



Dynamische Berechnung von Brücken bei Überfahrt von Hochgeschwindigkeitszügen – Softwaretool für Parameterstudie

Masterarbeit

verfasst von

Andreas Schörghofer

eingereicht am

**Institut für Stahlbau
Technische Universität Graz**

Betreuer

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Unterwiesing

mitbetreuender Assistent

Ass.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Taras

Graz, April 2015

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am 22. April 2015

.....

(Unterschrift)

Danksagung

Ich möchte mich für die Möglichkeit meine Masterarbeit am Institut für Stahlbau verfassen zu können sehr herzlich bei meinen Betreuern Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Unterweger und Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Taras bedanken.

Des Weiteren möchte ich all jenen meinen Dank aussprechen, die mich in den Jahren meines Studiums begleitet haben. Besonders möchte ich hier meine Eltern erwähnen auf deren finanzielle und emotionale Unterstützung ich immer zählen konnte, die jedoch nie erbeten werden musste – ich weiß das sehr zu schätzen!

Kurzfassung

Die baulynamische Beurteilung einzelner Hochgeschwindigkeitszugtypen bei der Überfahrt über Eisenbahnbrücken stellt eine immer häufiger werdende Fragestellung dar. Meist ist eine große Anzahl an Brücken innerhalb eines Bahnnetzes zu berücksichtigen. Deshalb wird im Rahmen dieser Masterarbeit ein Softwaretool entwickelt, welches es mit einfachsten Hilfsmitteln (MS-Excel) erlaubt Parameterstudien für Einfeldtragwerke zu erstellen. Weiters ist es möglich Berechnungen für Mehrfeldträger durchzuführen. Das Berechnungsverfahren beruht auf der von Dipl.-Ing Dr.techn. Heinz Pircher verfassten Dissertation „Analytische Zeitintegration und Modale Analyse“. [2] Mit Hilfe der Modalen Analyse gelingt es das gekoppelte Mehrmassensystem als entkoppelte, repräsentative Einmassenschwinger (EMS) darzustellen. Zusätzlich wird die Belastung als sinusförmige Funktionen beschrieben wodurch eine analytische Lösung der DGL möglich ist. Somit müssen keine numerischen Methoden angewendet werden was diverse Vorteile mit sich bringt.

Abstract

The evaluation of the structural dynamics of railway bridges during a train crossing has been a common topic in recent times. Usually a big number of trains needs to be considered within a railway network. The thesis's goal was to develop a software program which allows performing parameter studies for single span beams. Moreover it is possible to do calculations for multi span beams - all that by using very basic tools like MS-Excel. The calculation procedures are based on Dipl.-Ing Dr.techn. Heinz Pircher's dissertation "Analytische Zeitintegration und Modale Analyse". [2] This method uses the modal analysis which allows transforming the coupled multi-degree-of-freedom system into several uncoupled single-degree-of-freedom systems. Additionally it is possible to describe the stress with sinusoidal functions. Because of this the differential equation can be solved in an analytical way. Therefore no numerical methods are needed, which comes along with several benefits.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Übersicht - gebräuchliche Lösungsmethoden	2
2	Einmassensysteme	3
2.1	Ungedämpfter Einmassenschwinger – Eigenfrequenz und Eigenschwingung	3
2.2	Gedämpfter Einmassenschwinger	3
2.2.1	Eigenfrequenz und Eigenschwingung	4
2.2.2	Sinusförmiger Zeitverlauf der Belastung	5
3	Mehrmassensysteme - Modale Analyse	7
3.1	Allgemeines	7
3.2	Eigenfrequenz und Eigenform	7
3.3	Modale Analyse – Vorgehensweise	8
3.3.1	Ungedämpfter Mehrmassenschwinger	8
3.3.2	Erzwungene Schwingung des gedämpften Mehrmassenschwingers	10
4	Analytische Zeitintegration – Modale Analyse – Zugüberfahrt	12
4.1	Allgemeines	12
4.2	Mathematische Aufbereitung	12
4.2.1	Eigenfrequenzen und Eigenformen	12
4.2.2	Stellvertretende Einmassenschwinger (EMS)	14
4.2.2.1	Eigenfrequenz $\omega_{n,i}$	14
4.2.2.2	Generalisierte Masse m_i^*	14
4.2.2.3	Federkonstante k_i^*	14
4.2.2.4	Dämpfungsprozentsatz ζ_i	14
4.2.2.5	Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_{d,i}$	15
4.2.2.6	Dämpfungskonstante d_i^*	15
4.2.3	Belastung - Vorgehensweise	15
4.2.4	Einzellast	16
4.2.4.1	Phase 1 – sinusförmige Impulsbelastung	16
4.2.4.2	Phase 2 – freies Ausschwingen	17
4.2.5	Gesamtergebnis - Zugüberfahrt	18
5	Programm	19
5.1	Programmablaufplan	19
5.2	Graphische Benutzeroberfläche	21
5.2.1	Teil 1 – Parameterstudie	21
5.2.2	Teil 2 – Mehrfeldtragwerke	26
6	Vergleichsrechnungen	29

6.1	Einfeldträger	29
6.1.1	Übersicht	29
6.1.2	Einzelachse	30
6.1.3	Zugüberfahrt	31
6.2	Vierfeldträger	32
6.2.1	Übersicht	32
6.2.2	Einzelachse	33
6.2.2.1	Mitte Feld 2 ($x=11m$)	33
6.2.2.2	Auflager 3 ($x=17m$)	35
6.2.2.3	Endauflager ($x=28m$)	35
6.2.3	Zugüberfahrt	35
6.2.3.1	Mitte Feld 2 ($x=11m$)	35
6.2.3.2	Auflager 3 ($x=17m$)	37
6.2.3.3	Endauflager ($x=28m$)	38
6.3	Schlussfolgerung	38
7	Zusammenfassung	39
A	Literaturverzeichnis	40

0 Einleitung

Die Motivation zu dieser Arbeit ergab sich aufgrund der steigenden Nachfrage, den baudynamischen Einfluss spezieller Hochgeschwindigkeitszugtypen bei der Überfahrt über Eisenbahnbrücken simulieren zu können. Meistens muss dabei eine Aussage getroffen werden, ob ein gewisser Zugtyp innerhalb eines Bahnnetzes zugelassen wird oder nicht. Bei solchen Fragestellungen ist i.d.R. eine große Anzahl von Brücken zu untersuchen. Dadurch schien die Entwicklung eines Softwaretools zur Erstellung von Parameterstudien für Einfeldträger naheliegend. Als weiteres Kriterium wurde vereinbart auch einzelne Mehrfeldträger gezielt untersuchen zu können.

Durch den Einsatz leistungsfähiger Softwarepakete wird die baudynamische Betrachtung mittlerweile vielmals als Teilaufgabe der Tragwerksplanung verstanden. Oftmals resultieren bei numerischen Methoden lange Rechenzeiten bzw. erfüllen die vorhandenen Softwarepakete, im Speziellen bei Parameterstudien, nicht die erwünschten Anforderungen. [2]

Die vorliegende Arbeit beruht größtenteils auf der von Dipl.-Ing Dr.techn. Heinz Pircher verfassten Dissertation „Analytische Zeitintegration und Modale Analyse“. Das dort beschriebene Berechnungskonzept für die Simulation einer Zugüberfahrt wurde übernommen und um die Funktion, eine Parameterstudie für Einfeldträger durchführen zu können, erweitert. Generell basiert das Verfahren auf der modalen Analyse welches es ermöglicht das Gesamtsystem als stellvertretende Einmassenschwinger (EMS) darzustellen. Zudem ist es möglich die Belastung (Einzellastüberfahrt) als sinusförmige Funktion zu beschreiben. Für diesen Fall ist eine analytische Lösung der DGL bekannt was den großen Vorteil bringt keine numerischen Verfahren anwenden zu müssen. Somit kann auf den Einsatz von aufwändigen Computersystemen verzichtet werden. Mit Hilfe von einfachen Tabellenkalkulationen (z.B. MS-Excel), welche in der Praxis weit verbreitet sind, ist es möglich das Verfahren ohne großem Aufwand anzuwenden. [2]

Das in dieser Arbeit entwickelte Programm besteht aus zwei Teilen. In Ersterem ist es möglich Parameterstudien an Einfeldtragwerken durchzuführen. Dabei kann für eine bestimmte Brückenlängenauswahl die Biegesteifigkeit bzw. Massenbelegung variiert werden und somit auf die „kritischen“ Brücken für einen bestimmten Zugtyp geschlossen werden. Im Rahmen des zweiten Programmteils müssen zuerst die Eigenformen und Eigenfrequenzen des Mehrfeldträgers mit Hilfe eines Strukturberechnungsprogramms ermittelt und in das neue Softwaretool eingegeben werden. Danach ist die Simulation der Zugüberfahrt über das Tragwerk sehr einfach möglich.

Anschließend folgt die Beschreibung des Berechnungsverfahrens sowie ein Vergleich mit einem etablierten Softwareprodukt. Abschließend wird auf eine bereits durchgeführte Parameterstudie Bezug genommen.

1 Übersicht - gebräuchliche Lösungsmethoden

Eine geschlossene analytische Lösung der baulastdynamischen Problemstellungen gelingt nur in Spezialfällen wie z.B. bei Einfreiheitsgradsystemen. Für den Großteil der Aufgaben werden jedoch die Grundsätze der Baustatik (Deformationsmethode, Finite-Elemente-Methode) mit entsprechenden Erweiterungen angewendet. Nachfolgend wird kurz auf die generelle Berechnungsmethodik eingegangen.

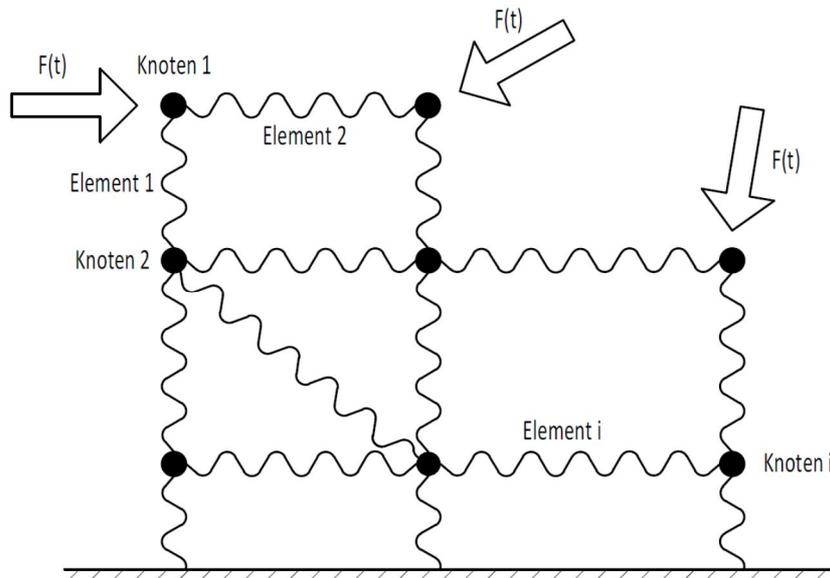


Abb. 1: Schematische Darstellung eines „Mehrfreiheitsgradsystems“ – siehe [2]

Das System wird in Elemente, welche an den Knoten miteinander verbunden sind, aufgeteilt. Die Knoten besitzen Freiheitsgrade (Verformungen, Verdrehungen) bzw. weisen die Elemente Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften auf. Nach Ermittlung der Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitselementmatrizen ($[M]$, $[D]$, $[C]$) erfolgt die Assemblierung zu globalen Matrizen. Nach Umrechnung der zeitabhängigen Belastung in Knotenlasten ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$[M] * \{\ddot{y}\} + [D] * \{\dot{y}\} + [C] * \{y\} + \{F(t)\} = 0 \quad (1.)$$

Eine analytische Lösung kann nur dort gelingen, wo auch die zeitabhängige Belastung in analytischer Form beschrieben werden kann. Dies ist jedoch meist nicht der Fall \rightarrow z.B. Erdbebenlast – punktweise Information über Last aus Accelerogrammen. Aufgrund dessen muss i.d.R. ein numerischer Algorithmus angewendet werden um allgemeine Probleme lösen zu können.

Bei diesen numerischen Lösungsmethoden wird ein Zeitschritt gewählt. Die Werte am Anfang des Zeitschrittes sind bekannt, somit kann mit Hilfe des oben gezeigten Gleichungssystems Formel (1.) bzw. mit numerischer Integration/ Differentiation auf die Werte am Ende des Zeitschrittes geschlossen werden. Ist eine direkte numerische Lösung des Gleichungssystems möglich (d.h. Endwerte hängen nur von Anfangswerten ab - es ist keine Iteration erforderlich), wird die Methode als „direkte Zeitintegration“ bezeichnet. Diese Verfahren können ohne große Schwierigkeiten auf geometrisch nichtlineare bzw. material nichtlineare Problemstellungen erweitert werden. Als Nachteil der direkten Zeitintegration ist sowohl die relativ lange Rechenzeit, als auch der Umstand dass die Qualität der Lösung sehr stark vom gewählten Zeitschritt abhängt, zu nennen. [2]

2 Einmassensysteme

In diesem Abschnitt wird kurz auf die Einmassensysteme eingegangen, da die hier gewonnen Erkenntnisse später bei der modalen Analyse nochmals benötigt werden. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen können auf verschiedene Weise erfolgen und stellen Standardprobleme der Mathematik dar. Die genaue Vorgehensweise wird unter anderem in [2], [3] und [5] ausführlich beschrieben.

2.1 Ungedämpfter Einmassenschwinger – Eigenfrequenz und Eigenschwingung

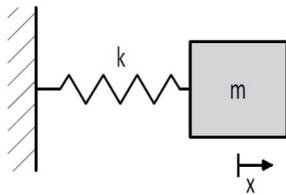


Abb. 2: ungedämpfter Einmassenschwinger

Die Bewegung des ungedämpften Einmassenschwingers wird mit Formel (2.) beschrieben

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \quad (2.)$$

Mit dem Ansatz $x(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_n t) + A_2 \cdot \sin(\omega_n t)$ welcher in Formel (2.) eingesetzt wird erhalten wir folgende Lösung:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots \text{Eigenkreisfrequenz} \quad (3.)$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0$ bzw. $v(t = 0) = v_0$ ergibt sich die Lösung der Bewegungsgleichung zu:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n t) \quad (4.)$$

2.2 Gedämpfter Einmassenschwinger

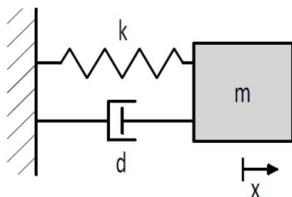


Abb. 3: gedämpfter Einmassenschwinger

Die Systemdämpfung ist jener Teilbereich der Baudynamik bei welchem die größten Diskrepanzen zwischen dem physikalischen Verhalten und der mathematischen Beschreibung herrschen. Von Seiten der Baustoffkunde gibt es wenig Information wie diese Materialeigenschaft zu behandeln ist. Als allgemein verwendetes und im Anschluss beschriebenes Modell dient die „Viskose Dämpfung“. [2]

2.2.1 Eigenfrequenz und Eigenschwingung

Die Bewegung des ungedämpften Einmassenschwingers (Formel (2.)) wird um $d * \dot{x}(t)$ erweitert:

$$m * \ddot{x}(t) + d * \dot{x}(t) + k * x(t) = 0 \quad (5.)$$

Mit dem Ansatz $x(t) = a * e^{\lambda t}$ resultiert die „charakteristische Gleichung“:

$$m * \lambda^2 + d * \lambda + k = 0 \quad (6.)$$

Mit der Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung ergibt sich:

$$\lambda_{1,2} = \frac{d}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{d^2 - 4m} \quad (7.)$$

Der Wert unterhalb der Wurzel kann positiv, negativ oder null sein. In Abhängigkeit davon ergeben sich 3 typische Lösungen für λ und $x(t)$: [2]

- $d^2 - 4m > 0$: Es existieren 2 reelle Lösungen. Es wird eine aperiodische Bewegung beschrieben, welche als „überkritische Dämpfung“ bezeichnet wird.
- $d^2 - 4m < 0$: Es existieren 2 imaginäre Lösungen. Es wird eine periodische Bewegung beschrieben, welche als „unterkritische Dämpfung“ bezeichnet wird. Mit dem Grenzfall, welcher bei $d^2 - 4m = 0$ liegt, wird die „kritische Dämpfung d_{cr} “ beschrieben.

$$d_{cr} = 2\sqrt{km} \quad \text{bzw. mit Formel (3.) ergibt sich:} \quad d_{cr} = 2\omega_n m \quad (8.)$$

Das Verhältnis

$$\zeta = \frac{d}{d_{cr}} = \frac{d}{2\omega_n m} \quad (9.)$$

wird als „Dämpfungsrate“ bezeichnet. [5]

Dividiert man Gleichung (5.) durch m und setzt Formel (3.) und (9.) ein, so ergibt sich eine andere, oft verwendete Schreibweise:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n * \dot{x}(t) + \omega_n^2 * x(t) = 0 \quad (10.)$$

Als häufigster Fall tritt die „unterkritische Dämpfung“, also $\zeta < 1$ auf. In diesem Fall wird λ zu:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (11.)$$

Die Größe

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (12.)$$

wird gedämpfte Kreisfrequenz genannt.

Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet nun:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (13.)$$

bzw. in trigonometrischen Funktionen geschrieben:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) \quad (14.)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Funktion in (14.) die DGL (5.) für beliebige Werte A bzw. B erfüllt. [2] Weiters ist im Fall von Dämpfungsrate $< 20\%$ der Unterschied der Frequenzen von gedämpfter und ungedämpfter Schwingung so gering, dass im Allgemeinen mit der ungedämpften Eigenkreisfrequenz gerechnet werden darf. [4]

2.2.2 Sinusförmiger Zeitverlauf der Belastung

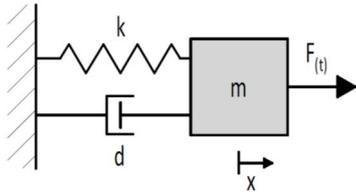


Abb. 4: gedämpfter Einmassenschwinger mit sinusförmigem Zeitverlauf der Belastung

Die Belastung des Einmassenschwingers wird lt. Formel (14.) beschrieben:

$$f(t) = f_0 * \sin(\bar{\omega}t) \quad (15.)$$

Dadurch ergibt sich nachfolgende inhomogene DGL:

$$m * \ddot{x}(t) + d * \dot{x}(t) + k * x(t) = f_0 * \sin(\bar{\omega}t) \quad (16.)$$

bzw. in anderer Schreibweise:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{f_0}{m} * \sin(\bar{\omega}t) \quad (17.)$$

Die Lösung dieser DGL setzt sich aus einem homogenen und partikulären Anteil zusammen. Ersteres kann von Gleichung (14.) übernommen werden. Um den partikulären Anteil zu bestimmen wird die DGL in (16.) durch m dividiert und mit Formeln (3.) und (9.) umgeformt. Anschließend wird der Ansatz:

$$x_p(t) = G_1 \cos(\bar{\omega}t) + G_2 \sin(\bar{\omega}t) \quad (18.)$$

eingesetzt und nach Sinus- und Cosinusgliedern geordnet :

$$\left[-G_2 \bar{\omega}^2 - G_1 \bar{\omega} (2\zeta\omega_n) + G_2 \omega_n^2 - \frac{f_0}{m} \right] \sin(\bar{\omega}t) = 0 \quad (19.)$$

$$\left[-G_1 \bar{\omega}^2 + G_2 \bar{\omega} (2\zeta\omega_n) + G_1 \omega_n^2 \right] \cos(\bar{\omega}t) = 0 \quad (20.)$$

Aus diesen zwei Bedingungen folgt mit $\beta = \bar{\omega}/\omega_n$:

$$G_1 = \frac{f_0}{k} * \left[\frac{-2\zeta\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] \quad (21.)$$

$$G_2 = \frac{f_0}{k} * \left[\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] \quad (22.)$$

Somit ist die partikuläre Lösung vollständig beschrieben. Jedoch ergeben weder die Verschiebung ($x_p(t)$) noch die Geschwindigkeit ($\dot{x}_p(t)$) zum Zeitpunkt $t = 0$ die Werte 0. Dies wird mit der homogenen Lösung (Formel (14.)) korrigiert. Insgesamt muss:

$$x(t = 0) = x_p(t = 0) + x_h(t = 0) = 0 \quad (23.)$$

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_p(t = 0) + \dot{x}_h(t = 0) = 0 \quad (24.)$$

gelten, wodurch die Parameter A und B der homogenen Lösung resultieren:

$$A = -G_1 \quad \text{bzw.} \quad B = \frac{G_1(-\zeta\omega_n) - \bar{\omega}G_2}{\omega_d} \quad (25.)$$

Die vollständige Bewegungsgleichung mit den Parametern (21.), (22.) und (25.) lautet somit:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = (G_1 \cos(\bar{\omega}t) + G_2 \sin(\bar{\omega}t)) + e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) \quad (26.)$$

3 Mehrmassensysteme - Modale Analyse

3.1 Allgemeines

Die modale Analyse wird in den meisten Berechnungsverfahren zur Lösung baodynamischer Probleme verwendet, wodurch nachfolgend kurz darauf eingegangen wird. [2]

Die grundlegende Idee besteht darin, das gekoppelte Gleichungssystem lt. Formel (1.) mit Hilfe von zwei Koordinatentransformationen zu entkoppeln, damit n (= Anzahl der Freiheitsgrade), voneinander unabhängige Gleichungen (\triangleq „stellvertretende Einmassenschwinger“) entstehen. Des Weiteren ist es möglich jeden beliebigen Auslenkungszustand mit Hilfe von Linearkombinationen der Eigenformen darzustellen. Dazu wird die Lösung des „stellvertretenden Einmassenschwingers“ mit der dazu gehörigen Eigenform multipliziert und zum Gesamtergebnis aufsummiert. Anschließend wird die generelle Vorgehensweise an einem ungedämpften Mehrmassensystem (Formel (27.)) übersichtsmäßig erläutert. Für die genaue Herleitung mit allen Zwischenritten siehe [3].

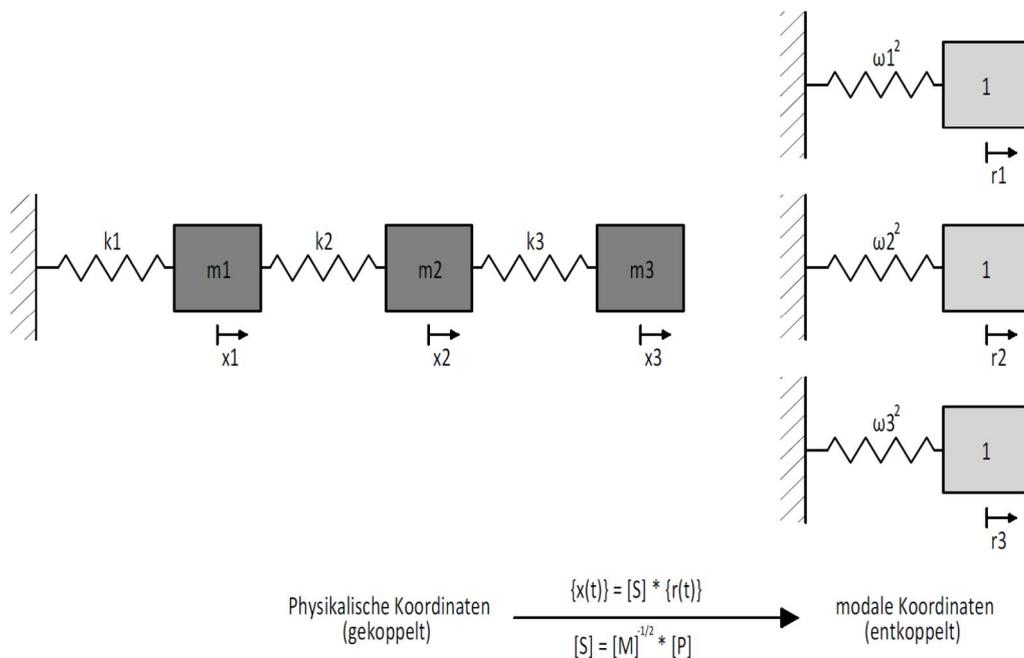


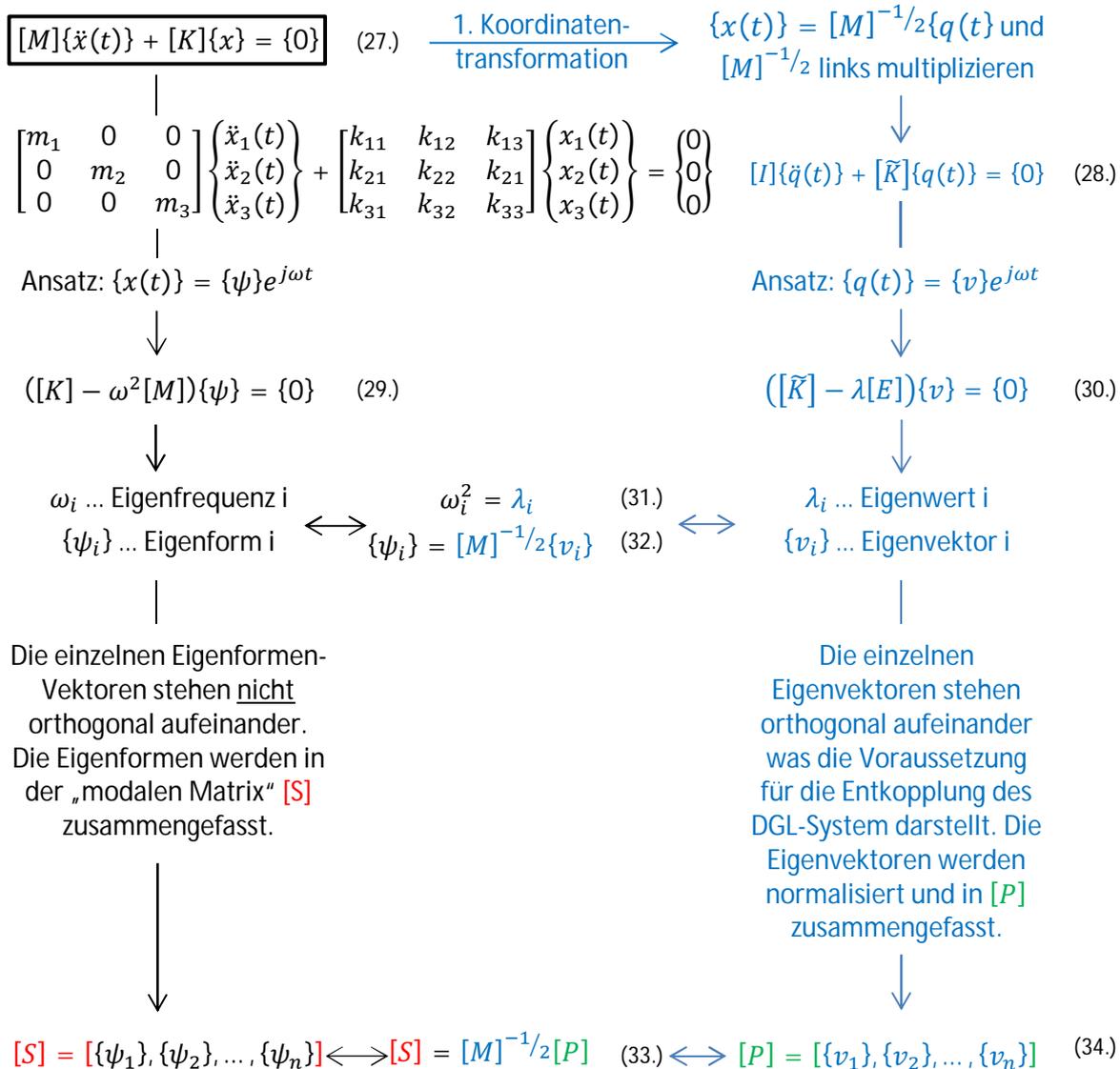
Abb. 5: Schematische Darstellung der Entkopplung mit Hilfe der Modalen Analyse – siehe [3]

3.2 Eigenfrequenz und Eigenform

Da die Berechnung von Eigenfrequenz/ Eigenform sowie Eigenwert/ Eigenvektor und deren Beziehung zueinander wichtige Voraussetzungen für die Modale Analyse sind, werden diese nachfolgend dargestellt. Die orthogonalen Eigenschaften der Eigenvektoren werden später bei der Entkopplung des DGL-Systems benötigt. Bei Formel (27.) beachte man, dass es sich hier um ein gekoppeltes DGL-System handelt – die Steifigkeitsmatrix $[K]$ ist keine Diagonalmatrix.

Vom Differentialgleichungssystem für einen ungedämpften Mehrmassenschwinger (im Bsp. 3-Massenschwinger) ausgehend, können mittels Formel (29.) die Eigenfrequenzen ω_i und Eigenformen $\{\psi_i\}$ berechnet werden. Führt man zuvor eine Koordinatentransformation durch, so ist es möglich mit Formel (30.) die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\{v_i\}$ zu ermitteln. Die

n Eigenformen sind jedoch nur als Verhältniswerte darstellbar. Jede Eigenform kann z.B. auf ihren Maximalwert mit 1 normiert werden. In der modalen Matrix $[S]$ werden die n Eigenvektoren normiert und in $[P]$ zusammengefasst. Wichtig ist hier anzumerken, dass nicht die Eigenformen sondern die Eigenvektoren orthogonal aufeinander stehen \rightarrow Entkopplung des DGL-Systems. [3] Die Beziehungen der Eigenfrequenzen/ Eigenwerte, Eigenformen/ Eigenvektoren und $[S]$ / $[P]$ sind in den Formeln (31.), (32.) und (33.) dargestellt.



3.3 Modale Analyse – Vorgehensweise

3.3.1 Ungedämpfter Mehrmassenschwinger

Mit den oben gewonnenen Informationen wird nun die Modale Analyse in groben Zügen erläutert. Wiederum von dem Differentialgleichungssystem eines Mehrmassenschwingers ausgehend, erfolgt die erste, bereits bekannte, Koordinatentransformation (Formel (35.)). Mit diversen Beziehungen, welche in (37.) zusammengefasst sind (für detaillierte Beschreibung siehe [3]), ist es möglich das DGL-System in entkoppelter Form darzustellen ($[A]$ ist nur in der Diagonalen besetzt – siehe Formel (38.)). Weiters erkennt man mit Hilfe der Beziehung in

Formel (31.), dass $[A]$ mit den Quadraten der Eigenfrequenzen belegt ist. Somit besteht das zuvor gekoppelte DGL-System nun aus n entkoppelten DGL des ungedämpften Einmassenschwingers (jedoch im modalen Koordinatensystem $r(t)$). Diese kann man deutlich einfacher lösen als das gekoppelte DGL-System. Die Resultate erhält man jedoch, wie bereits erwähnt, im modalen Koordinatensystem. D.h. eine Rücktransformation in physikalische Koordinaten $x(t)$ ist noch erforderlich und wird in Formel (40.) erläutert. [3]

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\}}$$

↓

1. Koordinatentransformation $\{x(t)\} = [M]^{-1/2}\{q(t)\}$ und mit $[M]^{-1/2}$ links multiplizieren

↓

$$[M]^{-1/2}[M][M]^{-1/2}\{\ddot{q}(t)\} + [M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}\{q(t)\} = \{0\} \quad (35.)$$

↓

2. Koordinatentransformation $\{q(t)\} = [P]\{r(t)\}$ und mit $[P]^T$ links multiplizieren

↓

$$[P]^T[M]^{-1/2}[M][M]^{-1/2}[P]\{\ddot{r}(t)\} + [P]^T[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}[P]\{r(t)\} = \{0\} \quad (36.)$$

↓

Mit $[M]^{-1/2}[M][M]^{-1/2} = [I]$; $[P]^T[P] = [I]$;

$$[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2} = [\tilde{K}] \text{ und } [P]^T[\tilde{K}][P] = [\lambda] \text{ folgt} \quad (37.)$$

↓

$$[I]\{\ddot{r}(t)\} + [\lambda]\{r(t)\} = \{0\} \quad (38.)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{r}_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) \\ \ddot{r}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↓

$$\omega_i^2 = \lambda_i$$

↓

$$\begin{Bmatrix} \ddot{r}_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) \\ \ddot{r}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39.)$$

1.EMS
2.EMS
3.EMS

↓

Einmassenschwinger lösen und rücktransformieren

↓

$$\{x(t)\} = [M]^{-1/2}\{q(t)\} = [M]^{-1/2}[P]\{r(t)\} = [S]\{r(t)\} \quad (40.)$$

Der Schritt von Formel (36.) auf Formel (38.) kann jedoch mit $[P]^T[M]^{-1/2} = [S]^T$ noch anders interpretiert werden. Dies entspricht jener Darstellung die meist in der Literatur zu finden ist – siehe z.B. [2] und [4]:

$$[S]^T[M][S]\{\ddot{r}(t)\} + [S]^T[K][S]\{r(t)\} = \{0\} \quad (41.)$$



$$[M]^*\{\ddot{r}(t)\} + [K]^*\{r(t)\} = \{0\} \quad (42.)$$



$[M]^*$... Matrix mit „generalisierten Massen“ in Diagonale
 $[K]^*$... Matrix mit „generalisierten Steifigkeiten“ in Diagonale



Sind die Eigenformen derart normiert dass $\{\psi_i\}^T[M]\{\psi_i\} = 1$ gilt, so ist
 $[M]^* = [I]$ bzw. $[K]^* = [A] \rightarrow$ ident mit Formel (38.)



$$[I]\{\ddot{r}(t)\} + [A]\{r(t)\} = \{0\} \quad (43.)$$

3.3.2 Erzwungene Schwingung des gedämpften Mehrmassenschwingers

Selbiges kann auch für gedämpfte Mehrmassensysteme unter Belastung gezeigt werden. Nachfolgend wird nur eine Zusammenfassung der Ergebnisse dargestellt. Für die Herleitungen im Detail siehe [2], [3].

Wie bei der Massen- und Steifigkeitsmatrix muss auch die Dämpfungsmatrix bzw. der Belastungsvektor in das modale Koordinatensystem transformiert werden.

Von der DGL für eine gedämpfte Mehrmassensystem unter Belastung ausgehend

$$[M] * \{\ddot{x}(t)\} + [D] * \{\dot{x}(t)\} + [K] * \{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (44.)$$

resultiert mit den Orthogonalitätsbeziehungen lt. 3.3.1 folgendes Gleichungssystem:

$$[M]^*\{\ddot{r}(t)\} + [D]^*\{\dot{r}(t)\} + [K]^*\{r(t)\} = \{F(t)\}^* \quad (45.)$$

$[M]^* = [S]^T[M][S]$... „generalisierte Massen“
 $[D]^* = [S]^T[D][S]$... „generalisierte Dämpfungen“
 $[K]^* = [S]^T[K][S]$... „generalisierte Steifigkeiten“
 $\{F(t)\}^* = [S]^T\{F(t)\}$... „generalisierte Lasten“

Jede Zeile dieses Gleichungssystems entspricht einem Einmassenschwinger (siehe Formel (16.) bzw. (17.)) und hat die Form:

$$m_i^* \ddot{r}_i(t) + d_i^* \dot{r}_i(t) + k_i^* r_i(t) = f_i^*(t) \quad (46.)$$

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i \omega_{n,i} \dot{r}_i(t) + \omega_{n,i}^2 r_i(t) = f_i^*(t) \quad (47.)$$

Die Lösung dieses gedämpften Einmassenschwingers unter sinusförmiger Belastung ist

bekannt (Formel (26.)). D.h. das Ziel wird es seine, die Belastung (Überfahrt einer Einzelachse) als sinusförmigen Verlauf darzustellen um diese Lösung verwenden zu können. Dies wird später in Abschnitt 4.2.1 besprochen.

Nach dem Lösen aller i stellvertretenden Einmassenschwinger ist noch die Rücktransformation vom modalen ins physikalische Koordinatensystem erforderlich (Formel (40.)).

