallgemeinerten Ableitungen als Charakterisierung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Minimierung dieses Funktionals und dessen Zusammenhang mit maximalmonotonen Operatoren finden sich im nächsten Abschnitt 2.4.

Definition 2.64. [24, S. 149] Seien $F : M \subseteq X \rightarrow [-\infty, \infty]$ und X ein Banach-Raum gegeben. Das Funktional F ist folgenunterhalbstetig im Punkt $u \in M$ genau dann, wenn für jede Folge (u_n) in M $F(u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf F(u_n)$ gilt, während $u_n \rightarrow u$ und $n \rightarrow \infty$.

In der Definition 2.64 lautet der Terminus schwach folgenunterhalbstetig genau dann, wenn $F(u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf F(u_n)$ für jede Folge (u_n) in M gilt, während $u_n \rightharpoonup u$ und $n \rightarrow \infty$. Parallel zur Definition 2.64 hat man mit der Menge $M_r = \{u \in M : F(u) \leq r\}$

Definition 2.65. [24, S. 150] Sei $F : M \subseteq X \rightarrow [-\infty, \infty]$ gegeben. Ist X ein topologischer Raum, dann ist F unterhalbstetig genau dann, wenn M_r bezüglich M für alle $r \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Um diese Definitionen später charakterisieren zu können, kann für Banach-Räume die Äquivalenz der Definitionen gezeigt werden.

Proposition 2.66. [24, S. 150] Für $F : M \subseteq X \rightarrow [-\infty, \infty]$ auf einem Banach-Raum X gilt:

- Die Definitionen unterhalbstetig und folgenunterhalbstetig sind äquivalent.
- Wenn M abgeschlossen und konvex und F konvex ist, dann sind die Definitionen unterhalbstetig, folgenunterhalbstetig und schwach folgenunterhalbstetig äquivalent.

Dazu passend gelten für ein schwach folgenunterhalbstetiges Funktional diese Äquivalenzen.

Proposition 2.67. [24, S. 235] Das Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist schwach folgenunterhalbstetig auf dem reellen reflexiven Banachraum X , wenn eine von den folgenden sechs Bedingungen erfüllt ist,

$$F \text{ konvex und unterhalbstetig,} \quad (2.43)$$

$$\delta^2 F(u; h) \geq 0 \text{ für alle } u, h \in X, F' \text{ ist eine } G\text{-Ableitung,} \quad (2.44)$$

$$F' \text{ monoton,} \quad (2.45)$$

$$F' \text{ pseudomonoton und lokal beschränkt,} \quad (2.46)$$

$$F' \text{ demistetig und genügt } (S)_+, \quad (2.47)$$

$$F' \text{ lokal beschränkt und genügt } (P). \quad (2.48)$$

Wenn eine Variation δ^2 oder eine G -Ableitung F' in einer Bedingung vorkommt, wird deren Existenz auf X vorausgesetzt.

Die nächste Proposition beinhaltet Rechenregeln zwischen mehreren unterhalbstetigen Funktionalen.

Proposition 2.68. [24, S. 164] Wenn $F, G, F_\alpha : M \subseteq X \rightarrow [-\infty, \infty]$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ unterhalbstetig auf einem reellen Banachraum X sind, dann sind $F + G, \sup(F, G), \inf(F, G)$ und $\sup_\alpha F_\alpha$ unterhalbstetig. FG ist nur dann unterhalbstetig, wenn $F, G \geq 0$. Die Ausdrücke $F + G$ und FG müssen definiert sein, das heißt Ergebnisse, die $\infty - \infty$ oder $0 \cdot \infty$ enthalten, werden ausgeschlossen.

Außerdem haben unterhalbstetige Funktionale eine vorteilhafte Bedingung, wenn man zeigen will, dass das Funktional zusätzlich stetig ist.

Proposition 2.69. [24, S. 383] *Wenn das Funktional $F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ unterhalbstetig auf einem reellen lokal konvexen Raum X ist, dann gelten folgende Aussagen.*

$$\begin{aligned} F \text{ stetig in } u \text{ und } F(u) < \infty \text{ ist äquivalent zu} \\ F \text{ von oben beschränkt auf einer Umgebung } U(u) \text{ von } u. \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} F \text{ stetig auf der offenen Menge } M, \text{ wenn} \\ F \text{ endlich auf } M \text{ und stetig in einem beliebigen Punkt aus } M. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Daraus folgt die Stetigkeit eines konvexen unterhalbstetigen Funktionals unter sehr geringen Voraussetzungen.

Korollar 2.70. [24, S. 383] *Jedes konvexe unterhalbstetige Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen konvexen Menge M des reellen Banachraumes X ist stetig auf $\text{int}M$.*

Ist ein Funktional konvex laut dem Abschnitt 2.3.1 und unterhalbstetig oder schwach folgenunterhalbstetig, gilt der nächste Satz.

Satz 2.71. *Ein Funktional $F : M \subset X \rightarrow [-\infty, \infty]$ auf der nichtleeren abgeschlossenen konvexen Untermenge M eines reellen reflexiven Banachraums X , das die Koerzitivität erfüllt,*

$$\lim_{\substack{x \in M \\ \|x\|_X \rightarrow \infty}} F(x) = \infty,$$

besitzt ein Minimum, wenn eine der folgenden Eigenschaften vorliegt,

1. *F ist konvex und unterhalbstetig.*
2. *F ist schwach folgenunterhalbstetig.*

Beweis. Siehe [5, S. 31], [24, S. 155]. □

Die Koerzitivität der Funktion garantiert, wenn eine Folge existiert, dass sie in der Menge M beschränkt ist. Die Kombination aus Reflexivität des Banachraumes und die jetzt beschränkte, konvexe und abgeschlossene Menge liefert wegen des Satzes 2.19 eine schwach folgenkompakte Menge. Diese Menge ist im Beweis fundamental.

Betrachtet man zum Beispiel die Propositionen 2.61 und 2.67, wird immer die Existenz einer G-Ableitung vorausgesetzt. Daher behandeln die nächsten beiden Propositionen hinreichende Bedingungen, die eine G-Ableitung garantieren.

Definition 2.72. [24, S. 234] Sei X ein reeller Banachraum. Der Operator $A : X \rightarrow X^*$ ist ein Potentialoperator genau dann, wenn ein G-differenzierbares Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $A = F'$. Dann ist F ein Potential von A . Wenn A bereits hemistetig ist, dann sei $F_A : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_A(u) := \int_0^1 \langle A(tu), u \rangle dt,$$

das Pseudopotential von A . Der Integrand ist stetig wegen der Hemistetigkeit von A .

Dieser Begriff legt fest, dass der Operator A bereits eine G-Ableitung von F ist oder zumindest ein Pseudopotential erklärt. Die nächste Proposition führt Bedingungen an, die aus einem Pseudopotential einen Potentialoperator A hervorgehen lässt.

Proposition 2.73. [24, S. 234] *Wenn $A : X \rightarrow X^*$ ein hemistetiger Operator auf dem reellen Banachraum X ist, gelten folgende zwei Aussagen, Integralkriterium. A ist ein Potentialoperator genau dann, wenn*

$$F_A(u) - F_A(v) = \int_0^1 \langle A(v + t(u - v)), u - v \rangle dt, \text{ für alle } u, v \in X, \quad (2.51)$$

gilt. Dann ist das Pseudopotential F_A ein Potential und jedes beliebige Potential für A unterscheidet sich nur durch eine Konstante von F_A .

Differenzierbarkeitskriterium. Wenn die G-Ableitung A' auf X mit

$$(t, s) \mapsto \langle A'(w + tu + sv)x, y \rangle \text{ stetig auf } [0, 1] \times [0, 1] \text{ für alle } u, v, w, x, y \in X \quad (2.52)$$

existiert, dann ist A ein Potentialoperator genau dann, wenn

$$\langle A'(u)v, w \rangle = \langle A'(u)w, v \rangle \text{ für alle } u, v, w \in X \quad (2.53)$$

gilt.

Wenn nun eine G-Ableitung existiert, dann soll sie zusätzlich noch monoton sein. Das nennt man schließlich einen monotonen Potentialoperator.

Proposition 2.74. [24, S. 250] *Sei $A : X \rightarrow X^*$ ein Operator auf dem reellen reflexiven Banachraum X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist ein monotoner Potentialoperator.*
2. *A ist monoton, hemistetig und (2.51) gilt.*
3. *A ist ein Potentialoperator, das heißt $A = F'$ und F aus der Definition 2.72 ist konvex und schwach folgenunterhalbstetig auf X .*

Existiert eine demistetige G-Ableitung A' auf X , dann sind folgende Aussagen äquivalent, wobei die Reflexivität des Raumes X nicht benötigt wird,

1. *A ist ein monotoner Potentialoperator.*
2. *Für A' gilt (2.53) mit $\langle A'(w)h, h \rangle \geq 0$ für alle $w, h \in X$.*

Wenn A ein monotoner Potentialoperator ist, ist A auch demistetig. Die schwache Folgenunterhalbstetigkeit kann wegen der Proposition 2.66 durch die Eigenschaft Unterhalbstetigkeit ersetzt werden.

Später kann diese Proposition dazu verwendet werden, um Kriterien zur Bestimmung der G-Ableitung bei konkreten Problemstellungen zu erhalten.

2.4 Konvexe Optimierung

Die Konvexe Optimierung liefert Aussagen über die Äquivalenz einer Potentialformulierung mit einem konvexen unterhalbstetigen Funktional und einer Variationsungleichung, in der maximalmonotone Operatoren vorkommen. Die Potentialformulierung soll dabei minimiert werden. Als Startpunkt wird die folgende Proposition vorgestellt.

Proposition 2.75. [24, S. 249] *Wenn $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein konvexes G-differenzierbares Funktional auf dem reellen Banachraum X ist, dann*

$$F \text{ besitzt ein Minimum in } u \Leftrightarrow F'(u) = 0.$$

Jedoch führen funktionalanalytische Methoden dazu, dass die Potentialformulierung des Modells (1.43) nicht über den ganzen Funktionenraum X , sondern über eine konvexe Teilmenge betrachtet wird.

2.4.1 Konvexes Funktional auf einer konvexen Menge

Im nächsten Satz kommen nun Variationsungleichungen vor. Die zuvor genannte Proposition 2.75 ist darin enthalten, wenn die G-Ableitung existiert. Denn ist M ein linearer Raum, dann gilt $w := v - u$ und $w \in M$. Aber es gilt auch für das Element $-w \in M$. Die Ungleichung (2.56) für eine Lösung u ist nur bei gleich Null erfüllt.

Satz 2.76. [24, S. 363] *Für die Existenzaussagen gelten folgende Voraussetzungen:*

$$F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist schwach folgenunterhalbstetig.} \quad (2.54a)$$

$$X \text{ ist ein reeller reflexiver Banachraum.} \quad (2.54b)$$

$$M \text{ ist abgeschlossen, konvex, nichtleer.} \quad (2.54c)$$

$$M \text{ ist beschränkt, oder für jede Folge } (u_n) \text{ aus } M \text{ gilt,} \quad (2.54d)$$

$$\text{wenn } \|u_n\| \rightarrow \infty \text{ und } n \rightarrow \infty, \overline{\lim} F(u_n) - \langle b, u_n \rangle = \infty.$$

Das zu betrachtende Minimierungsproblem lautet

$$\min_{u \in M} F(u) - \langle b, u \rangle = \alpha \quad (2.55)$$

mit der zugehörigen Variationsungleichung

$$\langle F'(u) - b, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in M \quad (2.56)$$

Sei $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional auf der konvexen nichtleeren Menge M des reellen lokal konvexen Raumes X und sei $b \in X^*$ ein vorgegebenes Element.

Notwendige Bedingung. Ist u eine Lösung von (2.55), dann

$$\delta_+ F(u; v - u) - \langle b, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in M, \quad (2.57)$$

wenn die linke Seite der Gleichung existiert. Wenn F' eine G-Ableitung auf M ist, dann sind (2.56) und die Variationsungleichung (2.57) äquivalent.

Äquivalenz. Ist F konvex und F' eine G -Ableitung auf M , dann ist das Minimierungsproblem (2.55) und die Variationsungleichung (2.56) äquivalent.

Eindeutigkeit. Ist F streng konvex auf M , dann besitzen (2.55) und (2.56) höchstens eine Lösung.

Existenz. Gelten die Voraussetzungen von (2.54), dann hat (2.55) eine Lösung. Ist F zusätzlich konvex, ist die Lösungsmenge von (2.55) abgeschlossen, konvex und beschränkt.

Die Voraussetzungen aus (2.54) spiegeln jene aus dem Existenzsatz 2.71 wider. Die Ungleichung (2.56) kann auch mit dem Korollar 2.56 analysiert werden. Wird die G -Ableitung vorausgesetzt, ist wegen der Proposition 2.74 diese, von einem konvexen Funktional stammend, monoton. Somit gelten alle Voraussetzungen des Korollars 2.56 und wegen der Existenz einer Lösung folgt diese dann aus der Ungleichung (2.56).

2.4.2 Subdifferenzial

Der Satz 2.76 reicht für die Variationsungleichung des Modells (1.44) nicht aus. Damit man mit Variationsmethoden und -ungleichungen den Reibungsterm beschreiben kann, benötigt man einen allgemeineren Begriff als den einer G -Ableitung. Das dazugehörige Funktional ist nicht differenzierbar. Aber es ist konvex und unterhalbstetig. Wenn man den Begriff des Subdifferenzials einführt, können für das Funktional notwendige und hinreichende Bedingungen zur dessen Charakterisierung gefunden werden. Bekannt ist der Begriff des Subdifferenzials aus dem Gebiet der konvexen Optimierung.

Das konvexe und unterhalbstetige Funktional $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit dem Werten $-\infty, \infty$ erweitert. Dabei muss das zu untersuchende Funktional von unten beschränkt sein, das heißt $-\infty < a < F(u)$, für alle $u \in X$, $a \in \mathbb{R}$, vergleiche [24, S. 382]. Betrachtet man ein Funktional $F: M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ eingeschränkt auf die Menge M , dann soll folgendes Minimierungsproblem gelöst werden,

$$\min_{u \in M} F(u) = \alpha.$$

X ist ein linearer Raum. Diese Aufgabenstellung beinhaltet Nebenbedingungen. Führt man stattdessen das Funktional

$$\overline{F}(u) := \begin{cases} F(u) & u \in M, \\ \infty & u \in X \setminus M, \end{cases} \quad (2.58)$$

ein, erhält man ohne Nebenbedingungen

$$\min_{u \in X} \overline{F}(u) = \alpha. \quad (2.59)$$

Die Indikatorfunktion $\chi_M(u)$

Definition 2.77. [24, S. 381] Wenn M eine Untermenge des lokal konvexen Raumes X ist, dann wird

$$\chi_M(u) := \begin{cases} 0 & u \in M, \\ \infty & u \in X \setminus M, \end{cases}$$

Indikatorfunktion genannt.

wird eine wichtige Rolle spielen, wenn die Einschränkung auf eine Untermenge M damit angegeben wird. Dazu folgen nun einige Eigenschaften.

Proposition 2.78. [24, S. 381] *Seien $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ und \bar{F} aus (2.58) gegeben. Wenn M eine Untermenge des lokal konvexen Raumes X ist, dann gilt*

$$\begin{aligned} M \text{ konvex} &\Leftrightarrow \chi_M(u) \text{ konvex,} \\ M \text{ abgeschlossen} &\Leftrightarrow \chi_M(u) \text{ unterhalbstetig,} \\ F \text{ konvex, } M \text{ konvex} &\Leftrightarrow \bar{F} \text{ konvex,} \\ F \text{ unterhalbstetig, } M \text{ abgeschlossen} &\Rightarrow \bar{F} \text{ unterhalbstetig.} \end{aligned}$$

Definition 2.79. [24, S. 385] Sei $F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf dem reellen lokal konvexen Raum X . $u^* \in X^*$ ist ein Subgradient von F im Element $u \in X$ genau dann, wenn $F(u) \neq \pm\infty$ und

$$F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle, \quad \text{für alle } v \in X, \quad (2.60)$$

gilt. Die Menge aller Subgradienten von F im Element u nennt man Subdifferenzial $\partial F(u)$. Wenn kein Subgradient im Element u existiert, dann wird $\partial F(u) = \emptyset$ gesetzt. Das gilt zum Beispiel für $F(u) = \pm\infty$. Ist $\partial F(u) \neq \emptyset$, gilt $F(u) > -\infty$ wegen (2.60).

Das Subdifferenzial wird eine notwendige und bei konvexen unterhalbstetigen Funktionalen sogar eine hinreichende Charakterisierung für das Minimierungsproblem (2.59) möglich machen. Zuerst folgen aber ein Existenzsatz und benötigte Rechenregeln für Subdifferenziale.

Satz 2.80. [24, S. 387] *Wenn das Funktional $F : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ auf dem reellen lokal konvexen Raum X konvex ist und ein Element $u \in X$ gegeben ist, dann gilt,*

$$\begin{aligned} \partial F(u) &\text{ konvex, schwach}^* \text{ abgeschlossen,} \\ F \text{ endlich und stetig in } u &\Rightarrow \partial F(u) \text{ nichtleer, schwach}^* \text{ kompakt.} \end{aligned}$$

Bereits aus der Definition 2.79 folgen die Faktorregel und ein Teil der Summenregel. Dabei gilt für die Funktionale $F, F_1, F_2 : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ und eine reelle Zahl $\lambda > 0$, dass

$$\begin{aligned} \partial(\lambda F(u)) &= \lambda \partial F(u), \\ \partial(F_1 + F_2)(u) &\supseteq \partial F_1(u) + \partial F_2(u). \end{aligned}$$

Satz 2.81. [24, S. 389] *Die Summenregel*

$$\partial(F_1 + \cdots + F_n)(u) = \partial F_1(u) + \cdots + \partial F_n(u) \quad (2.61)$$

existiert dann für alle $u \in X$, wenn folgende Aussagen erfüllt sind.

1. $F_1, \dots, F_n : X \rightarrow]-\infty, \infty]$ sind konvexe Funktionale auf einem reellen lokal konvexen Raum X , $n \geq 2$.
2. Es muss ein $u_0 \in X$ existieren, sodass alle F_i , $i = 1, \dots, n$, endlich und alle F_i , $i = 1, \dots, n-1$, stetig in u_0 sind. F_n jedoch muss nicht zwingend stetig sein.

Auch eine Kettenregel kann folgenderweise erklärt werden.

Proposition 2.82. [24, S. 403] Sei $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und unterhalbstetig, $L : X \rightarrow Y$ linear und stetig, X und Y seien reelle lokal konvexe Räume und F sei endlich, $F < \infty$, und stetig in einem beliebigen Punkt.

