



Stefan Kreamsner

Monte-Carlo-Methoden für amerikanische Optionen

Longstaff-Schwartz, Dualität und Policy-Iteration

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer/in:

O.Univ.-Prof. Dr.phil. Robert Tichy
Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Thonhauser

Institut für
Institut für Analysis und Zahlentheorie

Graz, September 2016

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG
AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	7
2	Zusammenfassung	8
3	Stochastische Grundlagen	9
3.1	Stochastische Prozesse	9
3.1.1	Brownsche Bewegung	12
3.1.2	Itô-Prozesse	13
3.2	Bedingte Erwartung	13
3.3	Martingal-Theorie	17
3.4	Stoppszeiten	18
3.5	Essentielles Supremum	20
4	Einleitung Finanzmathematik	22
4.1	Modellierung in diskreter Zeit	22
4.1.1	Das N -Perioden Marktmodell	22
4.1.2	Handelsstrategien	23
4.1.3	Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie, diskrete Version	24
4.1.4	Bewertung einer Forderung	25
4.2	Modellierung in stetiger Zeit	26
4.2.1	Marktmodell in stetiger Zeit	26

4.2.2	Handelsstrategien	27
4.2.3	Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie, stetige Version	28
4.2.4	Bewertung einer Forderung	29
4.3	N -Perioden-Binomial-Modell	29
4.4	Black-Scholes-Modell	30
4.4.1	Eindimensionales Black-Scholes-Modell	30
4.4.2	Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell	32
4.5	Plain-Vanilla-Optionen	33
4.5.1	Europäische Optionen	33
4.5.2	Amerikanische Optionen	34
4.5.3	Bermuda Optionen	35
4.6	Exotische Optionen	36
4.6.1	Basket Optionen	36
4.6.2	Multiple-Max-Optionen	37
5	Monte-Carlo-Simulation	38
5.1	Crude Monte-Carlo-Simulation	38
5.2	Konvergenz	39
5.3	Monte-Carlo-Simulation stochastischer Prozesse	40
5.3.1	Zeitdiskrete Prozesse mit unabhängigen Zuwächse	40
5.3.2	Zeitstetige Prozesse mit unabhängigen Zuwächse	40

6	Optimales Stoppen	42
6.1	Snell-Einhüllende im Diskreten	42
6.2	Freies Randwertproblem	44
7	Numerische Verfahren	48
7.1	Finite Differenzen	48
7.1.1	Implizites Verfahren	49
7.1.2	Explizites Verfahren	53
8	Longstaff-Schwartz-Algorithmus	57
8.1	Rückwärts Induktion	57
8.2	Regression	59
8.3	Konvergenz	62
8.4	Varianten und Erweiterungen des Algorithmus	63
9	Andersen-Broadie-Algorithmus	64
9.1	Duale Formulierung	64
9.2	Andersen-Broadie-Algorithmus	66
10	Policy-Iteration	69
10.1	Verbesserungsstrategie	69
10.2	One-Step-Improvement	70
10.3	Stabilität	71

11 Resultate	78
11.1 Amerikanische Put-Option	78
11.1.1 Binomialmodell	79
11.1.2 PDE-Methoden	80
11.1.3 Longstaff-Schwartz	81
11.1.4 Andersen-Broadie	83
11.2 Multidimensionale Resultate	84

1 Abstract

Though numerical procedures such as finite differences or elements can be used to approximately solve the corresponding partial differential equation to price American options, they lack performance when dealing with high-dimensional problems.

Longstaff and Schwartz [2001] closed the gap by introducing the so called Least-Squares Monte-Carlo approach, where the prevailing advantage of Monte-Carlo methods is used to efficiently price derivatives on multiple assets. Within their optimal stopping approach, they use Snell's envelope and then approximate the conditional expectation by linear regression, ending up with a stopping time close to the optimal one. Using this, possibly not optimal, stopping time to price the security, one obtains a lower bound to the pricing problem.

In order to control the estimation error, it is natural to ask for an upper bound to somehow define a confidence interval for the intended derivative price. With a dual formulation of the pricing problem, Rogers [2002] as well as Andersen and Broadie [2004] found ways to construct upper bounds, also using Least-squares Monte-Carlo in a nested way.

Lastly, in a different approach, Bender and Schoenmakers [2006] used policy iteration to sequentially improve exercise strategies. Theoretically the algorithm is as good as backward induction, but practically not as efficient as the proposed algorithm by Longstaff and Schwartz.

This thesis starts with introducing the necessary basics in stochastics, financial mathematics and Monte-Carlo-Simulation and then covers the pricing problem wrapped in the theory of optimal stopping. Then it is devoted to numerical methods, the Longstaff-Schwartz-Algorithm, duality and policy iteration. All the algorithms are outlined in various examples and compared with each other, exposing performance issues and estimation errors.

2 Zusammenfassung

Obwohl numerische Verfahren wie finite Differenzen oder finite Elemente verwendet werden können, um amerikanische Optionen zu bepreisen, sind diese Verfahren eher ungeeignet, um mehrdimensionale Optionen zu behandeln.

Longstaff and Schwartz [2001] schlossen die Lücke durch die Einführung des so genannten Least-Squares-Monte-Carlo-Ansatzes, bei dem der vorherrschende Vorteil von Monte-Carlo-Methoden genutzt wird um effizient Derivate auf mehreren Assets zu bepreisen. Im Rahmen der Lösung des optimalen Stoppproblems einer amerikanischen Option, verwenden sie Snell's Einhüllende und nähern die bedingte Erwartung durch lineare Regression. Dies liefert eine approximierende Stoppzeit die vielleicht nicht optimal ist, aber eine gute untere Schranke für das Preisproblem liefert.

Um die Schätzfehler kontrollieren zu können, ist es üblich, auch nach einer oberen Schranke zu fragen, um ein Intervall für den Preis der Option zu erhalten. Mit einer dualen Formulierung des Bepreisungsaufgabe, fanden Rogers [2002] sowie Andersen and Broadie [2004] Wege, um obere Schranken zu berechnen unter Verwendung von Least-Squares-Monte-Carlo in einer verschachtelten Art und Weise.

Schließlich verwendeten Bender and Schoenmakers [2006] in einem anderen Ansatz Policy Iteration um schrittweise die Ausübungs-Strategie zu verbessern. Theoretisch ist der Algorithmus so gut wie Rückwärtsinduktion, aber praktisch nicht so effizient wie der vorgeschlagene Algorithmus von Longstaff und Schwartz.

Diese Arbeit beginnt mit den notwendigen Grundlagen in der Stochastik, Finanzmathematik und Monte-Carlo-Simulation und deckt dann das Bepreisungs-Problem in der Theorie des optimalen Stoppens ab. Danach werden numerische Methoden, der Longstaff-Schwartz-Algorithmus, Dualität und Policy-Iteration beschrieben. Die Algorithmen sind in verschiedenen Beispielen erläutert und miteinander verglichen.

3 Stochastische Grundlagen

Die Grundlage für die Modellierung von Preisentwicklungen in der Finanzmathematik bilden stochastische Prozesse. Damit lassen sich viele Finanzphänomene wie Aktienpreise, Zinsraten oder Reserveprozesse von Versicherungen modellieren. Aber auch in der Natur, beispielsweise zur Abbildung von Wetterphänomenen oder Flüssen von Partikeln durch einen Filter, können stochastische Prozesse verwendet werden, um das Verhalten der Realität gut nachzubilden.

Durch die große Bedeutung der Normalverteilung bedient sich die Modellierung gern dieser Verteilung durch die Anwendung der Brownschen Bewegung oder allgemeiner von Itô-Prozessen, wo sie als Integrator auftritt. Die Brownsche Bewegung ist ein Beispiel eines Martingals, dessen Theorie später in der Bewertung von Finanzderivaten eine große Rolle spielen wird. Die folgenden Seiten über die Grundlagen stochastischer Prozesse sind in noch umfassender Ausführung in Korn et al. [2010] zu finden.

3.1 Stochastische Prozesse

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in I}$, deren Indexierung I man typischerweise als Zeit auffasst. Das entspricht einem Modell, das das Verhalten dieser Familie durch zeitlich hintereinander ausgeführte Experimente beschreibt.

Definition 1 (Filtration)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, das heißt Ω der Ereignis-Raum, \mathcal{A} eine σ -Algebra und \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und sei I eine geordnete Indexmenge.

Eine Filtration ist eine Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von σ -Sub-Algebren in \mathcal{A} mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, für $s < t$, $s, t \in I$.

Die Filtration spiegelt den Informationsverlauf wider. Die Inklusion in der Definition besagt, dass alle messbaren Ereignisse zu einem Zeitpunkt s sehr wohl auch zu einem späteren Zeitpunkt $t > s$ bekannt sind. In anderen Worten nimmt die Information über die Familie der Zufallsvariablen, also den Prozess X_t , entlang der Zeit t stets zu.

Mit der Definition einer Filtration formulieren wir nun einen stochastischen Prozess.

Definition 2 (Stochastischer Prozess (reellwertig))

Ein stochastischer Prozess (bezüglich \mathcal{F}_t) ist eine Familie von Paaren $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$, bestehend aus einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ und \mathbb{R}^n -wertigen Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in I}$ so dass X_t \mathcal{F}_t -messbar ist.

Für ein fixes $\omega \in \Omega$ betrachten wir

$$X.(\omega) := (X_t(\omega))_{t \in I} = (X(t, \omega))_{t \in I}$$

als Realisation des stochastischen Prozesses und werden diesen gelegentlich als Pfad bezeichnen.

Definition 3 (Rechtsstetige Filtration)

Sei \mathcal{F} eine Filtration und

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s .$$

Falls $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ für alle $t \in I$ gilt, dann ist \mathcal{F} eine rechtsstetige Filtration.

Definition 4 (Vollständige Filtration)

Sei \mathcal{F} eine Filtration, \mathcal{F} heißt **\mathbb{P} -vollständig**, wenn \mathcal{F}_0 alle \mathbb{P} -Nullmengen enthält

Definition 5 (Übliche Bedingungen)

Eine Filtration \mathcal{F} erfüllt die **üblichen Bedingungen**, wenn \mathcal{F} rechtsstetig und \mathbb{P} -vollständig ist.

Definition 6 (Natürliche Filtration)

Sei $(X_t)_{t \in I}$ eine Familie von \mathbb{R}^n -wertigen Zufallsvariablen, dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s | s \leq t \in I)$$

die natürliche Filtration von X .

Eine häufig verwendete Filtration eines Prozesses X ist die **vervollständigte kanonische Filtration** $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N})$, die aus der natürlichen Filtration \mathcal{F}_t^X und den \mathbb{P} -Nullmengen \mathcal{N} erzeugt wird. Sie erfüllt bei vielen Prozessen automatisch die üblichen Bedingungen, ist aber im Allgemeinen nicht notwendigerweise rechtsstetig.

Bemerkung

Der Einfachheit halber bezeichnen wir direkt X anstatt des Paares (X, \mathcal{F}) als

stochastischen Prozess, dann sollte klar sein, dass entweder aus dem Kontext die Filtration hervorgeht oder die natürliche Filtration gemeint ist.

1. Ist die Indexfamilie I höchstens abzählbar, dann sprechen wir von $(X_n)_{n \in I}$ als ein **stochastischer Prozess in diskreter Zeit**.
2. Andernfalls, wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (oder noch typischer $I \subset [0, \infty)$), nennen wir $(X_t)_{t \in I}$ einen **zeitstetigen stochastischen Prozess**.

Definition 7 (stetige Pfade)

Wenn alle Pfade (Realisierungen) eines stochastischen Prozesses $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, (bis auf eine Nullmenge) stetig (rechtsstetig, linksstetig) sind, dann heißt X ein Prozess mit **stetigen** (rechtsstetigen, linksstetigen) **Pfaden**.

Hat $X = (X_t)_{t \in I}$ stetige Pfade, so ist seine natürliche Filtration \mathcal{F}_t^X rechtsstetig.

Definition 8 (Zuwächse)

1. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ hat **unabhängige Zuwächse**, wenn für alle $r \leq u \leq s < t$ mit $r, u, s, t \in I$ gilt,

$$X_t - X_s \text{ ist unabhängig von } X_u - X_r .$$

2. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ hat **stationäre Zuwächse**, wenn für alle $s \leq t$ mit $s, t \in I$ gilt,

$$X_t - X_s \stackrel{d}{\sim} X_{t-s} .$$

Definition 9 (Markov Prozess)

Ein \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozess $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt **Markov Prozess** mit Anfangsverteilung ν , wenn gilt,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 \in A) &= \nu(A) & \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) , \\ \mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(X_t \in A | X_s) & \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), t \geq s . \end{aligned}$$

Definition 10 (vorhersagbarer stochastischer Prozess)

1. Die kleinste σ -Algebra \mathcal{P} erzeugt von Teilmengen aus $[0, \infty) \times \Omega$, bezüglich der alle linksstetigen, adaptierten Prozesse messbar sind, nennt man die σ -Algebra der vorhersagbaren Ereignisse.

2. Ein stochastischer Prozess heißt **vorhersagbar**, wenn er \mathcal{P} -messbar ist.

Bemerkung

Insbesondere sind alle linksstetigen, adaptierten Prozesse vorhersagbar.

3.1.1 Brownsche Bewegung

Ein besonders häufig auftretender Prozess in der Finanzmathematik ist die Brownsche Bewegung. Es gibt diverse Anwendungsgebiete in denen die Brownsche Bewegung als stochastische Komponente in der Modellierung vorkommt. In der hier vorliegenden Arbeit werden wir sie hauptsächlich bei der Modellierung des Black-Scholes-Modells betrachten und später in den Anwendungsbeispielen dieses Modell verwenden um schlussendlich aus den zugrundeliegenden normalverteilten Zuwächsen zu simulieren. Wir definieren den Prozess laut Korn and Korn [2013].

Definition 11 (Eindimensionale Brownsche Bewegung)

Ein reellwertiger Prozess $W = (W_t)_{t \geq 0}$ mit

1. $W_0 = 0$ \mathbb{P} -fast sicher
2. W hat stetige Pfade
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für $0 \leq s \leq t$
(stationäre normalverteilte Zuwächse)
4. $W_t - W_s$ ist unabhängig von $W_u - W_r$ für $0 \leq r \leq u \leq s < t$
(unabhängige Zuwächse)

heißt (**eindimensionale**) **Brownsche Bewegung**.

Definition 12 (Mehrdimensionale Brownsche Bewegung)

Ein \mathbb{R}^d -wertiger Prozess

$$W = (W_t)_{t \geq 0} = \left(W_t^1, \dots, W_t^d \right)'_{t \geq 0}$$

heißt **n-dimensionale Brownsche Bewegung**, wenn dessen Komponenten W^i unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen sind.

Satz 1 (Existenz, siehe Billingsley [1968]))

Die Brownsche Bewegung existiert. Die von ihr erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ ist rechtsstetig.

3.1.2 Itô-Prozesse

Speziell mit der Brownschen Bewegung als steuernder Prozess können einfache zeitstetige, stochastische Prozesse konstruiert werden.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration, die die üblichen Bedingungen erfüllt und $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F} . Solche sogenannten Itô-Prozesse (Diffusionsprozesse) folgen einer stochastischen Differentialgleichung der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

oder in differenzieller Kurzschreibweise

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

und beschreiben eine Dynamik mit Trend μ_t und stochastischer Schwankung gesteuert über den Prozess σ_t (mit μ_t und σ_t messbar und adaptiert).