Anmerkungen zur Dämpfung: Aufgrund der hohen Schwierigkeit die Dämpfung für komplexe Systeme vernünftig abzubilden bzw. aufgrund der Forderung dass nach der Transformation die Dämpfungsmatrix nur in den diagonalen besetzt sein darf, wird oft eine vereinfachte Variante – die sogenannte Rayleigh Dämpfung – angewendet. Diese setzt sich aus einem massen- und steifigkeitsproportionalen Anteil zusammen: [5]

$$[D] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (48.)$$

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung lt. Formel (44.) ein und führt die Transformation in modale Koordinaten durch, so resultiert (=Erweiterung um Dämpfungsterm von Formel (43.)):

$$[I]\{\ddot{r}(t)\} + (\alpha[I] + \beta[A])\{\dot{r}(t)\} + [A]\{r(t)\} = \{0\} \quad (49.)$$

Die Dämpfungsrate ζ_i je Eigenform kann mit Formel (47.) bestimmt werden aus:

$$2\zeta_i\omega_{n,i} = \alpha + \beta\omega_{n,i}^2 \quad \rightarrow \quad \zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_{n,i}} + \frac{\beta\omega_{n,i}}{2} \quad (50.)$$

Die zwei Parameter α und β können für zwei Eigenfrequenzen spezifiziert werden. Dadurch folgen die restlichen Dämpfungsrate ζ_i automatisch. [2]

4 Analytische Zeitintegration – Modale Analyse – Zugüberfahrt

4.1 Allgemeines

Mit Hilfe der Modalen Analyse und der analytischen Zeitintegration wird nachfolgend die Simulation einer Zugüberfahrt über eine Eisenbahnbrücke gezeigt. Dabei wird die Antwort des Gesamtsystems aus den Antworten der stellvertretenden Einmassenschwinger zusammengesetzt. Damit die analytische Zeitintegration angewendet werden kann, muss es möglich sein die Belastung in analytischer Form beschreiben zu können. Es wird zunächst das Wirken einer Einzellast berechnet. Die Antwort der Zugüberfahrt ergibt sich dann durch Überlagern der Einzellasten entsprechend der Zugachsen. Es sind dabei zwei Phasen zu unterscheiden: [2]

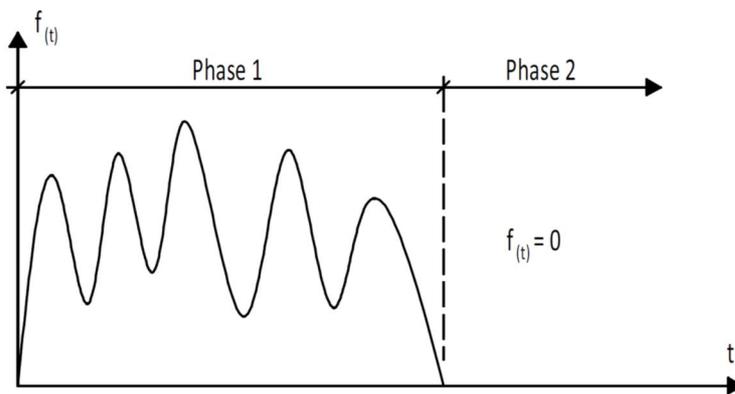


Abb. 6: Impulsbelastung [2]

In Phase 1 findet die Belastung statt (Einzellast fährt über Brücke) und in Phase 2 schwingt das System frei aus. Diese beiden Phasen werden mathematisch getrennt behandelt.

4.2 Mathematische Aufbereitung

Nachfolgend wird die mathematische Aufbereitung der Zugüberfahrt über eine Eisenbahnbrücke lt. [2] beschrieben.

4.2.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Die erforderlichen Eigenfrequenzen bzw. Eigenformen können entweder mit Hilfe von bereits vorhandenen Softwarepaketen bzw. bei einfachen Systemen mittels Formeln ermittelt werden. In ersterem Fall erhält man die Eigenformen nicht als geschlossene Funktion $\psi(x)$ sondern Datenpunkte z_j an den m Knoten.

Damit das Berechnungskonzept angewendet werden kann müssen die Eigenformen als Sinusfunktionen bzw. als Summe von n Sinusfunktionen dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 f_{\psi}(x) &= a_1 \sin\left(\frac{x}{L} \pi\right) + a_2 \sin\left(\frac{x}{L} 2 * \pi\right) + \dots + a_j \sin\left(\frac{x}{L} j * \pi\right) + \dots \\
 &+ a_m \sin\left(\frac{x}{L} m * \pi\right) = \sum_{j=1}^m a_j \sin\left(\frac{x}{L} j * \pi\right) = \sum_{j=1}^m f_{\psi,j}(x) \cong \psi(x)
 \end{aligned}
 \tag{51.}$$

Beim einfachsten System, dem Einfeldträger, ist je Eigenform jeweils nur eine Sinusfunktion notwendig. Z.B. für die 2. Eigenform wäre nur eine Sinusfunktion mit $j = 2$ zu wählen.

Für komplexere Eigenformen sind mehrere Sinusfunktionen erforderlich. Mit der „Methode der kleinsten Quadrate“ werden die Parameter a_j , wie nachfolgend gezeigt, festgelegt.

Die Eigenformen sind an m Knoten mit Hilfe der z-Koordinate (Datenpunkte z_j) entlang der x-Achse beschrieben. Ziel ist es, dass der quadratische Fehler $J(a_j)$ zwischen den Datenpunkten z_i und der Modellfunktion $f_\psi(x_i)$ so klein wie möglich wird. [2][6]

$$\begin{aligned}
 J(a_j) &= \sum_{i=1}^n (f_\psi(x_i) - z_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f_{\psi,j}(x_i) - z_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left[a_j \sin\left(\frac{x_i}{L} j * \pi\right) \right] - z_i \right)^2
 \end{aligned} \quad (52.)$$

Bildet man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J(a_j)}{\partial a_j}$ für alle j und setzt diese gleich 0, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$[G] * \{A\} = \{R\} \quad (53.)$$

$$\text{mit: } G_{k,l} = \sum_{i=1}^n f_{\psi,k}(x_i) * f_{\psi,l}(x_i) \quad \begin{array}{l} k \text{ von } 1 \text{ bis } m \\ l \text{ von } 1 \text{ bis } m \end{array} \quad (54.)$$

$$A_k = a_j \quad k \text{ von } 1 \text{ bis } m \quad (55.)$$

$$R_k = \sum_{i=1}^n f_{\psi,k}(x_i) * z_i \quad k \text{ von } 1 \text{ bis } m \quad (56.)$$

n ... Anzahl Knoten

m ... Anzahl Sinusfunktionen

Durch Umformen der Gleichung (53.) erhält man die gesuchten Werte für a_j . Es ist darauf zu achten, dass genügend Messpunkte vorhanden sind. Wird eine zu hohe Anzahl an Sinusfunktionen für die gegebene Anzahl an Messpunkten gewählt, resultieren falsche Parameter a_j . Daher wird die Bedingung $m/n = 1/3$ eingeführt.

In Abb. 27 ist beispielhaft die 1. Eigenform (EF) eines 4-Felddurchlaufträgers, deren Näherung sowie die dazu verwendeten 6 Sinusfunktionen dargestellt.

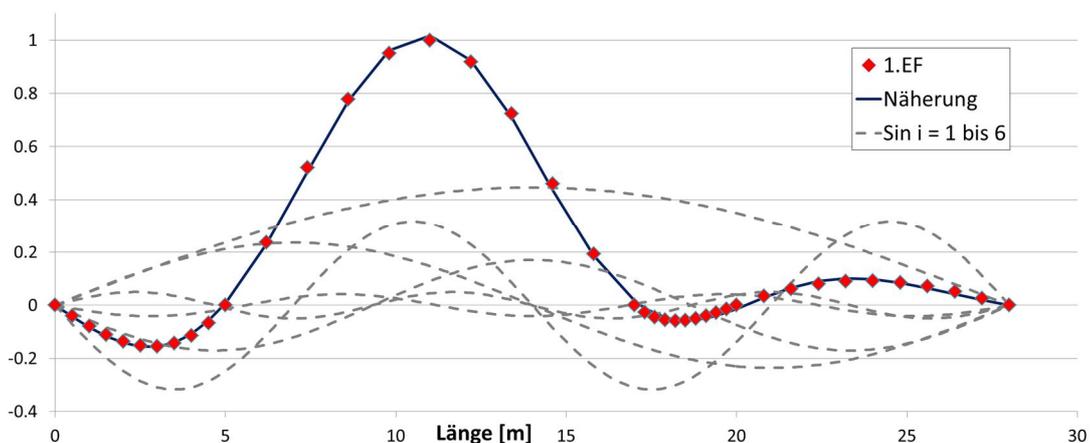


Abb. 7: 1.EF von 4-Feldträger

4.2.2 Stellvertretende Einmassenschwinger (EMS)

Die Bewegungsgleichung für den EMS lautet:

$$m_i^* \ddot{r}_i(t) + d_i^* \dot{r}_i(t) + k_i^* r_i(t) = f_i^*(t) \quad \text{siehe (46.)}$$

Es müssen nun für jeden EMS folgende Kennwerte ermittelt werden:

4.2.2.1 Eigenfrequenz $\omega_{n,i}$

Die Eigenfrequenz wird in weiterer Folge als Winkelgeschwindigkeit verwendet. Die Umrechnung von [Hz] erfolgt mit:

$$\omega_{n,i} = 2\pi * f_{n,i,Hz} \quad (57.)$$

4.2.2.2 Generalisierte Masse m_i^*

Meist erhält man die generalisierte Masse m_i^* von jenem Strukturberechnungsprogramm mit welchem man auch die Eigenfrequenzen/ -formen ermittelt.

Im Falle einer konstanten Massenbelegung lässt sich die generalisierte Masse m_i^* für die i . Eigenform jedoch ganz einfach wie folgt ermitteln:

$$m_i^* = \{\psi_i\}^T [M] \{\psi_i\} = m_1 \psi_1^2 + \dots + m_j \psi_j^2 + \dots + m_m \psi_m^2 = \sum_{j=1}^{m=\text{Anz. Knoten}} m_j \psi_j^2 \quad (58.)$$

Wird die Eigenform wieder mittels m Sinusfunktionen dargestellt bzw. wird die Masse über die Brückenlänge verschmiert $\rightarrow \mu = \frac{m_{\text{gesamt}}}{L}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_i^* &= \mu \int_0^L \sum_{j=1}^m f_{\psi,j}^2(x) * dx = \\ &= \mu \int_0^L \left[a_{1,i}^2 \sin^2\left(\frac{x\pi}{L}\right) + \dots + a_{j,i}^2 \sin^2\left(\frac{x\pi j}{L}\right) + \dots + a_{m,i}^2 \sin^2\left(\frac{x\pi m}{L}\right) \right] * dx = \\ &= \frac{\mu L}{2} \sum_{j=1}^m (a_{1,i}^2 + \dots + a_{j,i}^2 + \dots + a_{m,i}^2) \end{aligned} \quad (59.)$$

4.2.2.3 Federkonstante k_i^*

Die Federkonstante k_i^* des EMS wird zu:

$$k_i^* = m_i^* * \omega_{n,i}^2 \quad \text{siehe (3.)}$$

4.2.2.4 Dämpfungsprozentsatz ζ_i

Der Dämpfungsprozentsatz wird lt. Abschnitt 3.3.2 ermittelt. Dabei werden zunächst die α und β Werte mit Hilfe der beiden ersten Eigenfrequenzen $\omega_{n,1}$ und $\omega_{n,2}$ bzw. Dämpfungsprozentsätzen ζ_1 und ζ_2 bestimmt – alle anderen ζ_i folgen danach automatisch.

$$\beta = \frac{2 * \left(\zeta_2 - \zeta_1 \frac{\omega_{n,1}}{\omega_{n,2}} \right)}{\omega_{n,2} - \frac{\omega_{n,1}^2}{\omega_{n,2}}} \quad \alpha = 2\omega_{n,1} * \left(\zeta_1 - \frac{\beta \omega_{n,1}}{2} \right) \quad \text{siehe (50.)}$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_{n,i}} + \frac{\beta\omega_{n,i}}{2}$$

4.2.2.5 Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_{d,i}$

Mit ζ_i kann nun die Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_{d,i}$ ermittelt werden.

$$\omega_{d,i} = \omega_{n,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad \text{siehe (12.)}$$

4.2.2.6 Dämpfungskonstante d_i^*

Des Weiteren kann auch die Dämpfungskonstante d_i^* berechnet werden.

$$d_i^* = 2\zeta_i\omega_{n,i} \quad \text{siehe (50.)}$$

4.2.3 Belastung - Vorgehensweise

Der Zug besteht aus einer Folge von Einzellasten (Achslasten) welche zeitlich versetzt über die Brücke wandern. Daher wird zunächst eine Einheits-Einzellast betrachtet. Die Wirkung dieser wird dann jeweils mit der tatsächlichen Achslast multipliziert und entsprechend des Zeitabstandes, mit dem die Zugachsen auf die Brücke auffahren, zum Gesamtergebnis aufsummiert.

Im Zuge der modalen Analyse ist es erforderlich die „generalisierte Last“ lt. Abschnitt 3.3.2 zu bilden.

$$\{F(t)\}^* = [S]^T \{F(t)\} \quad \text{siehe (50.)}$$

Für den i. EMS ergibt sich:

$$f_i^*(t) = \{\psi_i\}^T \{f(t)\} \quad (60.)$$

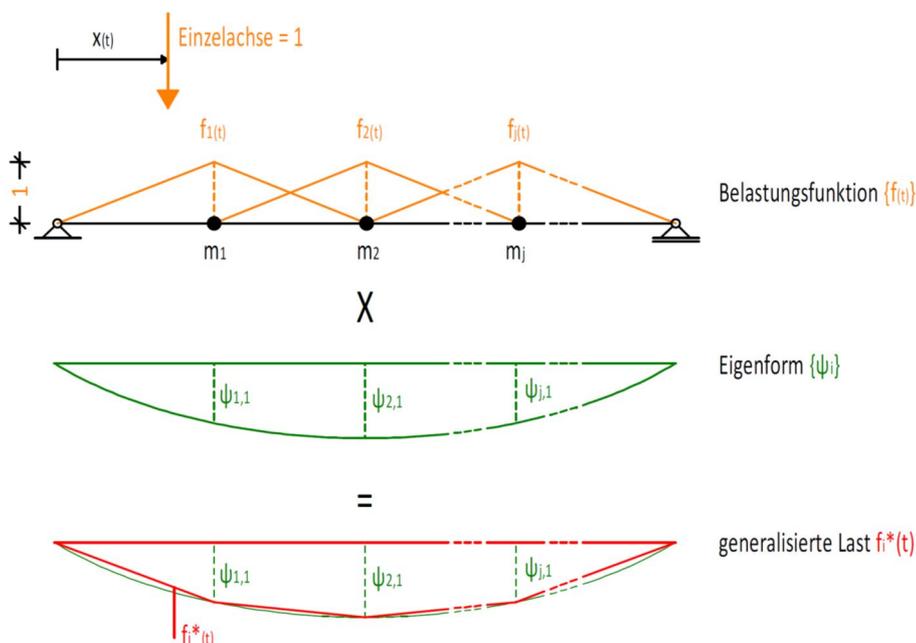


Abb. 8: Generalisierte Last

Bildet man das Vektorprodukt aus Formel (60.) so resultiert:

$$f_i^*(t) = \psi_{1,i}f_1(t) + \psi_{2,i}f_2(t) + \dots + \psi_{j,i}f_j(t) + \dots + \psi_{m,i}f_m(t) \quad (61.)$$

Führt man nun gedanklich ∞ viele Knoten m ein, so erkennt man, dass die Funktion der generalisierten Masse in jene der Eigenform übergeht (Abb. 8 unten). Die Eigenform wird in Abschnitt 4.2.1 als Sinusfunktion bzw. als Summe von m Sinusfunktionen dargestellt. Es gilt somit:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_i^*(t) = f_{\psi,i}(x(t)) = \sum_{j=1}^m a_j \sin\left(\frac{x(t)}{L} j * \pi\right) \quad (62.)$$

Der Unterschied zur Formel (51.) besteht darin, dass x nun von der Zeit t abhängig ist. Wird die Beziehung

$$x(t) = \frac{v}{3,6} * t \quad \text{mit: } v \text{ in [km/h]} \quad (63.)$$

in (62.) eingesetzt ergibt sich für die generalisierte Last:

$$f_i^*(t) = \sum_{j=1}^m a_j \sin\left(\frac{vj\pi}{3,6L} * t\right) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\bar{\omega}_j * t) \quad (64.)$$

Somit ist die zeitabhängige Belastung der EMS mit Hilfe von Sinusfunktionen beschrieben. Für diesen Fall gibt es eine analytische Lösung (Abschnitt 2.2.2). Aufgrund dieses Vorteils ist es nun möglich die gesamte Simulation der Zugüberfahrt analytisch durchzuführen – es ist keine numerische Integration/ Differentiation erforderlich.

4.2.4 Einzellast

Nachfolgend werden die Lösungen des i. Einmassenschwingers für die oben beschriebene Belastung (Phase 1) sowie für das freie Ausschwingen (Phase 2) dargestellt.