Daraus folgt die Kettenregel für Subdifferenziale mit den oben genannten Voraussetzungen,

$$\partial(FL)(u) = L^* \partial F(L(u)) \quad \text{für alle } u \in X.$$

Das Subdifferenzial aus der Definition 2.79 stellt eine Verallgemeinerung des Differenzialbegriffs dar. Die folgende Proposition veranschaulicht dies.

Proposition 2.83. [24, S. 387] Wenn das Funktional $F : X \rightarrow]-\infty, \infty]$ auf dem reellen lokal konvexen Raum X konvex und in einem Element $u \in X$ endlich ist, dann gelten folgende Aussagen.

Wenn $F'(u)$ eine G-Ableitung ist, dann gilt

$$\partial F(u) = \{F'(u)\}. \quad (2.62)$$

Wenn F in u stetig ist und $\partial F(u)$ enthält nur ein Element, dann existiert die G-Ableitung $F'(u)$ und (2.62) gilt.

Die G-Ableitung ist hinreichend für die Existenz eines Subdifferenzials.

Neben der Einführung einiger Rechenregeln soll mit Hilfe des Subdifferenzials das Minimierungsproblem (2.59) charakterisiert werden.

Proposition 2.84. [24, S. 387] Sei $F : X \rightarrow]-\infty, \infty]$ ein Funktional auf einem reellen lokal konvexen Raum X , wobei $F \neq \infty$. Das Element $u \in X$ ist eine Lösung von

$$\inf_{u \in X} F(u) = \alpha \quad (2.63)$$

genau dann, wenn die Euler-Gleichung erfüllt ist,

$$0 \in \partial F(u). \quad (2.64)$$

Da später der Hauptsatz der konvexen Optimierung eingeführt und jener auf die Variationsformulierung der Modelle (1.43) und (1.44) angewendet werden soll, benötigt man einige Beispiele konkreter Subdifferenziale für die in dieser Arbeit ausgewählten Funktionale.

Das wichtigste Subdifferenzial in dieser Arbeit ist die Stützfunktionalabbildung. Damit kann das Subdifferenzial der Indikatorfunktion χ_M aus der Definition 2.77 beschrieben werden.

Definition 2.85. [23, S. 175] Sei die abgeschlossene konvexe nichtleere Menge $M \subseteq X$, X ist ein Banachraum, gegeben. Ein Element $f \in X^*$ heißt Stützfunktional zu M in $u \in M$ genau dann, wenn

$$\langle f, u \rangle \geq \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in M. \quad (2.65)$$

Die Menge der zu $u \in M$ gehörigen Stützfunktionale nennt man $\partial\chi(u)$.

Die Abbildung $\partial\chi : M \rightarrow 2^{X^*}$, $u \mapsto \partial\chi(u)$ heißt Stützfunktionalabbildung.

Proposition 2.86. [23, S. 175] *Es gelten die Voraussetzungen der Definition 2.85. Die Stützfunktionalabbildung $\partial\chi : M \rightarrow 2^{X^*}$ ist maximalmonoton.*

Jetzt folgt wegen der Definition 2.79 das Subdifferenzial der Indikatorfunktion χ_M im Element u des Banachraumes X .

Beispiel 2.1. [24, S. 385] Die Indikatorfunktion $\chi_M : X \rightarrow \{0, \infty\}$, $u \mapsto \chi_M(u)$, besitzt folgendes Subdifferenzial im Element $u \in X$,

$$\partial\chi_M(u) = \begin{cases} \partial\chi(u) & u \in M \\ \emptyset & u \notin M \end{cases}, \quad (2.66)$$

wenn $M \subseteq X$ konvex und X ein reeller Banachraum ist.

Wegen (2.65) gilt immer $0 \in \partial\chi_M(u)$ für $u \in M$. Diese Eigenschaft ist bedeutend, wenn eine Variationsungleichung eine Lösung laut dem Satz 2.55 haben soll. Weiters ist $\partial\chi_M(u) = \{0\}$, wenn $u \in \text{int } M$. Wenn $u \in \partial M$ und $\text{int } M$ nichtleer ist, kann ein Funktional $u^* \neq 0$ gefunden werden, das aus der Menge $\partial\chi_M(u)$ kommt. Dem liegt ein Trennungssatz der konvexen Analysis zugrunde [24, S. 171, Prop. 39.4]. Wenn die Menge M ein linearer Unterraum ist, folgt

$$\partial\chi_M(u) = M^\perp \quad \text{für alle } u \in M.$$

Das heißt, $\partial\chi_M(u) = \{u^* \in X^* : \langle u^*, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in M\}$, wenn $u \in M$.

Auch ein Subdifferenzial der Norm eines Banachraumes $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|$, existiert.

Beispiel 2.2. [7, S. 127] Die Norm eines reellen Banachraumes X $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|$, besitzt folgendes Subdifferenzial im Element $u \in X$,

$$\begin{aligned} u \neq 0 : \partial\|u\| &= \{u^* \in X^* : \langle u^*, u \rangle = \|u\| \text{ und } \|u^*\|_* = 1\}, \\ u = 0 : \partial\|0\| &= \{u^* \in X^* : \|u^*\|_* \leq 1\}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Dabei ist die Norm von X konvex und schwach folgenunterhalbstetig.

Beispiel 2.3. [24, S. 386] Für einen reellen normierten Raum X sei das Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto 2^{-1}\|u\|^2$, erklärt. Das Subdifferenzial im Element u lautet

$$u^* \in \partial F(u) \Leftrightarrow \langle u^*, u \rangle = \|u^*\| \|u\|, \quad \|u^*\| = \|u\|. \quad (2.68)$$

Dabei gilt für einen reellen Hilbertraum X , dass das Subdifferenzial durch $\partial F(u) = \{u\}$ gegeben ist. Das heißt X^* wird mit X identifiziert, vergleiche mit Satz 2.22.

Nun folgt die Definition der Dualitätsabbildung.

Definition 2.87. [24, S. 399] Sei X ein reeller Banachraum. Das Subdifferenzial der Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto 2^{-1}\|u\|^2$, definiert im Element u die Dualitätsabbildung, $J : X \rightarrow 2^{X^*}$, $J(u) = \partial F(u)$. Ist die Menge $J(u)$ einelementig, das heißt $J(u) = \{v_u\}$ für alle $u \in X$, dann setzt man $J(u) = v_u$ und $J : X \rightarrow X^*$.

Proposition 2.88. [24, S. 400] Die Dualitätsabbildung $J : X \rightarrow 2^{X^*}$ ist maximalmonoton. Die Menge $J(u)$ beinhaltet alle $u^* \in X^*$, so dass $\langle u^*, u \rangle = \|u^*\| \|u\|$, $\|u^*\| = \|u\|$. Weiters ist $J(u)$ konvex, nichtleer und schwach* kompakt.

In Hilberträumen entspricht J der Rieszschen Abbildung \mathcal{J} . Weitere Eigenschaften erhält die Dualitätsabbildung J durch zusätzliche geometrische Bedingungen und Ableitungsbegriffe der Norm eines Banachraumes X . Mit der oben genannten Proposition 2.88 ist die Basis für weitere Eigenschaften im Zusammenhang mit der Konvexität, Definition 2.37, und Glattheit, Definition 2.38, gegeben.

Proposition 2.89. [24, S. 400] Sei X ein reeller Banachraum und sei $F(u) = 2^{-1}\|u\|^2$ gegeben.

Wenn X^* streng konvex ist, dann existiert die G -Ableitung $F'(u)$ und $J(u) = F'(u)$ für alle $u \in X$. Dabei ist $J(u)$ einelementig.

Wenn X^* uniform konvex ist, dann existiert die F -Ableitung $F'(u)$ und $J(u) = F'(u)$ für alle $u \in X$. Die Abbildung $J : X \rightarrow X^*$ ist gleichmäßig stetig auf jeder beschränkten Menge von X .

Wenn X und X^* separabel, reflexiv und streng konvex sind, dann ist $J : X \rightarrow X^*$ bijektiv, streng monoton, koerzitiv, beschränkt, demistetig und ungerade. Die Inverse $J^{-1} : X^* \rightarrow X$ ist zur Dualitätsabbildung von X^* auf $X^{**} = X$ äquivalent. Sind X und X^* auch noch lokal uniform konvex, dann sind J und J^{-1} stetig auf X beziehungsweise auf X^* .

Nun folgt der Hauptsatz der konvexen Optimierung.

Satz 2.90. [24, S. 387] Sei das Funktional $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und F wird auf X so erweitert, dass $F(v) = \infty$, wenn $v \notin M$. Die Menge M sei nichtleer und konvex auf dem reellen lokal konvexen Raum X .

Das Minimierungsproblem

$$\inf_{u \in M} F(u) = \alpha \quad (2.69)$$

soll betrachtet werden. Parallel dazu werden die Lösbarkeitsbedingung

$$0 \in \partial F(u) + \partial \chi_M(u), \quad (2.70)$$

die zu folgender Darstellung äquivalent ist,

$$\begin{aligned} \exists u^* \in X^*, \\ F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle \text{ und} \\ \langle u^*, v - u \rangle \geq 0, \quad v \in M, \end{aligned} \quad (2.71)$$

und die Variationsungleichung,

$$\delta_+ F(u; v - u) \geq 0, \quad \text{für alle } v \in M, \quad (2.72)$$

notiert. X^* ist der Dualraum von X . Unter den oben genannten Voraussetzungen existiert immer die linke Seite der Gleichung (2.72).

Charakterisierung der Lösung. Jede der drei Bedingungen (2.70), (2.71) und (2.72) ist notwendig und hinreichend für eine Lösung $u \in M$ des Minimierungsproblems (2.69). *Struktur der Lösungsmenge \mathcal{L} von (2.69).* \mathcal{L} ist konvex. Wenn zusätzlich F unterhalbstetig und M abgeschlossen sind, ist \mathcal{L} abgeschlossen. Jedes lokale Minimum von F auf M ist auch ein globales Minimum von F auf M .

Eindeutigkeit. (2.69) hat höchstens eine Lösung, wenn F streng konvex auf M ist.

Da das Subdifferenzial über lineare stetige Funktionale und deren dualen Operator definiert ist, wurden die Dualabbildungen in Hilberträumen, vergleiche Satz 2.22, und in Banachräumen, siehe Definition 2.87, angegeben. Sehr oft können in Anwendungen Elemente aus dem Dualraum X^* durch diese Dualabbildungen konstruiert werden.

2.4.3 Variationsungleichungen mit einer Bilinearform und einem Sudifferenzial des konvexen, unterhalbstetigen Funktionals

In dieser Arbeit wird mit dem Begriff einer Bilinearform gearbeitet.

Definition 2.91. [23, S. 39] Sei X ein reeller Banachraum. Eine Bilinearform ist eine Abbildung

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto a(u, v),$$

die in jedem Argument linear ist. Die folgenden Definitionen beziehen sich auf alle $u, v \in X$.

a ist beschränkt $\Leftrightarrow |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$, $c > 0$, fest.

a ist positiv $\Leftrightarrow a(u, u) \geq 0$.

a ist streng positiv $\Leftrightarrow a(u, u) > 0$ für $u \neq 0$.

a ist stark positiv $\Leftrightarrow a(u, u) \geq d \|u\|^2$, $d > 0$, fest.

a ist symmetrisch $\Leftrightarrow a(u, v) = a(v, u)$.

a ist vollstetig $\Leftrightarrow (u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v) \Rightarrow a(u_n, v_n) \rightarrow a(u, v)$.

Eine Bilinearform in einem reellen Banachraum besitzt eine äquivalente Darstellung als linearer stetiger Operator.

Satz 2.92. [23, S. 40] Sei X ein reeller Banachraum.

Zu jeder beschränkten Bilinearform $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ gehört ein linearer stetiger Operator $A : X \rightarrow X^*$, der eindeutig festgelegt ist.

Umgekehrt gehört zu jedem linearen stetigen Operator $A : X \rightarrow X^*$ eine beschränkte Bilinearform $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, die eindeutig festgelegt ist.

Ist X reflexiv, dann gilt a vollstetig $\Leftrightarrow A$ vollstetig.

Der Operator $A : X \rightarrow X^*$ heißt positiv (stark positiv, streng positiv, symmetrisch) genau dann, wenn die Bilinearform $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ diese Eigenschaft besitzt.

Bezüglich der Theorie der monotonen Operatoren bedeutet das, ist ein linearer Operator positiv (stark positiv, streng positiv), ist er aus der Klasse der monotonen, vergleiche dazu die Definition 2.41. Ist die Bilinearform auch noch symmetrisch, gilt das nächste Korollar.

Korollar 2.93. [24, S. 250] *Es gelten die Voraussetzungen und Aussagen der Proposition 2.74. Der Operator A aus dem Satz 2.92 einer beschränkten positiven symmetrischen Bilinearform im Sinne der Definition 2.91 beschreibt einen monotonen Potentialoperator.*

Der Startpunkt ist die Potentialformulierung,

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u). \quad (2.73)$$

Sie besitzt laut [10, S. 77] die G-Ableitung

$$\langle F'(u), v \rangle = a(u, v) - f(v), \quad (2.74)$$

wenn gilt

$$X \text{ ist ein reeller separabler reflexiver Banachraum,} \quad (2.75a)$$

$$V \subset X \text{ ist ein linearer Unterraum,} \quad (2.75b)$$

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist bilinear, symmetrisch, beschränkt, koerzitiv,} \quad (2.75c)$$

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, stetig.} \quad (2.75d)$$

Wegen der Korollare 2.93 und 2.74 ist das Funktional F konvex und schwach folgenun-
terhalbstetig, wenn die Voraussetzungen von (2.75) gelten. Dann folgt aus Proposition
2.75, dass ein Minimierungsproblem

$$\min_{u \in V} F(u) = \alpha \quad (2.76)$$

äquivalent zu der Gleichung

$$a(u, v) - f(v) = 0, \quad \text{für alle } v \in V, \quad (2.77)$$

ist. (2.76) hat zumindest eine Lösung laut dem Satz 2.71. In dieser Arbeit werden aber
Minimierungsprobleme der Funktionale

$$\min_{u \in M} F(u) = \alpha, \quad \min_{u \in V} \bar{F}(u) = \alpha, \quad \min_{u \in V} (F(u) + \chi_M) = \alpha, \quad (2.78)$$

vergleiche (2.59), betrachtet. Es sollen die Voraussetzungen

$$X \text{ ist ein reeller separabler reflexiver Banachraum,} \quad (2.79a)$$

$$V \subset X \text{ ist ein linearer Unterraum,} \quad (2.79b)$$

$$M \subset X \text{ ist eine abgeschlossene, konvexe, nichtleere Menge} \quad (2.79c)$$

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist bilinear, symmetrisch, beschränkt, koerzitiv,} \quad (2.79d)$$

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, stetig,} \quad (2.79e)$$

gelten. \bar{F} ist wie F konvex und schwach folgenunterhalbstetig, das gilt wegen der Proposition 2.78. Auch die Indikatorfunktion χ_M ist wegen der gleichen Proposition konvex und schwach folgenunterhalbstetig. Alle drei Problemstellungen aus (2.78) sind zu der Variationsungleichung

$$a(u, v - u) - f(v - u) \geq 0, \quad \text{für alle } v \in M \quad (2.80)$$

laut dem Satz 2.90 äquivalent und haben zumindest eine Lösung $u \in M$ laut Satz 2.71. Bindet man noch ein Funktional j ein,

$$\min_{u \in V} (F(u) + j(u) + \chi_M) = \alpha, \quad (2.81)$$

dabei gelten

$$X \text{ ist ein reeller separabler reflexiver Banachraum,} \quad (2.82a)$$

$$V \subset X \text{ ist ein linearer Unterraum,} \quad (2.82b)$$

$$M \subset X \text{ ist eine abgeschlossene, konvexe, nichtleere Menge} \quad (2.82c)$$

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist bilinear, symmetrisch, beschränkt, koerzitiv,} \quad (2.82d)$$

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, stetig,} \quad (2.82e)$$

$$j : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist konvex, unterhalbstetig,} \quad (2.82f)$$

$$\exists u_0 \in M, v_0 \in X^* \Rightarrow v_0 \in \partial j(u_0), \quad (2.82g)$$

dann ist (2.81) äquivalent zu, siehe Satz 2.90, vergleiche auch [24, S. 552,553],

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq f(v - u), \quad \text{für alle } v \in M. \quad (2.83)$$

(2.81) hat zumindest laut Satz 2.71 eine Lösung $u \in M$. Die Variationsungleichungen (2.80) und (2.83) bilden das Fundament für die Analysis der Modellgleichungen (1.43) und (1.44).

2.5 Variationsformulierung der Modelle

Die Ergebnisse der früheren Abschnitte werden nun auf die beiden Modelle (1.43) und (1.44) zugeschnitten. Dabei sollen sie danach die Bedingungen einer Variationsungleichung laut (2.80) und (2.83), und die Variationsungleichung selbst, erfüllen.

Ab hier gilt, dass Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_c$, $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_N \cap \bar{\Gamma}_c = \emptyset$ und $\Sigma := \text{int}(\Gamma - \Gamma_D)$, $\bar{\Gamma}_c \subset \Sigma$. Die Variationsungleichung des Signorini-Problems (1.42) kann in folgender Gestalt angegeben werden,

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \underline{u} \in K : \\ &a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j(\underline{u}, \underline{v}) - j(\underline{u}, \underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in K. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Der Funktionenraum K wird durch die Definition 2.7 festgelegt. Die symmetrische Bilinearform $a(\underline{u}, \underline{v})$ und die Linearform $f(\underline{v})$ aus [19], [10], [4], haben hier die Form

$$\begin{aligned} a(\underline{u}, \underline{v}) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\underline{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}) \, dx, \\ f(\underline{v}) &:= \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \underline{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}_N^{int}(\underline{v}) \, ds_x, \end{aligned}$$

und das nichtlineare Funktional $j(\cdot, \cdot)$, das die virtuelle Arbeit der Reibungskräfte charakterisieren soll, lautet [10, S. 269]

$$j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad j(\underline{u}, \underline{v}) := \int_{\Gamma_c} \nu_R |\pi_{c,n}^{int}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{u}))| |\boldsymbol{\gamma}_{c,\tau}^{int}(\underline{v})| \, ds_x. \quad (2.85)$$

Die Spurooperatoren kommen aus dem Abschnitt 2.1.