Ein Beispiel ist das Bachelier-Modell, in dem die Parameter-Funktionen $\mu_t \equiv \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma_t \equiv \sigma \in \mathbb{R}$ konstant gewählt werden. Somit beschreibt das Modell einen Aktienverlauf mit der Dynamik

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t .$$

Satz 2 (Erwartungswert, Varianz von Itô-Prozessen, siehe Øksendal [2003])
Sei X ein Itô-Prozess mit $\mathbb{E}[|X^2|] < \infty$, dann gilt für $s < t$,

$$\mathbb{E}[X_t - X_s] = \int_s^t \mu_u du$$

$$\text{Var}(X_t - X_s) = \text{Var} \left(\int_s^t \sigma_u dW_u \right) = \int_s^t \sigma_u^2 du$$

3.2 Bedingte Erwartung

Basis für die Beschreibung des Verhaltens von Prozessen in der Zukunft, wenn bereits Beobachtungen über einen vergangenen Zeitraum gemacht wurden

und um daraus Inferenz zu erhalten, ist die bedingte Verteilung. Wir werden, Lamberton [2007] folgend, den Begriff der elementaren bedingten Erwartung ableiten und anschließend nach Klenke [2006] das Konzept auf die allgemeine bedingte Erwartung verallgemeinern. Dieses Konzept wird insbesondere bei Martingalen und darüberhinaus bei der Bewertung von Forderungen (Anleihen, Finanzderivaten, etc.) zum Tragen kommen.

Elementare bedingte Erwartung

Seien X und Y Zufallsvariablen. Die **bedingte Verteilung** von X gegeben $Y = y$ ist definiert als

$$\mathbb{P}(X \leq x | Y = y) := \frac{\mathbb{P}(X \leq x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)},$$

vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ ist. Die **bedingte Dichtefunktion** für alle y mit $f_Y(y) > 0$ ist dann

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

und $f(x|y)$ ist wieder eine Dichtefunktion, also nicht negativ und integriert sich auf 1.

Der Erwartungswert dieser Verteilung, sofern er existiert, wird als **bedingte Erwartung** von X gegeben $Y = y$ bezeichnet,

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx .$$

Bemerkung

$\mathbb{E}[X|Y = y]$ ist demnach eine Funktion von y . Beschreiben wir diese Funktion als

$$g(y) := \mathbb{E}[X|Y = y]$$

und ersetzen wir y durch Y . Dann erhalten wir die Zufallsvariable $g(Y)$ die der bedingten Erwartung von X gegeben Y entspricht: $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$.

Die bedingte Verteilung und die bedingte Erwartung haben wir bislang nur für jene y erklärt, für die $f_Y(y) > 0$ galt. Auf dem Ereignis $\{y : f_Y(y) = 0\}$ können wir die bedingte Verteilung und somit auch die bedingte Erwartung beliebig festsetzen. Jede Festsetzung, jede Wahl, liefert dann eine sogenannte Version der bedingten Verteilung, beziehungsweise der bedingten Erwartung.

Diese Versionen unterscheiden sich nur auf der Menge $\{y : f_Y(y) = 0\}$, einer Menge mit Maß Null. Deswegen sind $f(x)$ und $\mathbb{E}[X|Y]$ Y -fast-sicher definiert.

Allgemeine bedingte Erwartung

Wir verallgemeinern den zuvor definierten Begriff der elementaren bedingten Wahrscheinlichkeit. Dazu verwenden wir statt der Zufallsvariable Z auf die bedingt wird, ihre erzeugte σ -Algebra $\mathcal{G} = \sigma(Z)$ und bezeichnen ihre bedingte Erwartung als

$$\mathbb{E}[X|Z] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] .$$

Definition 13 (Bedingte Erwartung)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und \mathcal{F} eine Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} . Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingte Erwartung** von X gegeben \mathcal{F} , falls gilt:

1. Y ist \mathcal{F} -messbar.
2. Für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]$.

Wir schreiben symbolisch $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] := Y$.

Für $B \in \mathcal{A}$ heißt

$$\mathbb{P}(B|\mathcal{F}) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}]$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B gegeben \mathcal{F} .

Unter Verwendung des Satzes von Radon-Nikodym erhalten wir:

Satz 3

$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ existiert und ist \mathbb{P} -fast sicher eindeutig.

Satz 4 (Eigenschaften der bedingten Erwartung, siehe Klenke [2006])

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ σ -Algebren. Weiters sei Y eine integrierbare Zufallsvariable, dann gilt:

1. Linearität

$$\mathbb{E}[\alpha X + Y|\mathcal{F}] = \alpha\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] .$$

2. Monotonie

Ist $X \geq Y$ f.s., so ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

3. Ist $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ und Y messbar bezüglich \mathcal{F} , dann ist

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \text{ und } \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[Y|Y] = Y.$$

4. **Turmeigenschaft** (Tower-Property oder Glättungseigenschaft)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

5. **Dreiecksungleichung**

$$\mathbb{E}[|X||\mathcal{F}] \geq |\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|.$$

6. **Unabhängigkeit** Sind $\sigma(X)$ und \mathcal{F} unabhängig, so ist

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X].$$

7. Gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für jedes $A \in \mathcal{F}$, so ist

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X].$$

8. **Dominierte Konvergenz** Ist $Y \geq 0$ und ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $|X_n| \leq Y$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ f.s., so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \text{ f.s. und } \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \text{ ist integrierbar.}$$

Gegeben die Information, die wir aus der σ -Algebra \mathcal{F} erhalten, liefert $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ die beste Vorhersage über X . Für den Fall $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ wissen wir durch den vorigen Satz bereits $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$. Das bedeutet, wenn wir alle Information über X haben ist die beste Vorhersage X selbst. Für den Fall dass X und \mathcal{F} unabhängig sind, also keine Information über X vorhanden, ist die beste Vorhersage $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$. Genauere Einschätzung der besten Vorhersage liefert der folgende Satz.

Satz 5 (Bedingte Erwartung als \mathcal{L}^2 -Projektion)

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ -Algebra und X eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable, $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Dann ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ die orthogonale Projektion von X auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es gilt also für jedes \mathcal{F} -messbare Y mit $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2]$$

mit Gleichheit, dann und nur dann, wenn $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

Satz 6 (Jensen'sche Ungleichung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Weiters sei X eine I -wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ -Algebra, dann gilt

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}] \leq \infty$$

3.3 Martingal-Theorie

Eine wichtige Klasse von Prozessen, die sich besonders als Basis in finanzmathematischen Problemstellungen als hilfreich erwiesen haben, sind Martingale.

Definition 14

Ein reellwertiger, adaptierter Prozess $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in I}$ mit endlichen Erwartungswerten $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \in I$ heißt

(a) **Martingal**, falls

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$$

für alle $s < t \in I$, \mathbb{P} -fast-sicher.

(b) **Super-Martingal**, falls

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$$

für alle $s < t \in I$, \mathbb{P} -fast-sicher.

(c) **Sub-Martingal**, falls

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$$

für alle $s < t \in I$, \mathbb{P} -fast-sicher.

Bemerkung

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}[X_n] = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist der Random Walk

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

ein Martingal bzgl $\mathcal{F} = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[S_{m+n} \middle| \mathcal{F}_n \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{m+n} X_i \middle| \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=n+1}^{m+n} X_i \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{i=n+1}^{m+n} \mathbb{E} [X_i] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [X_i | \mathcal{F}_n] = 0 + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i \middle| \mathcal{F}_n \right] = S_n \end{aligned}$$

(a) Hier haben wir neben Linearität des Erwartungswertes die Unabhängigkeit von X_{n+i} von \mathcal{F}_n verwendet. \square

Satz 7 (Doob-Meyer-Zerlegung)

Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein adaptierter Prozess, dann existiert eine eindeutige Zerlegung $X = M + A$, wobei A vorhersagbar ist mit $A_0 = 0$ und M ein Martingal. X ist genau dann ein Submartingal, wenn A monoton wachsend ist.

Beweis Meyer [1966]). \square

Dies lässt sich für zeitstetige Prozesse noch verallgemeinern, siehe Beiglböck et al. [2012].

3.4 Stoppzeiten

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein stochastischer Prozess bzgl der Filtration \mathcal{F} . Wir möchten den Prozess an zufälligen Zeitpunkten auswerten können. Dafür ist das Konzept der Stoppzeit wichtig:

Definition 15 (Stoppzeit)

Eine Zufallsvariable τ mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, falls für jedes $t \in I$ gilt, dass

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t .$$

Eine Stoppzeit τ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\tau \leq K$.

Ergo können wir bei einer Stoppzeit durch den Informationsverlauf \mathcal{F}_t entscheiden, ob das Ereignis $\{\tau \leq t\}$ eingetreten ist. Welche Ereignisse wir nun beobachten können, legt die folgende σ -Algebra fest:

Definition 16

Ist τ eine Stoppzeit, so heißt

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für jedes } t \in I\}$$

die σ -Algebra der τ -Vergangenheit.

Definition 17

Sei X ein stochastischer Prozess. Falls $\tau < \infty$ \mathbb{P} -fast-sicher, oder X ein zeitdiskreter stochastischer Prozess ist, dann ist $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ wohldefiniert und wir setzen

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) .$$

Falls τ keine endliche Stoppzeit ist, benötigen wir eine Zusatzvoraussetzung an X :

Satz 8

Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ \mathbb{P} -vollständig, $(X_t)_{t \in I}$ rechtsstetig mit existierenden linkseitigen Limiten und τ eine Stoppzeit, dann ist X_τ eine \mathcal{F}_τ -messbare Zufallsvariable.

Bemerkung

Allgemeiner gilt: Ist X progressiv messbar und τ eine Stoppzeit, dann ist X_τ eine \mathcal{F}_τ -messbare Zufallsvariable.

Satz 9 (Optional Stopping Theorem)

Sei X ein Martingal mit rechtsstetigen Pfaden und τ eine beschränkte Stoppzeit, dann ist X_τ integrierbar und \mathcal{F}_τ -messbar. Weiters gilt

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] .$$

Satz 10 (Optional Sampling Theorem)

Sei X ein Martingal mit rechtsstetigen Pfaden bezüglich der Filtration \mathcal{F} und seien $\zeta \leq \tau$ beschränkte Stoppzeiten, dann gilt

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\zeta] = X_\zeta \text{ } \mathbb{P}\text{-fast-sicher} .$$

3.5 Essentielles Supremum

In der Terminologie der Wahrscheinlichkeitstheorie wollen wir den Begriffs des Supremums etwas verallgemeinern. Die Motivation dahinter rührt daher, dass für eine abzählbare Folge von Zufallsvariable $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ wieder eine Zufallsvariable mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ darstellt. Jedoch ist dies nicht notwendigerweise bei überabzählbaren Familien von Zufallsvariablen gegeben. Daher ist es vernünftig, die Definition des essentiellen Supremums einzuführen.

Satz 11

Sei $(X_t)_{t \in I}$ eine Familie von (möglicherweise auch überabzählbar vielen) Zufallsvariablen. Dann existiert eine Zufallsvariable \overline{X} mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, die bis auf Ereignisse mit Maß 0 folgendes erfüllt:

1. $X_t \leq \overline{X}$ fast sicher für alle $t \in I$.
2. Falls X eine Zufallsvariable ist mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ für die gilt, dass $X_t \leq X$ fast sicher für alle $t \in I$, dann folgt

$$\overline{X} \leq X \quad \text{fast sicher.}$$

Darüberhinaus existiert eine abzählbare Menge $J \subset I$, so dass

$$\overline{X} = \sup_{i \in J} X_i \quad \text{fast sicher.}$$

Beweis. Durch Zuhilfenahme einer bijektiven, monoton wachsenden Funktion, die von $\overline{\mathbb{R}}$ nach $[0, 1]$ abbildet, können wir uns o.B.d.A. auf das Intervall $[0, 1]$ beschränken.

Sei \mathcal{P}_0 die Menge aller abzählbaren Teilmengen von I . Für ein $J \in \mathcal{P}_0$ setzen wir

$$\overline{X}_J := \sup_{i \in J} X_i .$$

Dies definiert für jedes J eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, 1]$, da das Supremum über einer abzählbare Menge agiert.

Sei weiters

$$\alpha := \sup_{J \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}[\overline{X}_J] .$$

Betrachten wir nun eine Folge $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Elementen in \mathcal{P}_0 , sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\overline{X}_{J_n}] = \alpha$. Die Vereinigung

$$J^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

ist eine abzählbare Teilmenge von I und es gilt

$$\mathbb{E}[\overline{X}_{J^*}] = \alpha = \sup_{J \in \mathcal{P}_0} \mathbb{E}[\overline{X}_J] .$$

Zu zeigen ist nun, dass die Zufallsvariable $\overline{X} := \overline{X}_{J^*}$ die gewünschten Eigenschaften aus dem Theorem erfüllt:

Sei $i \in I$ fix, dann ist die Menge $J^* \cup \{i\}$ wieder eine abzählbare Teilmenge von I und $\overline{X}_{J^* \cup \{i\}} = \overline{X} \vee X_i$. Wäre $\mathbb{E}[X_i] > \mathbb{E}[\overline{X}]$, \mathbb{P} -fast-sicher, so wäre α nicht das Supremum über \mathcal{P}_0 . Infolgedessen gilt $\mathbb{E}[\overline{X} \vee X_i] \leq \mathbb{E}[\overline{X}]$ und $\overline{X} \vee X_i = \overline{X}$, fast sicher. Also gilt

$$X_i \leq \overline{X}$$

fast sicher. Sei X eine Zufallsvariable mit $X \geq X_i$ fast sicher für alle $i \in I$. Da J^* abzählbar ist, folgt

$$X \geq \sup_{i \in J^*} X_i = \overline{X}$$

fast sicher.

□

Definition 18

Sei \overline{X} eine Zufallsvariable wie im vorherigen Theorem beschrieben, dann bezeichnen wir \overline{X} als das **essentielle Supremum** und versehen die Notation

$$\overline{X} := \operatorname{ess\,sup}_{i \in I} X_i$$

4 Einleitung Finanzmathematik

Das folgende Kapitel liefert einen Überblick über die mathematischen Grundlagen der Finanzmathematik. Die Beschreibung der auf den Märkten gehandelten Finanzderivate folgt Hull [2009]. Für die Modellierung in diskreter und stetiger Zeit siehe Korn and Korn [2013] und Duffie [2010].

4.1 Modellierung in diskreter Zeit

4.1.1 Das N -Perioden Marktmodell

Wir betrachten einen Markt der aus $d+1$ Finanzgütern besteht und nehmen der Einfachheit halber an, dass nur an **diskreten Zeitpunkten** $0, \dots, N$ gehandelt werden darf. Die Preise aller Finanzgüter zum Zeitpunkt n beschreiben wir mit dem Zufalls-Vektor S_n . Mit S_n^j bezeichnen wir den Preis des j -ten Finanzgutes. S_n^j kann je nach konkreter Modell-Spezifikation sowohl eine diskrete als auch stetige Zufallsvariable sein. Um die Preise der verschiedenen Finanzgüter miteinander vergleichen zu können, begutachten wir die Preise relativ zum ersten Finanzgut (**Numeraire**) S_n^0 . Wir nehmen an, dass S_n^0 stets positiv ist und definieren die relativen Preise

$$\tilde{S}_n^j = \frac{S_n^j}{S_n^0}.$$

\tilde{S}^j nennen wir den diskontierten Preisprozess des j -ten Finanzgutes.