4.2.4.1 Phase 1 – sinusförmige Impulsbelastung

Wenn die i. Eigenform aus nur einer Sinusfunktion besteht (z.B. bei Einfeldträger), resultiert:

$$r_{1,i}(t) = (G_{1,i} \cos(\bar{\omega}_i t) + G_{2,i} \sin(\bar{\omega}_i t)) + e^{-\zeta_i \omega_{n,i} t} (A_i \cos(\omega_{d,i} t) + B_i \sin(\omega_{d,i} t)) \quad \begin{array}{l} \text{siehe} \\ (26.) \end{array}$$

$$\dot{r}_{1,i}(t) = \bar{\omega}_i (-G_{1,i} \sin(\bar{\omega}_i t) + G_{2,i} \cos(\bar{\omega}_i t)) + e^{-\zeta_i \omega_{n,i} t} [(-\zeta_i \omega_{n,i}) (A_i \cos(\omega_{d,i} t) + B_i \sin(\omega_{d,i} t)) + \omega_{d,i} (-A_i \sin(\omega_{d,i} t) + B_i \cos(\omega_{d,i} t))] \quad (65.)$$

$$\ddot{r}_{1,i}(t) = \bar{\omega}_i^2 (-G_{1,i} \cos(\bar{\omega}_i t) - G_{2,i} \sin(\bar{\omega}_i t)) + e^{-\zeta_i \omega_{n,i} t} [((-\zeta_i \omega_{n,i})^2 - \omega_{d,i}^2) (A_i \cos(\omega_{d,i} t) + B_i \sin(\omega_{d,i} t)) + 2(-\zeta_i \omega_{n,i}) \omega_{d,i} (-A_i \sin(\omega_{d,i} t) + B_i \cos(\omega_{d,i} t))] \quad (66.)$$

$$\text{mit: } G_{1,i} = \frac{f_{0,i}}{k_i} * \left[\frac{-2\zeta_i \beta_i}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\zeta_i \beta_i)^2} \right] \quad \begin{array}{l} \text{siehe} \\ (21.) \end{array}$$

$$G_{2,i} = \frac{f_{0,i}}{k_i} * \left[\frac{1 - \beta_i^2}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\zeta_i\beta_i)^2} \right] \quad \text{siehe (22.)}$$

$$\beta_i = \bar{\omega}_i / \omega_{n,i}$$

$$A_i = -G_{1,i} \quad \text{bzw.} \quad B_i = \frac{G_{1,i}(-\zeta_i\omega_{n,i}) - \bar{\omega}_i G_{2,i}}{\omega_{d,i}} \quad \text{siehe (25.)}$$

$f_{0,i} = a_i \dots$ Amplitude der Belastung [-]

$L \dots$ Stützweite [m]

$$\bar{\omega}_i = \frac{v_i\pi}{3,6L} \dots \text{Anregfrequenz [rad/s]} \quad (67.)$$

Besteht die i . Eigenform aus mehreren Sinusfunktionen, so wird die Lösung nur geringfügig komplizierter:

- $G_{1,j}$, $G_{2,j}$, β_j , $\bar{\omega}_j$ und $f_{0,j} = a_j$ müssen individuell für jede Sinuskomponente j berechnet werden
- A_i und B_i werden durch Summation über alle Sinuskomponenten ermittelt

$$A_i = \sum_{j=i}^m [-G_{1,j}] \quad \text{bzw.} \quad B_i = \sum_{j=i}^m \left[\frac{G_{1,j}(-\zeta_i\omega_{n,i}) - \bar{\omega}_j G_{2,j}}{\omega_{d,i}} \right] \quad \text{siehe (25.)}$$

Somit ergibt sich die Lösung zu:

$$r_{1,i}(t) = \sum_{j=1}^m [G_{1,j} \cos(\bar{\omega}_j t) + G_{2,j} \sin(\bar{\omega}_j t)] + e^{-\zeta_i\omega_{n,i}t} (A_i \cos(\omega_{d,i}t) + B_i \sin(\omega_{d,i}t)) \quad (68.)$$

$$\dot{r}_{1,i}(t) = \sum_{j=1}^m [\bar{\omega}_j (-G_{1,j} \sin(\bar{\omega}_j t) + G_{2,j} \cos(\bar{\omega}_j t))] + e^{-\zeta_i\omega_{n,i}t} [(-\zeta_i\omega_{n,i})(A_i \cos(\omega_{d,i}t) + B_i \sin(\omega_{d,i}t)) + \omega_{d,i}(-A_i \sin(\omega_{d,i}t) + B_i \cos(\omega_{d,i}t))] \quad (69.)$$

$$\ddot{r}_{1,i}(t) = \sum_{j=1}^m [\bar{\omega}_j^2 (-G_{1,j} \cos(\bar{\omega}_j t) - G_{2,j} \sin(\bar{\omega}_j t))] + e^{-\zeta_i\omega_{n,i}t} [((- \zeta_i\omega_{n,i})^2 - \omega_{d,i}^2)(A_i \cos(\omega_{d,i}t) + B_i \sin(\omega_{d,i}t)) + 2(-\zeta_i\omega_{n,i})\omega_{d,i}(-A_i \sin(\omega_{d,i}t) + B_i \cos(\omega_{d,i}t))] \quad (70.)$$

Setzt man $t = t_1$ (Ende Phase 1) ein so ergeben sich die Anfangsbedingungen $r_{1,i}(t = t_1)$ und $\dot{r}_{1,i}(t = t_1)$ für Phase 2 womit die freien Parameter $A_{2,i}$ bzw. $B_{2,i}$ bestimmt werden können.

4.2.4.2 Phase 2 – freies Ausschwingen

Es erweist sich als sinnvoll für Phase 2 eine „lokale“ Zeitachse mit dem Ursprung $t = 0$ im „globalen“ Zeitpunkt $t = t_1$ einzuführen. Die Anfangsbedingungen für die freien Parameter $A_{2,i}$ bzw. $B_{2,i}$ erhält man aus der Berechnung von Phase 1 für $t = t_1$.

$$r_{2,i}(t) = e^{-\zeta_i\omega_{n,i}t} (A_{2,i} \cos(\omega_{d,i}t) + B_{2,i} \sin(\omega_{d,i}t)) \quad \text{siehe (26.)}$$

$$\dot{r}_{2,i}(t) = e^{-\zeta_i\omega_{n,i}t} [(-\zeta_i\omega_{n,i})(A_{2,i} \cos(\omega_{d,i}t) + B_{2,i} \sin(\omega_{d,i}t)) + \omega_{d,i}(-A_{2,i} \sin(\omega_{d,i}t) + B_{2,i} \cos(\omega_{d,i}t))] \quad (71.)$$

$$\ddot{r}_{2,i}(t) = e^{-\zeta_i \omega_{n,i} t} \left[\left((-\zeta_i \omega_{n,i})^2 - \omega_{d,i}^2 \right) (A_{2,i} \cos(\omega_{d,i} t) + B_{2,i} \sin(\omega_{d,i} t)) + 2(-\zeta_i \omega_{n,i}) \omega_{d,i} (-A_{2,i} \sin(\omega_{d,i} t) + B_{2,i} \cos(\omega_{d,i} t)) \right] \quad (72.)$$

$$\text{mit: } A_{2,i} = r_{1,i}(t_1) \quad \text{bzw.} \quad B_{2,i} = \frac{\dot{r}_{1,i}(t_1) - (-\zeta_i \omega_{n,i}) * r_{1,i}(t_1)}{\omega_{d,i}} \quad (73.)$$

4.2.5 Gesamtergebnis - Zugüberfahrt

Der im vorigen Kapitel beschriebene Berechnungsablauf ist für alle EMS bzw. für alle sinusförmigen Belastungsteile durchzuführen. D.h. es wird jeweils die Lösung des EMS in modalen Koordinaten ermittelt ($r_i(t)$, $\dot{r}_i(t)$ bzw. $\ddot{r}_i(t)$), diese mit der dazugehörigen Eigenform multipliziert (=Rücktransformation in physikalische Koordinaten) und anschließend zum Gesamtergebnis für die Einheitslastüberfahrt aufsummiert.

Anschließend erfolgt die Überlagerung der einzelnen Zugachsen. Dabei wird das Ergebnis der Einheitslastüberfahrt mit der tatsächlichen Achslast multipliziert und unter Berücksichtigung der Zeitverschiebung, welche aus dem Achsabstand und Fahrgeschwindigkeit resultiert, zum Gesamtergebnis der Zugüberfahrt aufsummiert.

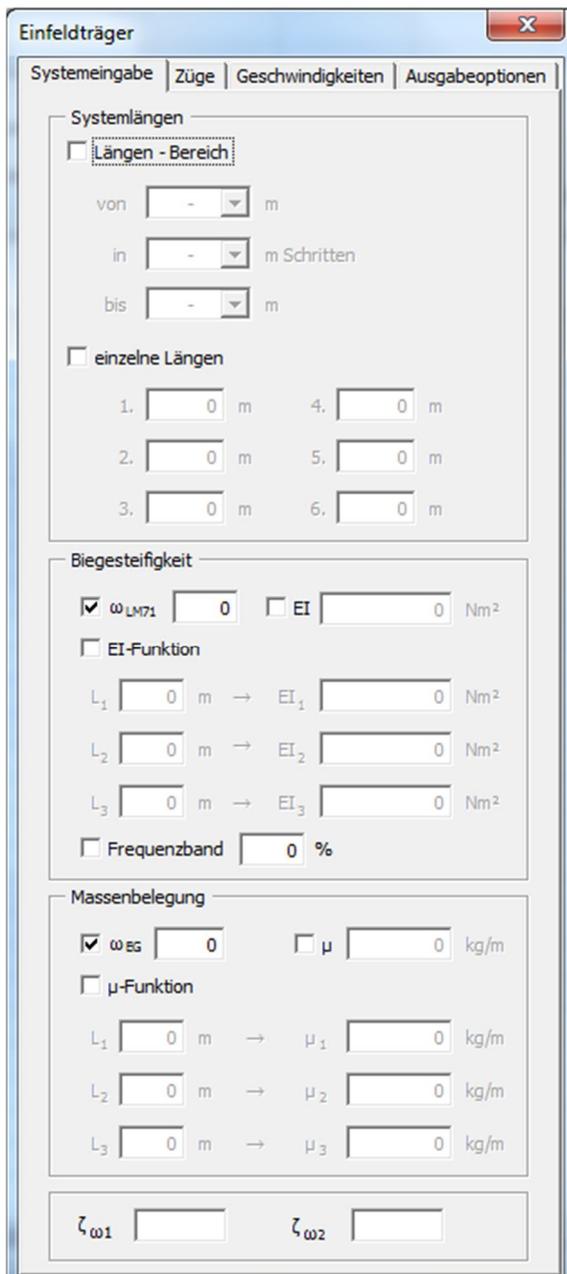
5 Programm

5.1 Programmablaufplan

5.2 Graphische Benutzeroberfläche

Das in der Arbeit entwickelte Programm besteht aus zwei Teilen die nachfolgend beschrieben werden. In Ersterem ist es möglich Parameterstudien für Einfeldtragwerke zu erstellen. Der zweite Teil behandelt die Berechnung von konkreten Mehrfeldtragwerken. Beide beruhen auf dem, in den vorherigen Kapitel beschriebenem, Berechnungskonzept weshalb hier näher auf die graphische Benutzeroberfläche und deren Bedienung eingegangen wird.

5.2.1 Teil 1 – Parameterstudie



The screenshot shows the 'Einfeldträger' application window with the 'Systemeingabe' tab selected. The interface is organized into several sections:

- Systemlängen:** Contains a 'Längen - Bereich' section with input fields for 'von', 'in', and 'bis' (all in meters). Below it is an 'einzelne Längen' section with six numbered input fields (1-6) for individual lengths in meters.
- Biegesteifigkeit:** Includes a checked checkbox for ω_{LM71} with a value of 0, and an unchecked checkbox for EI with a value of 0 Nm^2 . There is also an 'EI-Funktion' section with three rows for L_1, L_2, L_3 (in meters) and corresponding EI_1, EI_2, EI_3 (in Nm^2). A 'Frequenzband' checkbox is also present with a value of 0 %.
- Massenbelegung:** Features a checked checkbox for ω_{EG} with a value of 0, and an unchecked checkbox for μ with a value of 0 kg/m . It also has a ' μ -Funktion' section with three rows for L_1, L_2, L_3 (in meters) and corresponding μ_1, μ_2, μ_3 (in kg/m).

At the bottom of the window, there are two input fields for damping ratios $\zeta_{\omega 1}$ and $\zeta_{\omega 2}$.

Hier wird nachfolgend der erste Teil, die Parameterstudie für Einfeldtragwerke, beschrieben.

Auf der Seite „Systemeingabe“ (Abb. 9) erfolgen die Eingabe der Systemlänge L , Biegesteifigkeit EI , Massenbelegung μ und der Dämpfungsprozentsätze $\zeta_{\omega 1}$ bzw. $\zeta_{\omega 1} \cdot L$. Für die Systemlänge L können sowohl ein Bereich als auch einzelne Längen eingegeben werden. Für die Eingabe der Biegesteifigkeit EI und der Massenbelegung μ gibt es mehrere Möglichkeiten. Beide können entweder direkt (Eingabefelder „ EI “ bzw. „ μ “), in Abhängigkeit der Systemlänge (Eingabefelder „ EI -Funktion“ bzw. „ μ -Funktion“) oder in Abhängigkeit eines Durchbiegungskriteriums (Eingabefelder „ ω_{LM71} “ bzw. „ ω_{EG} “) eingegeben werden. Bei Zweitem besteht die Möglichkeit eine bilineare Funktion zu definieren. Bei Letzterem wird das Lastmodell 71 (LM71) lt. [1] ungünstig aufgestellt um über die Eingabe von ω_{LM71} auf EI schließen zu können. Die gleichmäßig verteilte Massenbelegung μ wird dabei mit Hilfe von EI, L und ω_{EG} ermittelt. Zusätzlich besteht die Möglichkeit die Biegesteifigkeit EI über die Festlegung eines Frequenzbandes zu definieren (Eingabefeld „Frequenzband“).

Abb. 9: Teil 1 – Systemeingabe

Die obere Grenze von n_0 wird durch den dynamischen Zuwachs aufgrund von Gleislagefehlern bestimmt und lautet:

$$n_0 = 94,76L^{-0,748} \quad (6.1)$$

Die untere Grenze für n_0 wird durch dynamische Anregungskriterien bestimmt und lautet:

$$n_0 = 80/L$$

für $4m \leq L \leq 20m$

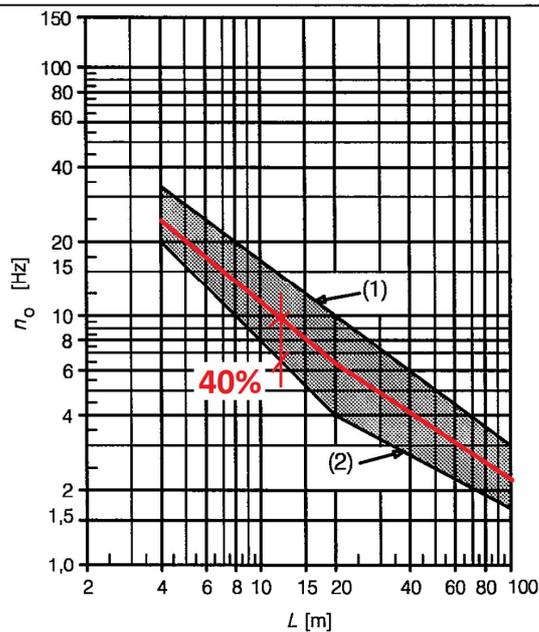
$$n_0 = 23,58L^{-0,592}$$

für $20m < L \leq 100m$ (6.2)

Dabei ist

n_0 die erste Eigenfrequenz der Brücke unter ständigen Lasten;

L die Spannweite für Einfeldträgerbrücken oder L_ϕ für andere Brückentypen.



Legende

- (1) obere Grenze der Eigenfrequenz
- (2) untere Grenze der Eigenfrequenz

Abb. 10: Teil 1 - Eingabe Frequenzband lt. [1]

Dabei wird lt. Bild 6.10 in [1] ein Frequenzband definiert (siehe Abb. 10) für welches mit Hilfe der Formel für die 1. Eigenfrequenz eines Einfeldträgers (siehe Formel (74.) [5]) und in Abhängigkeit der Systemlänge L , Massenbelegung μ bzw. der 1. Eigenfrequenz n_0 die Biegesteifigkeit EI folgt – Formel (75.):

$$\omega_{n,1} = 2\pi * n_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (74.)$$

$$EI = \left(\frac{2n_0L^2}{\pi}\right)^2 \mu \quad (75.)$$

Auf der Seite „Züge“ (Abb. 11 links) werden die zu berücksichtigenden Züge ausgewählt. Dabei gibt es bereits vordefinierte Züge bzw. besteht zusätzlich die Möglichkeit über „Neuer Zug“, solche zu definieren (Abb. 12). Auf der Seite „Geschwindigkeiten“ können sowohl Bereiche, als auch einzelne Zuggeschwindigkeiten definiert werden (Abb. 11 rechts).