Wenn $\underline{u} \in K$ eine Lösung des klassischen Problems (1.42) ist, dann ist sie es auch für die Variationsformulierung (2.84), siehe [10]. Ob (2.84) aber überhaupt eine Lösung hat, ist von den Detailangaben der Problemstellung abhängig. Diese Thematik wird an dieser Stelle nicht mehr aufgegriffen.

2.5.1 Analysis des reibungsfreien Zustandes

Hier ist das Funktional $j \equiv 0$ für (2.84). Die Variationsungleichung reduziert sich auf

$$\begin{aligned} \text{Finde } \underline{u} \in K : \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in K. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Diese Formulierung ist laut [5, S. 29,30] äquivalent zu

$$\min_{\underline{v} \in K} F(\underline{v}) = \min_{\underline{v} \in K} \left(\frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - f(\underline{v}) \right). \quad (2.87)$$

(2.92) besitzt eine Lösung $\underline{u} \in K$ laut Satz 2.71, somit auch (2.86). Dabei muss für die Linearform f aus (2.86) gelten,

$$\underline{f} \in [H_0^{-1}(\Omega)]^d, \quad \underline{p} \in [H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)]^d. \quad (2.88)$$

gelten. Für $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus der Bilinearform a gelte (2.20). Dann ist F aus (2.92) beschränkt, konvex, unterhalbstetig und koerzitiv. Die Koerzitivität wird mit den Kornschen Ungleichungen, [19, S. 76-79], gezeigt.

Satz 2.94. [10, S. 117] *Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Sei F aus (2.92). Sei K ein nicht leerer, abgeschlossener und konvexer Unterraum von V aus Definition 2.7 mit $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$.*

Dann existiert eine eindeutige Lösung der Verschiebung $\underline{u} \in K$, die F in K minimiert. Das heißt,

$$F(\underline{u}) \leq F(\underline{v}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in K.$$

Weiters ist \underline{u} eine Lösung der Variationsungleichung,

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in K. \quad (2.89)$$

Für den Fall $\Gamma_D = \emptyset$ existiert ein eindeutiger Minimierer von F in K , wenn die Daten \underline{f} und \underline{p} die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \underline{p} \cdot \gamma_N^{int}(\underline{v}) \, ds_x < 0, \quad \text{für alle } \underline{v} \in K \cap \mathcal{R}, \underline{v} \neq \underline{0}$$

für die Starrkörperbewegungen aus dem Raum \mathcal{R} , siehe [19, S. 17], erfüllen.

2.5.2 Analysis des Signorini-Problems mit Trescascher Reibung

Es gelten (2.88) und für σ und ε aus der Bilinearform a (2.20). Der Ausdruck $\nu_R|\sigma_n|$ ist bei dieser Aufgabenstellung a priori gegeben. Das ist die vorgesehene Modifikation des Gesetzes (1.42e), das die Tangentialkontaktbedingungen beschreibt.

Dabei gilt $g_R := \nu_R|\sigma_n(\underline{u})|$ mit g_R aus dem Abschnitt 1.3. Das Funktional $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ aus (2.85) reduziert sich zu einem $j : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$j : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad j(\underline{v}) := \int_{\Gamma_c} g_R \|\gamma_{c,\tau}^{int}(\underline{v})\| \, ds_x, \quad (2.90)$$

wobei folgendes gelten soll,

$$g_R \in H_+^{-1/2}(\Gamma_c) := \{g \in H^{-1/2}(\Gamma_c) : \langle g, v \rangle \geq 0, \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_c), v \geq 0\}.$$

Die Variationsungleichung lautet nun

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \underline{u} \in K : \\ &a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j(\underline{v}) - j(\underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in K. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Dies ist laut [5, S. 29,30] äquivalent zu

$$\min_{\underline{v} \in K} F(\underline{v}) = \min_{\underline{v} \in K} \left(\frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - f(\underline{v}) + j(\underline{v}) \right). \quad (2.92)$$

Laut [10, S. 273] ist F konvex, unterhalbstetig und koerzitiv. Das heißt, (2.91) und (2.92) haben eine Lösung $u \in K$ laut dem Satz 2.71. Mit der Kompatibilitätsbedingung für $r \in \mathcal{R}$, $c > 0$,

$$j(r) - |f(r)| \geq c \|r\|_0, \quad (2.93)$$

gilt der folgende Satz.

Satz 2.95. [5, S. 30] *Sei $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ oder $\Gamma_D = \emptyset$ mit (2.93). Dann existiert zumindest eine Lösung $\underline{u} \in K$ der Variationsungleichung*

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j(\underline{v}) - j(\underline{u}) \geq f(\underline{v} - \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in K. \quad (2.94)$$

Im Fall $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ existiert eine eindeutige Lösung \underline{u} . Wenn $\Gamma_D = \emptyset$, ist die Lösung \underline{u} bis auf beliebige Starrkörperbewegungen $r \in \mathcal{R}$ eindeutig. Das heißt für zwei Lösungen \underline{u}_1 und \underline{u}_2 gilt $\underline{u}_1 - \underline{u}_2 \in \mathcal{R}$.

3 Diskrete Variationsformulierung

Wenn die Diskretisierung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ausgeführt wird und der Funktionenraum der Lösungen so gewählt wird, dass die Nichtdurchdringungsbedingung knotenweise gegeben ist, erhält man einen nichtkonformen Ansatz, dessen numerische Analysis zum Beispiel in [9] oder [10] behandelt wird. Obwohl der Ansatz nichtkonform ist, können damit stabile und effiziente Verfahren und Algorithmen erstellt werden.

In dieser Arbeit sollen die diskreten Variationsungleichungen der Modelle nicht direkt gelöst werden, sondern zuerst durch mehrere Schritte zu Gleichungssystemen umformuliert werden. Einer der ersten ist die Einführung von Lagrange-Multiplikatoren. Für diese zusätzlichen Variablen werden in weiterer Folge die Charakteristiken aufgezeigt. Dadurch ist eine knotenbasierte Erfüllung der Kontaktbedingungen möglich. Mit der Definition zweier Komplementärfunktionen und deren Eigenschaften können die diskreten Variationsungleichungen mit nichtlinearen Gleichungssystemen äquivalent gesetzt werden.

Jedoch sind deren Terme nicht im herkömmlichen Sinn ableitbar, sie beinhalten Max-Funktionen und euklidische Normen, sondern müssen über den Begriff der Newton-Differenzierbarkeit bearbeitet werden. Dies führt zu den halbglatten Newton-Verfahren, die für die beschriebenen Modelle der Arbeit Aktive-Mengen-Strategien ergeben. Damit werden danach Algorithmen zur Berechnung von numerischen Beispielen formuliert.

3.1 Raumdiskretisierung

Um die diskreten Variationsformulierungen aus (2.89) und (2.94) herleiten zu können, müssen die geeigneten Funktionenräume angegeben werden. Die Definitionen und Schreibweisen der Ansatzräume und der Triangulierung des Gebiets Ω in Dreiecks- ($d = 2$) oder in Tetraedernetze ($d = 3$) sind den Arbeiten [9], [19], [10] entnommen.

Die Triangulierung von Ω wird mit $\mathcal{T}_{h,\Omega}$ und dessen Rand mit $\Sigma_{h,\Gamma} := \partial\overline{\mathcal{T}}_{h,\Omega}$ benannt. Die Teile des Randes $\Sigma_{h,\Gamma}$, die den Rändern Γ_D , Γ_N , Γ_c des kontinuierlichen Problems entsprechen, werden mit $\Sigma_{h,D}$, $\Sigma_{h,N}$ und $\Sigma_{h,c}$ bezeichnet.

h_T ist der Durchmesser eines Elementes $T \in \mathcal{T}_{h,\Omega}$. Die Maschenweite h ist der größte Durchmesser aller Elemente,

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} h_T.$$

Die Triangulierung $\mathcal{T}_{h,\Omega}$ ist formregulär,

$$\rho_T \geq ch_T, \quad c > 0, \quad T \in \mathcal{T}_{h,\Omega},$$

wobei ρ_T der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises ($d = 2$) oder der eingeschriebenen Kugel ($d = 3$) des Elements T ist, und quasiuniform,

$$h_T \geq ch, \quad c > 0, \quad T \in \mathcal{T}_{h,\Omega}.$$

Der zur Triangulierung $\mathcal{T}_{h,\Omega}$ gehörige Ansatzraum wird mit $\mathcal{S}_h^1(\mathcal{T}_{h,\Omega})$ bestimmt, das sind die stückweisen linearen und global stetigen Funktionen. Der diskrete Funktionenraum lautet

$$V_0^h := \left\{ \underline{u}_h \in [\mathcal{S}_h^1]^d : \underline{u}_h = \underline{0} \text{ auf } \Sigma_{h,D} \right\}. \quad (3.1)$$

Die knotenbasierte nodale Basis $\text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M$, siehe [19, S. 174, 200], spannt den Raum V_0^h auf, sodass gilt

$$\underline{u}_h := \sum_{k=1}^M \underline{u}_h^k \varphi_k, \quad \underline{u}_h^k \in V_0^h. \quad (3.2)$$

Dabei bezeichnet M die Anzahl aller Knoten von $\mathcal{T}_{h,\Omega}$ und \underline{u}_h^k ist der Koeffizientenvektor des Knotens \underline{x}_k , $k = 1, \dots, M$.

3.1.1 Formulierung ohne Reibungsgesetz

Definition 3.1. Seien die Knotenindexmengen, die den Rändern $\Sigma_{h,D}$, $\Sigma_{h,N}$ und $\Sigma_{h,c}$ zugewiesen sind,

$$\begin{aligned} D_h &:= \left\{ i : i = 1, \dots, M, \underline{x}_i \in \Sigma_{h,D} \right\}, \\ N_h &:= \left\{ i : i = 1, \dots, M, \underline{x}_i \in \Sigma_{h,N} \right\}, \\ c_h &:= \left\{ i : i = 1, \dots, M, \underline{x}_i \in \Sigma_{h,c} \right\}. \end{aligned}$$

$\underline{n}^k := \underline{n}(\underline{x}_k)$, $k = 1, \dots, M$, ist der äußere Normalenvektor des starren Untergrunds $\underline{\Psi}$ mit dem Parameterwert $R_0(\underline{x}_k)$ der Abbildung R_t aus dem Abschnitt 1.3.1. Für eine Funktion $\underline{v}_h \in V_0^h$ werden in den Knoten $k \in c_h$ die Koeffizientenvektoren \underline{v}_h^k in eine Normal- und in eine Tangentialkomponente wie in (1.29) zerlegt. Diese lauten $v_n^k := \underline{v}_h^k \cdot \underline{n}^k$ und $\underline{v}_\tau^k := \underline{v}_h^k - v_n^k \cdot \underline{n}^k$. Die Normal- und Tangentialkomponente der Funktion \underline{v}_h auf dem Kontaktrand $\Sigma_{h,c}$ sind

$$v_{hn} := \sum_{k \in c_h} v_n^k \varphi_k, \quad \underline{v}_{h\tau} := \sum_{k \in c_h} \underline{v}_\tau^k \varphi_k, \quad k \in c_h.$$

Der gesuchte diskrete Funktionenraum, in dem die Lösung gesucht werden soll, lautet

$$K_h := \left\{ \underline{v}_h \in V_0^h : v_n^k + g_h^k \geq 0, \quad k \in c_h \right\}. \quad (3.3)$$

Das heißt, die Nichtdurchdringungsbedingung wird in der Folge innerhalb der Finite-Elemente-Approximation nur knotenweise erfüllt sein. Die Funktionen $g_h^k := g_0(\underline{x}_k)$ sind Punktauswertungen von der kontinuierlichen Funktion g_0 . \underline{v}_h^k ist der Koeffizientenvektor von \underline{v}_h . Mit dem Funktionenraum K_h aus (3.3) lässt sich die diskrete Variationsungleichung formulieren,

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \underline{u}_h \in K_h, \\ &a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h - \underline{u}_h) \geq f_h(\underline{v}_h - \underline{u}_h), \quad \underline{v}_h \in K_h. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) &= \int_{\mathcal{T}_{h,\Omega}} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}_h) \, dx + \int_{\mathcal{T}_{h,\Omega}} \lambda \operatorname{div} \underline{u}_h \operatorname{div} \underline{v}_h \, dx, \\ f_h(\underline{v}_h) &= \int_{\mathcal{T}_{h,\Omega}} \underline{f} \cdot \underline{v}_h \, dx + \int_{\Sigma_{h,N}} \underline{p} \cdot \underline{v}_h \, ds_x. \end{aligned}$$

Die Formulierung (3.4) ist der Startpunkt, um in den nächsten Abschnitten einen Lösungsalgorithmus zu designen.

3.1.2 Formulierung mit Trescaschem Reibungsgesetz

Die Funktion g_R , die den Reibungskoeffizienten ν_R und den Betrag des Normaldrucks $|\sigma_n|$ a priori ersetzt, soll die Voraussetzung $g_R \in H_+^{-1/2}(\Gamma_c)$ erfüllen. Dann lautet die diskrete Fassung des Funktionals $j(\underline{v})$, $\underline{v} \in V$,

$$j_h(\underline{v}_h) := \int_{\Sigma_{h,c}} g_R \|\underline{v}_{h\tau}\| \, ds_x. \quad (3.5)$$

Die euklidische Norm wird durch eine äquivalente Norm ersetzt, [9, S. 27],

$$\|\underline{v}_{h\tau}\|_h := \sum_{k \in c_h} \|\underline{v}_\tau^k\| \varphi_k.$$

Dadurch gilt zusätzlich

$$j_h(\underline{v}_h) := \int_{\Sigma_{h,c}} g_R \|\underline{v}_{h\tau}\|_h \, ds_x = \int_{\Sigma_{h,c}} g_R \sum_{k \in c_h} \|\underline{v}_\tau^k\| \varphi_k \, ds_x. \quad (3.6)$$

Das erlaubt später auch eine knotenbasierte diskrete Formulierung der Reibungskontaktbedingung. Die diskrete Variationsungleichung lautet

$$\begin{aligned} &\text{Finde } \underline{u}_h \in K_h, \\ &a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h - \underline{u}_h) + j_h(\underline{v}_h) - j_h(\underline{u}_h) \geq f_h(\underline{v}_h - \underline{u}_h), \quad \underline{v}_h \in K_h. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Formulierung (3.7) ist der Startpunkt, um in den nächsten Abschnitten einen Lösungsalgorithmus zu designen.

3.2 Knotenbasierte Umformulierung

Damit die Variationsungleichungen (3.4) und (3.7) auch gelöst werden können, sollen die Kontaktbedingungen knotenweise erfüllt sein. Um diese herleiten zu können, werden die diskreten Variationsungleichungen in eine Matrixschreibweise umformuliert.

3.2.1 Reibungsfrei

Die Einträge der Koeffizientenvektoren von \underline{u}_h und \underline{v}_h werden wie folgt global geordnet,

$$\begin{aligned}\underline{u} &:= [(\underline{u}_h^1)_1, \dots, (\underline{u}_h^1)_d, (\underline{u}_h^2)_1, \dots, (\underline{u}_h^2)_d, \dots, (\underline{u}_h^M)_1, \dots, (\underline{u}_h^M)_d]^\top, \\ \underline{v} &:= [(\underline{v}_h^1)_1, \dots, (\underline{v}_h^1)_d, (\underline{v}_h^2)_1, \dots, (\underline{v}_h^2)_d, \dots, (\underline{v}_h^M)_1, \dots, (\underline{v}_h^M)_d]^\top.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet M die Anzahl der Knoten der Gebietsvernetzung. Die Variationsungleichung lautet nun

$$(\underline{v}^\top - \underline{u}^\top) \mathbf{A} \underline{u} \geq (\underline{v}^\top - \underline{u}^\top) \underline{f} \quad (3.8)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{k,\ell}[i, j] &:= a_h(\varphi_i \underline{e}_k, \varphi_j \underline{e}_\ell), \quad 1 \leq k, \ell \leq d, 1 \leq i, j \leq M, \\ \underline{f}_k[i] &:= f_h(\varphi_i \underline{e}_k), \quad 1 \leq k \leq d, 1 \leq i \leq M.\end{aligned}$$

Dabei ist \underline{e}_k der k -te Einheitsvektor und φ_i die skalare nodale Basisfunktion des Knotens \underline{x}_k .

Die Reihenfolge der Einträge von \mathbf{A} und \underline{f} richten sich nach der Definition von \underline{u} und \underline{v} , sodass $(\underline{v}^\top - \underline{u}^\top) \mathbf{A} \underline{u} = a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h - \underline{u}_h)$ und $(\underline{v}^\top - \underline{u}^\top) \underline{f} = f_h(\underline{v}_h - \underline{u}_h)$ gilt. Somit sind $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dM \times dM}$ und $\underline{f}, \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^{dM}$.

Weiters wird eine Sortierung bezüglich Nichtkontakt- und Kontaktknoten vorgenommen. Für \underline{u} gilt

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix}$$

mit $\underline{u}_C := [\dots, (\underline{u}_h^k)_1, \dots, (\underline{u}_h^k)_d, \dots]^\top$ für alle $\underline{x}_k \in \Sigma_{h,c}$ und $\underline{u}_I := [\dots, (\underline{u}_h^i)_1, \dots, (\underline{u}_h^i)_d, \dots]^\top$ für alle $\underline{x}_i \in \overline{T}_{h,\Omega} \setminus \Sigma_{h,c}$. Ist $|c_h|$ die Anzahl der Knoten aus der Menge c_h , dann gilt $\underline{u}_C \in \mathbb{R}^{d|c_h|}$ und $\underline{u}_I \in \mathbb{R}^{d(M-|c_h|)}$.