Unser Modell besteht somit aus

1. dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,
2. einem $(d+1)$ -dimensionaler stochastischem Preisprozess $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$ mit

$$\begin{aligned} S_n &= (S_n^0, \dots, S_n^d)', \\ S_n^0 &> 0 \quad (\mathbb{P}\text{-f.s.}, 0 \leq n \leq N) \end{aligned}$$

und

3. dessen Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, $\mathcal{F}_n \subset A$, die den Informationsverlauf des Preisprozesses beschreibt.

4.1.2 Handelsstrategien

Definition 19 (Portfolio)

1. Ein **Portfolio** ist ein Vektor $x = (x^0, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ und beschreibt wie viele Stück x^j des j -ten Finanzgutes im Portfolio gehalten werden.
2. Der **Wert** des Portfolios x zur Zeit n ist

$$x \cdot S_n := \sum_{j=0}^d x^j S_n^j .$$

Nun wollen wir es Akteuren am Markt ermöglichen, ihr Portfolio dynamisch ändern zu können, also je Zeiteinheit Stückzahlen x^j ihres Portfolios zu kaufen bzw. verkaufen.

Definition 20 (Handelsstrategie)

Eine **Handelsstrategie** ist ein vorhersagbarer, integrierbarer $(d+1)$ -dimensionaler Prozess

$$X = (X_n)_{1 \leq n \leq N} .$$

Dabei beschreibt X_n das Portfolio, das in der Zeit von $(n-1, n]$ gehalten wird. Weiters setzen wir $X_0 := X_1$ und $X_{N+1} := 0$. Durch die Vorhersagbarkeit einer Handelsstrategie ist X_n bereits zum Zeitpunkt $n-1$ bekannt.

Zum Zeitpunkt n , ($0 \leq n \leq N$), ist der **Wert der Handelsstrategie** definiert als

$$V_n(X) := X_n \cdot S_n = \sum_{j=0}^d X_n^j S_n^j .$$

Diesen Prozess $V = (V_n(X))_{0 \leq n \leq N}$ nennen wir den **Wertprozess** der Handelsstrategie X . Darüberhinaus bezeichnen wir den Prozess $\tilde{V}(X) = (\tilde{V}_n(X))_{0 \leq n \leq N}$ mit

$$\tilde{V}_n(X) := \frac{V_n(X)}{S_n^0} = X_n \cdot \tilde{S}_n$$

als den **diskontierten Wertprozess** der Handelsstrategie X

Der Abfluss aus dem Wertprozess einer Handelsstrategie $\delta_n(x)$,

$$\delta_n(X) := (X_n - X_{n+1}) \cdot S_n ,$$

heißt **Entnahmeprozess** und beschreibt das Kapital, das durch Umschichtung vom alten Portfolio X_n zum neuen Portfolio X_{n+1} frei wird (oder zugeschossen werden muss).

Definition 21 (Selbstfinanzierend)

Eine Handelsstrategie heißt **selbstfinanzierend**, wenn

$$\delta_n(X) = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq n < N .$$

Definition 22 (Arbitrage)

Eine Handelsstrategie X heißt Arbitrage, falls

1. $V_0(X) \leq 0$ f.s.,
2. $\delta_n(X) \geq 0$ f.s. für alle $1 \leq n \leq N$,
3. $\mathbb{P}(\delta_n(X) > 0) > 0$ für ein n .

4.1.3 Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie, diskrete Version

Die Voraussetzung der Arbitragefreiheit ist das wesentliche Rezept in der Finanzmathematik. Um das ökonomische Prinzip der Absenz von Arbitrage in eine nützlichere mathematische Form zu bringen, wird das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} mit einem äquivalenten Maß \mathbb{Q} mit speziellen Eigenschaften in Konnex gebracht.

Definition 23 (äquivalentes Maß)

Seien \mathbb{P} und \mathbb{Q} zwei Wahrscheinlichkeitsmaße. \mathbb{P} und \mathbb{Q} heißen **äquivalent**, wenn \mathbb{P} und \mathbb{Q} die selben Nullmengen besitzen, das heißt für $A \in \mathcal{A}$, gilt $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0$.

Die zwei Maße sind die Basis für verschiedene Erwartungswerte $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot]$ und $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$. Besonders interessiert sind wir an einem Maß \mathbb{Q} für das $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_m | \mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n, m > n$ gilt, also bezüglich dem \tilde{S} ein Martingal ist. Wir nennen ein solches Maß **äquivalentes Martingalmaß** und postulieren die folgende wichtige Charakterisierung der Arbitragefreiheit:

Satz 12 (Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie, siehe Duffie [2010])

Das N -Perioden Marktmodell ist arbitragefrei, dann und nur dann, wenn ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} existiert, bezüglich dem der diskontierte Preisprozess \tilde{S} ein Martingal ist.

4.1.4 Bewertung einer Forderung

Finanzderivate bezeichnen wir noch allgemeiner als eine Forderung.

Definition 24 (Forderung)

Eine **Forderung** ist ein \mathcal{F} -adaptierter Prozess $H = (H_n)_{1 \leq n \leq N}$ mit $H_n \geq 0$, für alle n . Wir setzen $H_0 := 0$.

1. Eine Forderung H heißt **absicherbar**, falls eine Handelsstrategie X existiert, sodass

$$\delta_n(X) = H_n \quad 1 \leq n \leq N .$$

Eine solche Strategie X , die jede Entnahme/Einlage H_n repliziert, nennt man **Hedge**.

2. Ein Marktmodell heißt **vollständig**, wenn es arbitragefrei ist und für jede Forderung eine Hedge existiert.

Durch die eindeutige Auszahlung einer Hedge X in einem vollständigen Marktmodell können wir alle Forderungen H , die durch X abgesichert werden, bepreisen.

Definition 25 (Fairer Preis)

Sei H eine Forderung, die durch die Hedge X abgesichert wird, dann ist der **faire Preis** von H zum Zeitpunkt n

$$\pi_n(H) := V_n(X) .$$

Insbesondere ist der gegenwärtige Wert der Forderung H

$$\pi_0(H) := V_0(X) .$$

Nun wenden wir den Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie an, um durch das äquivalente Martingalmaß \mathbb{Q} zu einer Charakterisierung des Preises einer absicherbaren Forderung H zu kommen. Dadurch können wir den Preis berechnen, ohne eine Hedge konstruieren zu müssen.

Satz 13 (siehe Elliott and Kopp [2005])

Der faire Preis einer absicherbaren Forderung H erfüllt

$$\tilde{\pi}_n(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=n}^N \tilde{H}_k | \mathcal{F}_n \right] ,$$

wobei \mathbb{Q} ein beliebiges, äquivalentes Martingalmaß für \tilde{S} sei. Weiters ist der gegenwärtige diskontierte Wert der Forderung H

$$\tilde{\pi}_0(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^N \tilde{H}_k | \mathcal{F}_0 \right] .$$

Voraussetzung war nur, dass die Forderung H absicherbar ist. Um dies stets zu gewährleisten verweisen wir auf den folgenden Satz.

Satz 14 (Vollständiges Marktmodell, siehe Elliott and Kopp [2005])

Ein arbitragefreies N -Perioden Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} auf \mathcal{F}_N eindeutig festgelegt ist.

4.2 Modellierung in stetiger Zeit

Die Lücke vom diskreten zum stetigen Modell schließen wir, indem der diskrete Preisprozess nun in einen stetigen übergeht. Jedoch müssen manche Konzepte aus dem N -Perioden Marktmodell etwas adaptiert werden, damit sie auch im stetigen Fall Sinn machen.

4.2.1 Marktmodell in stetiger Zeit

Wir betrachten einen endlichen Zeithorizont $[0, T]$ in dem wiederum $(d + 1)$ -Finanzgüter gehandelt werden können, nun aber zu jedem Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$.

Unser stetiges Modell besteht aus

1. dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

2. dem Informationsverlauf des Preisprozesses, beschrieben durch eine rechtsstetige Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ von \mathcal{A}
3. einem \mathcal{F} -adaptierten, $(d+1)$ -dimensionaler Preisprozess $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$S_t = (S_t^0, \dots, S_t^d) .$$

Wir nehmen stets an, dass für die Preisprozesse der Finanzgüter das stochastische Integral $\int X dS^j$ für alle vorhersagbaren, quadratisch integrierbaren Prozesse X definiert ist, i.e., es gelte P -f.s. $\int_0^T X_s^2 ds < \infty$.

Ebenso fordern wir wieder, dass das Numeraire S^0 \mathbb{P} -f.s. positiv ist und nennen

$$\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$$

den (stetigen) **diskontierten Preisprozess**.

4.2.2 Handelsstrategien

Analog bezeichnen wir wieder eine Handelsstrategie als einen $(d+1)$ -dimensionalen vorhersagbaren Prozess $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ und dessen Wertprozess $V(X)$ als das Skalarprodukt

$$V(X) = (X_t \cdot S_t)_{0 \leq t \leq T} .$$

Jedoch müssen wir das Konzept der Selbstfinanzierung nun etwas adaptieren und aus technischen Gründen die Beschränktheit nach unten (Zulässigkeit) einer Strategie fordern. Vorab bezeichnen wir den **Vermögenszuwachsprozess** einer Handelsstrategie X als

$$\int X \cdot dS := \sum_{j=0}^d \int X^j dS^j$$

Definition 26 (Selbstfinanzierend)

Eine Handelsstrategie X heißt **selbstfinanzierend**, wenn X nach S integrierbar ist und

$$\int_0^t X \cdot dS = V_t(X) - V_0(X) \quad 0 \leq t \leq T$$

Definition 27 (zulässig)

eine Handelsstrategie X heißt **zulässig**, wenn eine Konstante K existiert, sodass

$$\tilde{V}_t(X) \geq -K, \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T \quad ,$$

\mathbb{P} -fast-sicher gilt.

Definition 28 (Arbitrage)

Eine selbstfinanzierende und zulässige Handelsstrategie X heißt Arbitrage, falls

1. $V_0(X) \leq 0$, \mathbb{P} -f.s.,
2. $V_T(X) \geq 0$, \mathbb{P} -f.s.,
3. $\mathbb{P}(V_T(X) > 0) > 0$.

4.2.3 Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie, stetige Version

Satz 15 (Fundamentalsatz der Arbitrage-Theorie)

Das Marktmodell ist arbitragefrei, dann und nur dann, wenn ein zu \mathbb{P} äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} existiert, bezüglich dem der diskontierte Preisprozess \tilde{S} ein Martingal ist.

Es kann allgemeiner gezeigt werden, dass dieses Maß \mathbb{Q} unter einer abgeschwächten Bedingung: *No free lunch with vanishing risk* existiert, siehe Schachermayer [2010].

Eine \mathcal{F}_T -messbare Auszahlung $H_T \geq 0$ heißt **absicherbar**, wenn es eine selbstfinanzierende, zulässige Handelsstrategie X gibt mit

$$V_T(X) = H_T .$$

Jedoch ist im stetigen Fall der Wert der Handelsstrategie zu einem Zeitpunkt $t < T$ im Allgemeinen nicht eindeutig. Darum deklarieren wir:

4.2.4 Bewertung einer Forderung

Definition 29 (Fairer Preis)

Der **faire Preis** zum Zeitpunkt t einer absicherbaren Forderung H_T ist

$$\pi_t(H_T) := \operatorname{ess\,inf}_X V_t(X)$$

Satz 16

Sei $H_T \geq 0$ eine Forderung. Existiert eine absichernde Handelsstrategie X , sodass ihr diskontrierter Wertprozess ein \mathbb{Q} -Martingal ist, dann gilt

$$\tilde{\pi}_t(H_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{H}_T | \mathcal{F}_t] .$$

Ein solches X heißt **Hedge**, da sie H_T nicht nur absichert, sondern auch zu jedem Zeitpunkt den Wert des fairen Preises liefert.

Ein Marktmodell heißt vollständig, wenn es arbitragefrei ist und jede Forderung absicherbar ist.

Satz 17 (Vollständiges stetiges Marktmodell)

Ein arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes Martingalmaß auf \mathcal{F}_T eindeutig festgelegt ist.

4.3 N -Perioden-Binomial-Modell

Ein besonders einfaches Modell zur Abbildung von Aktien ist das Binomial-Modell. Es ist ein N -Perioden-Modell in diskreter Zeit $(0, \dots, N)$ bei dem wir die Bewegung einer Aktie durch einfaches Auf und Ab mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten modellieren. Durch die zwei Ausgänge, Auf und Ab, ergibt sich der Name des Modells. Es wird in der Literatur auch als Cox-Ross-Rubinstein-Modell genannt. Dieses simple Verfahren mag zwar auf den ersten Blick eine Aktienbewegung sehr primitiv modellieren, liefert aber als Approximation bei der Bepreisung nützliche Ergebnisse.

Wir bestimmen als Parameter des Modells die feste Zinsrate ρ und modellieren das Numeraire (einem festverzinslichen Bankkonto)

$$S_n^0 = (1 + \rho)^n$$

und als zweites Finanzgut eine Aktie, deren Wert sich durch Up and Downs aus dem Startwert S_0 fortsetzt

$$S_n^1 = S_0^1 u^{W_n} d^{N-W_n} .$$

Hier bezeichnet $d < u$ die Höhe der relativen Änderungen der Aktie bei Down bzw. Up, sowie W_n eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parameter p ,

$$\mathbb{P}(W_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n) .$$

Satz 18

Das Binomialmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn $d < 1 + \rho < u$. Mit dieser Bedingung ist das Modell auch vollständig.

Beweis (siehe Korn and Korn [2013]). □

Satz 19

Der faire Preis $\pi_0(H)$ einer Forderung H im Binomialmodell ergibt sich als

$$\pi_0(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(1 + \rho)^{-n} H] .$$

bezüglich dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} , definiert als

$$\mathbb{Q} \left(\frac{S_n^1}{S_{n-1}^1} = u \right) = q^* .$$

$$\mathbb{Q} \left(\frac{S_n^1}{S_{n-1}^1} = d \right) = 1 - q^* .$$

mit

$$q^* := \frac{1 + \rho - d}{u - d}$$

Beweis (siehe Korn and Korn [2013]). □

4.4 Black-Scholes-Modell

4.4.1 Eindimensionales Black-Scholes-Modell

Das zeitstetige Modell von Black-Scholes besteht wiederum aus einem festverzinslichen Bankkonto mit stetiger Verzinsung

$$S_t^0 = e^{rt}$$

und einer Aktie deren Dynamik, durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

definiert ist; $W_t = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ sei eine Brownsche Bewegung.

Die explizite Lösung dieser Gleichung ist

$$S_t^1 = S_0^1 \exp \left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t \right) .$$

Als Filtration wählen wir die vervollständigte kanonische Filtration

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}) ,$$

die von der Filtration der Brownschen Bewegung \mathcal{F}_t^W und den \mathbb{P} -Nullmengen \mathcal{N} erzeugt wird.