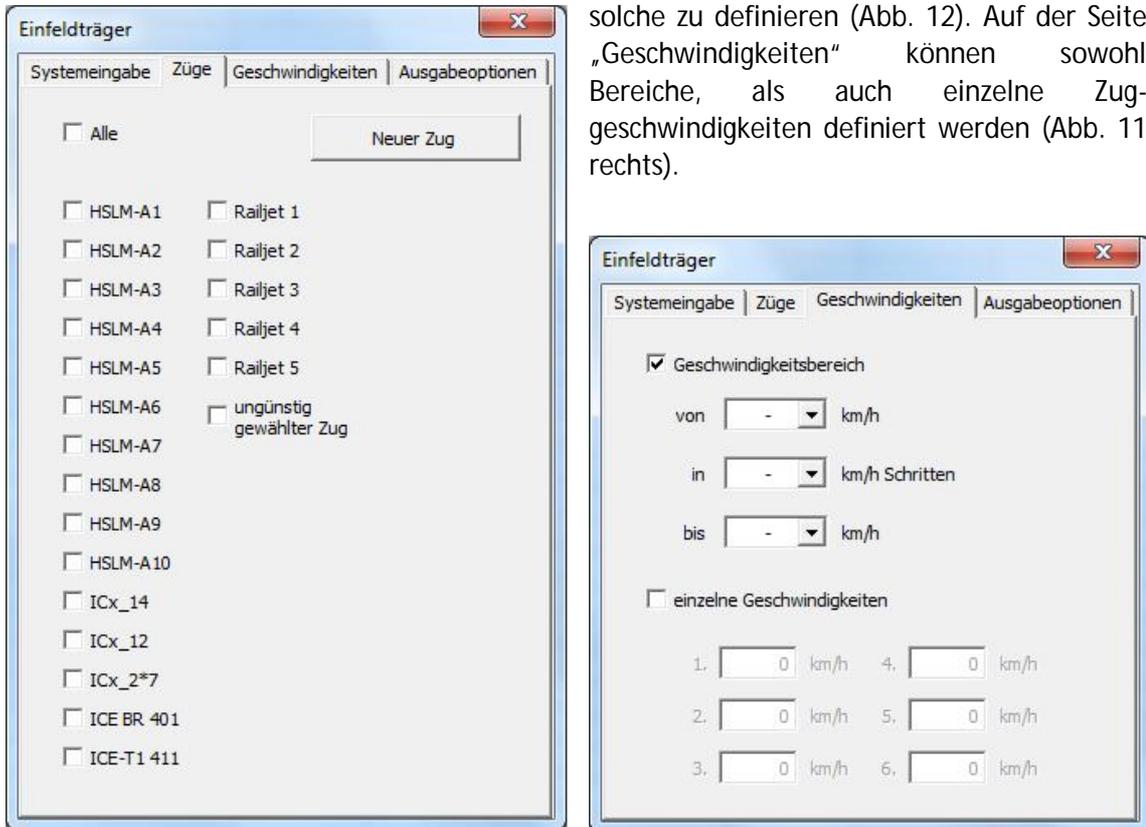


Abb. 11: Teil 1 – Zugauswahl bzw. Geschwindigkeitsauswahl

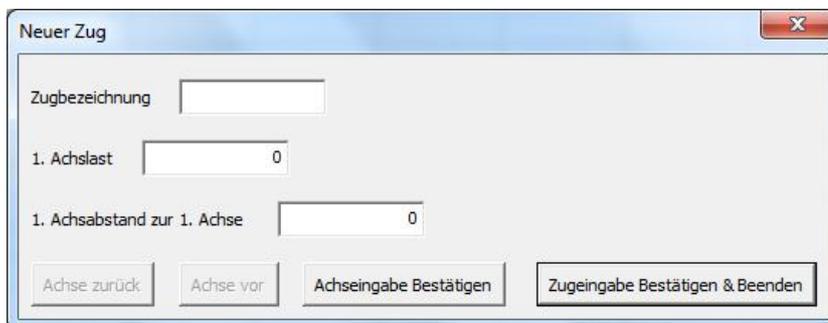
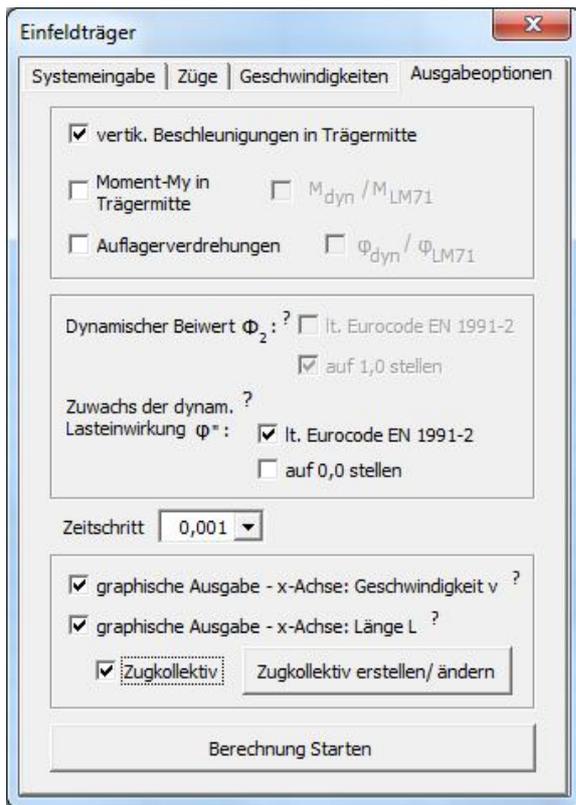


Abb. 12: Teil 1 – Neuer Zug



Auf der Seite „Ausgabeoptionen“ (Abb. 13) werden unter anderem die zu berechnenden Größen – „vertik. Beschleunigung in Trägermitte“, „Moment-My in Trägermitte“ bzw. „Auflagerverdrehung“ – ausgewählt. Zusätzlich besteht die Möglichkeit die berechneten Momente im Verhältnis zu jenen Momenten, welche aus der Belastung durch das LM71 lt. [1] entstehen, darzustellen (M_{dyn}/M_{LM71}). Selbiges gilt für die Auflagerverdrehung (ϕ_{dyn}/ϕ_{LM71}). Sind vorgenannte Verhältnswerte gewünscht, so muss unter „Dynamischer Beiwert ϕ_2 “ gewählt werden ob die Größen, welche aus dem LM71 resultieren, mit ϕ_2 lt. [1] zu multiplizieren sind. Unabhängig davon ist zu entscheiden ob die berechneten Größen, welche aus der Belastung durch Betriebszüge (BZ) und HSLM resultieren, unter „Zuwachs der dynam. Lasteinwirkung ϕ'' “ um den Faktor $1 + \phi''/2$ lt. [1] zu erhöhen sind oder nicht.

Abb. 13: Teil 1 – Ausgabeoptionen

Des Weiteren wird der „Zeitschritt“ gewählt. Der Einfluss dieser Auswahl wird noch ausführlich in „6 Vergleichsrechnungen“ diskutiert. Im untersten Bereich kann ausgewählt werden, welche Diagramme produziert und ob ein Zugkollektiv erstellt werden sollte. Wird „graphische Ausgabe – x-Achse: Geschwindigkeit v“ gewählt, werden jeweils für eine bestimmte Brücke (L , EI und μ) Diagramme lt. Abb. 14 erstellt. Auf der x-Achse werden die Geschwindigkeiten der Züge und auf der y-Achse die berechneten Größen (in diesem Fall die Beschleunigung a in Feldmitte), welche durch den entsprechenden Zug hervorgerufen werden, aufgetragen.

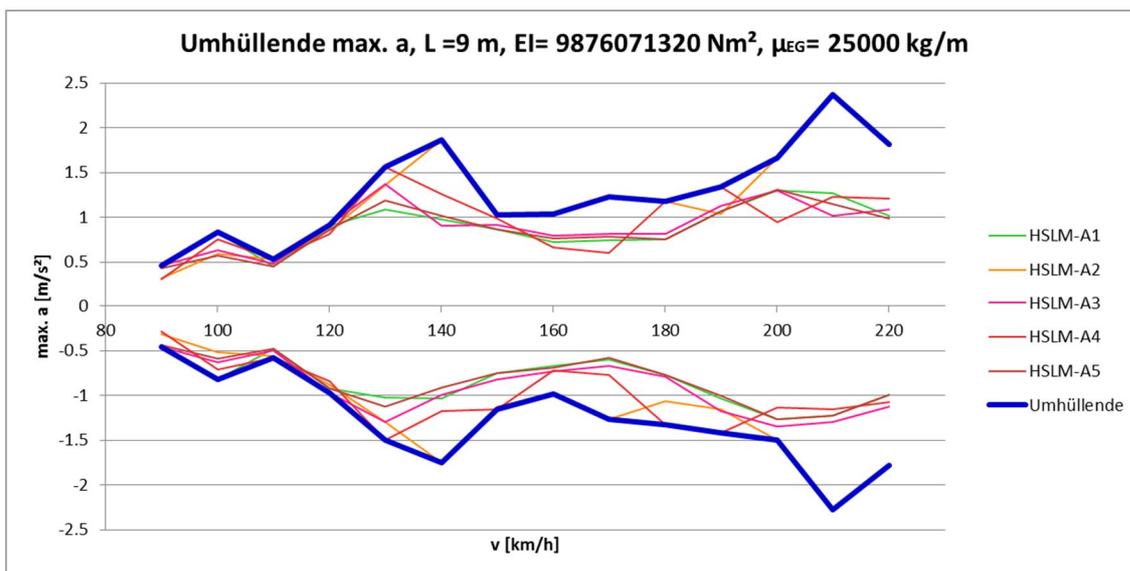


Abb. 14: Teil 1 – graphische Ausgabe – x-Achse: Geschwindigkeit v

Wird „graphische Ausgabe – x-Achse: Länge L“ gewählt, so werden 2 Diagramme, wie in Abb. 15 dargestellt, erzeugt. In Ersterem werden die 1. Eigenfrequenzen der betrachteten Brücken in Abhängigkeit von der Länge L abgebildet. Im zweiten Diagramm wird der Maximalwert der betrachteten Größe (z.B. Beschleunigung a in Feldmitte bei bestimmter Geschwindigkeit) je Brücke und Zug aufgetragen. Die Information bei welcher Geschwindigkeit der Maximalwert auftritt ist aus dieser Darstellung nicht ersichtlich → hierzu siehe Diagramm in Abb. 14.

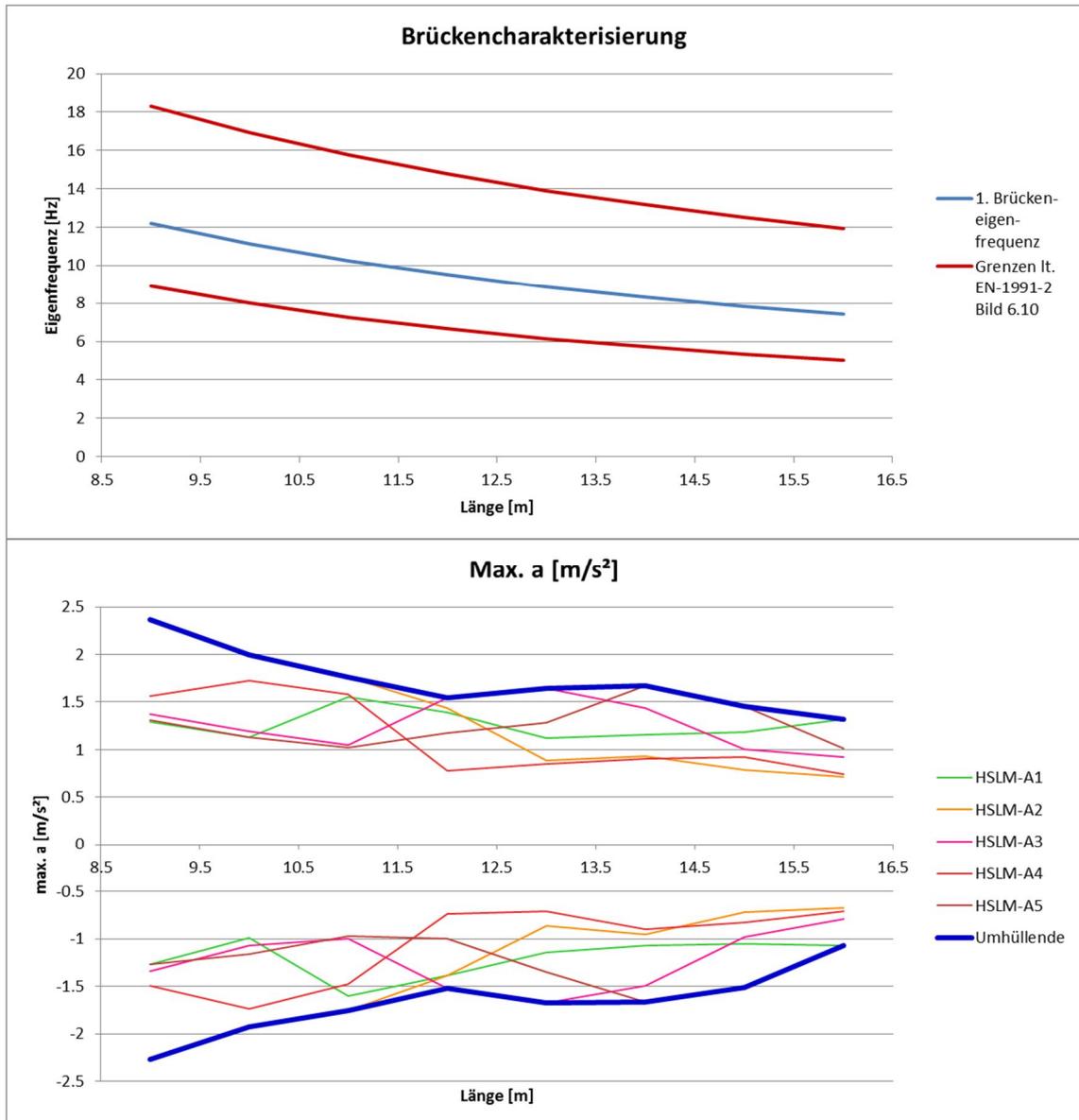
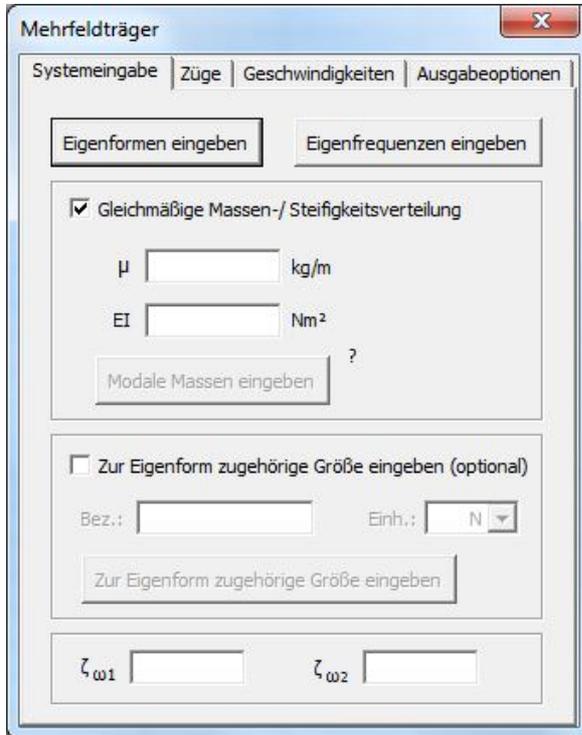


Abb. 15: Teil 1 – graphische Ausgabe – x-Achse: Länge L

Mit Hilfe von „Zugkollektiv erstellen/ändern“ können Gruppen von Zügen – s.g. Zugkollektive – gebildet werden. Diese werden dann wie z.B. in Abb. 15 als „Umhüllende“ dargestellt.

5.2.2 Teil 2 – Mehrfeldtragwerke

Im zweiten Teil ist es möglich, konkrete Mehrfeldtragwerke zu berechnen. D.h. hier wird keine Parameterstudie durchgeführt, dafür sind Aussagen über den zeitlichen Verlauf einer zu berechnenden Größe möglich.



Auf der Seite „Systemeingaben“ (Abb. 16) werden zunächst die Eigenformen und Eigenfrequenzen des zu berechnenden Systems eingegeben. Diese müssen vorab mit Hilfe eines Strukturberechnungsprogrammes ermittelt werden. Im Falle einer gleichmäßigen Massen-/ Steifigkeitsverteilung kann die Eingabe über „ μ “ und „ EI “ erfolgen. Trifft dies nicht zu, so können die modalen Massen, welche wiederum aus der Strukturprogrammrechnung stammen, unter „Modale Masse eingeben“ direkt eingegeben werden. Des Weiteren ist es möglich mit „Zur Eigenform zugehörige Größen eingeben“ zusätzliche, zu berechnende Größen festzulegen. Z.B. kann mit Hilfe dieser Funktion der Einfluss einer Zugüberfahrt auf eine Hängerkraft simuliert werden. Hierzu sind je Eigenform die dazu gehörigen Hängerkräfte einzugeben.

Abb. 16: Teil 2 – Systemeingabe

Weiters sind die Dämpfungsprozentsätze ζ_{ω_1} bzw. ζ_{ω_2} für die beiden ersten Eigenfrequenzen einzugeben.

Die Seiten „Züge“ und „Geschwindigkeiten“ sind ident zu jenen im Teil 1 (siehe Abb. 11 und Abb. 12).

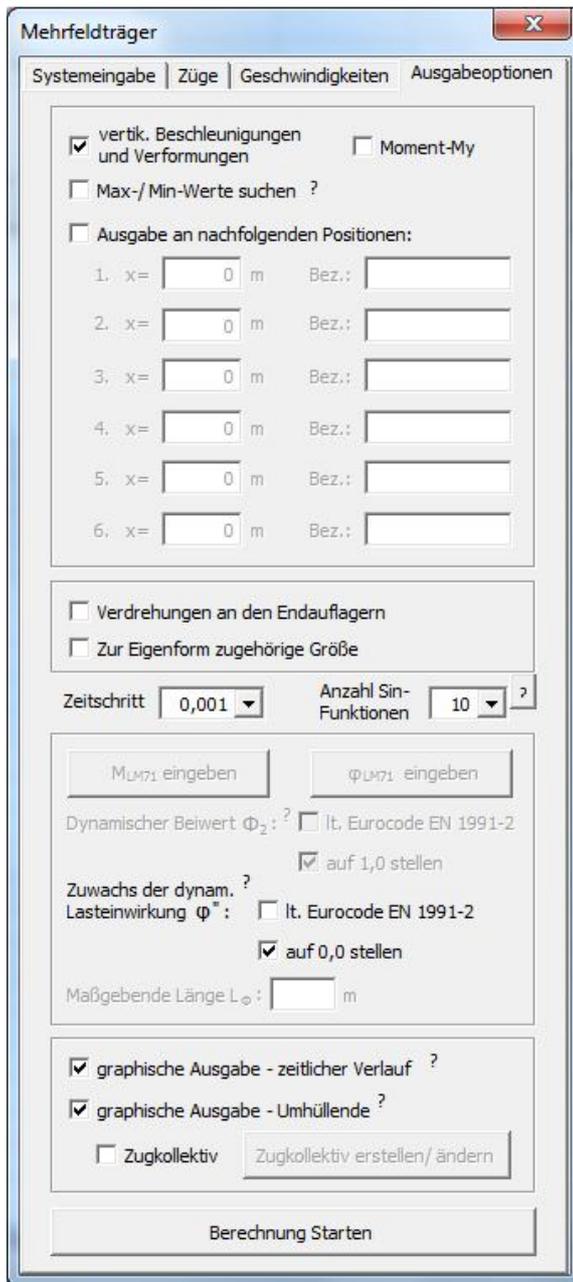


Abb. 17: Teil 2 – Ausgabeoptionen

Auf der Seite „Ausgabeoptionen“ (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**) sind wiederum die zu berechnenden Größen auszuwählen. Für die „vertik. Beschleunigungen und Verformungen“ bzw. „Moment-My“ kann zwischen den Optionen „Max-/ Min- Werte suchen“ und „Ausgabe an nachfolgenden Punkten“ gewählt werden. Unabhängig davon kann die „Verdrehung an den Endauflagern“ sowie die „Zur Eigenform zugehörige Größe“ berechnet werden. Wie auch im Teil 1 ist der „Zeitschritt“ zu wählen. Zusätzlich ist hier nun die Anzahl der Sinusfunktionen, mit denen die Eigenformen approximiert werden, festzulegen. Für eine detaillierte Beschreibung siehe Kapitel „4.2.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen“ bzw. „6 Vergleichsrechnungen“. Mit den Tasten „ M_{LM71} eingeben“ bzw. „ φ_{LM71} eingeben“ besteht die Möglichkeit in den Diagrammen für das Moment-My bzw. für die Endauflagerverdrehung zusätzlich die jeweiligen Größen, welche aus der Belastung durch das LM71 lt. [1] entstehen, darzustellen (Abb. 18). Hierfür ist auch die Eingabe der „Maßgebenden Länge L_{ϕ} “ erforderlich. Die Beiwerte Φ_2 sowie φ'' werden wie in „5.2.1 Teil 1 – Parameterstudie“ beschrieben, ermittelt.