Die Vektoren $\underline{v}, \underline{f}$ werden genau so sortiert mit

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v}_I \\ \underline{v}_C \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_C \end{pmatrix},$$

wobei $\underline{v}_I \in \mathbb{R}^{d(M-|c_h|)}$, $\underline{v}_C \in \mathbb{R}^{d|c_h|}$, $\underline{f}_I \in \mathbb{R}^{d(M-|c_h|)}$ und $\underline{f}_C \in \mathbb{R}^{d|c_h|}$. Die Matrix \mathbf{A} wird passend dazu angeglichen,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{IC} \\ \mathbf{A}_{CI} & \mathbf{A}_{CC} \end{pmatrix}.$$

Somit sind $\mathbf{A}_{II} \in \mathbb{R}^{d(M-|c_h|) \times d(M-|c_h|)}$, $\mathbf{A}_{IC} \in \mathbb{R}^{d(M-|c_h|) \times d|c_h|}$, $\mathbf{A}_{CI} \in \mathbb{R}^{d|c_h| \times d(M-|c_h|)}$, $\mathbf{A}_{CC} \in \mathbb{R}^{d|c_h| \times d|c_h|}$. Um zur knotenbasierten Nichtdurchdringungsbedingung zu gelangen, wird die sortierte diskrete Variationsungleichung betrachtet,

$$((\underline{v}_I - \underline{u}_I)^\top, (\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{IC} \\ \mathbf{A}_{CI} & \mathbf{A}_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix} \geq ((\underline{v}_I - \underline{u}_I)^\top, (\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top) \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_C \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Für $\underline{v}_I - \underline{u}_I$ liegen laut dem Funktionenraum (3.3) keine Beschränkungen vor. Wählt man $\underline{w}_I := \underline{v}_I - \underline{u}_I$ und $\underline{w}_C := \underline{v}_C - \underline{u}_C = 0$, erhält man daher die Gleichung

$$(\underline{w}_I)^\top (\mathbf{A}_{II} \quad \mathbf{A}_{IC}) \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \end{pmatrix} = (\underline{w}_I)^\top \underline{f}_I.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich bezüglich der Einträge von \underline{w}_I , wenn \mathbf{A}_{II} invertierbar ist, kann \underline{u}_I durch

$$\underline{u}_I = \mathbf{A}_{II}^{-1} [\underline{f}_I - \mathbf{A}_{IC} \underline{u}_C]$$

kondensiert werden. Die Variationsungleichung reduziert sich auf

$$(\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top \underbrace{[\mathbf{A}_{CC} - \mathbf{A}_{CI} \mathbf{A}_{II}^{-1} \mathbf{A}_{IC}]}_{=: \mathbf{S}} \underline{u}_C \geq (\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top \underbrace{(\underline{f}_C - \mathbf{A}_{CI} \mathbf{A}_{II}^{-1} \underline{f}_I)}_{=: \underline{b}}.$$

Mit dem vektoriiellen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ liefert die letzte Ungleichung

$$\langle \mathbf{S} \underline{u}_C, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle \geq \langle \underline{b}, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle. \quad (3.10)$$

Man betrachtet nun den Vektor der Lagrangemultiplikatoren $\underline{\lambda} := \underline{b} - \mathbf{S} \underline{u}_C$. Dieser hat die Gestalt

$$\underline{\lambda} = [\dots, (\underline{\lambda}^k)_1, \dots, (\underline{\lambda}^k)_d, \dots]^\top, \quad \underline{\lambda}^k \in \mathbb{R}^d, \quad k \in c_h,$$

und somit ist $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{d|c_h|}$ mit den knotenbasierten Vektoren $\underline{\lambda}^k$. Die Einträge $(\underline{\lambda}^k)_i$ sind die i -ten diskreten Lagrangemultiplikatoren des Knotens k . Damit kann die Variationsungleichung (3.10) mit

$$\langle \underline{\lambda}, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle \leq 0 \quad (3.11)$$

formuliert werden. Die Vektoren $\underline{\lambda}^k$ in den Knoten \underline{x}_k , $k \in c_h$, sollen knotenweise die Kontaktbedingungen widerspiegeln und die Ungleichung (3.11) erfüllen. Weiters werden die Vektoren $\underline{\lambda}^k$, $k \in c_h$, in die Normalkomponente $\lambda_n^k := \underline{\lambda}^k \cdot \underline{n}^k$ und in die Tangentialkomponente $\underline{\lambda}_\tau^k := \underline{\lambda}^k - \lambda_n^k \cdot \underline{n}^k$ zerlegt. Folgendes Lemma liefert die gewünschten Eigenschaften des Vektors $\underline{\lambda}$.

Lemma 3.2. Sei $\underline{v}_h, \underline{u}_h \in K_h$ und \underline{u}_h die eindeutige Lösung von (3.4), das heißt die Ungleichungen

$$v_n^k + g_h^k \geq 0, \quad u_n^k + g_h^k \geq 0, \quad k \in c_h, \quad (3.12)$$

sind erfüllt. Wird

$$\underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0} \quad (3.13)$$

gewählt, dann ist die knotenbasierte Nichtdurchdringungsbedingung

$$\begin{aligned} \lambda_n^k \leq 0, \quad u_n^k + g_h^k \geq 0, \quad \lambda_n^k(u_n^k + g_h^k) = 0, \\ \underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0}, \quad k \in c_h, \end{aligned} \quad (3.14)$$

äquivalent zur Ungleichung (3.11)

$$\langle \underline{\lambda}, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle = \sum_k \underline{\lambda}^k \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) \leq 0, \quad k \in c_h.$$

Beweis. Ist die Ungleichung (3.11) erfüllt, gilt

$$\sum_k \underline{\lambda}^k \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) = \sum_k \lambda_n^k \underline{n}^k \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) = \sum_k \lambda_n^k (v_n^k - u_n^k) \leq 0,$$

da mit (3.13) $\underline{\lambda}^k = \lambda_n^k \underline{n}^k + \underline{\lambda}_\tau^k = \lambda_n^k \underline{n}^k$ ist. Die Koeffizientenvektoren \underline{v}_h^k der Testfunktion \underline{v}_h sind frei wählbar. Nimmt man $\underline{v}_h^k = \underline{u}_h^k$, $k \neq j$, und $\underline{v}_h^j \cdot \underline{n}^j > \underline{u}_h^j \cdot \underline{n}^j$, $j \in c_h$, an, folgt

$$\sum_k \lambda_n^k (v_n^k - u_n^k) = \lambda_n^j \underbrace{(v_n^j - u_n^j)}_{>0} \leq 0$$

Somit ist $\lambda_n^k \leq 0$ für alle $k \in c_h$. Wählt man wieder $\underline{v}_h^k = \underline{u}_h^k$, $k \neq j$, aber $\underline{v}_h^j \cdot \underline{n}^j = -g_h^j$, $j \in c_h$, gilt mit (3.12)

$$0 \geq \sum_k \lambda_n^k \underline{n}^k \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) = \underbrace{\lambda_n^j}_{\leq 0} \underbrace{(-g_h^j - \underline{u}_h^j \cdot \underline{n}^j)}_{\leq 0} \geq 0$$

Somit ist $\lambda_n^k (\underline{u}_h^k \cdot \underline{n}^k + g_h^k) = 0$ für alle $k \in c_h$.

Gelte umgekehrt (3.14), ist

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}^k \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) &= (\lambda_n^k \underline{n}^k + \underline{\lambda}_\tau^k) \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) - \lambda_n^k g_h^k + \lambda_n^k g_h^k \\ &= \lambda_n^k \underline{n}^k \cdot \underline{v}_h^k - \lambda_n^k \underline{n}^k \cdot \underline{u}_h^k - \lambda_n^k g_h^k + \lambda_n^k g_h^k \\ &= \lambda_n^k \underline{n}^k \cdot \underline{v}_h^k + \lambda_n^k g_h^k \\ &= \lambda_n^k (\underline{n}^k \cdot \underline{v}_h^k + g_h^k). \end{aligned}$$

Das heißt, $\underline{\lambda}^k \cdot (\underline{v}_h^k - \underline{u}_h^k) \leq 0$, $k \in c_h$. Summiert man über k , folgt die Ungleichung (3.11). \square

Mit

$$(\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top \mathbf{S} \underline{u}_C + (\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top \underline{\lambda} = (\underline{v}_C - \underline{u}_C)^\top \underline{b}, \quad \underline{u}_C, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{d|c_h|},$$

kann ein System, in dem die knotenbasierte Nichtdurchdringungsbedingung eingearbeitet ist, für (3.9) formuliert werden.

Wählt man $\underline{w}_I := \underline{v}_I - \underline{u}_I$ und $\underline{w}_C := \underline{v}_C - \underline{u}_C$, hat (3.9) die neue Gestalt

$$((\underline{w}_I)^\top, (\underline{w}_C)^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{IC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{CI} & \mathbf{A}_{CC} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_C \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = ((\underline{w}_I)^\top, (\underline{w}_C)^\top) \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_C \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{D} := Id_{d|c_h|}$ gilt. Diese ist die Einheitsmatrix mit der Dimension $d|c_h|$. Das zu lösende System bezüglich eines Koeffizientenvergleichs von \underline{w} lautet

$$\mathbf{A} \underline{w} + \hat{\mathbf{D}} \underline{\lambda} = \underline{f}, \quad \hat{\mathbf{D}} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

wobei $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{dM \times d|c_h|}$ gilt, mit der knotenbasierten Nichtdurchdringungsbedingung aus (3.14)

$$\begin{aligned} \lambda_n^k &\leq 0, & u_n^k + g_h^k &\geq 0, & \lambda_n^k (u_n^k + g_h^k) &= 0, \\ \underline{\lambda}_\tau^k &= \underline{0}, & k &\in c_h. \end{aligned}$$

3.2.2 Trescasche Reibung

Die algebraische Darstellung

$$\langle \mathbf{A} \underline{u}, \underline{v} - \underline{u} \rangle + j_h(\underline{v}_C) - j_h(\underline{u}_C) \geq \langle \underline{f}, \underline{v} - \underline{u} \rangle$$

mit dem Funktional (3.6) kann wie (3.8) statisch kondensiert werden, weil der Reibungsterm und die Nichtdurchdringungsbedingung aus dem Raum K_h die restlichen Netzknoten aus $\overline{\mathcal{T}}_{h,\Omega} \setminus \Sigma_{h,c}$ nicht beschränken. Das Schurkomplementsystem lautet

$$\langle \mathbf{S} \underline{u}_C, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle + j_h(\underline{v}_C) - j_h(\underline{u}_C) \geq \langle \underline{b}, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle,$$

wobei \mathbf{S} und \underline{b} aus (3.10) sind. Mit dem Vektor $\underline{\lambda} := \underline{b} - \mathbf{S} \underline{u}_C$ kann die vorangegangene Ungleichung umgeschrieben werden,

$$\langle \mathbf{S} \underline{u}_C, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle + \langle \underline{\lambda}, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle = \langle \underline{b}, \underline{v}_C - \underline{u}_C \rangle, \quad (3.16a)$$

$$\sum_{k \in c_h} \langle \lambda_n^k \cdot \underline{n}^k, (v_n^k - u_n^k) \cdot \underline{n}^k \rangle \leq 0, \quad (3.16b)$$

$$\sum_{k \in c_h} b_k (\|\underline{v}_\tau^k\| - \|\underline{u}_\tau^k\|) - \langle \underline{\lambda}_\tau^k, \underline{v}_\tau^k - \underline{u}_\tau^k \rangle \geq 0, \quad (3.16c)$$

mit $b_k := \int_{\Sigma_{h,c}} g_R \varphi_k ds_x$.

Lemma 3.3. Sei $\underline{v}_h, \underline{u}_h \in K_h$ und \underline{u}_h die eindeutige Lösung von (3.7), das heißt die Ungleichungen

$$v_n^k + g_h^k \geq 0, \quad u_n^k + g_h^k \geq 0, \quad k \in c_h, \quad (3.17)$$

sind erfüllt. Dann sind die knotenbasierten Kontaktbedingungen

$$\lambda_n^k \leq 0, \quad u_n^k + g_h^k \geq 0, \quad \lambda_n^k(u_n^k + g_h^k) = 0, \quad k \in c_h, \quad (3.18a)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\underline{\lambda}_\tau^k\| &\leq b_k, \\ \|\underline{\lambda}_\tau^k\| < b_k &\Rightarrow \underline{u}_\tau^k = \underline{0}, \\ \|\underline{\lambda}_\tau^k\| = b_k &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{\lambda}_\tau^k = \alpha^2 \underline{u}_\tau^k, \end{aligned} \right\} \quad k \in c_h, \quad (3.18b)$$

äquivalent zu den Ungleichungen aus (3.16).

Beweis. Für die Äquivalenz der Ungleichungen (3.16b) und (3.18a) vergleiche den Beweis von Lemma 3.2.

Sei nun die Ungleichung (3.16c) erfüllt. Weiters wird angenommen, dass für einen Knoten $\exists j \in c_h : b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\| < 0$ gilt. Das muss für alle frei wählbaren Koeffizientenvektoren \underline{v}_h^j möglich sein. Nimmt man $\underline{v}_h^k = \underline{u}_h^k$, $k \neq j$, und $v_n^j > u_n^j$, $j \in c_h$, aus dem Lemma 3.2, wird die Ungleichung (3.16c) zu

$$b_j(\|\underline{v}_\tau^j\| - \|\underline{u}_\tau^j\|) - \langle \underline{\lambda}_\tau^j, \underline{v}_\tau^j - \underline{u}_\tau^j \rangle \geq 0.$$

Wird zusätzlich $\underline{v}_\tau^j = \underline{\lambda}_\tau^j + \underline{u}_\tau^j$ gewählt, erhält die linke Seite der zuvor genannten Ungleichung die Gestalt

$$b_j(\|\underline{\lambda}_\tau^j + \underline{u}_\tau^j\| - \|\underline{u}_\tau^j\|) - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|^2 \leq (b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)\|\underline{\lambda}_\tau^j\|.$$

Hier wird die Dreiecksungleichung verwendet. Jetzt ist

$$(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)\|\underline{\lambda}_\tau^j\| = -(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|) + \underbrace{(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)}_{<0} \underbrace{b_j}_{\geq 0}.$$

Die erste Ungleichung ist die Beweisannahme und b_j aus (3.16) als Integration über nichtnegative Funktionen nichtnegativ. Das heißt,

$$-(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|) + (b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)b_j \leq -(b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|)^2 < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass (3.16c) erfüllt sein muss. Damit gilt $b_k - \|\underline{\lambda}_\tau^k\| \geq 0$, $k \in c_h$.

Wählt man nun $\underline{v}_h^k = \underline{u}_h^k$, $k \neq j$, und $v_n^j = -g_h^j$, $j \in c_h$, und zusätzlich dazu $\underline{v}_\tau^j = \underline{0}$, wird (3.16c) zu

$$b_j\|\underline{u}_\tau^j\| - \langle \underline{\lambda}_\tau^j, \underline{u}_\tau^j \rangle \leq 0.$$

Aber für diese Ungleichung gilt auch

$$b_j\|\underline{u}_\tau^j\| - \langle \underline{\lambda}_\tau^j, \underline{u}_\tau^j \rangle \geq b_j\|\underline{u}_\tau^j\| - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|\|\underline{u}_\tau^j\|.$$

Dies führt mit $b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\| \geq 0$ auf

$$b_j \|\underline{u}_\tau^j\| - \|\underline{\lambda}_\tau^j\| \|\underline{u}_\tau^j\| = (b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\|) \|\underline{u}_\tau^j\| \geq 0.$$

Daraus folgt, dass

$$b_j \|\underline{u}_\tau^j\| - \langle \underline{\lambda}_\tau^j, \underline{u}_\tau^j \rangle = 0$$

gelten muss. Für weitere Betrachtungen kann die letzte Gleichung zu

$$1 = \frac{\langle \underline{\lambda}_\tau^j, \underline{u}_\tau^j \rangle}{b_j \|\underline{u}_\tau^j\|}$$

umformuliert werden. Gilt nun $b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\| > 0$, ist die oben genannte Gleichung immer kleiner als eins. Somit kann die Bedingung nur erfüllt werden, wenn $\underline{u}_\tau^j = \underline{0}$ ist. Gilt aber $b_j - \|\underline{\lambda}_\tau^j\| = 0$ ist die Gleichung immer erfüllt. Das heißt, die Vektoren $\underline{\lambda}_\tau^j$ und \underline{u}_τ^j liegen parallel mit gleicher Orientierung, anders formuliert, $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{\lambda}_\tau^j = \alpha^2 \underline{u}_\tau^j$. Das sind die Ungleichungen von (3.18b), wenn alle Knoten $k \in c_h$ betrachtet werden.

Gelten jetzt umgekehrt die Ungleichungen von (3.18b). Wird $b_k - \|\underline{\lambda}_\tau^k\| > 0$ und $\underline{u}_\tau^k = \underline{0}$ vorausgesetzt, ist

$$\begin{aligned} b_k (\|\underline{v}_\tau^k\| - \|\underline{u}_\tau^k\|) - \langle \underline{\lambda}_\tau^k, \underline{v}_\tau^k - \underline{u}_\tau^k \rangle &\geq b_k (\|\underline{v}_\tau^k\| - \|\underline{u}_\tau^k\|) - \|\underline{\lambda}_\tau^k\| \|\underline{v}_\tau^k - \underline{u}_\tau^k\| \\ &\geq (b_k - \|\underline{\lambda}_\tau^k\|) \|\underline{v}_\tau^k\| \geq 0. \end{aligned}$$

Mit $b_k - \|\underline{\lambda}_\tau^k\| = 0$ und $\underline{\lambda}_\tau^k = \alpha^2 \underline{u}_\tau^k$ gilt

$$\begin{aligned} b_k (\|\underline{v}_\tau^k\| - \|\underline{u}_\tau^k\|) - \langle \underline{\lambda}_\tau^k, \underline{v}_\tau^k - \underline{u}_\tau^k \rangle &= b_k \|\underline{v}_\tau^k\| - \frac{b_k}{\alpha^2} \|\underline{\lambda}_\tau^k\| - \langle \underline{\lambda}_\tau^k, \underline{v}_\tau^k \rangle + \frac{\|\underline{\lambda}_\tau^k\|^2}{\alpha^2} \\ &\geq b_k \|\underline{v}_\tau^k\| - \frac{b_k^2}{\alpha^2} - b_k \|\underline{v}_\tau^k\| + \frac{b_k^2}{\alpha^2} = 0. \end{aligned}$$

Summiert man über alle $k \in c_h$, erhält man die Ungleichung (3.16c). \square

Das zu lösende System mit den Kontaktbedingungen (3.18) ist

$$\mathbf{A}\underline{u} + \hat{\mathbf{D}}\underline{\lambda} = \underline{f}, \quad \hat{\mathbf{D}} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

mit den Matrizen \mathbf{D} und $\hat{\mathbf{D}}$ aus (3.15).

3.3 Halbglattes Newton-Verfahren für den reibungsfreien Zustand

3.3.1 Nicht differenzierbare Newton-Verfahren

Die folgenden Gleichungen im nächsten Abschnitt sind im klassischen Sinn nicht differenzierbar. Aber aufgrund des Konzeptes der Newton-Differenzierbarkeit in infiniten

Funktionsräumen (Banachräumen), siehe für deren Einführung [11], können diese mit der Anwendung des halbglatten Newtonverfahrens trotzdem behandelt werden. Nach der Anwendung gleicht der Algorithmus einer Aktiven-Mengen-Strategie. Dieser Sachverhalt wird in der Arbeit [8] gezeigt. Dieses Berechnungsverfahren wird sehr erfolgreich bei Signorini-Kontaktproblemen angewendet, siehe zum Beispiel [11].