Das äquivalente Martingalmaß \mathbb{Q} im Black-Scholes-Modell bestimmen wir durch einen Maßwechsel - siehe Satz von Girsanov (Elliott and Kopp [2005]). Wir definieren die Brownsche Bewegung mit Drift V_t ,

$$V_t := V_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t .$$

Dann ist

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T$$

mit

$$Z_T := \exp \left(\frac{r - \mu}{\sigma} V_T - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 T \right)$$

ein Maß auf \mathcal{F}_T , bezüglich dem der diskontierte Preisprozess \tilde{S}^1 ein \mathbb{Q} -Martingal ist. Damit kann gezeigt werden:

Satz 20 (Arbitragefreiheit)

Das Black-Scholes-Modell ist arbitragefrei.

Satz 21 (Vollständigkeit)

Jede \mathbb{Q} -integrierbare Forderung $H_T \geq 0$ ist absicherbar.

Satz 22 (Fairer Preis)

Der faire Preis $\pi_t(H_T)$ einer \mathbb{Q} -integrierbaren Forderung $H_T = f(S_T^1)$ ist

$$\pi_t(H_T) = F(t, S_t^1, f) ,$$

wobei für $x > 0$ und $0 \leq t \leq T$

$$F(t, x, f) := e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(x \exp \left((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \zeta \right) \right) e^{-\zeta^2/2} d\zeta .$$

Satz 23 (Black-Scholes-Differentialgleichung)

Sei $f(S_T^1) \in \mathcal{C}^2$ eine endfällige Forderung und dessen Wertprozess V von der Form $V_t(X) = F(t, S_t^1)$. Dann genügt F der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + r x \frac{\partial F}{\partial x} = r F, \\ F(T, x) = f(x) .$$

Bemerkung

Der Randwert der partiellen Differentialgleichung in x hängt noch von f und dem Preisprozess ab und muss je nach Problemstellung erst festgelegt werden.

4.4.2 Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell

Im mehrdimensionalen Black-Scholes-Modell betrachten wir d -Aktien, die im Grunde durch eine d -dimensionale Brownsche Bewegung $B = (B^1, \dots, B^d)$ angetrieben werden. Analog zum eindimensionalen Fall definieren wir das festverzinsliche Bankkonto

$$S_t^0 = e^{rt}$$

als Numeraire, und weiters die Dynamik des Preisprozesses mit

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_t^j \right) \quad (0 \leq t \leq T) .$$

Damit haben wir die Parameter $\mu_i, \sigma_{ij} \in \mathbb{R}$ um Drift und Volatilität der Aktien zu steuern. Die Matrix $\sigma := (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ nehmen wir als invertierbar an. Dann ist die explizite Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$S_t^i = S_0^i \exp \left(\left(\mu_i dt - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2 \right) + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_t^j \right) \quad (0 \leq t \leq T) .$$

Satz 24 (Arbitragefreiheit, siehe Duffie [2010])

Das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell ist arbitragefrei.

Satz 25 (Vollständigkeit, siehe Duffie [2010])

Jede \mathbb{Q} -integrierbare Forderung $H_T \geq 0$ ist im Black-Scholes-Modell absicherbar.

4.5 Plain-Vanilla-Optionen

Finanzderivate sind Finanzprodukte deren Auszahlung von einem Basisgut, dem Underlying, abgeleitet ist. Besondere beliebte Derivate sind Optionen. Dabei handelt es sich um das Recht, nicht aber die Pflicht, ein bestimmtes Asset, zum Beispiel eine Aktie, zu einem späteren Zeitpunkt zu einem zuvor ausgemachten Preis (Strike) kaufen bzw. verkaufen zu können. Ein Grund eine solche Option besitzen zu wollen, wäre unter anderem sich gegen das Risiko von Preisänderungen des zugrundeliegenden Assets (Underlying) abzusichern. Denn durch das Halten einer Option, unabhängig wie stark der Preis des Underlyings steigt bzw. fällt, ist der Kauf zum definierten Preis stets möglich. Sollte sich das Asset aber beispielsweise zur definierten Zeit unter dem in der Option ausgemachten Kaufpreis befinden, so würde man die Option nicht einlösen und das Asset auf üblichem Wege kaufen. Ergo ist die Option wertlos. Dieses Recht, aber eben nicht die Pflicht, ein Asset später kaufen zu können muss also einen Preis haben und diesen gilt es zu finden. In der Praxis wird das Asset bei Einlösung/Ausübung der Option nicht übergeben, sondern der Wert des Assets ausbezahlt.

Wir unterscheiden in der Optionspreistheorie verschiedene Optionstypen. Wir klassifizieren häufig auf Märkten gehandelte Optionen als Plain-Vanilla-Optionen. Dazu gehören etwa europäische und amerikanische Optionen oder auch Swaps, Caps und Floors. Andere Optionen deren Auszahlung beispielsweise von mehreren Assets, mehreren Zeitpunkten oder Durchschnittswerten des Preisverlaufs, etc. abhängt deklarieren wir als exotische Optionen. Für Details siehe Hull [2009].

4.5.1 Europäische Optionen

Sei S_t der Preisprozess eines Assets. Unter einer europäischen Call-Option verstehen wir das Recht, nicht die Pflicht, das Asset S_t , $0 \leq t \leq T$ zum Zeitpunkt T zum Strike K zu kaufen.

Die Auszahlung dieser Option beträgt demnach $S_T - K$, falls die Option eingelöst wird, also wenn $S_T > K$ gilt. Sofern aber das Asset $S_T \leq K$ realisiert, wird man von seinem Recht nicht Gebrauch machen und die Option ist somit wertlos. Zusammenfassend liefert die europäische Call-Option also

die Auszahlung

$$(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} = \max(S_T - K, 0)$$

Mit der Notation $\max(x, 0) =: (x)^+$ für den Positiv-Anteil von $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir:

Definition 30 (europäische Call-Option)

Eine **europäische Call-Option** zum Strike K ist eine (endfällige) Forderung H_t mit

$$H_T = (S_T - K)^+ \quad \text{und} \quad H_t = 0 \quad (\text{für } t < T) .$$

Analog nennt man das Recht, aber nicht die Pflicht, ein Asset S_t zur Zeit T verkaufen zu dürfen:

Definition 31 (europäische Put-Option)

Eine **europäische Put-Option** zum Strike K ist eine (endfällige) Forderung H_t mit

$$H_T = (K - S_T)^+ \quad \text{und} \quad H_t = 0 \quad (\text{für } t < T) .$$

4.5.2 Amerikanische Optionen

Bei europäischen Optionen wird nur ein Endzeitpunkt T (Fälligkeit) zur Ausübung der Option vertraglich festgesetzt. Populärer am Markt sind aber amerikanische Optionen. Das sind Derivate, die zu jedem Zeitpunkt bis zur Fälligkeit T ausgeübt werden können, also mehr Flexibilität für den Besitzer des Derivates bieten.

Definition 32 (Amerikanische Put-Option)

Eine **amerikanische Put-Option** ist eine Option, bei der das Recht erworben wird, zu einem Zeitpunkt $0 < t \leq T$ ein Underlying S_t zum Strike K zu verkaufen.

Das entspricht der Wahl eines Zeitpunktes $0 < \tau \leq T$ (die Ausübungsstrategie), so dass die Auszahlung (Forderung)

$$H_\tau = (K - S_\tau)^+, \quad H_t = 0 \quad (t \neq \tau) .$$

stattfindet.

Analog definiert man eine **amerikanische Call-Option**.

Bemerkung

Es kann gezeigt werden, dass bei monoton steigendem Numeraire, der Preis einer amerikanischen Call-Option gleich dem einer europäischen Call-Option ist.

Die Auszahlung einer amerikanischen Put-Option für einen fixen Zeitpunkt t ist eindeutig durch

$$B_t = (K - S_t)^+$$

festgelegt.

Der faire Preis der Auszahlung ist also unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q}

$$\pi_0(B_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rt} B_t \right].$$

Um sich als Verkäufer gegen alle Ausübungsszenarien abzusichern und um als Käufer seinen Profit zu maximieren, werden sich Käufer und Verkäufer auf den fairen Preis

$$\pi_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}[0, T]} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r\tau} B_{\tau} \right]$$

einigen. Hier bezeichnet $\mathcal{S}[0, T]$ die Menge aller an die zugrundeliegende Filtration adaptierten Stoppzeiten die fast sicher in $[0, T]$ liegen.

4.5.3 Bermuda Optionen

Zur Approximation des stetigen Modells, ist eine Diskretisierung sinnvoll. Wir zerlegen daher den Zeithorizont $[0, T]$ in m Zeitpunkte

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$$

und beschränken uns auf diese diskrete Menge von Zeitpunkten an denen Handeln möglich ist.

In dieser Diskretisierung geht die amerikanische Option, die zu jedem Zeitpunkt die Ausübung erlaubt, über in eine sogenannte Bermuda Option, die später als Näherung für den Preis der amerikanischen Option herangezogen werden wird.

Definition 33 (Bermuda Option)

Eine Bermuda Call-Option (Put-Option) gibt dem Käufer das Recht, die Aktie zu einem der fixierten Zeitpunkte $\tau \in t_1, \dots, t_m$ zu kaufen (verkaufen).

Der faire Preis wird analog mit

$$\pi_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}\{t_1, \dots, t_m\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r\tau} B_{\tau} \right]$$

berechnet, wobei $\mathcal{S}\{t_1, \dots, t_m\}$ die Menge der Stoppzeiten mit Werten in $\{t_1, \dots, t_m\}$ beschreibt.

4.6 Exotische Optionen

Exotische Optionen sind Finanzderivate, die nicht zu Plain-Vanilla-Optionen gehören. Beispiele dafür sind Basket-Optionen und Multiple-Max-Optionen, deren Auszahlung ein Funktional von mehreren Underlyings darstellt. Ihre Bewertung ist ein hochdimensionales Problem.

4.6.1 Basket Optionen

Definition 34 (Europäischer Basket-Put)

Eine **europäische Basket-Put-Option** ist ein Derivat mit der endfälligen Auszahlung auf den Durchschnitt eines Aktienbündels (*Basket of Stocks*),

$$B = \left(K - \sum_{i=1}^n w_i S_T^i \right)^+,$$

wobei sich die Gewichte w_i auf 1 summieren.

Definition 35 (Amerikanischer Basket-Put)

Eine **amerikanische Basket-Put-Option** ist eine Option mit dem Recht, zu einem Zeitpunkt $0 < t \leq T$ einen Put auf den Durchschnitt eines Aktienbündels auszuüben, also die Auszahlung

$$B_t = \left(K - \sum_{i=1}^n w_i S_t^i \right)^+,$$

zu realisieren, wobei sich die Gewichte w_i auf 1 summieren.

4.6.2 Multiple-Max-Optionen

Ähnlich wie der Basket-Put auf den Durchschnitt, ist die Multiple-Max-Option ein Call auf das Maximum von mehreren Optionen:

Definition 36 (Multiple-Max-Call europäisch)

Eine **europäische Multiple-Max-Option** ist ein Derivat mit der endfälligen Auszahlung auf das Maximum eines Aktienbündels

$$B = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{S_T^i\} - K \right)^+ .$$

Definition 37 (Amerikanischer Multiple-Max-Call)

Eine **amerikanische Multiple-Max-Option** ist ein Derivat mit dem Recht, einmal zu einem Zeitpunkt $0 < t \leq T$ die Auszahlung

$$B_t = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{S_t^i\} - K \right)^+$$

zu realisieren.

Ganz analog lassen sich Basket-Call-Optionen und Multiple-Max-Put-Optionen definieren.

5 Monte-Carlo-Simulation

In sehr vielen mathematischen Problemstellungen ist die Berechnung des Erwartungswertes $\mathbb{E}[X]$ einer Zufallsvariable X maßgebend für die Lösung. Im finanzmathematischen Kontext sind wir beispielsweise oft mit der Berechnung des diskontierten Erwartungswerts der Auszahlung konfrontiert.

Als Verweis für die Literatur sei hier Korn et al. [2010] und Glasserman [2004] erwähnt.

5.1 Crude Monte-Carlo-Simulation

Die mathematische Basis für ein einfaches numerisches Verfahren zur Schätzung des Erwartungswerts liefert das Gesetz der großen Zahlen:

Satz 26 (Gesetz der großen Zahlen, siehe Klenke [2006])

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren, unabhängigen und identisch verteilten (i.i.d) Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert

$$\mu = \mathbb{E}[X_1] < \infty.$$

Dann gilt \mathbb{P} -fast-sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu.$$

Das heißt, das arithmetische Mittel konvergiert fast sicher gegen das theoretische Mittel - den Erwartungswert.

Aus dem Gesetz der großen Zahlen motiviert, erhalten wir nun die (crude) Monte-Carlo-Methode um den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X mit endlicher Erwartung zu approximieren.

Algorithmus 1

1. Realisiere X_1, \dots, X_N in unabhängigen Experimenten mit gleicher Verteilungsfunktion wie X .
2. Approximiere $\mathbb{E}[X]$ durch das arithmetische Mittel

$$\hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

5.2 Konvergenz

Aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt die Konvergenz des Verfahrens. Das zeigt sich dadurch, dass die Standardabweichung des Fehlers bei N Simulationen nur mit dem Faktor \sqrt{N} abnimmt. Bemerkenswert ist, dass diese Konvergenzordnung aber nicht von der Dimension abhängt, was das Verfahren brauchbar für Probleme höherer Dimension macht.

Satz 27 (Zentraler Grenzwertsatz)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d reellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Falls alle X_n endliche Varianz $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ haben, dann konvergieren die normalisierten und zentrierten Summen dieser Zufallsvariablen in Verteilung gegen die Standard-Normalverteilung, das heißt

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{für } N \rightarrow \infty .$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz kann man Aufschluss über den quadratischen Fehler bei großem N bei Monte-Carlo-Simulation erhalten. Der (crude) Monte-Carlo-Schätzer ist demnach $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/N)$ -verteilt. Mit der approximativen Normalverteilung erhalten wir:

Bemerkung (Konfidenz-Intervall)

Ein approximatives $(1 - \alpha)$ -**Konfidenz-Intervall** für den Erwartungswert μ ist

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - z_{1+\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right] .$$

Hier bezeichnet $z_{1-\alpha/2}$ das $1 - \alpha/2$ -Quantil der Standard-Normalverteilung.

Interessiert man sich für das 97,5%-Quantil der Standard-Normalverteilung, mit dem Wert 1.96 und rundet etwas auf, so erhält man

2 σ -Regel für ein approximatives **95%-Konfidenzintervall** für μ

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right] .$$

In der Regel muss aber auch σ^2 geschätzt werden, durch die Stichprobenva-

rianz

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \widehat{X})^2.$$

Damit ändert sich die Verteilung zu einer Student-t-Verteilung und die Quantile der Konfidenzintervalle $z_{1\pm\alpha/2}$ müssen durch die Quantile der Student-t-Verteilung $t_{1\pm\alpha/2}$ ersetzt werden.