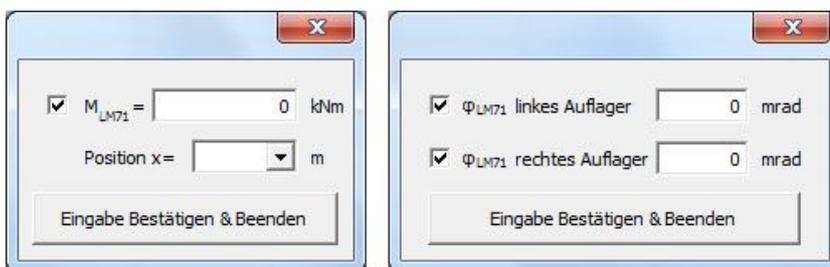


 Abb. 18: Teil 2 M_{LM71} bzw. φ_{LM71} eingeben

Es ist möglich zwei verschiedene Arten von Diagrammen ausgeben zu lassen. Ersteres zeigt den zeitlichen Verlauf der gewählten Größe (Abb. 19), hierfür ist „graphische Ausgabe – zeitlicher Verlauf“ zu wählen.

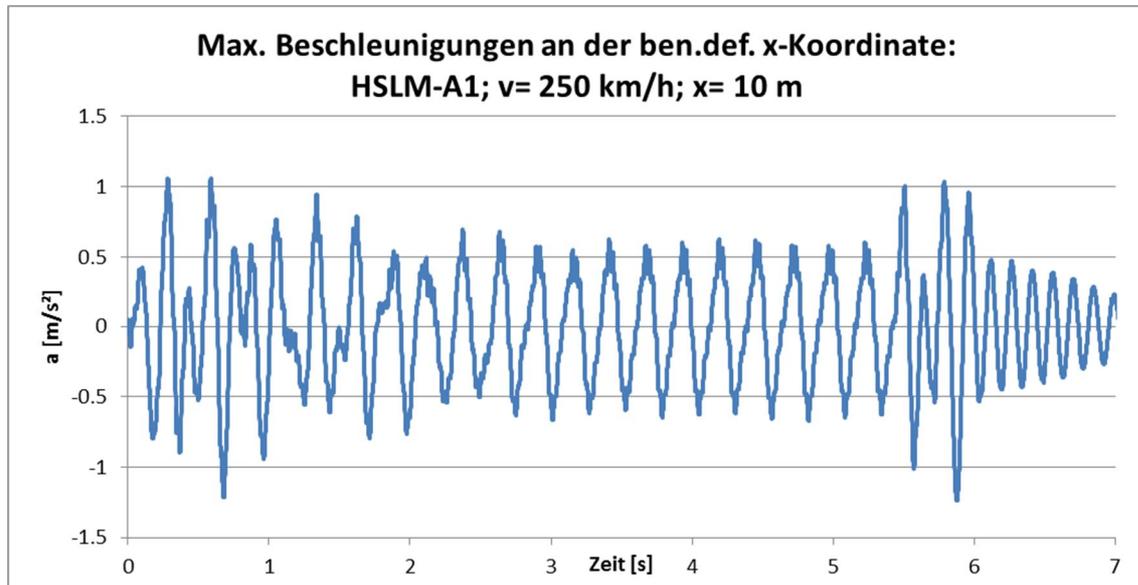


Abb. 19: Teil 2 – graphische Ausgabe – zeitlicher Verlauf

Der zweite Diagrammtyp (Abb. 20) zeigt die ausgewählte Größe (z.B. Beschleunigung a) für verschiedenen Züge, mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten an einer vom Benutzer definierten x-Koordinate der Brücke. Selbiges Diagramm kann auch in Teil 1 ausgegeben werden (Abb. 14). Die Umhüllende kann, wie schon in Teil 1, mit Hilfe von „Zugkollektiv erstellen/ ändern“ erzeugt werden (Abb. 17).

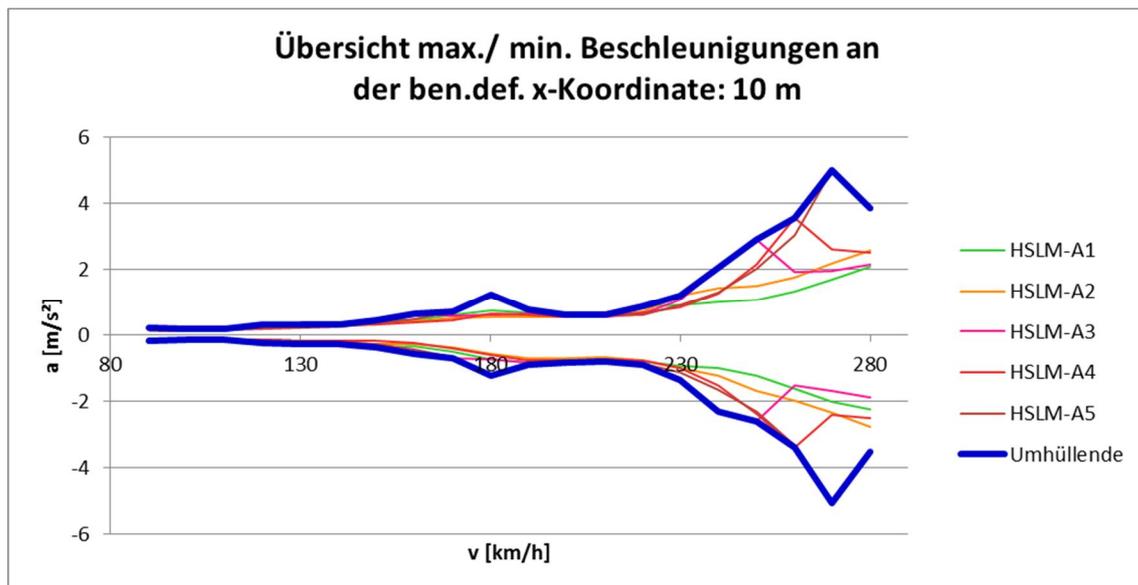


Abb. 20: Teil 2 – graphische Ausgabe – x-Achse: Geschwindigkeit v

6 Vergleichsrechnungen

Im Nachfolgenden werden repräsentative Beispiele gewählt um die Ergebnisse des in der Diplomarbeit entwickelten Programms mit jenen des Stabwerkprogramms „DLUBAL R-Stab 8.02“ [7] zu vergleichen.

Es wird sowohl die Überfahrt einer Einzelachse als auch die eines gesamten Zugs (HSLM-A9), jeweils an einem Einfeld- bzw. Vierfeldträger, simuliert.

6.1 Einfeldträger

6.1.1 Übersicht

Das Tragwerk besteht aus einem Stahlbeton-Einfeldträger mit einer Spannweite von 16m welches in R-Stab [7] mit einem Knotenabstand von 1m modelliert wurde.

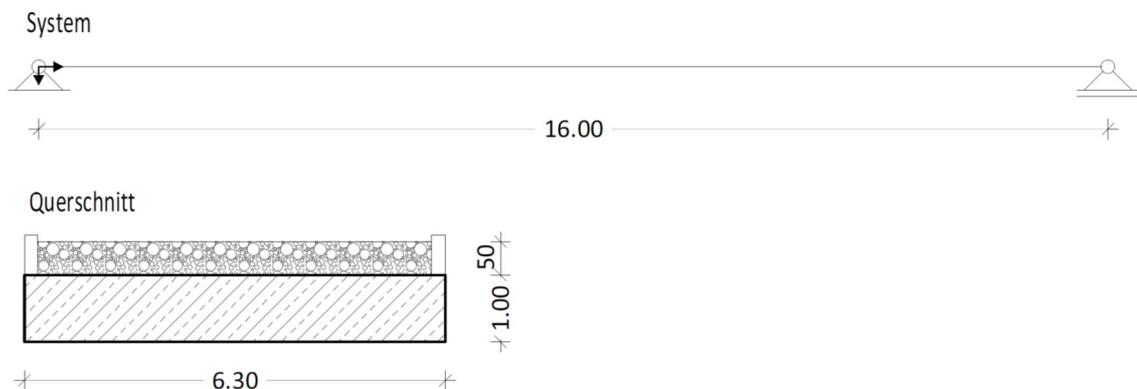


Abb. 21: Einfeldträger-System

Es wurde ein fiktiver E-Modul von 11290 kN/cm^2 gewählt um eine 1. Eigenfrequenz von 10Hz zu erreichen was wiederum diverse Kontrollen erleichterte. Das spezifische Gewicht der Stahlbetondecke wurde mit 25 kN/m^3 und jenes des Schotterbetts mit 20 kN/m^3 angenommen. Des Weiteren wurden die ersten 3 Eigenformen bei der Berechnung berücksichtigt. Im Detail wird auf die Beschleunigung a und den Momentenverlauf M_y in Trägermitte ($x=8\text{m}$) sowie die Endauflagerverdrehung ϕ_y ($x=16\text{m}$) eingegangen.

6.1.2 Einzelachse

Nachfolgend werden die Ergebnisse für die Simulation einer Einzelachsenüberfahrt ($F=210\text{kN}$, $v=240\text{km/h}$) beschrieben. Generell kann angemerkt werden, dass bei der Berechnung nach dem Newmark-Wilson-Verfahren (RSTAB [7]) der Zeitschritt mit großer Sorgfalt zu wählen ist. Wie in den nachfolgenden Abbildungen ersichtlich, resultierten aus der Berechnung mit einem Δt von $0,01\text{s}$ falsche Ergebnisse (siehe z.B. Abb. 22 Funktion C). Dies ist bei der Berechnung mit dem neuen Programm nicht der Fall. Es werden lediglich nicht genügend Punkte entlang der „richtigen“ Funktion ausgewertet (siehe Abb. 22 – alle Punkte von A befinden sich auf B) wobei der Verlauf mit jenem aus der R-Stab Berechnung (siehe Abb. 22 – Funktionen D und E) übereinstimmt.

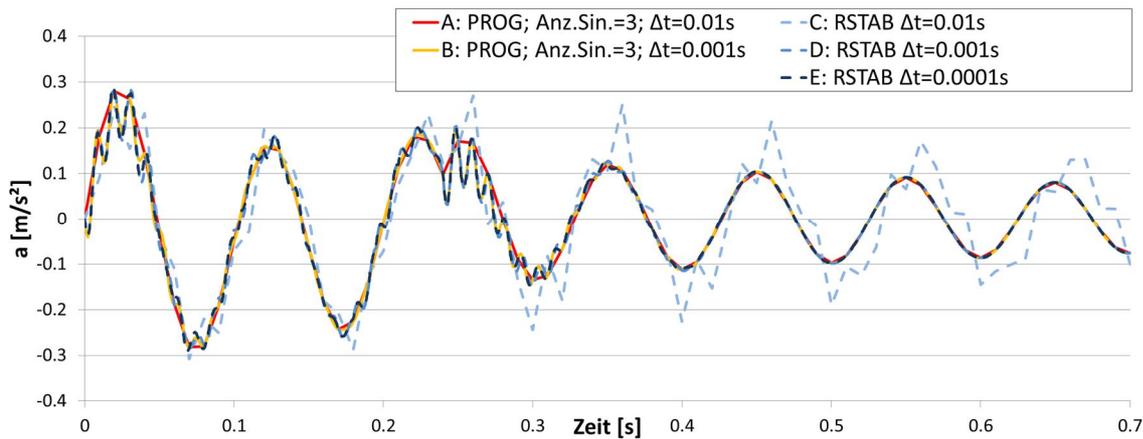


Abb. 22: Beschleunigung a in Feldmitte

Der Knick der Funktionen C, D und E in Abb. 23 (bei $0,12\text{s}$ wenn Einzelachse in Trägermitte) resultiert wahrscheinlich aus einer zu groben Modellierung der Einzelachsenüberfahrt beim Newmark-Wilson-Verfahren \rightarrow Knoten im Abstand von 1m . Die Ergebnisse des neuen Programms stimmen jedoch, unabhängig vom Zeitschritt, sehr gut mit jenen von R-Stab überein. Selbiges gilt auch für die Endauflagerverdrehung ϕ_y (siehe Abb. 24).

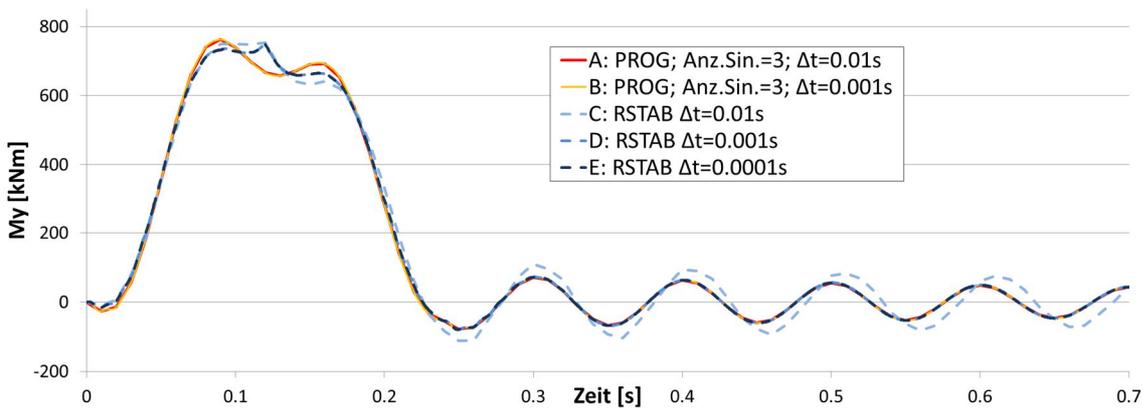
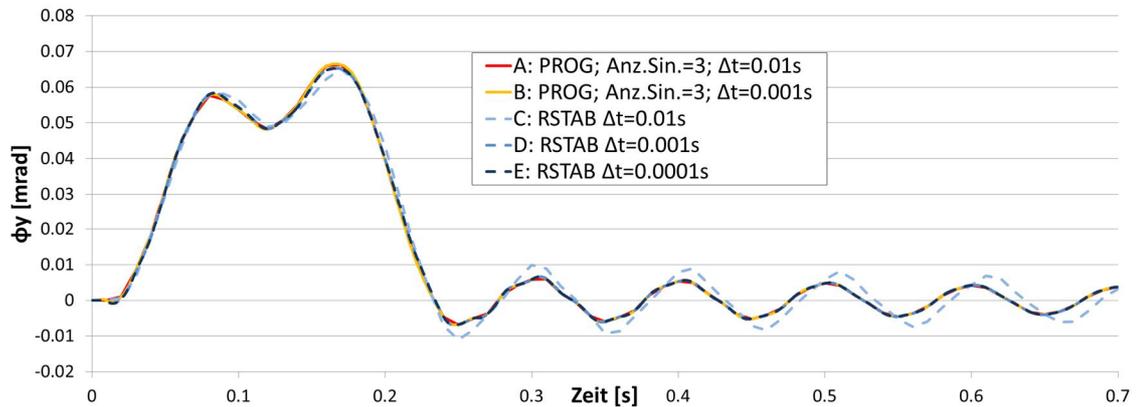
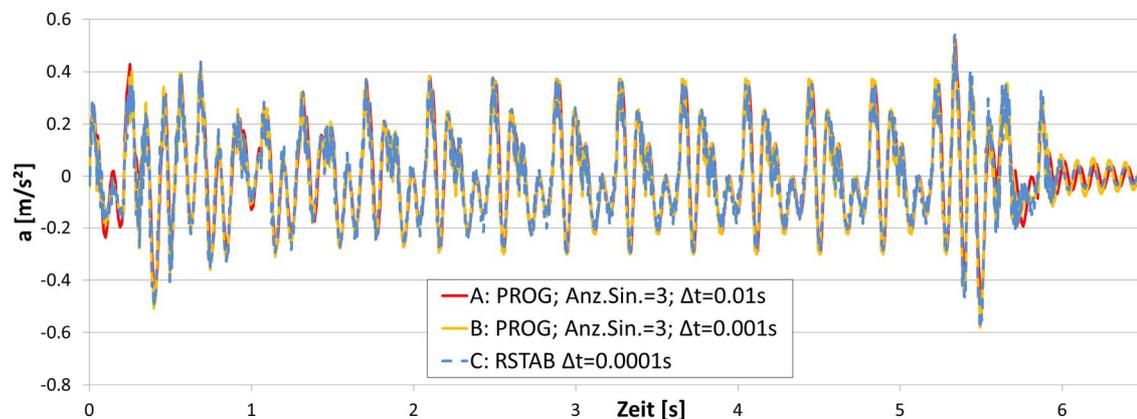


Abb. 23: Moment M_y in Feldmitte


 Abb. 24: Endauflagerverdrehung ϕ_y

6.1.3 Zugüberfahrt

Anschließend wird die Simulation einer Zugüberfahrt (HSLM-A9, $v=240$ km/h) beschrieben. Die Abweichungen bei der Beschleunigung a in Feldmitte zwischen den Funktionen A und B ab ca. $t=6$ s (siehe Abb. 25) resultieren einerseits aus der unterschiedlichen Genauigkeit der Funktionen der Einzelachse (siehe Abb. 22) bzw. andererseits aus der Überlagerung der Einzelachsen. Letzteres wird durch die unterschiedliche Wahl von Δt (bei A = 0,01s bzw. bei B = 0,001s) hervorgerufen. Dadurch ergeben sich geringfügig unterschiedliche Zeitpunkte für das Auffahren der Einzelachsen auf die Brücke – wodurch wiederum unterschiedliche Überlagerungen der Einzelachsen resultieren.