Zuerst werden die Definition der Newton-Differenzierbarkeit und mögliche verallgemeinerte Ableitungen zu speziellen Funktionen, die in dieser Arbeit Verwendung finden, erklärt. Seien X, Y, Z Banachräume und sei $F : D \subset X \rightarrow Y$ eine nichtlineare Abbildung über einem offenen Gebiet D .

Definition 3.4. Die Abbildung F ist Newton-differenzierbar in der offenen Menge $U \subset D$, wenn eine Abbildung $G : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ existiert, sodass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(x+h) - F(x) - G(x+h)h\| = 0, \quad \text{für alle } x \in U.$$

Die Abbildung G ist dann eine verallgemeinerte Ableitung. Sei nun X der Raum der reellen Funktionen definiert auf dem Gebiet Ω oder auf dessen Rand Γ . Für Funktionen $\max(0, y)$ und $\min(0, y)$, das sind der punktweise definierte max- und der min-Operator, können die Newton-Ableitungen,

$$G_{\max}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y(x) \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } y(x) < 0 \end{cases}, \quad G_{\min}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y(x) \leq 0 \\ 0 & \text{wenn } y(x) > 0 \end{cases},$$

eingeführt werden. Folgender Satz liefert den geforderten Zusammenhang.

Satz 3.5. Die Abbildung $\max(0, \cdot) : L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ und $\min(0, \cdot) : L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < q < \infty$ sind Newton-differenzierbar auf $L_q(\Omega)$ mit den verallgemeinerten Ableitungen G_{\max} und G_{\min} .

Beweis. Siehe [8]. □

Die beliebige Wahl des Parameters im Fall $y(x) = 0$, der bei der Anwendung der verallgemeinerten Ableitungen G_{\max} und G_{\min} auftreten kann, beeinflussen die Konvergenzrate des Newtonverfahrens nicht, [8]. Die hier benutzte Berechnungsvorschrift des halbglatten Newtonverfahrens für eine nicht differenzierbare Gleichung $F(x) = 0$ lautet mit dem oben angeführten Konzept der Differenzierbarkeit

$$0 = F(x^{k-1}) + V^k \Delta x^k, \quad k \geq 1. \quad (3.20)$$

Dabei ist der Startwert $x^0 \in X$ gegeben und die nächste Iteration durch die Vorschrift $x^k = x^{k-1} + \Delta x^k$, $k \geq 1$. Die Gleichung (3.20) liefert die zugehörige Differenz Δx^k . Für die verallgemeinerte Ableitung G wird in jedem Iterationsschritt ein $V^k \in G(x^{k-1})$ gewählt, das sind die Newton-Ableitungen der halbglatten Funktion F . Wenn das halbglatte Newtonverfahren mit diesen verallgemeinerten Ableitungen zur Lösung einer stetigen, aber nicht differenzierbaren Gleichung, eingesetzt wird, gelten laut der Arbeit [8] die superlineare Konvergenz des Verfahrens und die Kettenregel für verallgemeinerte Ableitungen, [20].

3.3.2 Komplementärfunktion

Die Nichtdurchdringungsbedingung (3.14)

$$\begin{aligned} \lambda_n^k &\leq 0, & u_n^k + g_h^k &\geq 0, & \lambda_n^k(u_n^k + g_h^k) &= 0, \\ \underline{\lambda}_\tau^k &= \underline{0}, & k &\in c_h, \end{aligned}$$

bedeutet für ein Paar $(\underline{u}^k, \underline{\lambda}^k)$, $k \in c_h$, und dessen Koeffizientenpaar (u_n^k, λ_n^k) , dass entweder $u_n^k = -g_h^k$ und $\lambda_n^k \leq 0$ oder $u_n^k > -g_h^k$ und $\lambda_n^k = 0$ gilt. Das heißt, der Knoten k ist in Kontakt mit dem starren Körper oder frei gelagert.

Das Verfahren soll den korrekten Zustand bestimmen. Dafür kann aus der Bedingung (3.14) eine stetige, nicht differenzierbare Funktion bestimmt werden. Diese ist durch

$$\lambda_n^k = -\max\{0, -\lambda_n^k - c(u_n^k + g_h^k)\}, \quad c > 0, \quad k \in c_h,$$

erklärt, siehe unter anderem [9]. Dadurch kann die Komplementärfunktion,

$$C_n(u_n^k, \lambda_n^k) := \lambda_n^k + \max\{0, -\lambda_n^k - c(u_n^k + g_h^k)\} \quad (3.21)$$

definiert werden.

Satz 3.6. *Ein Paar (u_n^k, λ_n^k) erfüllt die Nichtdurchdringungsbedingung (3.14) nur dann, wenn die Bedingung*

$$C_n(u_n^k, \lambda_n^k) = 0, \quad \underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0}, \quad k \in c_h, \quad (3.22)$$

gilt.

Beweis. Die Bedingungen des Tangentialvektors $\underline{\lambda}_\tau^k$ sind trivialerweise äquivalent. Wenn (3.14) gilt, dann folgt mit $u_n^k = -g_h^k$ und $\lambda_n^k \leq 0$ oder $u_n^k > -g_h^k$ und $\lambda_n^k = 0$

$$C_n(u_n^k, \lambda_n^k) = \lambda_n^k + \max\{0, -\lambda_n^k\} = 0,$$

oder

$$C_n(u_n^k, \lambda_n^k) = \max\{0, -c(u_n^k + g_h^k)\} = 0.$$

Das heißt, die Bedingung (3.22) ist erfüllt.

Umgekehrt müssen die beiden Fälle $-\lambda_n^k - c(u_n^k + g_h^k) > 0$ und $-\lambda_n^k - c(u_n^k + g_h^k) \leq 0$ betrachtet werden. Wenn $C_n = 0$ gilt, folgt für den ersten Fall

$$0 = C_n(u_n^k, \lambda_n^k) = c(u_n^k + g_h^k).$$

Damit ist $u_n^k = -g_h^k$ und darauf aufbauend $\lambda_n^k < 0$. Im zweiten Fall ist

$$0 = C_n(u_n^k, \lambda_n^k) = \lambda_n^k.$$

Hier gilt $\lambda_n^k = 0$ und daher auch $-c(u_n^k + g_h^k) \leq 0$. Damit ist die Nichtdurchdringungsbedingung (3.14) erfüllt. \square

Wenn die Aktive-Mengen-Strategie hergeleitet wird, ändern sich (3.15) und $\underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0}$ nicht, da sie bereits lineare Gleichungssysteme sind. Anders verhält sich die Komplementärfunktion C_n . Das nächste Paar in der Iteration $(u_n^{k,\ell}, \lambda_n^{k,\ell})$ erhält man mit der Theorie über halbglatte Newtonverfahren und

$$(u_n^{k,\ell}, \lambda_n^{k,\ell}) = (u_n^{k,\ell-1}, \lambda_n^{k,\ell-1}) + (\Delta u_n^{k,\ell}, \Delta \lambda_n^{k,\ell}).$$

Rechenoperationen werden komponentenweise für u_n und λ_n ausgeführt. Die verallgemeinerte Ableitung D_{C_n} der Funktion $C_n(u_n^k, \lambda_n^k)$ in Abhängigkeit der Differenz $(\Delta u_n^{k,\ell}, \Delta \lambda_n^{k,\ell})$ und des Paares $(u_n^{k,\ell-1}, \lambda_n^{k,\ell-1})$ lautet

$$D_{C_n}(u_n^{k,\ell-1}, \lambda_n^{k,\ell-1})(\Delta u_n^{k,\ell}, \Delta \lambda_n^{k,\ell}) = \Delta \lambda_n^{k,\ell} - \chi_{\mathcal{A}_n^\ell}(\Delta \lambda_n^{k,\ell} + c \Delta u_n^{k,\ell}).$$

Die charakteristische Funktion wird durch

$$\chi_{\mathcal{A}_n^\ell} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \in \mathcal{A}_n^\ell \\ 0 & \text{wenn } k \in \mathcal{I}_n^\ell \end{cases}$$

definiert. Die Mengen \mathcal{A}_n^ℓ und \mathcal{I}_n^ℓ folgen in (3.23). Die Knoten $k \in c_h$ werden durch die Funktion $\chi_{\mathcal{A}_n^\ell}$ in eine aktive \mathcal{A}_n^ℓ und eine passive Menge \mathcal{I}_n^ℓ aufgeteilt,

$$\mathcal{A}_n^\ell := \{k \in c_h : -\lambda_n^{k,\ell-1} - c(u_n^{k,\ell-1} + g_h^k) > 0\}, \quad (3.23a)$$

$$\mathcal{I}_n^\ell := \{k \in c_h : -\lambda_n^{k,\ell-1} - c(u_n^{k,\ell-1} + g_h^k) \leq 0\}, \quad (3.23b)$$

und erfüllen, setzt man in die Gleichung des Newtonschrittes

$$D_{C_n}(u_n^{k,\ell-1}, \lambda_n^{k,\ell-1})(\Delta u_n^{k,\ell}, \Delta \lambda_n^{k,\ell}) = -C_n(u_n^{k,\ell-1}, \lambda_n^{k,\ell-1})$$

ein, folgende Gleichungen für das Paar $(u_n^{k,\ell}, \lambda_n^{k,\ell})$,

$$u_n^{k,\ell} = -g_h^k, \quad k \in \mathcal{A}_n^\ell, \quad (3.24a)$$

$$\lambda_n^{k,\ell} = 0, \quad k \in \mathcal{I}_n^\ell. \quad (3.24b)$$

Ist ein Knoten k aktiv, das heißt $k \in \mathcal{A}_n^\ell$, beschreibt die Bedingung (3.24) eine Kontaktbedingung in die Normalenrichtung der Verschiebung $\underline{u}^{k,\ell}$. Wenn k frei gelagert ist, das heißt $k \in \mathcal{I}_n^\ell$, ist sie eine Kontaktbedingung des Vektors $\underline{\lambda}^{k,\ell}$, die in Normalenrichtung angibt, dass kein Druck auf den Knotenpunkt ausgeübt wird. Somit führt das halbglatte Newton-Verfahren auf eine Aktive-Mengen-Strategie.

Mit (3.15), (3.24) und $\underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0}$ ist für jedes Lösungspaar $(\underline{u}^\ell, \underline{\lambda}^\ell)$, dessen Knotenpaare $(\underline{u}^{k,\ell}, \underline{\lambda}^{k,\ell})$ und der Koeffizientenpaare $(u_n^{k,\ell}, \lambda_n^{k,\ell})$, $k \in c_h$, das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\underline{u}^\ell + \hat{\mathbf{D}}\underline{\lambda}^\ell = \underline{f} \quad (3.25a)$$

$$u_n^{k,\ell} = -g_h^k, \quad k \in \mathcal{A}_n^\ell, \quad (3.25b)$$

$$\lambda_n^{k,\ell} = 0, \quad k \in \mathcal{I}_n^\ell, \quad (3.25c)$$

$$\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} = \underline{0}, \quad k \in c_h, \quad (3.25d)$$

zu lösen. (3.25) entspricht einem eindeutig lösbaeren diskreten Sattelpunktproblem [9]. Dieses wird im nächsten Abschnitt mit statischer Kondensation bearbeitet, um danach ein stabileres reduziertes System zu erhalten. Der hier gewählte Weg ist einer von vielen, um ein Sattelpunktproblem zu bearbeiten.

3.3.3 Elimination der Lagrangemultiplikatoren

In diesem Abschnitt wird eine vollständige Matrixdarstellung des linearen Gleichungssystems (3.25) hergeleitet. Dieses wiederum wird bezüglich des Vektors $\underline{\lambda}^\ell$ statisch kondensiert, sodass das resultierende Gleichungssystem, das es zu lösen gilt, nur von den Verschiebungen \underline{u}^ℓ abhängig ist.

Dafür wird die Matrix $\mathbf{N}_{\mathcal{A}_n^\ell} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_n^\ell| \times d|\mathcal{A}_n^\ell|}$, $|\mathcal{A}_n^\ell|$ ist die Anzahl der Knoten in \mathcal{A}_n^ℓ ,

$$\mathbf{N}_{\mathcal{A}_n^\ell} := \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\underline{n}^k)^\top & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad k \in \mathcal{A}_n^\ell,$$

definiert. Die Sortierung ist so gewählt, dass $\mathbf{N}_{\mathcal{A}_n^\ell} \underline{u}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell = -\underline{g}_{\mathcal{A}_n^\ell}$ gilt, wobei $\underline{g}_{\mathcal{A}_n^\ell} := [\dots, g_h^k, \dots]^\top$, $k \in \mathcal{A}_n^\ell$, und $\underline{g}_{\mathcal{A}_n^\ell} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_n^\ell|}$.

Die Vektoren \underline{n}^k sollen in jedem Knoten $k \in \mathcal{A}_n^\ell$ zu einer Orthonormalbasis in \mathbb{R}^d ergänzt werden. Das sind die Vektoren $\underline{\tau}_i^k$, $1 \leq i \leq (d-1)$, die in den Knoten die Tangentialfläche aufspannen. Die Basen lauten für $d = 2$ $\{\underline{n}^k, \underline{\tau}_1^k\}$ und für $d = 3$ $\{\underline{n}^k, \underline{\tau}_1^k, \underline{\tau}_2^k\}$.

Die Matrix $\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \in \mathbb{R}^{(d-1)|\mathcal{A}_n^\ell| \times d|\mathcal{A}_n^\ell|}$ hat für $d = 3$ die Gestalt

$$\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} := \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\underline{\tau}_1^k)^\top & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\underline{\tau}_2^k)^\top & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad k \in \mathcal{A}_n^\ell.$$

Daher hat $\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell}$ für $d = 2$ nur eine Zeile pro Knoten $k \in \mathcal{A}_n^\ell$. Durch die gewählte Sortierung gilt $\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \underline{\lambda}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell = \underline{0}$. Das Gleichungssystem aus (3.15) kann nochmals umsortiert werden,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{I\mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{I\mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell I} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell \mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell \mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{D}_{\mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell I} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell \mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell \mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mathcal{A}_n^\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I^\ell \\ \underline{u}_{\mathcal{I}_n^\ell}^\ell \\ \underline{u}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell \\ \underline{\lambda}_{\mathcal{I}_n^\ell}^\ell \\ \underline{\lambda}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_{\mathcal{I}_n^\ell} \\ \underline{f}_{\mathcal{A}_n^\ell} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Die Einträge der Matrix \mathbf{A} und der Vektoren \underline{u}^ℓ , $\underline{\lambda}^\ell$ und \underline{f} aus (3.8) werden auf \mathbf{A}_{**} , \underline{u}_* , $\underline{\lambda}_*$ und \underline{f}_* nach den Knotenindexmengen in jeder Iteration ℓ aufgeteilt. Für die Matrix \mathbf{D} gilt $\mathbf{D}_{\mathcal{I}_n^\ell} := Id_{\mathcal{I}_n^\ell}$ und $\mathbf{D}_{\mathcal{A}_n^\ell} := Id_{\mathcal{A}_n^\ell}$. Somit muss in einem Iterationsschritt ℓ

das lineare Gleichungssystem (3.25) in folgender Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{I\mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{I\mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell I} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell \mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell \mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{D}_{\mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell I} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell \mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell \mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mathcal{A}_n^\ell} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{Id}_{\mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\mathcal{A}_n^\ell} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I^\ell \\ \underline{u}_{\mathcal{I}_n^\ell}^\ell \\ \underline{u}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell \\ \underline{\lambda}_{\mathcal{I}_n^\ell}^\ell \\ \underline{\lambda}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_{\mathcal{I}_n^\ell} \\ \underline{f}_{\mathcal{A}_n^\ell} \\ \underline{0} \\ -\underline{g}_{\mathcal{A}_n^\ell} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

gelöst werden. Obwohl das System (3.27) scheinbar mehr Zeilen als Spalten aufweist, ist es trotz allem ein reguläres System, weil die letzten beiden Zeilen formal zu den Knoten $k \in \mathcal{A}_n^\ell$ gehören. Somit entsprechen sie einer Zeile bezüglich jener Knoten und die Anzahl der Zeilen entspricht jener der Unbekannten.

Da die Matrix \mathbf{D} , die in (3.27) aufgespalten wurde, eine Einheitsmatrix ist, ist die inverse Matrix sie selbst. Daher kann das Gleichungssystem in Abhängigkeit des Vektors $\underline{\lambda}^\ell$ statisch kondensiert werden. Die Gleichung hierfür lautet

$$\underline{\lambda}^\ell = \mathbf{D} \left(\underline{f}_C - \mathbf{A}_{CI} \underline{u}_I^\ell - \mathbf{A}_{CC} \underline{u}_C^\ell \right). \quad (3.28)$$

Um das reduzierte Gleichungssystem zu erhalten, muss $\underline{\lambda}^\ell$ eliminiert werden. Die vierte Zeile und Spalte können direkt gestrichen werden, da $\underline{\lambda}_{\mathcal{I}_n^\ell}^\ell = \underline{0}$ gilt. Multipliziert man die dritte Zeile mit $\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell}$, folgt mit $\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \underline{\lambda}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell = \underline{0}$ der Ausdruck $\mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \mathbf{D}_{\mathcal{A}_n^\ell} \underline{\lambda}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell = \underline{0}$, da die Diagonalmatrixeinträge für jeden Knoten $k \in \mathcal{A}_n^\ell$ gleich sind. Das zu lösende lineare Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{I\mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{I\mathcal{A}_n^\ell} \\ \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell I} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell \mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{A}_{\mathcal{I}_n^\ell \mathcal{A}_n^\ell} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell I} & \mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell \mathcal{I}_n^\ell} & \mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \mathbf{A}_{\mathcal{A}_n^\ell \mathcal{A}_n^\ell} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\mathcal{A}_n^\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_I^\ell \\ \underline{u}_{\mathcal{I}_n^\ell}^\ell \\ \underline{u}_{\mathcal{A}_n^\ell}^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ \underline{f}_{\mathcal{I}_n^\ell} \\ \mathbf{T}_{\mathcal{A}_n^\ell} \underline{f}_{\mathcal{A}_n^\ell} \\ -\underline{g}_{\mathcal{A}_n^\ell} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Dieses Gleichungssystem ist wegen der gleichen Argumente wie in (3.27) regulär. Die Kontakttrandbedingungen aus (3.25) können in bereits existierende Finite-Elemente-Programme inkludiert werden. Dadurch ist der Algorithmus sehr flexibel bei der Wahl der iterativen Verfahren, die den Algorithmus ergänzen.