5.3 Monte-Carlo-Simulation stochastischer Prozesse

5.3.1 Zeitdiskrete Prozesse mit unabhängigen Zuwächse

Die Simulation von diskreten stochastischen Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen ist einfach, da es aufgrund der Unabhängigkeit möglich ist, direkt die Zuwächse $X_k - X_{k-1}$ zu simulieren und durch Summierung der Zuwächse den Prozess an jedem Zeitpunkt auswerten zu können. Diese Annahme kann noch etwas relaxiert werden, wenn die bedingte Verteilung von $X_k - X_{k-1}$ gegeben X_{k-1} bekannt ist. Dann können wir im selben Verfahren die Zuwächse aus der bedingten Verteilung simulieren.

Sei $X = (X_t)_{t \in \{1, \dots, n\}}$ ein stochastischer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, der Zuwachs $X_k - X_{k-1}$ habe Verteilung F_k , dann erhalten wir einen Pfad von X durch:

Algorithmus 2

1. Setze $X_0(\omega) = 0$.
2. Simuliere die Zufallsvariablen $Y_k(\omega)$, $k = 1, \dots, n$ mit $Y_k \sim F_k$.
3. Setze $X_k(\omega) = X_{k-1}(\omega) + Y_k(\omega)$, $k = 1, \dots, n$.

5.3.2 Zeitstetige Prozesse mit unabhängigen Zuwächse

Im zeitstetigen Fall ist es natürlich nicht möglich, sämtliche Zeitpunkt eines Prozesses zu simulieren. Wir beschränken uns daher auf eine feste Anzahl an Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die das Intervall $[0, T]$ hinreichend

fein in einem Gitter diskretisiert. Bei stetigen Prozessen ist es auch akzeptabel zwischen den Gitterpunkten linear zu approximieren, wenn zusätzliche Zwischenwerte benötigt werden.

Algorithmus 3 (Simulation von stetigen stochastischen Prozessen mit stetigen Pfaden)

Sei $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Zerlegung von $[0, T]$ und die bedingte Verteilung von $Y_k := X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ gegeben $X_{t_{k-1}}$ sei F_k . Wir erhalten einen Pfad $X(\omega)$ wie folgt:

1. Setze $X_0(\omega) = 0$.
2. For $k = 1$ to n :
 - (a) Simuliere die Zufallsvariablen $Y_k(\omega)$ mit $Y_k \sim F_k$.
 - (b) Setze $X_{t_k}(\omega) = X_{t_{k-1}}(\omega) + Y_k(\omega)$
 - (c) Zwischen t_{k-1} und t_k erhalten wir X_t durch lineare Interpolation

$$X_t(\omega) = X_{t_{k-1}}(\omega) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} Y_k(\omega), \quad t \in (t_{k-1}, t_k) .$$

6 Optimales Stoppen

Betrachten wir eine Menge von Zeitpunkten zu denen man einmal einen bestimmten Gewinn ausbezahlt bekommt, abhängig von der Wahl des Zeitpunkts. Das Entscheidungsproblem, zu welchem Zeitpunkt man mit dem höchstem Gewinn aussteigt, nennt man optimales Stoppproblem. Es stellt sich heraus, dass das Stoppproblem mithilfe der Snell-Einhüllenden schrittweise berechnet werden kann. Die hierfür notwendigen Grundlagen entnehmen wir Lamberton [2007]. Ergänzend sei an diesem Punkt auch Bender et al. [2008] und Øksendal [2003] erwähnt.

6.1 Snell-Einhüllende im Diskreten

In diesem Kapitel betrachten wir wieder einen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathcal{F} -adaptierte Folge von Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert, also

$$\mathbb{E} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} |Z_n| \right] < \infty.$$

Mit dem optimalen Stoppproblem für Z bezeichnen wir mathematisch betrachtet die Aufgabe, den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z_\tau]$ über alle Stoppzeiten τ zu maximieren. Demnach suchen wir also eine optimale Stoppzeit τ^* ,

$$\tau^* := \operatorname{argmax}_{\tau} \mathbb{E}[Z_\tau],$$

die

$$V = \max_{\tau} \mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[Z_{\tau^*}]$$

optimiert.

In Anlehnung an Kasino-Spiele wird die Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch Gewinnfolge genannt, um die Maximierung des Gewinnes eines Spieles auszudrücken. In unserem finanzmathematischen Setting, wo wir uns um die Bewertung von amerikanischen Optionen bemühen, interpretieren wir Z_n als den Gewinn, der durch den Exercise (die Ausübung) der Option zum Zeitpunkt n generiert wird.

Eine sinnvolle Herangehensweise um das Problem zu lösen, ist dynamisches Programmieren, also ein schrittweise Maximierung durch Vergleich des Gewinns bei momentaner Ausübung und späterer Ausübung. Wir stellen uns die Frage, sollen wir zum aktuellen Zeitpunkt aufhören oder riskieren und weiter im Spiel bleiben, in der Hoffnung zu einem späteren Zeitpunkt mit höherem Gewinn auszustiegen. Mathematisch gesehen wollen wir eine Gleichung herleiten, die iterationsweise den Gewinn für jeden Zeitpunkt durch diesen Vergleich beschreibt. Dieses Konzept der Optimierung wird Richard Bellman zugeschrieben und allgemein als das Bellman-Prinzip oder dynamisches Programmieren bezeichnet. Die zugrunde liegende iterative Optimalitätsgleichung wird sinngemäß Bellman-Gleichung genannt.

Um die Notation in den diskreten Schritten der Optimierungsaufgabe zu erleichtern, führen wir die folgenden Symbole ein.

Sei \mathcal{S} die Menge aller Stoppzeiten bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiere

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{n,N} &:= \{\tau \in \mathcal{S} \mid \mathbb{P}(\tau \in [n, N]) = 1\}, \quad 0 \leq n \leq N, \\ \mathcal{S}_{n,\infty} &:= \{\tau \in \mathcal{S} \mid \mathbb{P}(\tau \in [n, \infty)) = 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Definition 38 (Snell-Einhüllende)

Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -adaptierte Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[\sup_{n \in \mathbb{N}} |Z_n|] < \infty$, dann ist die Snell-Einhüllende die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert als

$$U_n = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_{n,\infty}} \mathbb{E}[Z_\tau \mid \mathcal{F}_n].$$

Bemerkung

Sei $Z_\infty^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} |Z_n|$. Die Integrierbarkeit der Zufallsvariable Z_∞^* ist bereits durch die Voraussetzung geklärt. Für jedes $\tau \in \mathcal{S}_{0,\infty}$ gilt

$$|Z_\tau| \leq Z_\infty^*$$

und damit

$$|U_n| \leq \mathbb{E}[Z_\infty^* \mid \mathcal{F}_n], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in L^1 und darüberhinaus kann gezeigt werden, dass U gleichmäßig integrierbar ist.

Mit dem Konzept der Snell-Einhüllenden und deren Eigenschaften, gelingt es nun die Bellmann-Gleichung in unserem wahrscheinlichkeitstheoretischen

Kontext herzuleiten. Die Gleichung (1) ist das zentrale Ergebnis, mit dem wir später die Berechnung des optimalen Ausübungszeitpunkts einer Option durchführen können.

Satz 28 (Eigenschaften der Snell-Einhüllenden, siehe Lamberton [2009])
Die Snell-Einhüllende U von Z erfüllt folgende Eigenschaften:

1. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt,

$$\mathbb{E}[U_n] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{n,\infty}} E[Z_\tau] .$$

2. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt,

$$U_n = \max(Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n]) , \text{ fast sicher.} \quad (1)$$

3. U ist die kleinste Supermartingal-Majorante von Z . Das bedeutet, für jedes Supermartingal $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $S_n \geq Z_n$ gilt $U_n \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

6.2 Freies Randwertproblem

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem optimalen Stoppproblem und der partiellen Differentialgleichung. Für eine amerikanische Put-Option fassen wir ihre Preis-Funktion $P(x, t)$ als Funktion von x (Aktienpreis) und t (Zeitpunkt) auf. Damit betrachten wir nun das freie Randwertproblem aus Sicht des Differentialoperators L . Das freie Randwertproblem besteht in der Formulierung aus der partiellen Differentialgleichung und den Randbedingungen, die den Rand des Ausübungsgebiets (Stoppgebiets) der Option charakterisieren. Siehe Elliott and Kopp [2005], Øksendal [2003] oder auch Seydel [2006].

Definition 39

Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $t \in [0, T]$, definiert

$$P(x, t) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}[t, T]} \mathbb{E}[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)^+ | S_t = x]$$

die Wert-Funktion der amerikanischen Put-Option.

Lemma 1 (Eigenschaften von $P(x, t)$, siehe Elliott and Kopp [2005])

Die erste optimale Stoppzeit ab dem Zeitpunkt t ist

$$\rho_t = \inf \left\{ u \in [t, T] \mid P(S_u, u) = (K - S_u)^+ \right\} .$$

Für jedes $t \in [0, T]$ ist $P(x, t)$ konvex und monoton steigend in x . Für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ ist $P(x, t)$ monoton fallend in t . Weiters ist $P(x, t)$ stetig in $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$.

Definition 40 (Haltegebiet, Stoppgebiet)

Betrachten wir die beiden Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] \mid P(x, t) > (K - x)^+ \right\} , \\ \mathcal{S} &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] \mid P(x, t) = (K - x)^+ \right\} , \end{aligned}$$

dann heißt \mathcal{C} das Haltegebiet (*continuation region*) und \mathcal{S} das Stoppgebiet (*stopping region*).

Nun untersuchen wir das Haltegebiet \mathcal{C} in Abhängigkeit der Zeit $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t &= \left\{ x \mid (x, t) \in \mathcal{C} \right\} \\ &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] \mid P(x, t) > (K - x)^+ \right\} . \end{aligned}$$

Satz 29 (Kritischer Preis, siehe Elliott and Kopp [2005])

Für jedes $t > 0$ existiert ein $S_t^* > 0$, so dass

$$\mathcal{C}_t = (S_t^*, \infty) .$$

Die Linie S^* wird als kritischer Preis bezeichnet und ist monoton steigend in t , sowie nach oben beschränkt durch K .

Sei \mathcal{D} ein Gebiet (offen und zusammenhängend) in \mathbb{R}^d und sei

$$L := \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

ein Differentialoperator auf $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$.

Dann kann gezeigt werden (zum Beispiel in Moerbeke [1976]), dass

$$L(e^{-rt} P(x, t)) = 0$$

gilt und der Wertprozess $P(x, t)$ und der kritische Preis folgende Bedingungen einhält.

Satz 30 (Randwerte, siehe Elliott and Kopp [2005])

Folgende Eigenschaften sind erfüllt:

$$\lim_{x \downarrow S_t^*} P(x, t) = K - S_t^* \quad \text{für } t \in [0, T) , \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} P(x, t) = (K - x)^+ \quad \text{für } x \geq 0 , \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, t) = 0 \quad \text{für } t \in [0, T) \quad (4)$$

$$\text{und} \quad (5)$$

$$P(x, t) \geq (K - x)^+ \quad \text{für } (x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]. \quad (6)$$

Weiters ist die Ableitung $\frac{\partial P(x, t)}{\partial x}$ stetig entlang von S^* , das heißt

$$\lim_{x \downarrow S_t^*} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = -1 = \frac{\partial (K - S)^+}{\partial S} \Big|_{S=S_t^*} .$$

Um nun Lösungen des freien Randwertproblems charakterisieren zu können, benötigen wir noch eine technische Bedingung:

Definition 41

Eine Funktion $g(x, t) \in C^{3,1}(\mathbb{R} \times [0, T))$ hat Tychonov-Wachstum, wenn $g, g_t, g_x, g_{xt}, g_{xx}$ und g_{xxx} höchstens gleichmäßig mit $\exp(o(x^2))$ auf kompakten Mengen für $|x| \rightarrow \infty$ wachsen.

Wenn wir nun annehmen, dass S^* stetig differenzierbar ist in t , dann gilt folgendes Resultat.

Satz 31 (Charakterisierung, siehe Elliott and Kopp [2005])

Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^+ \times [0, T)$ ein Gebiet mit stetig differenzierbarem Rand c . Weiters sei $f \in C^{3,1}$, so dass $f(e^x, t)$ Tychonov-Wachstum besitzt und $L(e^{-rt} f(x, t)) = 0$ auf \mathcal{D} gelte. Wenn die Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(x, T) &= (K - x)^+ && \text{für } x \in \mathbb{R}^+ , \\ f(x, t) &> (K - x)^+ && \text{für } (x, t) \in \mathcal{D} , \\ f(x, t) &= (K - x)^+ && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T) \cap \mathcal{D}^c , \\ \lim_{x \downarrow c(t)} f_x(x, t) &= -1 && \text{für } t \in [0, T) , \end{aligned}$$

erfüllt sind, dann ist $f(x, t) = P(x, t)$ der Wertprozess des amerikanischen Puts und darüberhinaus $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ das Haltegebiet und $c(t) = S_t^*$ der kritische Preis.

Lemma 2

Auf der Menge $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$ gilt $L(e^{-rt}P(x, t)) \leq 0$ im distributionellen Sinn.

Als Erweiterung beschreiben Jaillet et al. [1990] eine Charakterisierung durch eine variationelle Ungleichung in einem geeigneten Funktionenraum.

Definition 42

Für $m \in \mathbb{Z}^+$ und $\lambda > 0$ sei $H^{m, \lambda}$ der Raum der messbaren Funktionen f auf \mathbb{R} , deren distributionellen Ableitungen bis Ordnung m in $L^2(\mathbb{R}, e^{-\lambda|x|}dx)$ liegen. Für ein solches f sei

$$\|f\| = \left(\sum_{i=0}^m \int_{\mathbb{R}} |\partial^i f(x)|^2 e^{-\lambda|x|} dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Weiters sei $L^2([0, T], H^{m, \lambda})$ der Raum aller messbaren Funktionen $g : [0, T] \rightarrow H^{m, \lambda}$, mit

$$\int_{[0, T]} \|g(t)\|^2 dt < \infty .$$

Satz 32 (Variationelle Charakterisierung, siehe Jaillet et al. [1990])

Sei f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$, die folgende Eigenschaften erfüllt,

$$\begin{aligned} f(e \cdot, \cdot) &\in L^2([0, T], H^{2, \lambda}) , \\ f_t(e \cdot, \cdot) &\in L^2([0, T], H^{0, \lambda}) , \\ f(x, T) &= (K - x)^+ \quad \text{für } x \geq 0 , \\ f(x, t) &\geq (K - x)^+ \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] , \\ L(e^{-rt} f(x, t)) &\leq 0 , \\ (L(e^{-rt} f(x, t)))(f(x, t) - (K - x)^+) &= 0 , \end{aligned}$$

dann ist f die eindeutige Lösung und $f(x, t) = P(x, t)$ der Wertprozess der amerikanischen Put-Option.

7 Numerische Verfahren

Nach der Theorie von Black und Scholes folgt der Preis einer Option in ihrem Modell einer partiellen Differentialgleichung (23). Ziel dieses Kapitels ist es, ein numerisches Verfahren zur Lösung dieser Differentialgleichung mit finiten Differenzen zu beschreiben, um so den gesuchten Optionspreis zu berechnen. Prinzipiell sind numerische Verfahren zur approximativen Lösung der partiellen Differentialgleichung nämlich besonders effizient bei niedriger Dimension des Problems (≤ 5 Aktien). Für die Literatur dieses Kapitels siehe Seydel [2006] und Hull [2009].