 Abb. 25: Beschleunigung a in Feldmitte

Der Momentenverlauf M_y in Trägermitte (siehe Abb. 26) sowie die Endauflagerverdrehung ϕ_y (siehe Abb. 27) können bereits mit einem Zeitschritt von 0.01s sehr gut abgebildet werden.

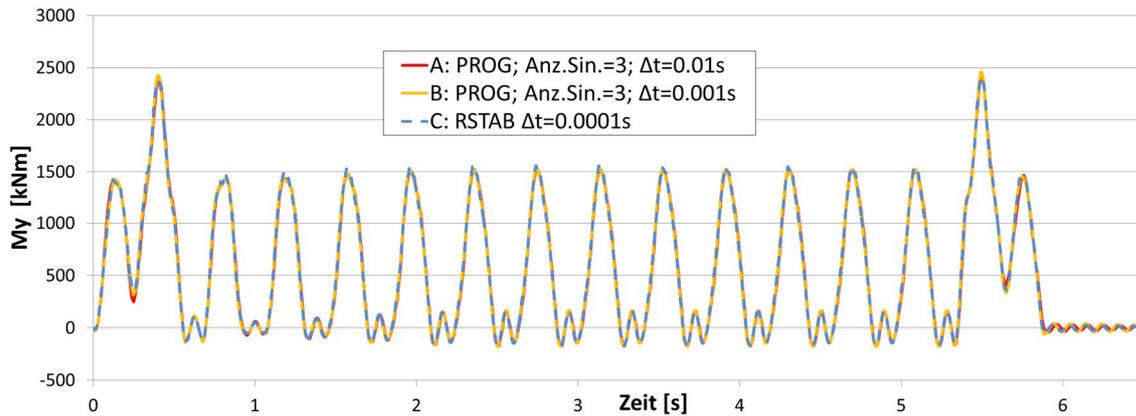


Abb. 26: Momentenverlauf M_y in Feldmitte

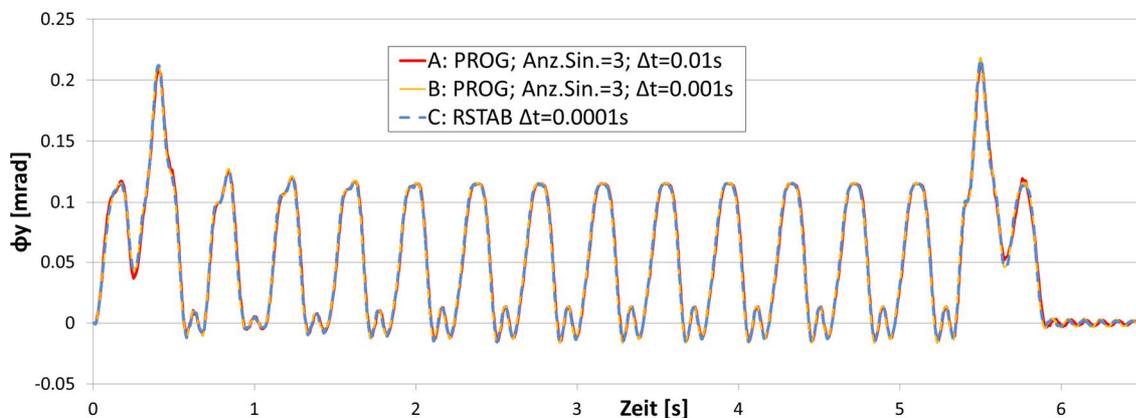


Abb. 27: Endauflagerverdrehung ϕ_y

6.2 Vierfeldträger

6.2.1 Übersicht

Dieses Tragwerk besteht aus einem Stahlbetonträger welcher über vier Felder gespannt ist. Die maximale Stützweite beträgt 12m wobei das gesamte Tragwerk eine Länge von 28m aufweist. Das System wurde mit jeweils 10 Knoten je Feld (41 Knoten insgesamt) in R-Stub modelliert.

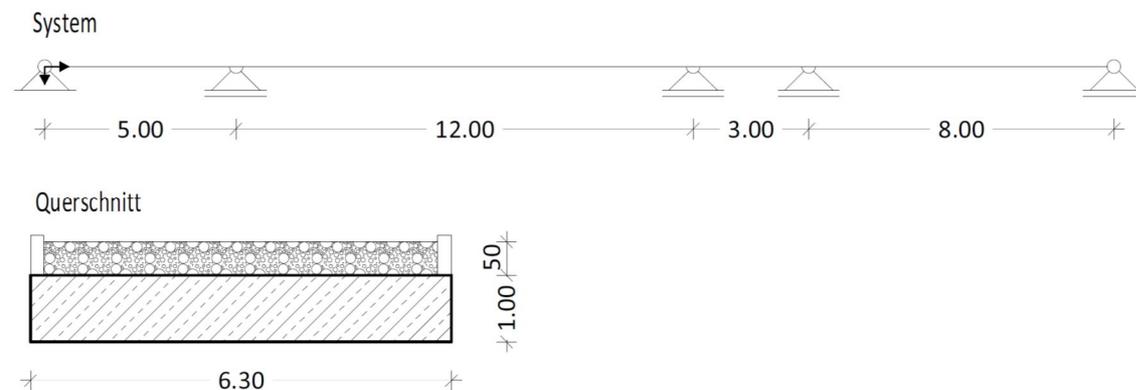


Abb. 28: Vierfeldträger-System

Die Querschnittsform, der fiktive E-Modul von 11290 kN/cm^2 sowie die spezifischen Gewichte

der Stahlbetonplatte (25 kN/m^3) bzw. des Schotterbetts (20 kN/m^3) wurden aus dem Beispiel „Einfeldträger“ übernommen. Bei den Berechnungen wurden die ersten 10 Eigenformen berücksichtigt. Im Detail wird auf die Beschleunigung a , vertikale Verformung u_z und den Momentenverlauf M_y in Mitte des Feldes 2 ($x=11\text{m}$) sowie den Momentenverlauf M_y am Auflager 3 ($x=17\text{m}$) und die Endauflagerverdrehung ϕ_y ($x=28\text{m}$) eingegangen.

Ein weiteres Augenmerk liegt auf der Anzahl der verwendeten Sinusfunktionen, welche bei der Berechnung mit dem neuen Programm gewählt werden muss. Es wird gezeigt ab welcher Sinusfunktionenanzahl falsche Ergebnisse resultieren bzw. dass ein Sinusfunktionenanzahl/Systemknoten Verhältnis von 1/3 ausreicht um gute Ergebnisse zu erhalten. D.h. bei 41 Systemknoten werden hierfür 13 Sinusfunktionen verwendet.

6.2.2 Einzelachse

Nachfolgend werden die Ergebnisse für die Simulation einer Einzelachsenüberfahrt ($F=210\text{kN}$, $v=180\text{h}$) beschrieben.

6.2.2.1 Mitte Feld 2 ($x=11\text{m}$)

Für die Berechnung der Beschleunigung a in Mitte des Feldes 2 sind 13 Sin-Funktionen ausreichend, wobei ein Zeitschritt von 0.001s gewählt werden muss um gute Ergebnisse zu erhalten. Ersteres kann in Abb. 29 nachvollzogen werden, da Funktion A und B deckungsgleich sind. Ab einer Sinusanzahl von 25 (Funktion C) resultieren falsche Ergebnisse.

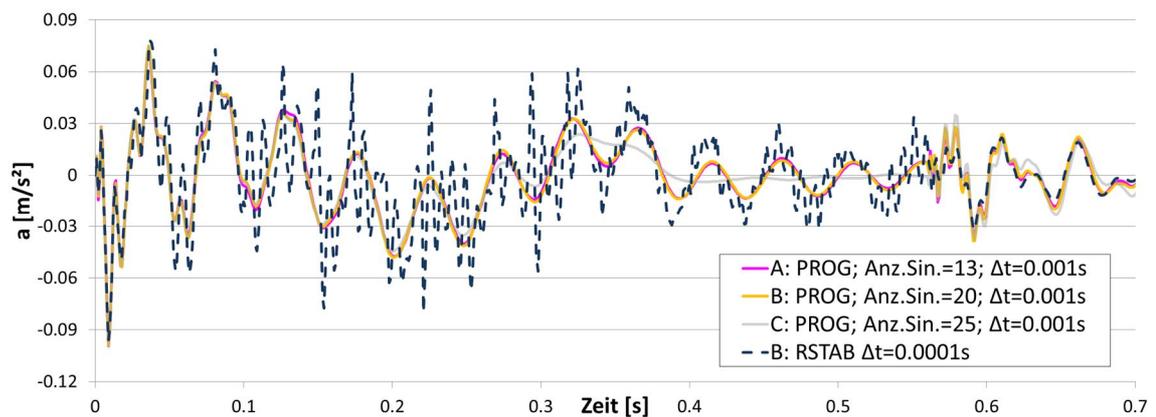


Abb. 29: Beschleunigung a in Mitte von Feld 2 ($x=11\text{m}$)

Letzteres wird in Abb. 30 deutlich da ein Zeitschritt von 0.001s erforderlich ist um die nötigen Details des Beschleunigungsverlaufes abbilden zu können.

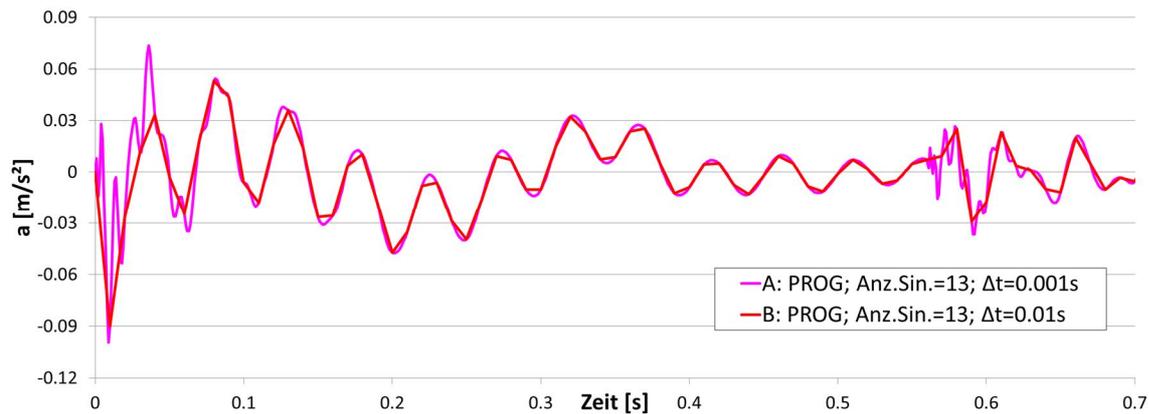


Abb. 30: Beschleunigung a in Mitte von Feld 2 ($x=11m$)

Die Verformung u_z kann problemlos mit 13 Sinusfunktionen und einem Δt von 0.01s abgebildet werden (siehe Abb. 31).

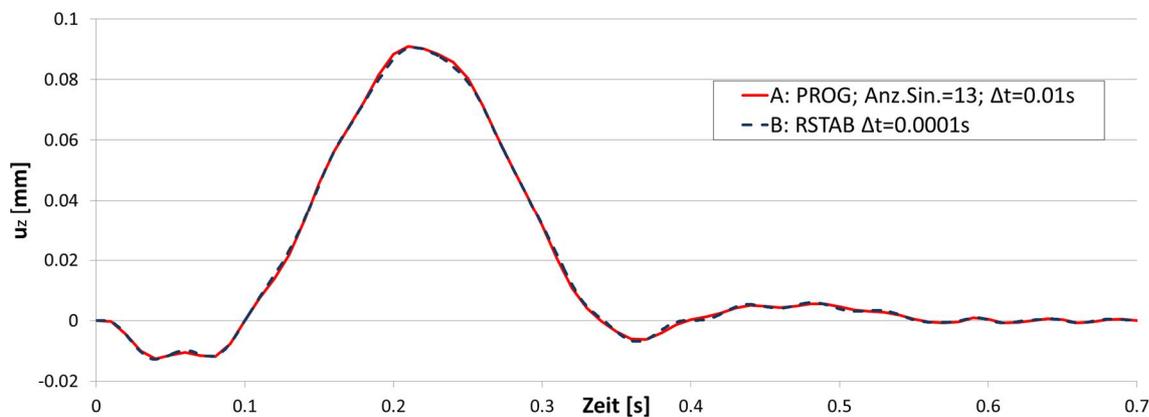


Abb. 31: vertikale Verformung u_z in Mitte von Feld 2 ($x=11m$)

Zur Berechnung des Momentenverlaufs M_y sind lediglich 13 Sinusfunktionen und ein Zeitschritt von 0.01s erforderlich (siehe Abb. 32 und vgl. Funktion A mit B). Der Maximalwert der R-Stab Berechnung tritt bei 0,22s auf (Funktion D; Einzelchase in Mitte von Feld 2) und kann von den Sinusfunktionen nicht exakt abgebildet werden. Ab 35 Sinusfunktionen (Funktion C) treten falsche Ergebnisse auf.

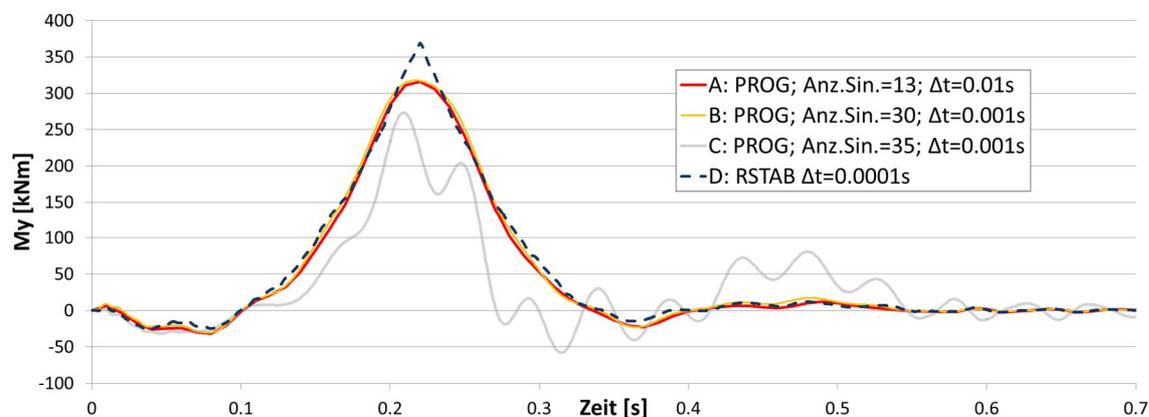


Abb. 32: Moment M_y in Mitte von Feld 2 ($x=11m$)

6.2.2.2 Auflager 3 ($x=17\text{m}$)

Generell ist das Ergebnis für den Momentenverlauf M_y am Auflager 3 umso besser, je höher die Anzahl der verwendeten Sinusfunktionen gewählt wird, wobei der Knick in der R-Stab Berechnung bei 0,34s (Abb. 33- Funktion D; Achse kurz vor und nach Auflagerüberfahrt) nicht exakt abgebildet werden kann. Ab 35 Sinusfunktionen werden wiederum falsche Resultate produziert.

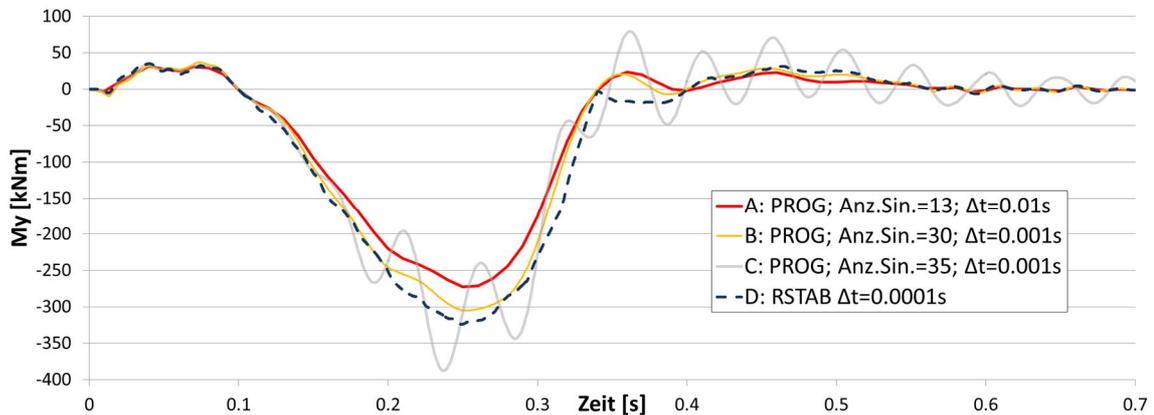


Abb. 33: Moment M_y am Auflager 3 ($x=17\text{m}$)

6.2.2.3 Endauflager ($x=28\text{m}$)

Die Endauflagerverdrehung ϕ_y kann bereits mit 13 Sinusfunktionen und einem Δt von 0.01s ausreichend detailliert abgebildet werden (siehe Abb. 34).