Hier wird eine exakte Aktive-Mengen-Strategie gewählt. Das heißt, das Gleichungssystem (3.29) wird in

$$\underline{u}^\ell = \text{LöseGLS}(\underline{u}^{\ell-1}, \mathcal{A}_n^\ell, \mathcal{I}_n^\ell),$$

das ist Schritt 4 im Algorithmus 1, exakt gelöst oder der Lösungsvektor \underline{u}^ℓ wird, wenn ein iteratives Verfahren herangezogen wird, bis zu dessen Toleranzgrenze des Berechnungsfehlers angenähert.

Algorithmus 1. *Exakte Aktive-Mengen-Strategie*1: setze $\ell = 1$ 2: initialisiere \mathcal{A}_n^1 und \mathcal{I}_n^1 , sodass $c_h = \mathcal{A}_n^1 \cup \mathcal{I}_n^1$ und $\mathcal{A}_n^1 \cap \mathcal{I}_n^1 = \emptyset$ gilt, z.B. mit $\mathcal{A}_n^1 = c_h$ und $\mathcal{I}_n^1 = \emptyset$ 3: setze $c > 0$

4:

$$\underline{u}^\ell = \text{LöseGLS}(\underline{u}^{\ell-1}, \mathcal{A}_n^\ell, \mathcal{I}_n^\ell)$$

5: berechne den Vektor

$$\underline{\lambda}^\ell = \mathbf{D} \left(\underline{f}_C - \mathbf{A}_{CI} \underline{u}_I^\ell - \mathbf{A}_{CC} \underline{u}_C^\ell \right)$$

6: erneuere $\mathcal{A}_n^{\ell+1}$ und $\mathcal{I}_n^{\ell+1}$ durch

$$\mathcal{A}_n^{\ell+1} := \{k \in c_h : -\lambda_n^{k,\ell} - c(u_n^{k,\ell} + g_h^k) > 0\}$$

$$\mathcal{I}_n^{\ell+1} := \{k \in c_h : -\lambda_n^{k,\ell} - c(u_n^{k,\ell} + g_h^k) \leq 0\}$$

7: **if** $\mathcal{A}_n^{\ell+1} = \mathcal{A}_n^\ell$ und $\mathcal{I}_n^{\ell+1} = \mathcal{I}_n^\ell$ **then**

8: stop

9: **end if**10: setze $\ell = \ell + 1$

11: gehe zu 4

Im Schritt 4 sind daher je nach Gestalt und Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix verschiedene iterative Löser, zum Beispiel Multigrid-Verfahren, exakte Reduktionsverfahren in Verbindung mit dem CG-Verfahren, möglich. Hier werden die direkten und Multilevel-Verfahren des linearen Gleichungssystemlöser PARDISO verwendet. Details der programmierten Algorithmen findet man in den Arbeiten [12], [14] und [15].

Der Algorithmus 1 terminiert, wenn die neu bestimmten Kontakt- und Nichtkontakt-knoten in den Schritten 7-9 mit den Vorgängern übereinstimmen.

Erwähnenswert ist, dass die Wahl des Parameters c in Schritt 3 bei einer exakten Aktive-Mengen-Strategie keine Rolle spielt, siehe [9].

3.4 Halbglattes Newton-Verfahren für den Zustand Trescascher Reibung

3.4.1 Komplementärfunktion

Für das Trescasche Reibungsgesetz (3.18b), in diesem Abschnitt gilt für den Reibungskoeffizienten $b_k > 0$,

$$\left. \begin{aligned} \|\underline{\lambda}_\tau^k\| &\leq b_k, \\ \|\underline{\lambda}_\tau^k\| < b_k &\Rightarrow \underline{u}_\tau^k = \underline{0}, \\ \|\underline{\lambda}_\tau^k\| = b_k &\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \underline{\lambda}_\tau^k = \alpha^2 \underline{u}_\tau^k, \end{aligned} \right\} k \in c_h, \quad (3.30)$$

soll eine Komplementärfunktion erklärt werden. Der Reibungskoeffizient $g_R(\cdot) : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}$ des Trescaschen Reibungsgesetzes ist größer Null zu wählen, weil in (3.16)

$$b_k := \int_{\Sigma_{h,c}} g_R \varphi_k ds_x$$

gilt und damit die Voraussetzung $b_k > 0$ erfüllt werden kann. In diesem Abschnitt 3.4 gilt für $\underline{\lambda}_\tau^k := (\langle \underline{\lambda}^k, \underline{\tau}_1^k \rangle, \langle \underline{\lambda}^k, \underline{\tau}_2^k \rangle)^\top$. Dies sind die Tangentialvektoren der Orthonormalbasis $\{\underline{n}^k, \underline{\tau}_1^k, \underline{\tau}_2^k\}$. Das heißt, der Koeffizientenvektor $\underline{\lambda}_\tau^k$ ist aus \mathbb{R}^{d-1} . Die gleiche Schreibweise wird auf die Verschiebung \underline{u}^k angewandt. Der dazugehörige Koeffizientenvektor \underline{u}_τ^k ist ebenfalls aus \mathbb{R}^{d-1} . Für die Knoten $k \in c_h$ und deren Paare $(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k)$ gilt entweder die Bedingung $\|\underline{\lambda}_\tau^k\| < b_k$ und $\underline{u}_\tau^k = \underline{0}$, das ist die Haftbedingung, oder $\|\underline{\lambda}_\tau^k\| = b_k$ und $\underline{\lambda}_\tau^k = \alpha^2 \underline{u}_\tau^k$, das ist die Rutschbedingung. Das Ungleichungssystem (3.30) kann zu einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion in allen Knoten $k \in c_h$ umgeschrieben werden,

$$\underline{\lambda}_\tau^k = b_k \frac{\underline{\lambda}_\tau^k + c \underline{u}_\tau^k}{\max\{b_k, \|\underline{\lambda}_\tau^k + c \underline{u}_\tau^k\|\}}.$$

Daraus folgt die Definition der Komplementärfunktion

$$C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) := \max\{b_k, \|\underline{\lambda}_\tau^k + c \underline{u}_\tau^k\|\} \underline{\lambda}_\tau^k - b_k (\underline{\lambda}_\tau^k + c \underline{u}_\tau^k), \quad (3.31)$$

für jedes $c > 0$.

Satz 3.7. *Ein Paar $(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k)$ erfüllt die Reibungsbedingung (3.30) nur dann, wenn die Bedingung*

$$C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \underline{0}, \quad k \in c_h, \quad (3.32)$$

gilt.

Beweis. Begonnen wird damit, dass die Bedingungen aus (3.30) zu der aus (3.32) führen. Das heißt, für ein Paar $(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k)$ gilt $\|\underline{\lambda}_\tau^k\| < b_k$ und $\underline{u}_\tau^k = \underline{0}$ oder $\|\underline{\lambda}_\tau^k\| = b_k$ und $\underline{\lambda}_\tau^k = \alpha^2 \underline{u}_\tau^k$. Im ersten Zustand erhält man

$$C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \max\{b_k, \|\underline{\lambda}_\tau^k\|\} \underline{\lambda}_\tau^k - b_k \underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0},$$

und im zweiten

$$C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \max\left\{b_k, \left(1 + \frac{c}{\alpha^2}\right) b_k\right\} \underline{\lambda}_\tau^k - b_k \left(1 + \frac{c}{\alpha^2}\right) \underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0}.$$

Beide Zustände erfüllen die behauptete Bedingung $C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \underline{0}$. Gilt jetzt für ein Paar $(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k)$ die Bedingung $C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \underline{0}$, liefert diese, wenn der Fall $\|\underline{\lambda}_\tau^k + c \underline{u}_\tau^k\| \leq b_k$ betrachtet wird,

$$\underline{0} = C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = b_k \underline{\lambda}_\tau^k - b_k (\underline{\lambda}_\tau^k + c \underline{u}_\tau^k) = -c b_k \underline{u}_\tau^k.$$

Da die Ungleichungen $c > 0$ und $b_k > 0$ vorausgesetzt sind, muss $\underline{u}_\tau^k = \underline{0}$ gelten. Damit wird im Nachhinein die Bedingung dieses Falls zu $\|\underline{\lambda}_\tau^k\| \leq b_k$. Das ist der erste Zustand aus (3.30).

Wenn der Fall $\|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\| > b_k$ betrachtet wird, erhält man

$$\underline{0} = C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\| \underline{\lambda}_\tau^k - b_k(\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k)$$

und folgend die Beziehungen

$$\underline{\lambda}_\tau^k = \gamma \underline{u}_\tau^k, \quad \gamma := \frac{cb_k}{\|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\| - b_k}.$$

Die Ungleichungen $\|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\| > b_k$, $c > 0$ und $b_k > 0$ liefern $\gamma > 0$. Setzt man $\underline{\lambda}_\tau^k = \gamma \underline{u}_\tau^k$ wieder in $C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \underline{0}$ ein, muss $\|\underline{\lambda}_\tau^k\| = b_k$ gelten. Das ist der zweite Zustand aus (3.30). \square

Aufgrund des Satzes kann auf die knotenweise bestimmten Gleichungen (3.32) ein halbglattes Newtonverfahren angewandt werden, vergleiche Abschnitt 3.3.1. Die euklidische Norm $\|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\|$ ist sogar klassisch differenzierbar, da bei $\|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\| = 0$ diese aufgrund $\max\{b_k, \|\underline{\lambda}_\tau^k + c\underline{u}_\tau^k\|\} = b_k$ in der Komplementärfunktion $C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k)$ verschwindet. Nur $\max\{\cdot, \cdot\}$ ist eine halbstetige Funktion.

Das nächste Paar in der Iteration des Newtonverfahrens $(\underline{u}_\tau^{k,\ell}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell})$ erhält man mit

$$(\underline{u}_\tau^{k,\ell}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell}) = (\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}) + (\Delta \underline{u}_\tau^{k,\ell}, \Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell}).$$

Die verallgemeinerte Ableitung D_{C_τ} der Funktion $C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k)$ in Abhängigkeit der Differenz $(\Delta \underline{u}_\tau^{k,\ell}, \Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell})$ und des Paares $(\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1})$ lautet

$$\begin{aligned} D_{C_\tau}(\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1})(\Delta \underline{u}_\tau^{k,\ell}, \Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell}) &= \max\{b_k, \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|\} \Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} \\ &+ \chi_{\mathcal{A}_\tau^\ell} \frac{\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1})^\top}{\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|} (\Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + c\Delta \underline{u}_\tau^{k,\ell}) - b_k(\Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + c\Delta \underline{u}_\tau^{k,\ell}). \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion wird durch

$$\chi_{\mathcal{A}_\tau^\ell} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \in \mathcal{A}_\tau^\ell \\ 0 & \text{wenn } k \in \mathcal{I}_\tau^\ell \end{cases}$$

definiert. Die Mengen \mathcal{A}_τ^ℓ und \mathcal{I}_τ^ℓ folgen in (3.33). Die Matrix $\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1})^\top \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$ hat den Rang Eins oder ist die Nullmatrix. Die Knoten $k \in c_h$ werden durch die Funktion $\chi_{\mathcal{A}_\tau^\ell}$ in eine aktive \mathcal{A}_τ^ℓ und eine passive Menge \mathcal{I}_τ^ℓ aufgeteilt,

$$\mathcal{A}_\tau^\ell := \{k \in c_h : \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k > 0\}, \quad (3.33a)$$

$$\mathcal{I}_\tau^\ell := \{k \in c_h : \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k \leq 0\}, \quad (3.33b)$$

und erfüllen, setzt man in die Gleichung des Newtonschrittes

$$D_{C_\tau}(\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1})(\Delta \underline{u}_\tau^{k,\ell}, \Delta \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell}) = -C_\tau(\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1})$$

ein, folgende Gleichungen für das Paar $(\underline{u}_\tau^{k,\ell}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell})$,

$$\underline{u}_\tau^{k,\ell} = \underline{0}, \quad k \in \mathcal{I}_\tau^\ell, \quad (3.34a)$$

$$(Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1})\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} - c\mathbf{M}^{k,\ell-1}\underline{u}_\tau^{k,\ell} = \underline{h}^{k,\ell-1}, \quad k \in \mathcal{A}_\tau^\ell, \quad (3.34b)$$

mit $\mathbf{M}^{k,\ell-1} := e^{k,\ell-1}(Id_{d-1} - \mathbf{F}^{k,\ell-1})$. Der skalare Wert $e^{k,\ell-1}$ und die Matrix $\mathbf{F}^{k,\ell-1} \in \mathbb{R}^{d-1 \times d-1}$ sind durch

$$e^{k,\ell-1} := \frac{b_k}{\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|}, \quad \mathbf{F}^{k,\ell-1} := \frac{\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1})^\top}{b_k \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|}, \quad (3.35)$$

definiert. Der Vektor $\underline{h}^{k,\ell-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$ lautet

$$\underline{h}^{k,\ell-1} := e^{k,\ell-1}\mathbf{F}^{k,\ell-1}(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}). \quad (3.36)$$

Die Gleichung (3.34b) kann nochmals umgeschrieben werden,

$$-\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + \mathbf{L}^{k,\ell-1}\underline{u}_\tau^{k,\ell} = \underline{r}^{k,\ell-1}. \quad (3.37)$$

Die Menge \mathcal{A}_τ^ℓ der Knoten k spiegelt die Rutschbedingung und \mathcal{I}_τ^ℓ die Haftbedingung wider. Formt man (3.34b) mit dem Vektor aus (3.36) zu der Gleichung (3.37) um, während die Matrix $Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1}$ invertierbar ist, erhält man die Beziehungen

$$\mathbf{L}^{k,\ell-1} := c(Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1})^{-1}\mathbf{M}^{k,\ell-1} = c((Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1})^{-1} - Id_{d-1}), \quad (3.38a)$$

$$\underline{r}^{k,\ell-1} := -(Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1})^{-1}\underline{h}^{k,\ell-1}. \quad (3.38b)$$

Setzt man die Definitionen aus (3.35) in (3.36) ein, erhält man die Beziehung $\underline{h}^{k,\ell-1} = \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}$. Dieses Ergebnis führt mit (3.38b) dazu, dass der Vektor $\underline{h}^{k,\ell-1}$ und auch $\underline{r}^{k,\ell-1}$ linear abhängig von $\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}$ sind [9]. Unter welchen Voraussetzungen die Matrix $Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1}$ regulär ist und ob der Fall $b_k = 0$, $k \in c_h$, das ist der reibungsfreie Zustand des Knotens k , auch behandelt werden kann, folgt in den nächsten Abschnitten.

3.4.2 Regularisierung

Die Matrix $(Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1})$ ist während des Iterationsprozesses nicht immer regulär, aber sie konvergiert im Grenzfall zu einer positiv definiten und symmetrischen Matrix. Daher soll sie in jedem Iterationsschritt regulär sein und, wenn Konvergenzbetrachtungen des halbglatten Newtonverfahrens durchgeführt werden, soll das modifizierte System im Grenzfall dem Ausgangssystem (3.34b) entsprechen, damit die Konvergenzeigenschaften nicht beeinträchtigt werden. In dieser Arbeit wird eine mögliche Modifikation des Systems (3.34b) angegeben, die eine reguläre Matrix $(Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1})$ liefert. Diese Regularisierung zielt auf eine Änderung der Matrix $\mathbf{L}^{k,\ell-1}$ und des Vektors $\underline{r}^{k,\ell-1}$ aus (3.38) ab, aber die Gleichung (3.37) kann anstatt (3.34b) im Iterationsprozess verwendet werden.

Die Modifikation beinhaltet eine Änderung der Matrix $\mathbf{F}^{k,\ell-1}$ durch eine skalierte

$\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}$. Die Regularisierung stabilisiert den Iterationsprozess des halbglatte Newton-Verfahrens, vergleiche [9]. Laut Einführung der Matrix $\mathbf{M}^{k,\ell-1}$ und des Vektors aus (3.36) werden in der Gleichung (3.34b) $\mathbf{M}^{k,\ell-1}$ durch $\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$ und $\underline{h}^{k,\ell-1}$ durch $\tilde{h}^{k,\ell-1}$ ersetzt, wobei

$$\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1} := e^{k,\ell-1}(Id_{d-1} - \tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}), \quad \tilde{h}^{k,\ell-1} := e^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}),$$

gilt. Im nächsten Schritt wird die Matrix $Id_{d-1} - \mathbf{M}^{k,\ell-1}$ durch $Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$, das ist ein Skalierungsfaktor $\beta^{k,\ell-1} > 0$, ersetzt. Damit erreicht man die gewünschte Regularität. Die Gleichung (3.37) mit den Definitionen aus (3.38) lautet in der regularisierten Form

$$-\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + \tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1}\underline{u}_\tau^{k,\ell} = \tilde{r}^{k,\ell-1}, \quad (3.39a)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1} := c((Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1})^{-1} - Id_{d-1}), \quad (3.39b)$$

$$\tilde{r}^{k,\ell-1} := -(Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1})^{-1}\tilde{h}^{k,\ell-1}. \quad (3.39c)$$

Für diese Modifikation des Systems (3.34b) gilt $\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1} \rightarrow \mathbf{F}^{k,\ell-1}$ und $\beta^{k,\ell-1} \rightarrow 1$, wenn das Paar $(\underline{u}_\tau^{k,\ell}, \underline{\lambda}_\tau^{k,\ell})$ zu einer Lösung konvergiert. Das heißt, das auch die superlineare Konvergenzrate nicht beeinflusst wird [9].

Es fehlen die Definitionen der Matrix $\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}$ und des Skalars $\beta^{k,\ell-1}$, die die Darstellung und Eigenschaften der Matrix $\tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1}$ und des Vektors $\tilde{r}^{k,\ell-1}$ komplettieren. Der Parameter $\beta^{k,\ell-1}$ in (3.39) soll ungleich Eins sein, wenn für das Skalarprodukt $(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1})^\top(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}) < 0$ gilt. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist dann größer als 90 Grad. Somit sind für den Knoten $k \in c_h$ die Vektoren weit von der Lösung entfernt. Denn dafür gilt nämlich, dass $\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}$ und $\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}$ parallel zueinander stehen. Die Matrix $\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}$ hat die Gestalt

$$\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1} := \frac{\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1})^\top}{\max(b_k, \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}\|)\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|}. \quad (3.40)$$

Diese Matrix unterscheidet sich von $\mathbf{F}^{k,\ell-1}$ nur, wenn $\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}\| > b_k$ gilt. Das sind die Vektoren $\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}$, $k \in c_h$, die nicht in der zulässigen Menge aus (3.30) liegen.