7.1 Finite Differenzen

Aus der Black-Scholes Modellierung des Markts, bestehend aus Bond und Aktie, können wir für die Preise von europäischen und amerikanischen Optionen direkt die partielle Differentialgleichungen (PDE) ableiten, denen die Preise folgen müssen. Mithilfe der Numerik von partiellen Differentialgleichungen, genauer gesagt mit finiten Differenzen (aber auch mit finiten Elementen, siehe Achdou and Pironneau [2005]), lässt sich dann eine gute Näherungslösung für den Optionspreis bestimmen.

Wir erinnern uns an dieser Stelle nochmals an die partielle Differentialgleichung einer Option im Black-Scholes-Modell, für eine Forderung $f(S_T^1) \in \mathcal{C}^2$:

$$f_t + rSf_S + \frac{\sigma^2}{2}S^2f_{SS} - rf = 0$$

Zur Diskretisierung wählen wir Gitterpunkte in $[0, T] \times \mathbb{R}_+$,

- die Länge der Preisschritte ΔS ,
- den Maximalpreis S_{max} der Aktie, hinreichend groß, so dass die Option in der Nähe von S_{max} Null wird.
- $N_S \in \mathbb{N}$, so dass $N_S \Delta S = S_{max}$,
- die Länge der Zeitschritte Δt ,
- $N_T \in \mathbb{N}$, so dass $N_T \Delta t = T$.

Wir führen zur einfacheren Lesbarkeit die Notation für die Werte $f(t, S)$ ausgewertet an den Gitterpunkten

$$f(i, j) := f(i\Delta t, j\Delta S) \quad 0 \leq i \leq N_t, 0 \leq j \leq N_S$$

ein.

7.1.1 Implizites Verfahren

Die Idee der impliziten Finiten-Differenzen-Methode ist nun, die Differentialgleichung durch Approximation mit Differenzenquotienten, in ein System von Differenzgleichungen überzuführen. Konkret werden wir partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten der Art

$$\begin{aligned} f_t &\approx \frac{f(i+1, j) - f(i, j)}{\Delta t}, \\ f_S &\approx \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2\Delta S}, \\ f_{SS} &\approx \frac{\frac{f(i, j+1) - f(i, j)}{\Delta S} - \frac{f(i, j) - f(i, j-1)}{\Delta S}}{\Delta S} = \frac{f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)}{(\Delta S)^2}, \end{aligned}$$

genähert um die Black-Scholes-PDE zu transformieren.

Bemerkung

Die Wahl der Ableitungen von f nach S ist hier vom Zeitpunkt i aus bestimmt. Diese Bestimmung hat Einfluss auf Stabilität und Numerik des Verfahrens und gibt dem Verfahren den Titel *implizit*, da in jedem Schritt ein implizites Gleichungssystem gelöst werden muss.

Im expliziten Verfahren (siehe später) wird durch die Wahl des Zeitpunkt $i+1$ bei der Verwendung des Differenzenquotienten das entstehende Gleichungssystem explizit lösbar sein.

Die Verknüpfung der Werte $f(i, j+1)$, $f(i, j)$ und $f(i, j-1)$ und $f(i+1, j)$ durch diese Quotienten ist in der Abbildung 7.1.1 veranschaulicht.

An den Endpunkten $f(N_T, \cdot)$ ist die Auszahlung der Option bekannt, das bedeutet

- für einen Call: $f(N_T, j) = (j\Delta S - K)^+$,

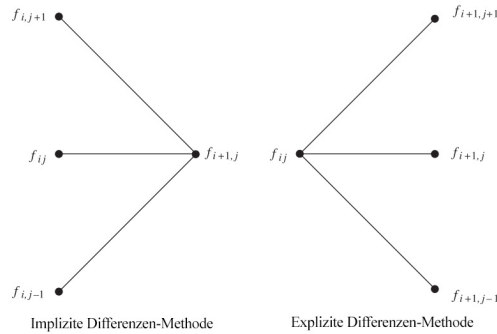


Abbildung 1: Zusammenhang der Knoten bei finiten Differenzenquotienten für implizites und explizites Verfahren

- für einen Put: $f(N_T, j) = (K - j\Delta S)^+$,

je nach Preisschritt $0 \leq j \leq N_S$.

Durch Anwendung dieser Näherungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(i+1, j) - f(i, j)}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2\Delta S} \\
 & + \frac{\sigma^2}{2} j^2 (\Delta S)^2 \frac{f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)}{(\Delta S)^2} - rf(i, j) = 0
 \end{aligned}$$

und lösen wir diese Gleichung nach $f(i+1, \cdot)$ auf, erhalten wir

$$f(i+1, j) = \alpha_j f(i, j-1) + \beta_j f(i, j) + \gamma_j f(i, j+1)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= \frac{1}{2} \Delta t (rj - \sigma^2 j^2) \\
 \beta_j &= 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t \\
 \gamma_j &= -\frac{1}{2} \Delta t (rj + \sigma^2 j^2) .
 \end{aligned}$$

In Matrix-Notation nimmt das implizite Finite-Differenzen-Gleichungssystem

die Form ($Ay = b$)

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N_S-2} & \beta_{N_S-2} & \gamma_{N_S-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{N_S-1} & \beta_{N_S-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(i, 1) \\ \vdots \\ f(i, N_S - 1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{pmatrix} f(i+1, 1) - \alpha_1 f(i, 0) \\ f(i+1, 2) \\ \vdots \\ f(i+1, N_S - 2) \\ f(i+1, N_S - 1) - \gamma_{N_S-1} f(i, N_S) \end{pmatrix} \quad (8)$$

an.

Um dieses lineare Gleichungssystem lösen zu können, benötigen wir noch die Anfangswerte (Randbedingungen der Differentialgleichung), gegeben durch die Größen

$$f(i, 0) \quad \text{und} \quad f(i, N_S) .$$

Für eine Put-Option (europäisch oder amerikanisch) mit Strike K setzen wir als Randbedingung

$$f(N_T, j) = (K - j\Delta S)^+ ,$$

sowie

$$f(i, 0) = K ,$$

$$f(i, N_S) = 0 .$$

Für die Randbedingung der Put-Option vergleiche (6). Im Allgemeinen ist es aufwändiger die Randbedingung zu bestimmen, als die PDE herzuleiten.

Zusammenfassend können wir mit folgenden PDE-Algorithmen nun europäische und amerikanische Optionen im Black-Scholes-Modell bewerten:

Algorithmus 4 (Implicit PDE-Solver für europäische Put-Option)

1. Definiere $f(i, j)$ gemäß der Randbedingungen

$$f(N_T, j) = (K - j\Delta S)^+ ,$$

$$f(i, 0) = K ,$$

$$f(i, N_S) = 0 .$$

2. For $i = N_T - 1$ to 0

(a) Löse das Gleichungssystem aus (7)

$$Ay = b$$

nach y .

(b) Setze $f(i, \cdot) = y$.

3. Der Preis der Option ist

$$\pi_0 = f(0, S_0) .$$

Beachtet man noch, dass für amerikanische Optionen der Preis stets als das Supremum der Auszahlung über alle Ausübungsstrategien definiert ist, wir also nur von allen Ausübungsstrategien jene mit dem größten Wert verwenden müssen, erweitern wir den Algorithmus für europäische Put-Optionen wie folgt:

Algorithmus 5 (Implicit PDE-Solver für Amerikanische Put-Option)

1. Definiere $f(i, j)$ gemäß der Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(N_T, j) &= (K - j\Delta S)^+ \\ f(i, 0) &= K , \\ f(i, S_N) &= 0 . \end{aligned}$$

2. For $i = N_T - 1$ to 0

(a) Löse das Gleichungssystem aus (7)

$$Ay = b$$

nach y .

(b) Verwende die Auszahlung mit dem größtmöglichen Payoff:

Setze für $0 \leq j \leq N_S$,

$$f(i, j) = \max \{y(j), (K - j\Delta S)^+\} \quad (\text{Bellmann-Gleichung})$$

3. Der Preis der Option ist

$$\pi_0 = f(0, S_0) .$$

Bemerkung

Interessant ist die Interpretation der Variable y nach der das Gleichungssystem (7), $Ay = b$, gelöst wird. Diese Gleichung bestimmt y als den diskontierten Erwartungswert bei Halten der Option.

Bemerkung (Konvergenz)

Eine Fehleranalyse des impliziten Verfahrens zeigt durch Analyse der Eigenvektoren der Matrix A , dass das implizite Verfahren uneingeschränkt stabil ist und ΔS und Δt voneinander unabhängig sind. Für Details siehe (Seydel [2013]).

7.1.2 Explizites Verfahren

Ähnlich zum impliziten Verfahren, führen wir nun im expliziten Verfahren eine leicht geänderte Approximation der PDE durch. Das hat den Zweck, später ein einfacheres, direkt lösbares Gleichungssystem zu erhalten, bei dem nicht in jedem Iterationsschritt die Gleichung $Ay = b$ nach y (z.B. mit dem Gauß-Algorithmus) gelöst werden muss.

Wir verwenden für die partiellen Ableitungen nun Differenzenquotienten der Art Vorwärts-Differenzen ($f(i+1, \cdot)$ statt $f(i, \cdot)$):

$$\begin{aligned} f_t &\approx \frac{f(i+1, j) - f(i, j)}{\Delta t} , \\ f_S &\approx \frac{f(\mathbf{i}+1, j+1) - f(\mathbf{i}+1, j-1)}{2\Delta S} , \\ f_{SS} &\approx \frac{f(\mathbf{i}+1, j+1) - 2f(\mathbf{i}+1, j) + f(\mathbf{i}+1, j-1)}{(\Delta S)^2} . \end{aligned}$$

Durch die Anwendung dieser Näherungen erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{f(i+1, j) - f(i, j)}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f(\mathbf{i}+1, j+1) - f(\mathbf{i}+1, j-1)}{2\Delta S} \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} j^2 (\Delta S)^2 \frac{f(\mathbf{i}+1, j+1) - 2f(\mathbf{i}+1, j) + f(\mathbf{i}+1, j-1)}{(\Delta S)^2} - rf(i, j) = 0 \end{aligned}$$

und lösen wir diese Gleichung nach $f(i, \cdot)$ auf, erhalten wir

$$f(i, j) = a_j f(i+1, j-1) + b_j f(i+1, j) + c_j f(i+1, j+1) , \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right) , \\ b_j &= \frac{1}{1+r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t) , \\ c_j &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right) . \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Variablen $a_j, b_j, c_j \in (0, 1)$ können auch als Übergangswahrscheinlichkeiten angesehen werden. Mit der Interpretation von Knoten wie in Abbildung 7.1.1 entsteht ein Trinomialbaum, also ein Modell wo im Gegensatz zum Binomialmodell jeder Knoten drei Nachfolger besitzt.

Um (9) in Matrix-Notation für den Algorithmus zu überführen, definieren wir noch M , eine Matrix, die mit den Übergangswahrscheinlichkeiten auf Haupt- und Nebendiagonale einer Übergangsmatrix der eingebetteten Markovkette entspricht,

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N_S-2} & b_{N_S-2} & c_{N_S-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N_S-1} & b_{N_S-1} \end{pmatrix} . \quad (10)$$

Mit dieser Matrix M folgt nun:

Algorithmus 6 (Explicit PDE-Solver für europäischen Put)

1. Definiere $f(i, j)$ gemäß der Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(N_T, j) &= (K - j\Delta S)^+ \\ f(i, 0) &= K , \\ f(i, N_S) &= 0 . \end{aligned}$$

2. For $i = N_T - 1$ to 0:

(a) Berechne das Gleichungssystem

$$y = M \begin{pmatrix} f(i+1, 1) \\ \vdots \\ f(i+1, N_S - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 f(i+1, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{N_S-1} f(i+1, N_S) \end{pmatrix} .$$

(b) Setze $f(i, \cdot) = y$.

3. Der Preis der Option ist

$$\pi_0 = f(0, S_0) .$$

Ebenso wie beim impliziten PDE-Verfahren, verändern wir den Algorithmus für einen amerikanischen Put

Algorithmus 7 (Explicit PDE-Solver für amerikanischen Put)

1. Definiere $f(i, j)$ gemäß der Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(N_T, j) &= (K - j\Delta S)^+ \\ f(i, 0) &= K , \\ f(i, S_N) &= 0 . \end{aligned}$$

2. For $i = N_T - 1$ to 0:

(a) Berechne das Gleichungssystem

$$y = M \begin{pmatrix} f(i+1, 1) \\ \vdots \\ f(i+1, N_S - 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 f(i+1, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{N_S-1} f(i+1, N_S) \end{pmatrix} .$$

(b) Verwende die Auszahlung mit dem größtmöglichen Payoff:

Setze für $0 \leq j \leq N_S$,

$$f(i, j) = \max \{ y(j), (K - j\Delta S)^+ \} .$$

3. Der Preis der Option ist

$$\pi_0 = f(0, S_0) .$$

Bemerkung (Konvergenz)

Eine Fehleranalyse des expliziten Verfahrens zeigt, dass die Parameter ΔS und Δt nicht voneinander unabhängig sind, sondern deren Wahl bewusst vorgenommen werden muss, um Konvergenz sicherzustellen. Genauer gesagt, muss $0 < \Delta T \leq \frac{1}{2}\Delta S^2$ erfüllt sein. Für Details siehe (Seydel [2013]). Durch die einfachere Berechnung des Gleichungssystems liefert das explizite Verfahren aber zumindest eine etwas schnellere Laufzeit als das implizite Verfahren.

8 Longstaff-Schwartz-Algorithmus

Nach der Idee von Longstaff and Schwartz [2001] kann das Problem, die optimalen Ausübungszeitpunkte zu finden, mit einer Kombination von Monte-Carlo-Simulation und Regression als Approximation gelöst werden. Der von ihnen beschriebene Algorithmus wird in der Praxis gerne verwendet, wenn Bermuda-Optionen auf mehr als ein Underlying betrachtet werden. Während eindimensionale Probleme meist effizienter mit Binomial-Bäumen oder durch numerische Approximation der Differentialgleichung berechnet werden, liefert das Monte-Carlo-Verfahren in höheren Dimensionen bessere Ergebnisse.

Der wesentliche Punkt im Algorithmus ist die Schätzung des bedingten Erwartungswertes der Snell-Einhüllenden durch Regression aus den Aktienwerten des nächsten Zeitpunktes.

Mittels alleiniger Monte-Carlo-Simulation kann der Wert einer amerikanischen oder Bermuda Option in einem komplexen Modell im Allgemeinen nicht berechnet werden, da zu jedem Zeitpunkt bekannt sein müsste, ob Ausüben optimal ist oder nicht. Also müsste a-priori bereits die optimale Stoppzeit bekannt sein. Dies führe dann zur Bewertung:

Bermuda Option Monte-Carlo

1. Bestimme die optimale Ausübungsstrategie τ^* .
2. Berechne den Wert $\pi_0 = \mathbb{E}\left[e^{-r\tau^*} B_{\tau^*}\right]$ mit Monte-Carlo-Simulation.