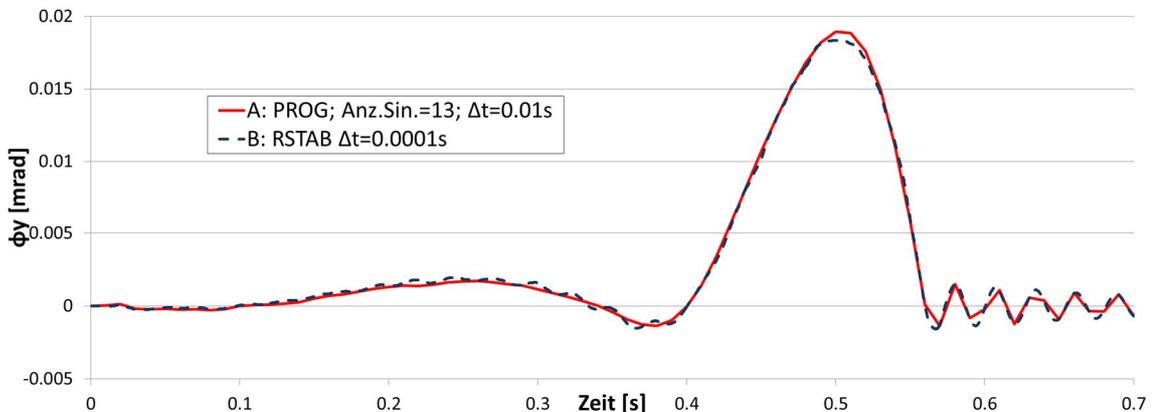


Abb. 34: Endauflagerverdrehung ϕ_y

6.2.3 Zugüberfahrt

Anschließend wird die Simulation einer Zugüberfahrt (HSLM-A9, $v=180\text{ km/h}$) beschrieben. Die Erkenntnisse aus „6.2.2 Einzelachse“ spiegeln sich auch hier deutlich wider. Dadurch kann gezeigt werden, dass 13 Sinusfunktionen ausreichen um die entsprechenden R-Stab-Lösungen zu erreichen bzw., dass mit 35 Sinusfunktionen falsche Ergebnisse resultieren.

6.2.3.1 Mitte Feld 2 ($x=11\text{m}$)

In Abb. 35 ist der gesamte Beschleunigungsverlauf in der Mitte von Feld 2, welcher aus der Zugüberfahrt resultiert, abgebildet. Um die Verläufe besser beurteilen zu können wird der Bereich zwischen 3- 4s in Abb. 36 nochmals vergrößert dargestellt.

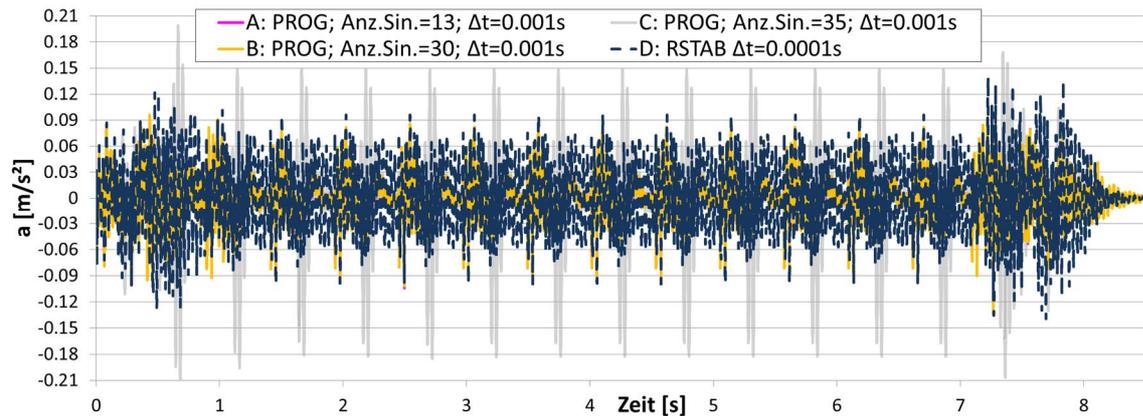


Abb. 35: Beschleunigung a in Mitte von Feld 2 (x=11m)

Hier ist nun erkennbar, dass 13 Sinusfunktionen für die Berechnung des Beschleunigungsverlaufs ausreichend sind – Funktion A und B sind deckungsgleich. Im Bereich von 3.3s - 3.5s bzw. 3.7s - 4s sind gewisse Abweichungen zwischen dem neuen Programm und R-Stab vorhanden, wobei die Ergebnisse jedoch grundsätzlich gut übereinstimmen.

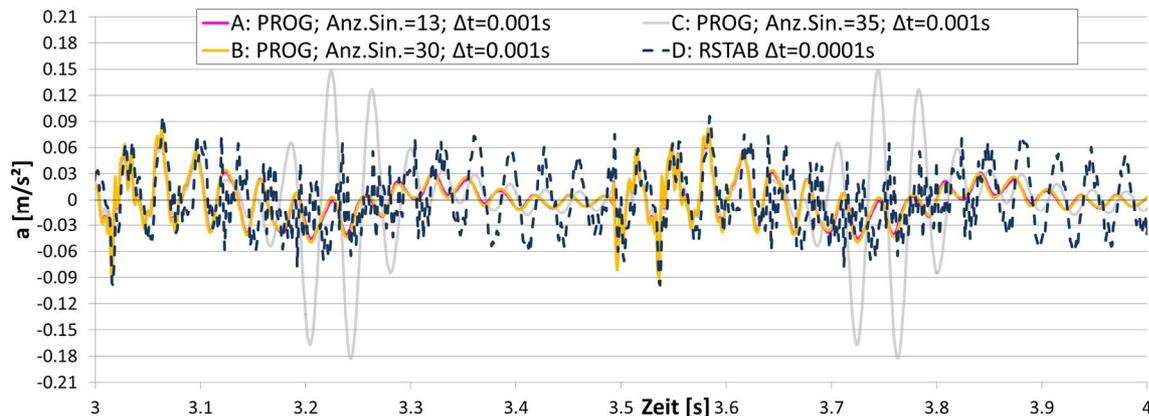


Abb. 36: Beschleunigung a in Mitte von Feld 2 (x=11m)

In Abb. 37 ist ersichtlich, dass ein Δt von 0.001s notwendig ist um den erforderlichen Detaillierungsgrad garantieren zu können.

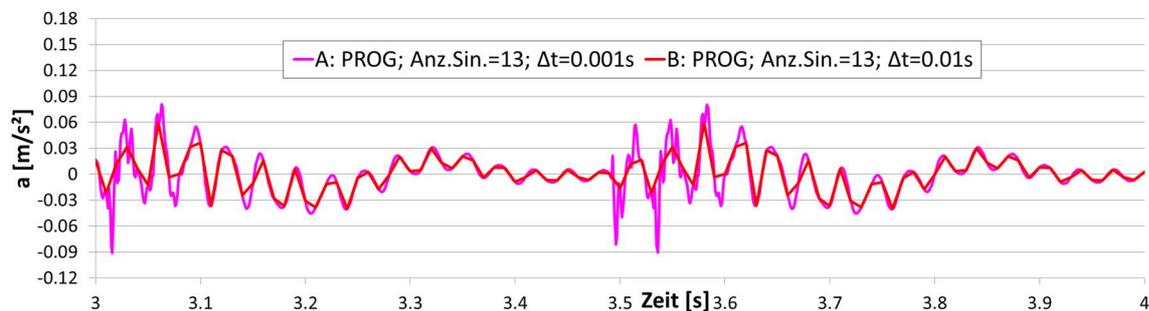
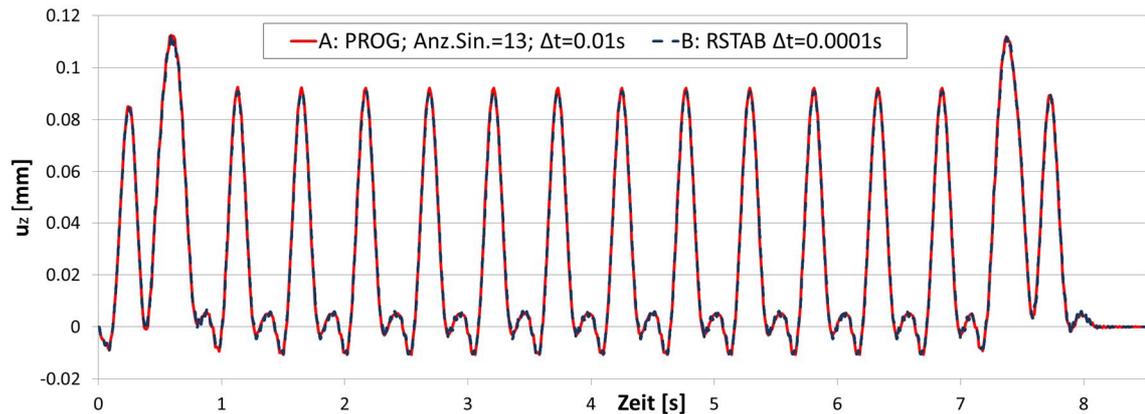
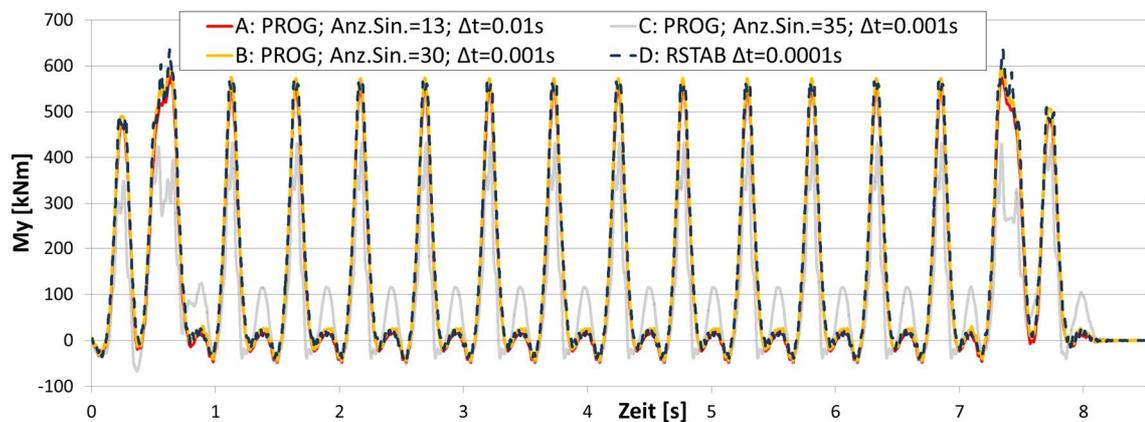


Abb. 37: Beschleunigung a in Mitte von Feld 2 (x=11m)

Der vertikale Verformungsverlauf u_z kann bereits mit 13 Sinusfunktionen und einem Zeitschritt von 0.01s optimal ermittelt werden (siehe Abb. 38).


 Abb. 38: vertikale Verformung u_z in Mitte von Feld 2 ($x=11m$)

Auch bei der Darstellung des Momentenverlaufes M_y sind 13 Sinusfunktionen und ein Zeitschritt von 0.01s ausreichend (siehe Abb. 39).


 Abb. 39: Moment M_y in Mitte von Feld 2 ($x=11m$)

6.2.3.2 Auflager 3 ($x=17m$)

Wie bereits in 6.2.2.2 angemerkt sind die Ergebnisse für den Momentenverlauf an Auflager 3 umso besser, je größer die Anzahl der Sinusfunktionen gewählt wird wobei jedoch ab 35 Sinusfunktionen wiederum falsche Ergebnisse resultieren. Das Kriterium bei diesem Verlauf ist somit nicht der Zeitschritt (hierbei sind 0.01s ausreichend) sondern die Anzahl der Sinusfunktionen. Der Unterschied bei ca. 7.3s zwischen den Ergebnissen mit 30 Sinusfunktionen (776kNm) und 13 Sinusfunktionen (682kNm) beträgt 12%. (94kNm).

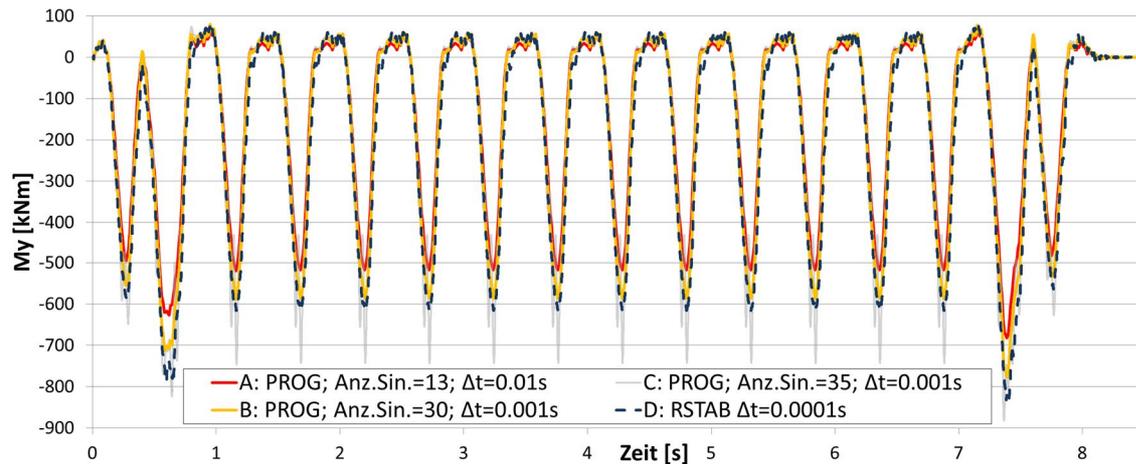


Abb. 40: Moment M_y an Auflager 3 ($x=17m$)

6.2.3.3 Endauflager ($x=28m$)

Der Verlauf der Endauflagerverdrehung kann mit 13 Sinusfunktionen und ein Zeitschritt von 0.01s detailliert dargestellt werden (siehe Abb. 41).

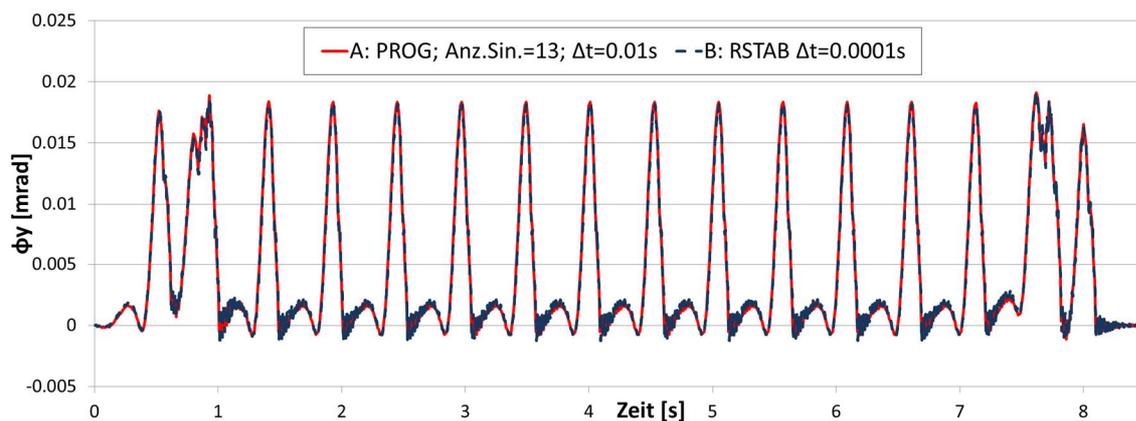


Abb. 41: Endauflagerverdrehung ϕ_y

6.3 Schlussfolgerung

Die Ergebnisse des neuen Programms stimmen sehr gut mit jenen der Newmark-Wilson-Berechnung (R-Stab) überein. Es konnte gezeigt werden, dass für die Berechnung eines Einfeldträgers ein Zeitschritt von 0.01s sowie 3 Sinusfunktionen ausreichen um sehr gute Resultate zu erzielen.

Beim Vierfeldträger passen die Ergebnisse des neuen Programms generell sehr gut mit jenen von R-Stab überein. Es wurde gezeigt, dass ein „Sinusfunktionen/ Systemknoten – Verhältnis“ von 1/3 gerechtfertigt ist und dass größtenteils ein Zeitschritt von 0.01s (bis auf Beschleunigungsverlauf – hier 0.001s) ausreicht um die entsprechenden Verläufe genau genug abbilden zu können. Bei nahezu linearen Verläufen mit spitzen Knicken – siehe Abb. 32 M_y -Verlauf in Mitte von Feld 2 bei Einzellast – ist es nicht möglich die Maximalwerte von R-Stab zu erreichen. Dies wirkt sich jedoch nur geringfügig auf die Endergebnisse aus. Hier wird angeraten die Berechnung mit verschiedenen Anzahlen der Sinusfunktionen durchzuführen und die Ergebnisse zu vergleichen.

7 Zusammenfassung

A Literaturverzeichnis

- **Normen**

- [1] ÖNORM EN 1991-2, Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke: Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken. Wien: Österreichisches Normungsinstitut, 01.08.2004.

- **Bücher, Skripten, Diplomarbeiten, Dissertationen und Zeitschriftenartikel**

- [2] Pircher, Heinz: Lösung Baudynamischer Probleme mittels analytischer Zeitintegration und Modaler Analyse. Dissertation, Technische Universität Graz, 2006.
- [3] Inman, Daniel J.: Engineering Vibration 3rd Edition. New Jersey: Pearson Education Inc., 2008
- [4] Flesch, Rainer: Baudynamik praxisgerecht Band1 Berechnungsgrundlagen. Wiesbaden und Berlin: Bauverlag GmbH, 1993
- [5] Weber, Benedikt: Unterlagen zu Vorlesung „Tragwerksdynamik“. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, SS2002

- **Internet**

- [6] Desch, Gertrud: Empirische Modelle. Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen, Karl-Franzens-Universität Graz, 12.7.2013. Online im Internet: URL: <http://www.uni-graz.at/~desch/LehrVer/empirmodelle.pdf> [Stand: 11.3.2015]

- **Software**

- [7] RSTAB 8, Programmversion 8.02.0007, Ing.-Software Dlubal, 2014.

- **Titelbild**

Online in Internet: URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Ponte_Rio-Niteroi01_2005-03-15.jpg [Stand: 22.08.2013].