Nun fehlt noch die Analyse der Eigenwerte dieser Matrix und der daraus resultierenden $\tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1}$. Der Parameter $\beta^{k,\ell-1}$ kann danach so gewählt werden, dass $Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$ aus (3.39) immer regulär ist, wobei die positiven Eigenwerte $\gamma_{Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}}^i$, $i = 1, 2$, dafür zwischen dem Bereich $0 < \gamma_{Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1}\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}}^i \leq 1$ liegen. Führt man die Werte

$$\alpha^{k,\ell-1} := \frac{(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1})^\top(\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1})}{\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}\|\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|}, \quad \delta^{k,\ell-1} := \min\left(\frac{\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}\|}{b_k}, 1\right),$$

ein, erhält man für den Eigenwert der Matrix $\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}$ $\gamma_{\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}}^1 = \alpha^{k,\ell-1}\delta^{k,\ell-1}$ und für $\gamma_{\tilde{\mathbf{F}}^{k,\ell-1}}^2 = 0$ [9]. Darauf aufbauend lauten der Eigenwert der Matrix $\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$ $\gamma_{\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}}^1 = e^{k,\ell-1}(1 - \alpha^{k,\ell-1}\delta^{k,\ell-1})$ und $\gamma_{\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}}^2 = e^{k,\ell-1}$. Da $-1 \leq \alpha^{k,\ell-1} \leq 1$ und $0 \leq \delta^{k,\ell-1} \leq 1$ gilt, sind mit

der Relation $0 < e^{k,\ell-1} < 1$ die Eigenwerte durch $0 \leq \gamma_{\tilde{\mathbf{M}}^k}^1 < 2$ und $0 < \gamma_{\tilde{\mathbf{M}}^k}^2 < 1$ beschränkt. Setzt man in der Gleichung (3.39) den Skalar

$$\beta^{k,\ell-1} := \begin{cases} \frac{1}{1 - \alpha^{k,\ell-1} \delta^{k,\ell-1}} & \alpha^{k,\ell-1} < 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein, folgt die Aussage für die Matrix $Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1} \tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$. In der Arbeit [9] wird bemerkt, dass auch die Vektoren $\tilde{\underline{h}}^{k,\ell-1}$ und $\tilde{\underline{\tau}}^{k,\ell-1}$ aus (3.39c) linear abhängig von $\underline{\lambda}^{k,\ell-1}$ sind.

In dieser Arbeit wird statt (3.34b) die Bedingung (3.39a) im Berechnungsverfahren verwendet. Die Matrizen und Vektoren, die in den knotenbasierten Gleichungen (3.34) und (3.39) vorkommen, sind, wenn Berechnungen in der Ebene durchgeführt werden, skalare Werte. Für das Gebiet gilt folgend $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Das heißt, wenn man statt $Id_{d-1} - \beta^{k,\ell-1} \tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$ den Skalar $1 - \beta^{k,\ell-1} \tilde{M}^{k,\ell-1}$ einsetzt, ist dieser immer größer Null. Weiters werden Matrizen \mathbf{X} in der Berechnungsvorschrift zu X , Vektoren \underline{x} zu x und Koeffizientenvektoren \underline{x}_τ zu x_τ , wenn in späterer Folge numerische Studien explizit in der Ebene durchgeführt werden.

3.4.3 Erweiterung des Verfahrens

Wenn man die Aktive-Mengen-Strategie, die durch die Anwendung des halbglaten Newton-Verfahrens entsteht, in der zuvor genannten Form auch für den Fall $b_k = 0$, $k \in c_h$, verwenden will, ist eine genaue Betrachtung der involvierten Normen $\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|$ und $\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}\|$ notwendig, da der Wert $e^{k,\ell-1}$ und die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$ nicht immer berechnet werden können. Die Normen können in diesem Fall den Wert Null annehmen.

Die Bedingung $\underline{\lambda}_\tau^k = \underline{0}$, die zum reibungsfreien Fall $b_k = 0$ gehört, kann nicht von der Gleichung $C_\tau(\underline{u}_\tau^k, \underline{\lambda}_\tau^k) = \underline{0}$ hergeleitet werden. Will man aber die Aktive-Mengen-Strategie zu einer Fixpunktberechnung für ein Kontaktproblem mit Coulombscher Reibung erweitern, ist der Fall $b_k = 0$ von großer Bedeutung, denn Knotenpunkte, die nicht mit dem Untergrund in Berührung sind, befinden sich im reibungsfreien Zustand. Wenn $b_k = 0$ gilt, muss der Knoten k aus der Menge \mathcal{A}_τ^ℓ sein. Das heißt, die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1}$ muss Null sein, um die Bedingung $\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} = 0$ durch die Gleichung (3.34b) und folgend durch (3.39) zu erhalten. Sind die zuvor genannten Normen größer Null, ist $e^{k,\ell-1} = 0$ und daher $\tilde{\mathbf{M}}^{k,\ell-1} = 0$, siehe (3.35). Somit muss für den Fall, dass die Normen $\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| = 0$ oder $\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1}\| = 0$ sind, die Bedingungen $k \in \mathcal{A}_\tau^\ell$ und $\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} = \underline{0}$ erzwungen werden. Das erreicht man, wenn in (3.39) für die Matrix $\tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1} := \mathbf{0}$ und den Vektor $\tilde{\underline{\tau}}^{k,\ell-1} := \underline{0}$ gesetzt wird.

3.4.4 Elimination der Lagrangemultiplikatoren

Wenn die Zeile (3.25d) im Gleichungssystem (3.25) mit den Zeilen (3.34a) und (3.39a) ersetzt wird, erhält man das zu lösende lineare Gleichungssystem im ℓ -ten Iterations-

schritt des halbglatten Newtonverfahrens,

$$\mathbf{A}\underline{u}^\ell + \hat{\mathbf{D}}\underline{\lambda}^\ell = \underline{f} \quad (3.41a)$$

$$u_n^{k,\ell} = -g_h^k, \quad k \in \mathcal{A}_n^\ell, \quad (3.41b)$$

$$\lambda_n^{k,\ell} = 0, \quad k \in \mathcal{I}_n^\ell, \quad (3.41c)$$

$$\underline{u}_\tau^{k,\ell} = \underline{0}, \quad k \in \mathcal{I}_\tau^\ell, \quad (3.41d)$$

$$-\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + \tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1} \underline{u}_\tau^{k,\ell} = \tilde{\underline{r}}^{k,\ell-1}, \quad k \in \mathcal{A}_\tau^\ell. \quad (3.41e)$$

Die Gleichungen (3.41) eines Newtonschrittes ℓ sind eine Kombination der Gleichung (3.15), der Komplementärfunktionen C_n aus (3.21) und C_τ aus (3.31), die hier bereits durch die Methode des halbglatten Newtonverfahrens die zu berechnende Form haben, vergleiche Satz 3.7 und 3.6 und deren Abschnitte. Wenn der Newtonschritt ℓ gelöst wird, werden die Knoten $k \in c_h$ in folgende disjunkte Mengen $S_i^\ell \subset c_h$, $1 \leq i \leq 4$, mit $c_h = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} S_i^\ell$ eingeteilt,

- $S_1^\ell := \mathcal{I}_n^\ell \cap \mathcal{I}_\tau^\ell$: Knoten haftet ohne Kontakt, das heißt

$$\begin{aligned} \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k &\leq 0, & -\lambda_n^{k,\ell-1} - c(u_n^{k,\ell-1} + g_h^k) &\leq 0, \\ \underline{u}_\tau^{k,\ell} &= \underline{0}, & \lambda_n^{k,\ell} &= 0, \end{aligned} \quad k \in S_1^\ell,$$

- $S_2^\ell := \mathcal{I}_n^\ell \cap \mathcal{A}_\tau^\ell$: Knoten rutscht ohne Kontakt,

$$\begin{aligned} \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k &> 0, & -\lambda_n^{k,\ell-1} - c(u_n^{k,\ell-1} + g_h^k) &\leq 0, \\ -\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + \tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1} \underline{u}_\tau^{k,\ell} &= \tilde{\underline{r}}^{k,\ell-1}, & \lambda_n^{k,\ell} &= 0, \end{aligned} \quad k \in S_2^\ell,$$

- $S_3^\ell := \mathcal{A}_n^\ell \cap \mathcal{I}_\tau^\ell$: Knoten haftet mit Kontakt,

$$\begin{aligned} \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k &\leq 0, & -\lambda_n^{k,\ell-1} - c(u_n^{k,\ell-1} + g_h^k) &> 0, \\ \underline{u}_\tau^{k,\ell} &= \underline{0}, & u_n^{k,\ell} &= -g_h^k, \end{aligned} \quad k \in S_3^\ell,$$

- $S_4^\ell := \mathcal{A}_n^\ell \cap \mathcal{A}_\tau^\ell$: Knoten rutscht mit Kontakt,

$$\begin{aligned} \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k &> 0, & -\lambda_n^{k,\ell-1} - c(u_n^{k,\ell-1} + g_h^k) &> 0, \\ -\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell} + \tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1} \underline{u}_\tau^{k,\ell} &= \tilde{\underline{r}}^{k,\ell-1}, & u_n^{k,\ell} &= -g_h^k, \end{aligned} \quad k \in S_4^\ell,$$

Dadurch können in den Knoten $k \in c_h$ die alten Iterationen $(\underline{u}^{k,\ell-1}, \underline{\lambda}^{k,\ell-1})$ verwendet werden, um die nächste Zugehörigkeit des Knotens k und dessen Gleichungen für die neue Iteration $(\underline{u}^{k,\ell}, \underline{\lambda}^{k,\ell})$ festzulegen. Das Modell mit Trescascher Reibung sieht auch Knoten vor, die einer Haftbedingung unterliegen, obwohl diese nicht den starren Körper berühren. Diese gehören zu der Menge S_1^ℓ .

Um das reduzierte lineare Gleichungssystem zu formulieren, werden die Knoten in die Mengen I , das sind jene die nicht in der Menge c_h liegen, und S_i^ℓ , $1 \leq i \leq 4$ aufgeteilt. Mit der Matrix $\mathbf{L}_{S_i^\ell}$ und dem Vektor $\underline{r}_{S_i^\ell}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{S_i^\ell} &:= \text{diag}\{\tilde{\mathbf{L}}^{k,\ell-1}\}_{k \in S_i^\ell} \in \mathbb{R}^{(d-1)|S_i^\ell| \times (d-1)|S_i^\ell|}, \\ \underline{r}_{S_i^\ell} &:= \{\tilde{\underline{r}}^{k,\ell-1}\}_{k \in S_i^\ell} \in \mathbb{R}^{(d-1)|S_i^\ell|}, \end{aligned}$$

lautet das reduzierte Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{tnr}^\ell \underline{u}^\ell = \underline{f}_{tnr}^\ell, \quad (3.42)$$

wenn der Vektor $\underline{\lambda}^\ell$ aus (3.41) kondensiert wird. Werden auch die Verschiebung \underline{u}^ℓ , die Matrix \mathbf{A}_{tnr}^ℓ und die rechte Seite \underline{f}_{tnr}^ℓ von (3.42) bezüglich der Zerlegung der Menge c_h umsortiert, lauten die Definitionen der Matrix und der rechten Seite,

$$\underline{u}^\ell := \begin{pmatrix} \underline{u}_I^\ell \\ \underline{u}_{S_1^\ell}^\ell \\ \underline{u}_{S_2^\ell}^\ell \\ \underline{u}_{S_3^\ell}^\ell \\ \underline{u}_{S_4^\ell}^\ell \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_{tnr}^\ell := \begin{pmatrix} \underline{f}_I \\ N_{S_1^\ell} \underline{f}_{S_1^\ell} \\ N_{S_2^\ell} \underline{f}_{S_2^\ell} \\ -\underline{g}_{S_3^\ell} \\ -\underline{g}_{S_4^\ell} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{S_2^\ell} \underline{f}_{S_2^\ell} + \underline{r}_{S_2^\ell} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{S_4^\ell} \underline{f}_{S_4^\ell} + \underline{r}_{S_4^\ell} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix \mathbf{A}_{tnr}^ℓ ist durch $\mathbf{A}_{tnr}^\ell :=$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{II} & \mathbf{A}_{IS_1^\ell} & \mathbf{A}_{IS_2^\ell} & \mathbf{A}_{IS_3^\ell} & \mathbf{A}_{IS_4^\ell} \\ N_{S_1^\ell} \mathbf{A}_{S_1^\ell I} & N_{S_1^\ell} \mathbf{A}_{S_1^\ell S_1^\ell} & N_{S_1^\ell} \mathbf{A}_{S_1^\ell S_2^\ell} & N_{S_1^\ell} \mathbf{A}_{S_1^\ell S_3^\ell} & N_{S_1^\ell} \mathbf{A}_{S_1^\ell S_4^\ell} \\ N_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell I} & N_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_1^\ell} & N_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_2^\ell} & N_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_3^\ell} & N_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_4^\ell} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{S_3^\ell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{S_4^\ell} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{S_1^\ell} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell I} & \mathbf{T}_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_1^\ell} & \mathbf{T}_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_2^\ell} + L_{S_2^\ell} \mathbf{T}_{S_2^\ell} & \mathbf{T}_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_3^\ell} & \mathbf{T}_{S_2^\ell} \mathbf{A}_{S_2^\ell S_4^\ell} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{S_3^\ell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{S_4^\ell} \mathbf{A}_{S_4^\ell I} & \mathbf{T}_{S_4^\ell} \mathbf{A}_{S_4^\ell S_1^\ell} & \mathbf{T}_{S_4^\ell} \mathbf{A}_{S_4^\ell S_2^\ell} & \mathbf{T}_{S_4^\ell} \mathbf{A}_{S_4^\ell S_3^\ell} & \mathbf{T}_{S_4^\ell} \mathbf{A}_{S_4^\ell S_4^\ell} + L_{S_4^\ell} \mathbf{T}_{S_4^\ell} \end{pmatrix}$$

erklärt. Die Matrizen \mathbf{N}_* und \mathbf{T}_* werden bezüglich der Untermengen von c_h sortiert, wobei die Definition des Abschnittes 3.3.3 gilt. Dieses lineare System ist regulär. Die Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix sind gleich. Jede Zeile, die zu den Untermengen von c_h gehört, ist bloß in zwei aufgespalten, die wiederum einer Spalte davon zugewiesen werden kann. Die Zeilen Zwei und Sechs beschreiben die Knoten aus S_1^ℓ , die ohne Kontakt haften, Drei und Sieben jene aus S_2^ℓ , die ohne Kontakt rutschen, Vier und Acht jene aus S_3^ℓ , die mit Kontakt haften und Fünf und Neun jene aus S_4^ℓ , die mit Kontakt rutschen. Der Vektor $\underline{\lambda}^\ell$ wird mit (3.28),

$$\underline{\lambda}^\ell = \mathbf{D} \left(\underline{f}_C - \mathbf{A}_{CI} \underline{u}_I^\ell - \mathbf{A}_{CC} \underline{u}_C^\ell \right),$$

berechnet. Hier ist kein Gleichungssystem zu lösen. Die Matrix \mathbf{A}_{tnr}^ℓ kann in jedem Iterationsschritt ℓ effizient erstellt werden, da nur eine lokale Umsortierung der Systemmatrix \mathbf{A} nötig ist. Hier wird eine exakte Aktive-Mengen-Strategie gewählt. Das

heißt, das Gleichungssystem (3.42) wird in

$$\underline{u}^\ell = \text{LöseGLS}(\underline{u}^{\ell-1}, \mathcal{A}_n^\ell, \mathcal{I}_n^\ell, \mathcal{A}_\tau^\ell, \mathcal{I}_\tau^\ell),$$

das ist Schritt 4 im Algorithmus 2, wie in Algorithmus 1 gelöst.

Algorithmus 2. *Exakte Aktive-Mengen-Strategie*

1: setze $\ell = 1$

2: initialisiere z.B. mit $\underline{u}^0 := \underline{0}$ und $\underline{\lambda}^0 := \underline{0}$, sodass $\mathcal{A}_n^1 = \emptyset$, $\mathcal{A}_\tau^1 = \emptyset$,
 $\mathcal{I}_n^1 = c_h$ und $\mathcal{I}_\tau^1 = c_h$

3: setze $c > 0$, ε_u

4:

$$\underline{u}^\ell = \text{LöseGLS}(\underline{u}^{\ell-1}, \mathcal{A}_n^\ell, \mathcal{I}_n^\ell, \mathcal{A}_\tau^\ell, \mathcal{I}_\tau^\ell)$$

5: berechne den Vektor

$$\underline{\lambda}^\ell = \mathbf{D} \left(\underline{f}_C - \mathbf{A}_{CI} \underline{u}_I^\ell - \mathbf{A}_{CC} \underline{u}_C^\ell \right)$$

6: erneuere $\mathcal{A}_n^{\ell+1}$, $\mathcal{I}_n^{\ell+1}$, $\mathcal{A}_\tau^{\ell+1}$ und $\mathcal{I}_\tau^{\ell+1}$ durch

$$\mathcal{A}_n^{\ell+1} := \{k \in c_h : -\lambda_n^{k,\ell} - c(u_n^{k,\ell} + g_h^k) > 0\}$$

$$\mathcal{I}_n^{\ell+1} := \{k \in c_h : -\lambda_n^{k,\ell} - c(u_n^{k,\ell} + g_h^k) \leq 0\}$$

$$\mathcal{A}_\tau^{\ell+1} := \{k \in c_h : \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k > 0\}$$

$$\mathcal{I}_\tau^{\ell+1} := \{k \in c_h : \|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\| - b_k \leq 0\}$$

7: **if** $\mathcal{A}_n^{\ell+1} = \mathcal{A}_n^\ell$ und $\mathcal{I}_n^{\ell+1} = \mathcal{I}_n^\ell$ und $\mathcal{A}_\tau^{\ell+1} = \mathcal{A}_\tau^\ell$ und $\mathcal{I}_\tau^{\ell+1} = \mathcal{I}_\tau^\ell$

8: und $\|\underline{u}^\ell - \underline{u}^{\ell-1}\| / \|\underline{u}^\ell\| < \varepsilon_u$ **then**

9: stop

10: **end if**

11: setze $\ell = \ell + 1$

12: gehe zu 4

Im Schritt 4 sind daher je nach Gestalt und Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix verschiedene iterative Löser, zum Beispiel Multigrid-Verfahren, exakte Reduktionsverfahren in Verbindung mit dem CG-Verfahren, möglich. In dieser Arbeit werden die direkten und Multilevel-Verfahren des Gleichungssystemlöser PARDISO verwendet, [12], [14] und [15].

Der Algorithmus 2 terminiert, wenn die neu bestimmten Kontakt- und Nichtkontakt-knoten in den Schritten 7-9 mit den Vorgängern übereinstimmen.