8.1 Rückwärts Induktion

Zugrunde liege ein Marktmodell mit endlichem Zeithorizont $[0, T]$, in dem wir eine Bermuda Option bepreisen möchten. Die Option habe Ausübungszeitpunkte

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m = T ,$$

und zahle bei Ausübung den Betrag B_{t_i} aus.

Wir führen folgende Notation ein:

- $\mathcal{S}(i)$ sei die Menge aller Stoppzeiten τ mit Werten in $\{t_i, \dots, t_m\}$,
- $V(i) = e^{-rt_i} B_{t_i}$, der Preis bei sofortiger Auszahlung zur Zeit t_i .

Da wir a priori noch kein Wissen über die optimale Strategie besitzen, beginnen wir mit Rückwärts Induktion zur Zeit T . Unter der Annahme, dass noch keine Ausübung erfolgte, hat die Option den Wert B_T . Also liefert zur Zeit T , wobei ja gerade $\mathcal{S}(m) = \{T\}$ gilt, $t_m = T$ die optimale Stoppzeit.

Zum Zeitpunkt t_{m-1} : Wir müssen nun entscheiden ob wir die Option jetzt ausüben sollten oder erst zur Zeit t_m . Diese Entscheidung stützt sich auf den Werten der aktuellen Auszahlung und jenem Wert, den die Option liefert, wenn wir die Option behalten und erst später ausüben. Wir vergleichen somit den aktuellen Payoff-Wert, also der Auszahlung V_{m-1} und den auf heute diskontierten Payoff B_T . Der Wert der diskontierten Auszahlung B_T , unter dem Wissen, dass die Aktie gerade $S_{t_{m-1}}$ Wert ist, liefert also

$$\mathbb{E} \left[e^{-r(T-t_{m-1})} B_T \middle| S_{t_{m-1}} \right] .$$

Dieser Vergleich ist mit der oben eingeführten Notation äquivalent zur Überprüfung von $V(m-1)$ und $\mathbb{E}[V(m)|S_{t_{m-1}}]$. Basierend auf diesem Vergleich setzen wir auch die optimale Auszahlungszeit, $\tau^*(m-1) = t_{m-1}$ oder $\tau^*(m-1) = t_m$, je nachdem, wo das Maximum angenommen wird.

Führen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir die Snell-Einhüllende für das Stoppproblem der Bermuda Option, beziehungsweise das dynamische Programmierprinzip dahinter. Wir finden demnach die Lösung des Stoppproblems

$$\pi_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}\{t_0, \dots, t_m\}} = E \left[e^{-r\tau} B_\tau \right] .$$

Dynamic Programming Bermuda Option, optimale Stoppzeiten und fairer Preis

1. Sei

$$\begin{aligned} i &= m , \\ \tau(i) &= m . \end{aligned}$$

2. Für jedes $t_i, i = m-1, \dots, 0$ ist die optimale (bedingte) Ausübungsstrategie $\tau(i) \in \mathcal{S}(i)$ gegeben als

$$\tau(i) = \begin{cases} i, & \text{wenn } V(i) \geq \mathbb{E}\left[V(\tau(i+1)) \mid S_{t_i}\right], \\ \tau(i+1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Zur Zeit $t = 0$ ist $\tau(0)$ die optimale Ausübungsstrategie und somit der faire Preis der Bermuda Option $\mathbb{E}\left[V(\tau(0))\right]$.

Aber: Im Allgemeinen sind die benötigten bedingten Erwartungen hier nicht bekannt. Wir müssen also nach einer geeigneten Methode suchen, um $\mathbb{E}\left[V(\tau(i+1)) \mid S_{t_i}\right]$ zu approximieren.

8.2 Regression

Unter der Voraussetzung, dass der Aktienpreis S_t ein Markov-Prozess ist, nehmen wir an, dass die Auszahlung B_t von der Form

$$B_t = f(t, S_t)$$

für eine passende Funktion f (kurze Schreibweise $f(S_t) := f(t, S_t)$).

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} V(i) &= g(i, S_{t_i}) = e^{-rt_i} f(S_{t_i}), \\ \mathbb{E}\left[V(j) \mid S_{t_i}\right] &= u(S_{t_i}) \quad \text{für } i < j, \end{aligned}$$

mit einer messbaren Funktion u .

Um nun die bedingte Erwartung zu nähern, verwenden wir Regression, indem wir zusätzlich annehmen, dass die Funktion u aus einer parametrischen Familie von Funktionen U stammt. Und wir bestimmen jenes $u \in U$, dass die bedingte Erwartung im Least-Squares-Sinn minimiert, also

$$u = \arg \min_{v \in U} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[g(i+1, S_{t_{i+1}}) \mid S_{t_i} \right] - v(S_{t_i}) \right]^2.$$

Mögliche Kandidaten für die Wahl der Familie U sind unter anderem

- $U := \left\{ u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid u(x) = \sum_{i=1}^k a_i x^i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$,
- $U := \left\{ u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid u(x) = \sum_{i=1}^k a_i H_i(x), a_i \in \mathbb{R} \right\}$, mit Funktionen $H_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Longstaff und Schwartz verwendeten beispielsweise die gewichteten Laguerre Polynome als Basis für die Regression:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \exp(-x/2) \\ L_1(x) &= \exp(-x/2)(1-x) \\ L_2(x) &= \exp(-x/2)(1-2x+x^2/2) \\ L_n(x) &= \exp(-x/2) \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \end{aligned}$$

Für eine detaillierte Beschreibung möglicher Basis-Polynome sei auf Abramowitz and Stegun [1970] verwiesen.

Durch die obige Wahl der Parametrisierung von U (Linearität in den Koeffizienten a_i) reduziert sich das Least-Squares-Problem auf ein lineares Regressionsproblem. Dieses lösen wir, ausgehend von N unabhängigen Realisierungen des simulierten Aktienpreises $S_{t_j}^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, m$ wie folgt:

Das Regressionsproblem im i -ten Schritt

$$\min_{a \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[g(i+1, S_{t_{i+1}}^{(j)}) - \sum_{l=1}^k a_l H_l(S_{t_i}^{(j)}) \right]^2$$

besitzt die Lösung $a^*(i) = (a_1^*(i), \dots, a_k^*(i))'$.

Um den Lösungsvektor zu bestimmen, berechnen wir die Pseudoinverse der Design Matrix

$$\begin{aligned} H(i, j) &= \left(H_1(S_{t_i}^{(j)}), \dots, H_k(S_{t_i}^{(j)}) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times k}, \\ H(i) &= \left(H(i, 1)', \dots, H(i, N)' \right)' \in \mathbb{R}^{N \times k}, \end{aligned}$$

$$H^+(i) = \left(H(i)'H(i) \right)^{-1} H(i)' \in \mathbb{R}^{k \times N}$$

und erhalten

$$a^*(i) = H^+(i)g(i+1) \in \mathbb{R}^k,$$

wobei $g(i+1) \in \mathbb{R}^N$ der Vektor der Daten $g(i+1, S_{t_{i+1}}^{(j)})$ ist. Die Lösung des Regressionsproblems liefert dann einen Schätzer $\widehat{C}(S; i)$ für den Wert der Option bei Nichtausübung zur Zeit t_i ,

$$\widehat{C}(S; i) = \sum_{l=1}^k a_l^*(i) H_l(S).$$

Diese Ergebnisse fassen wir nun zusammen:

Algorithmus 8 (Longstaff-Schwartz-Algorithmus für Bewertung einer Bermuda Option)

1. Wähle Basisfunktionen H_1, \dots, H_k .
2. Generiere N unabhängige Aktienpfade

$$\left(S_{t_1}^{(j)}, \dots, S_{t_m}^{(j)} \right), \quad j = 1, \dots, N.$$

3. Setze Endwerte ($t_m = T$)

$$\widehat{V}(m, j) := e^{-rT} f(S_T^{(j)}), \quad j = 1, \dots, N.$$

4. Für $i = m-1, \dots, 1$: (Rückwärts Induktion)

- Löse das Regressionsproblem mit den optimalen Gewichten $a^*(i)$ zur Zeit t_i .
- Berechne die Schätzer der Halte-Werte (bedingte Erwartungswerte)

$$\widehat{C}(S_{t_i}^{(j)}; i) = \sum_{l=1}^k a_l^*(i) H_l(S_{t_i}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, N.$$

- Für $j = 1, \dots, N$:

$$\widehat{V}(i, j) = \begin{cases} e^{-rt_i} f(S_{t_i}^{(j)}), & \text{wenn } e^{-rt_i} f(S_{t_i}^{(j)}) \geq \widehat{C}(S_{t_i}^{(j)}; i), \\ \widehat{V}(i+1, j), & \text{sonst.} \end{cases}$$

5. Setze

$$\widehat{V}(0) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \widehat{V}(1, j).$$

8.3 Konvergenz

Im Algorithmus zur Berechnung der Bermuda Option gehen zwei Arten von Approximationen ein, die Quelle für einen Unterschied zwischen dem echten $V(0)$ und dem approximierenden $\widehat{V}(0)$ sein können:

- Der Diskretisierungsfehler bei der Schätzung der Regression durch die Projektion auf eine finite Menge von Basisfunktionen H_1, \dots, H_k .
- Der Monte-Carlo-Fehler bei der Schätzung des Erwartungswertes durch das arithmetische Mittel.

Der Konvergenzbeweis ist sehr aufwendig, wird aber sehr genau und rigoros in Clément et al. [2002] geführt. Die Autoren führen die Notation

$$V^k(0) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}(H_1, \dots, H_k)} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} B_\tau \right]$$

ein, wobei $\mathcal{S}(H_1, \dots, H_k)$ nur Ausübungsstrategien basierend auf dem zugehörigen Regressionsproblem mit k Basisfunktionen sind. Weiters sei

$$V^{k,N}(0) = \widehat{V}(0),$$

der Longstaff-Schwartz-Preis $\widehat{V}(0)$, der bei Anwendung von N simulierten Aktienpreisen mit Basisfunktionen H_1, \dots, H_k berechnet wird.

Dann wird bewiesen, dass unter technischen Annahmen

- mit steigender Zahl an Basisfunktionen k der genäherte Preis

$$V^k(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} V(0)$$

zum wahren Optionspreis konvergiert.

- Mit steigender Zahl N von simulierten Aktienpreisen konvergiert der Longstaff-Schwartz-Preis $V^{k,N}(0)$ fast sicher gegen den approximierenden Preis $V^k(0)$, das heißt

$$V^{k,N}(0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} V^k(0) \text{ f.s.}$$

Wir erhalten insbesondere, dass die Longstaff-Schwartz-Preise mit $O(1/\sqrt{N})$ nach $V^k(0)$ konvergieren, jedoch haben wir kein ähnliches Resultat für die Anzahl an Basisfunktionen.

In Bally et al. (2005) wird gezeigt, wie sich die Bermuda Option asymptotisch mit der amerikanischen verhält. Das Resultat: $O(1/\sqrt{m})$.

8.4 Varianten und Erweiterungen des Algorithmus

Vorschläge zur Verbesserung des hier dargestellten Algorithmus, die in der Literatur genannt werden, siehe Glasserman [2004]:

- Options-Preis anhand der selben Daten ist eventuell biased und liefert möglicherweise einen zu hohen Wert. Simuliere M neue Aktienkurse um den Preis mit den zuvor erhaltenen Schätzern noch einmal zu berechnen.
- Vergleich mit europäischer Option, falls deren Wert verfügbar ist, wenn Ausübung möglich ist. Ausübung also nur, falls der Ausübungspreis höher als der simulierte Nichtausübungs- und europ. Optionswert ist.
- Verwendung von nicht-linearer Regression.
- Obere Schranke mittels dualem Optimierungsproblem. LS-Algorithmus liefert untere Schranke, zusammen kann also der Fehler gesteuert werden. Dies führt zum dualen Algorithmus von Andersen and Broadie (2004).

9 Andersen-Broadie-Algorithmus

Der Longstaff-Schwartz-Algorithmus liefert lediglich einen approximativen Preis durch die Berechnung einer Stoppzeit, die aber im Allgemeinen nicht optimal ist, Da der wahre Preis einer amerikanischen Option aber als das Supremum über alle Stoppzeiten

$$\pi_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{S}[0, T]} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} B_\tau \right]$$

bestimmt ist, erhalten wir nur eine untere Schranke.

Die Frage bleibt offen, wie akkurat das Ergebnis, durch die Fehler der Diskretisierung und Approximation beeinflusst, nun tatsächlich ist. Deshalb ist eine obere Schranke notwendig, um ein besseres Verständnis über die Qualität des berechneten Preises bilden zu können. Es gibt mehrere Varianten von dualen Verfahren um obere Schranken für Optionspreise zu gewinnen. Die Idee geht auf Rogers [2002], sowie Haugh and Kogan [2004] zurück. Ihre Arbeiten waren maßgeblich durch die Betrachtung des dualen Optimierungsproblems und dessen Numerik erfolgreich.

9.1 Duale Formulierung

Betrachten wir nun wieder eine Bermuda Option und die Schätzer \widehat{V} wie im vorherigen Kapitel beschrieben. Der Beginn bei der Herleitung des dualen Problems, ist die Tatsache, dass das Nichtausüben der Option zum Zeitpunkt t_i möglicherweise nicht optimal ist, also

$$\widehat{V}(i) \geq \mathbb{E} \left[\widehat{V}(i+1) | \mathcal{S}_{t_i} \right]$$

gelten muss. Das sieht man ebenso in der Snell-Einhüllenden (der Bellman-Gleichung) der Argumente, wenn das Maximum gebildet wird. Daraus schließen wir also, dass der diskontierte Wert-Prozess \widehat{V} ein Super-Martingal ist.

Nehmen wir nun ein beliebiges, zeitdiskretes Martingal $M = (M_i)_{i \in \{0, 1, \dots, m\}}$ zur Hilfe, das an den selben Zeitpunkten t_i wie die Option definiert ist und mit $M_0 = 0$ startet. Mithilfe des Optional-Stopping-Theorems,

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] = 0 ,$$

erhalten wir für den diskontierten Payoff-Prozess $g(i, S_{t_i})$ nun

$$\mathbb{E}[g(\tau, S_{t_\tau})] = \mathbb{E}[g(\tau, S_{t_\tau}) - M_\tau] \quad (11)$$

und da $\tau \in \{1, \dots, m\}$ realisiert, gilt

$$\mathbb{E}[g(\tau, S_{t_\tau}) - M_\tau] \leq \mathbb{E} \left[\max_{k=1, \dots, m} \{g(k, S_{t_k}) - M_k\} \right]. \quad (12)$$

Durch die beliebige Wahl von M bleibt diese Ungleichung auch richtig, wenn wir das Infimum über alle möglichen Martingale auf der rechten Seite von (12) nehmen. Ebenso gehen wir auf der linken Seite von (11) zum Supremum über alle Werte von τ über und bekommen schließlich aus

$$\mathbb{E}[g(\tau, S_{t_\tau})] \leq \mathbb{E} \left[\max_{k=1, \dots, m} \{g(k, S_{t_k}) - M_k\} \right],$$

das **duale Problem**

$$V(0) = \sup_{\tau} \mathbb{E}[g(\tau, S_{t_\tau})] \leq \inf_M \mathbb{E} \left[\max_{k=1, \dots, m} \{g(k, S_{t_k}) - M_k\} \right]. \quad (13)$$

Der nächste Schritt ist nun, aus allen Martingalen ein bestimmtes Martingal M zu wählen, das für die obere Schranke gut geeignet ist, in der Hoffnung, dass die Schranke

$$\mathbb{E} \left[\max_{k=1, \dots, m} \{g(k, S_{t_k}) - M_k\} \right],$$

durch die spezielle Wahl von M möglichst klein ist.