Erwähnenswert ist, dass die Wahl des Parameters c in Schritt 3 bei einer exakten Aktive-Mengen-Strategie hier die tangential Suchrichtung beeinflusst, siehe [9]. Je nachdem wie der Parameter gewählt wird, kann sich die Suchrichtung und der korrekte Zustand damit ändern. Zum Beispiel kann mit c der Wert der Norm $\|\underline{\lambda}_\tau^{k,\ell-1} + c\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}\|$ skaliert werden. Je größer c ist, desto kleiner muss die Verschiebung $\underline{u}_\tau^{k,\ell-1}$ sein, wenn der Haftzustand gelten soll. Damit wird die Suche nach dem korrekten Zustand genauer und das Verfahren stabiler.

4 Numerische Studien

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der numerischen Beispiele zusammengefasst. Alle Beispiele werden durch einen Finite-Elemente-Code berechnet. Dabei werden lineare global stetige Ansatzfunktionen verwendet, vergleiche (3.1) und (3.2). Die Netzgeometrie wird mit NETGEN 4.9.13, [16], generiert und mit seiner Meshformatdatei im Programm eingelesen. In der Abbildung 4.1 mitte wird das Startnetz der Refinementstufen angegeben. Man erkennt das der Rand des Kreises in 16 Liniensegmente aufgeteilt wird. Die feineren Netze der folgenden Refinementstufen besitzen immer die doppelte Anzahl von den Liniensegmenten des Vorgängers. Das heißt, das erste Netz hat 16 Liniensegmente als Rand, das zweite 32. Das steigt bis zur sechsten Refinementstufe mit 512 Randelementen. Jedoch ist kein uniformes Refinement der Netze gegeben. Die inneren Knotenpunkte aller Netze sind voneinander unabhängig generiert. Die Netzdaten lauten für das erste Netz 20 Liniensegmente als Rand, 132 Flächenelemente und 77 Punkte, für das zweite Netz 36 Liniensegmente als Rand, 240 Flächenelemente und 139 Punkte, für das dritte Netz 68 Liniensegmente als Rand, 434 Flächenelemente und 252 Punkte, für das vierte Netz 132 Liniensegmente als Rand, 890 Flächenelemente und 512 Punkte, für das fünfte Netz 258 Liniensegmente als Rand, 1982 Flächenelemente und 1121 Punkte und für das sechste Netz 512 Liniensegmente als Rand, 4220 Flächenelemente und 2367 Punkte.

Die Geometrie, die in den Beispielen Verwendung findet, ist ein homogener elastischer Zylinder auf einer starren Platte. Wegen der symmetrischen Eigenschaften der gewählten Druckverteilung und des Verhältnisses des Radius zu seiner Länge liegen alle Berechnungen in der Ebene vor. Das Bild links der Abbildung 4.1 zeigt die Vorderansicht der Geometrie aller Beispiele.

Es folgen nun einige Erläuterungen zu den Beispielen. Die numerische Integration wird mit den Gaußschen Regeln über ein Liniensegment und für Zweifachintegrale über ein Dreieck durchgeführt. Um die vorkommenden linearen Gleichungssysteme der exakten Aktive-Mengen-Strategien zu lösen, wird PARDISO 5.0.0 verwendet, [12], [14] und [15]. Die Zahlenwerte der Beispiele werden ohne Bezug auf Einheiten gesetzt. Das bedeutet, dass die Modelle dieser Arbeit als dimensionslose Gleichungen in den Berechnungen dargestellt werden.

Die Daten, die in allen Beispielen gleich sind, werden in der Folge angegeben. Der Radius des Querschnittskreises beträgt Eins. Dafür wird $r = 1$ gesetzt. Die Breite der Platte beträgt Zwei und die Höhe 0.714. Der Kreis liegt auf der Mitte der Breite direkt auf. Für den Druck $\underline{p}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Gamma_N$, gilt $\underline{p} = (0, -0.02)^\top$ und für den Kraftvektor $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \Omega$ setzt man $\underline{f} = \underline{0}$. Der Druck $\underline{p}(\underline{x})$ bleibt für alle Refinementstufen gleich. Er wirkt symmetrisch auf das obere Achtel des Zylinders, siehe Abbildung 4.1 links. Die

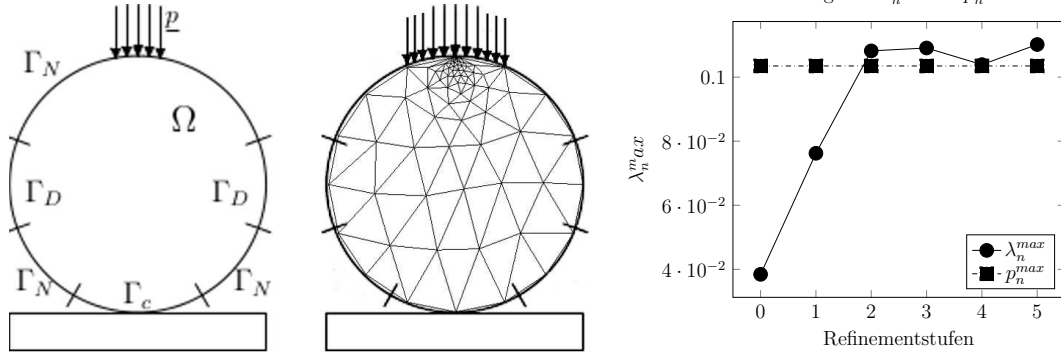


Abbildung 4.1: Links: Vorderansicht des elastischen Zylinders auf einer starren Platte, Mitte: Anfangstriangulierung, Rechts: Maximale Kontaktrandspannung

Gesamtkraft f , die auf einen Kreisabschnitt wirkt, wird folgendermaßen berechnet,

$$f = \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} \underline{p} \cdot \underline{n}(\alpha) d\alpha = \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} 0.02 \sin(\alpha) d\alpha = 0.015307.$$

Dabei ist hier der Einheitsvektor $\underline{n}(\alpha) := (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$ gemeint. Alle Symbole sind aus der Gleichung (1.43) entnommen.

4.1 Kontaktproblem ohne Reibung

Am Anfang wird ein stationäres Signorini-Problem ohne Reibungskräfte behandelt, das einem linearen Hookeschen Materialgesetz unterliegt. Die Angabe der Materialparameter λ und μ aus (1.43f) fehlt noch. Mit den Gleichungen aus (1.25) für das Materialmodell der ebenen Verzerrungen sind die Parameter durch das Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν gegeben. Hier wird $E = 2$ und $\nu = 0.3$ gewählt.

Die Verschiebung \underline{u}_h und Lagrangemultiplikatoren $\underline{\lambda}^k$, vergleiche hierfür (3.11), werden in allen Knoten aus der Menge c_h , die aus der Definition 3.1 ist, zerlegt. Die dafür vorgesehenen, konstant bleibenden Vektoren lauten $\underline{n} := (0, 1)^T$ und $\underline{\tau} := (1, 0)^T$ für alle Knoten aus c_h . Mit diesen Werten ist das System (3.15) zu lösen. Da aber kein Dirichletrand $\Sigma_{h,D}$ gegeben ist, wird eine Stabilisierung in die Richtung $\underline{\tau}$ benötigt. Das heißt, anstatt den Funktionenraum V_0^h aus (3.1) zu verwenden, ersetzt man ihn durch

$$V_*^h := \left\{ \underline{v}_h \in [\mathcal{S}_h^1]^d : \int_{\mathcal{T}_{h,\Omega}} \underline{\tau} \cdot \underline{v}_h = 0 \right\}.$$

Alle folgenden Funktionenräume aus (3.4) und (3.15) gelten mit V_*^h . Die Bedingungen von V_*^h werden im Algorithmus, wie in [19, S. 81,82] erklärt, umgesetzt. Die Stabilisierung wird benötigt, weil der elastische Zylinder in die Richtung $\underline{\tau}$ frei beweglich ist.

Sie ist aber ausreichend, da ein Punkt von $\Sigma_{h,c}$ immer die Platte berührt und $\underline{n}, \underline{\tau}$, eine kanonische Basis ist. Somit hat dieser Punkt die Eigenschaften einer Dirichletbedingung für die Verschiebung \underline{u}_h in einer Komponente. Damit sind keine Translationen in \underline{n} -Richtung und keine Rotationen möglich.

Das letzte Integral des Ausdrucks $f_h(\underline{v}_h)$ aus (3.4) ist das diskrete Analogon zur Gesamtkraft f dieses Beispiels. Aber dieses Integral entspricht nicht der Gesamtkraft in allen Refinementstufen, weil der Kreisrand mit Liniensegmenten angenähert wird und somit auch der Wert der Gesamtkraft f .

Die Werte für die Kontaktrandspannungen können auch analytisch berechnet werden [9, S. 47]. Sie lauten für die Halbdistanz des Kontaktrandes $b = 0.09417$ und für die maximale Kontaktrandspannung $p_n^{max} = 0.103483$. Ab der dritten Refinementstufe beginnen die diskreten Werte λ_n^{max} die maximale Kontaktrandspannung gut zu approximieren, siehe Abbildung 4.1 rechts. λ_n^{max} ist der betragsmäßig größte Wert aller λ_n^k , $k \in c_h$.

In der Abbildung 4.2 sieht man von links nach rechts und von oben nach unten die

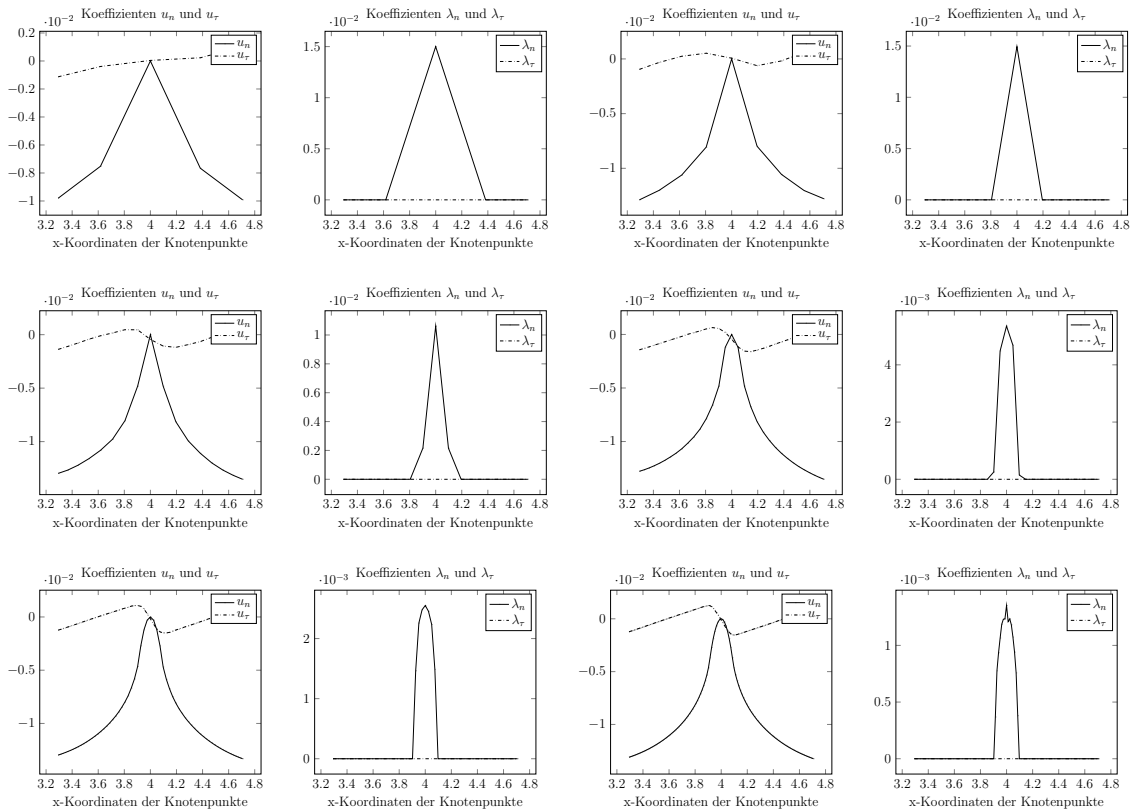


Abbildung 4.2: Die Verschiebungen \underline{u}_h und Lagrangemultiplikatoren $\underline{\lambda}_h$ aller Refinementstufen, zerlegt in die Richtungen \underline{n} und $\underline{\tau}$ auf $\Sigma_{h,c}$

Anordnung von der ersten bis zur sechsten Refinementstufe. Für \underline{u}_h und $\underline{\lambda}_h$ auf $\Sigma_{h,c}$

Die Tabelle zeigt das Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens für jede berechnete Refinementstufe l in einer Zeile. Die Anzahl der Kontaktknoten $|c_h|$ sieht man in der zweiten Spalte, die Anzahl der Newtonschritte N_l in der dritten. Der Rest zeigt die Anzahl der aktiven Kontaktknoten $|\mathcal{A}_n^\ell|$ in jedem Newtonschritt. $\mathcal{A}_n^1 = c_h$ heißt, dass bei der Initialisierung alle Kontaktknoten auf $\Sigma_{h,c}$ als aktiv eingestuft werden. In diesem Beispiel hängt das Verfahren bei einer Verdoppelung der Kontaktknoten linear von den Refinementstufen ab.

5 Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Kontaktmodell gewählt, dem eine stationäre Betrachtung zu Grunde liegt. Die möglichen Verzerrungen, die durch Verschiebungen hervorgerufen werden, werden als infinitesimal angenommen. Dadurch gilt das lineare Hookesche Gesetz, das wiederum durch die Annahme eines speziellen Materialtyps, der isotrop, homogen und hyperelastisch sein soll, eingeschränkt wird. Die Kontaktbedingungen der Nichtdurchdringung und des Reibungsgesetzes werden durch die infinitesimalen Verzerrungen vereinfacht. Diese Beschreibung wird auch als linear geometrisch bezeichnet. In dieser Arbeit wird das Trescasche Reibungsgesetz verwendet. Dieses Modell verlangt, dass der Reibungskoeffizient und die Normalkraft a priori gegeben sind. In der mathematischen Analysis kann mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden über die Minimierung der zugeordneten Funktionale die Existenz einer Lösung gezeigt werden.

Die halbglatten Newtonverfahren stellen ein sehr flexibles Werkzeug dar, um die diskreten Variationsungleichungen zu bearbeiten. Man kann versuchen die Konvergenz zu verbessern, wenn die Berechnungsschritte des Gleichungssystems mit denen der Aktive-Mengen-Suche innerhalb eines Newtonschritts nicht hintereinander ausgeführt, sondern gemischt werden, siehe [9]. Wie weit aber die numerische Analyse in 3D-Berechnungen fortgeschritten ist, ist dem Autor nicht bekannt, da sich die Literaturrecherche hauptsächlich auf Modelle in der Ebene beschränkt hat.

Vor allem ist die Erweiterung auf instationäre Kontaktprobleme mit dem Coloumb-schen Reibungsgesetz interessant. Da sind zum Beispiel die Arbeiten [10], [21] für die Angabe von Lösungsalgorithmen, [9] für die numerische Analysis der FEM, [5] für die funktionalanalytische Behandlung der kontinuierlichen Variationsungleichungen zu nennen. Ein anderer Zugang führt auf Randintegralmethoden (BEM), vergleiche [20], [6]. Aber auch in [20] werden halbglatte Newtonverfahren eingesetzt. Obwohl auch andere Lösungsalgorithmen in der Literatur vorkommen, zum Beispiel in [10], haben die halbglatten Newtonverfahren ein breites Anwendungsspektrum in der Kontaktmechanik.

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1975.
- [2] P. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*, volume I. North Holland, Amsterdam, 1998.
- [3] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. 2. Auflage. Springer, New York, 1990.
- [4] G. Duvaut, J.-L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer, Berlin, 1976.
- [5] C. Eck, J. Jarušek, M. Krbec. *Unilateral Contact Problems*. Variational Methods and Existence Theorems. CRC Press, New York, 2005.
- [6] L. Gaul, M. Kögl, M. Wagner. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. An Introductory Course with Advanced Topics. Springer, Berlin, 2003.
- [7] A. Göpfert, Th. Riedrich, Ch. Tammer. *Angewandte Funktionalanalysis*. Motivationen und Methoden für Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [8] M. Hintermüller, K. Ito, K. Kunisch. The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. *SIAM J. Optim.*, 13(3):865–888, 2003.
- [9] S. Hübner. Discretization techniques and efficient algorithms for contact problems. Dissertation, Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation Universität Stuttgart, 2008.
- [10] N. Kikuchi, J. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM Studies in Applied Mathematics 8, Philadelphia, 1988.
- [11] K. Kunisch, G. Stadler. Generalized Newton methods for the 2D-Signorini contact problem with friction in function space. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(4):827–854, 2005.
- [12] A. Kuzmin, M. Luisier, and O. Schenk. Fast methods for computing selected elements of the greens function in massively parallel nanoelectronic device simulations. In F. Wolf, B. Mohr, and D. Mey, editors, *Euro-Par 2013 Parallel Processing*, volume 8097 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 533–544. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [13] R. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover, Mineola, New York, 1984.
- [14] Olaf Schenk, Matthias Bollhöfer, and Rudolf A. Römer. On large-scale diagonalization techniques for the anderson model of localization. *SIAM Rev.*, 50(1):91–112, February 2008.

-
- [15] Olaf Schenk, Andreas Wächter, and Michael Hagemann. Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. *Computational Optimization and Applications*, 36(2-3):321–341, 2007.
- [16] Joachim Schöberl. Netgen. *Comput. Visual. Sci.*, 1(1):41–52, February 1997.
- [17] A. S. Sinwel. A New Family of Mixed Finite Elements for Elasticity. Dissertation, Institut für Numerische Mathematik, Johannes Kepler Universität Linz, 2009.
- [18] M. Springmann. Identifikation von Materialparametern schädigungsmechanischer Gesetze unter Einbeziehung der Dehnungslokalisierung. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik, Technische Universität Bergakademie Freiberg, 2005.
- [19] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. B. G. Teubner, Wiesbaden, 2003.
- [20] L. Tchoualag. Combined Generalized Newton Approach with Boundary Element Methods for Contact Problems. Dissertation, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Graz, 2011.
- [21] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2006.
- [22] E. Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis*. I:Fixpunktsätze. Teubner, Leipzig, 1976.
- [23] E. Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis*. II:Monotone Operatoren. Teubner, Leipzig, 1977.
- [24] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. III:Variational Methods and Optimization. Springer, New York, 1985.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am
.....
(Unterschrift)