Inspiriert durch die Doob-Meyer-Zerlegung des approximierten Wert-Prozesses \widehat{V} definieren wir

$$\widehat{M}_k := \sum_{i=1}^k \Delta(i) := \sum_{i=1}^k \left(\widehat{V}(i) - \mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) | S_{t_{i-1}} \right] \right). \quad (14)$$

Bemerkung

Die obige Definition (14) kann wie folgt interpretiert werden: Die Summe über die Symbole $\Delta(i)$ beschreibt den Abstand der jeweiligen, zeitpunktweisen Schätzer $\widehat{V}(i)$ von $\mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) | S_{t_{i-1}} \right]$.

Wäre die Approximation exakt, also die Ausübungsstrategie aus dem Longstaff-Schwartz-Algorithmus optimal, dann wäre $\Delta(i) = 0$ und a fortiori $\widehat{M} \equiv 0$. \widehat{M} misst also die Qualität der unteren LS-Schranke durch Summation der Unteren-Schranken-Abweichung in jedem Zeitschritt.

Bemerkung

Für jedes $i = 1, \dots, k$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\Delta(i) \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) - \mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right] - \mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right] = 0\end{aligned}$$

Und als Summe dieser, der Modell-Annahme nach unabhängigen $\Delta(i)$, ist \widehat{M} nach Bemerkung 3.3 ein Martingal.

Der Nachteil dieser oberen Schranke \widehat{M} ist, dass wiederum ein bedingter Erwartungswert berechnet werden muss. Dies führt uns auf die Anwendung einer verschachtelten Simulation zurück. Es bleibt also noch

- die Longstaff-Schwartz Stoppzeiten $\widehat{\tau}(i)$ zu verwenden,
- den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right]$ in (14) zu schätzen und
- mit den beiden vorherigen Approximation die rechte Seite von (13) mittels (crude) Monte-Carlo zu berechnen um damit schließlich die obere Schranke für den Optionspreis zu erhalten.

Obwohl die Berechnung von $\mathbb{E} \left[\widehat{V}(i) \middle| \mathcal{S}_{t_{i-1}} \right]$ eine unkomplizierte Monte-Carlo-Simulation an sich darstellt, können wir hier vereinfacht vorgehen; denn es gilt

$$V(i) = \mathbb{E} \left[g(\tau_i, S_{t_{\tau(i)}}) \middle| \mathcal{S}_{t_i} \right] \quad (15)$$

$$= \begin{cases} g(i, S_{t_i}) , & \text{für } g(i, S_{t_i}) \geq \widehat{C}(S_{t_i}; i) \\ \mathbb{E} \left[g(\tau(i+1), S_{t_{\tau(i+1)}}) \middle| \mathcal{S}_{t_i} \right] , & \text{für } g(i, S_{t_i}) < \widehat{C}(S_{t_i}; i) \end{cases} \quad (16)$$

$$= \begin{cases} g(i, S_{t_i}) , & \text{für } g(i, S_{t_i}) \geq \widehat{C}(S_{t_i}; i) \\ \mathbb{E} \left[V(i+1) \middle| \mathcal{S}_{t_i} \right] , & \text{für } g(i, S_{t_i}) < \widehat{C}(S_{t_i}; i) \end{cases} \quad (17)$$

9.2 Andersen-Broadie-Algorithmus

Damit können wir nun den dualen Algorithmus von Andersen und Broadie (2004) formulieren.

Algorithmus 9

Seien $\hat{\tau}(i)$ die Stoppzeiten aus dem Longstaff-Schwartz-Algorithmus die durch die Regressionswerte

$$\hat{C}(S; i) = \sum_{l=1}^k a_l^*(i) H_l(S)$$

gewonnen wurden.

Wiederhole für $j = 1, \dots, N_1$:

1. Simuliere einen Pfad des Prozesses $S_{t_1}^j, \dots, S_{t_m}^j$ an den Ausübungszeitpunkten der Bermuda Option, setze

$$S_{t_0}^j = S_0 ,$$

$$M_0^j = 0 .$$

2. Wiederhole für $i = 0, \dots, m - 1$:

- Sofern $i > 0$, berechne $\hat{V}(i, j)$ wie in (17).
 - Simuliere N_2 Unterpfade des Prozesses $\hat{S}_{t_i}^k, \dots, \hat{S}_{t_{\hat{\tau}(i+1)}}^k$, die mit $\hat{S}_{t_i}^k = S_{t_i}^j$ starten.
 - Schätze den bedingten Erwartungswert durch

$$\mathbb{E} \left[\hat{V}(i+1, j) \middle| S_{t_i}^j \right] = \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} g \left(\tau(i+1), \hat{S}_{t_{\hat{\tau}(i+1)}}^k \right) .$$

Falls $i > 0$ setze

$$\Delta^j(i) = \hat{V}(i, j) - \mathbb{E}[\hat{V}(i, j) | S_{t_{i-1}}^j] ,$$

$$M_i^j = M_{i-1}^j + \Delta^j(i) .$$

3. Setze

$$\hat{V}(m, j) = g(m, S_T^j) ,$$

$$\Delta^j(m) = \hat{V}(m, j) - \mathbb{E} \left[\hat{V}(m, j) \middle| S_{t_{m-1}}^j \right] ,$$

$$M_m^j = M_{m-1}^j + \Delta^j(m) .$$

4. Berechne

$$Y^{up}(j) = \max_{i=1, \dots, m} \{g(i, S_{t_i}^j) - M_i^j\} .$$

Schätze die obere Schranke des Optionspreises durch das arithmetische Mittel

$$\widehat{Y}_{N_1}^{up} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} Y^{up}(j) .$$

Bemerkung

Zur Konvergenz gibt es noch keine theoretischen Resultate, wie bei dem Longstaff-Schwartz-Algorithmus.

10 Policy-Iteration

Eine etwas andere Herangehensweise ist das Konzept der Policy-Iteration um den Optionspreis zu berechnen. Mit einem theoretisch gleich schnellem Verfahren wie Rückwärts Induktion zeigen Bender et al. [2008] wie auch durch schrittweise Verbesserung einer Ausübungsstrategie ein Verfahren zur Bepreisung von amerikanischen Optionen, bzw. allgemeiner zur Berechnung einer oberen und unteren Schranke erzielt werden kann.

10.1 Verbesserungsstrategie

Wie schon beim Optimal Stopping und den Algorithmen zuvor sehen wir wieder das Problem der optimalen Ausübung einer Option als das Bestimmen einer guten Stoppzeit an. Dazu betrachten wir die Stoppzeiten $\{\tau(i)\}_{i \in \{0, \dots, m\}}$, die wir als die Zeit interpretieren, zu der der Käufer der Option diese in der Laufzeit $\{0, \dots, m\}$ ausüben wird, unter der Annahme, dass er bis zur Zeit i noch nicht ausgeübt hat. Die Menge $\mathcal{S}_i = \{\tau(j) : j \geq i\}$ beschreibt die Stoppzeiten die erst ab dem Zeitpunkt i realisieren. $Z = (Z_i)_{i \in \{0, \dots, m\}}$ seien die Auszahlungen der Option, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in \{0, \dots, m\}}$ sei die dazugehörige Filtration und wie zuvor sind wir interessiert an der Berechnung von

$$Y_i^* = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_i} \mathbb{E}[Z_\tau] .$$

Dann ist Y^* die Snell-Einhüllende dieses Stoppproblems und der gesuchte Optionspreis ist Y_0^* .

Um eine ökonomisch und mathematisch sinnvolle Bedingung an die Familie von Stoppzeiten zu stellen, motivieren wir nun folgende Definition:

Definition 43

Eine Familie von Stoppzeiten $\{\tau(i)\}_{i \in \{0, \dots, m\}}$ heißt konsistent, falls

$$i \leq \tau(i) \leq m, \tau(m) = m , \tag{18}$$

sowie

$$\tau(i) > i \Rightarrow \tau(i) = \tau(i + 1) , \tag{19}$$

für $i = 0, \dots, m - 1$ gilt.

Unserer Interpretation nach bedeutet das, dass der Käufer vor dem Zeitpunkt i noch nicht ausgeübt hat, aber ein Ausübungszeitpunkt ab dem Zeitpunkt i bis zur Fälligkeit m möglich ist. Spätestens zur Zeit m wird der Investor aber endgültig ausüben. Das rechtfertigt die ersten beiden Bedingungen (18) in der Definition. Nehmen wir nun an, dass $\tau(i) > i$ gelte. Das heißt der Investor hat von seinem Ausübungsrecht bis jetzt noch keinen Gebrauch gemacht, wird also erst ab dem Zeitpunkt $i+1$ ausüben. Da nun zur Zeit i und zur Zeit $i+1$ erst ein Ausübungszeitpunkt $\tau(i+1) \geq i+1$ stattfindet, gilt $\tau(i) = \tau(i+1)$, i.e. (19).

Ein typisches Beispiel einer konsistenten Familie von Stoppzeiten findet man mit

$$\tau(i) := \inf \left\{ j : i \leq j \leq m, Z_j \geq \max_{j+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_p | \mathcal{F}_j] \right\} .$$

10.2 One-Step-Improvement

Wenn man bereits auf eine konsistente Familie τ von Stoppzeiten zurückgreifen kann, erhält man mit

$$\tilde{\tau}(i) := \inf \left\{ j : i \leq j \leq m, Z_j \geq \max_{j+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_j] \right\} ,$$

wieder eine konsistente Familie von Stoppzeiten. Insbesondere gilt $\tilde{\tau}(m) = m$, durch die Konvention $\max \emptyset = -\infty$.

Diese aus τ konstruierte Familie $\tilde{\tau}$ nennen wir **one-step improvement** von τ . Warum diese Namensgebung sinnvoll ist, zeigen wir nun:

Sei $Y(i, \tau)$ der Wert des Prozesses ausgewertet an der Stoppzeit, nämlich

$$Y(i, \tau) = \mathbb{E}[Z_{\tau(i)} | \mathcal{F}_i] .$$

Dann liefert One-Step-Improvement $\tilde{\tau}$ einen höheren Wert als die ursprüngliche Familie τ ,

$$Y(i, \tilde{\tau}) \geq Y(i, \tau) .$$

Für einen Beweis siehe Theorem 34.

Das Prozedere um nun iterativ die Zielfunktion Y zu verbessern und das optimale Y^* zu approximieren, bedeutet schlichtweg diese sogenannte Policy-Iteration durchzuführen. Definiere rekursiv im j -ten Iterationsschritt

$$\begin{aligned}\tau_j &= \tilde{\tau}_{j-1} , \\ Y_j(i) &= Y(i, \tau_j) ,\end{aligned}$$

um nach genügend Iterationen eine gute Approximation bestimmt zu haben.

Man kann zeigen, dass $Y_j(i)$ für $j \geq m - i$ mit der Snell-Einhüllenden zur Zeit i übereinstimmt. Das bedeutet also, dass theoretisch gesehen das Verfahren mit Policy-Iteration gleich gut funktioniert wie Backward Induction. Aber in jedem Iterationsschritt muss eine Approximation der Snell-Einhüllenden durchgeführt werden, was anwendungsbezogen für gewöhnlich zeitintensiver sein wird.

Bemerkung

Mit einer konsistenten Familie von Stoppzeiten τ ist $Y(0, \tau)$ stets eine untere Schranke für $Y^*(0)$. Darüberhinaus liefert die duale Betrachtungsweise des Problems die obere Schranke

$$Y_{up}(\tau) := \mathbb{E} \left[\max_{0 \leq j \leq m} (Z_j - M_j) \right] ,$$

mit $M_0 = 0$ und

$$M_i = \sum_{p=1}^i (Y(p, \tau) - \mathbb{E}[Y(p, \tau) | \mathcal{F}_{p-1}]) .$$

10.3 Stabilität

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Approximation des bedingten Erwartungswerts bei der Policy-Iteration auswirkt. Um den Fehler bei der Approximation zu beschreiben, führen wir einen Fehlerprozess $\epsilon^{(N)}$ ein.

Sei τ wieder eine konsistente Familie von Stoppzeiten und $(\epsilon_i^{(N)})_{i \in \{0, \dots, m\}}$ ein \mathcal{F} -adaptierter Prozess, dann definieren wir

$$\tilde{\tau}^{(N)}(i) := \inf \left\{ j : i \leq j \leq m, Z_j \geq \max_{j+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_j] + \epsilon_j^{(N)} \right\} .$$

Von diesem Fehlerprozess erwarten wir uns, dass er bei steigender Anzahl der Approximierungsschritte N gegen Null konvergieren wird. Wir werden diese Eigenschaft

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_i^{(N)} = 0, \text{ } \mathbb{P}\text{-fast-sicher}$$

von nun an voraussetzen.

Trotz der verschwindenden Fehlerterme ist aber noch nicht eine sichere Konvergenz der Stoppzeiten garantiert. Bender et al. [2008] zeigen anhand von zwei Beispielen, dass wir weder

$$\tilde{\tau}^{(N)}(i) \rightarrow \tilde{\tau}(i) \text{ in Wahrscheinlichkeit,}$$

noch

$$Y(0, \tilde{\tau}^{(N)}) \rightarrow Y(0, \tau)$$

erwarten dürfen.

Was wir stattdessen erwarten können, sind folgende beiden Eigenschaften:

- a) Es existiert eine Familie von Stoppzeiten $\bar{\tau}^{(N)}$, so dass

$$|\tilde{\tau}^{(N)}(i) - \bar{\tau}^{(N)}| \rightarrow 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-fast-sicher}$$

und für alle N gelte

$$Y(i, \bar{\tau}^{(N)}) \geq Y(i, \tilde{\tau}) ,$$

das bedeutet, $\bar{\tau}^{(N)}$ ist zumindest so gut wie $\tilde{\tau}$.

- b) Die Unterschreitung von $Y(i, \tilde{\tau}^{(N)})$ unter $Y(i, \tilde{\tau})$ konvergiert fast sicher gegen Null.

Diese Eigenschaften legitimieren wir wie folgt:

Satz 33

One-step Improvement ist im Sinne von (a) und (b) stabil.

Bemerkung

Es genügt a) zu beweisen.

Beweis. Um zu zeigen, dass b) aus a) folgt, betrachten wir die Abschätzung
 $(Y(i, \tilde{\tau}^{(N)}) - Y(i, \tilde{\tau}))_- \leq (Y(i, \tilde{\tau}^{(N)}) - Y(i, \bar{\tau}^{(N)}))_- + (Y(i, \bar{\tau}^{(N)}) - Y(i, \tilde{\tau}))_-$.

Falls a) gilt, dann verschwindet der zweite Term und der erste Term konvergiert mit dominierter Konvergenz ebenso gegen Null. \square

Um für den Beweis eine passende Familie $\bar{\tau}^{(N)}$ zu konstruieren, beschreiben wir zuerst ein Kriterium, wann $\bar{\tau}$ zumindest so gut wie $\tilde{\tau}$ ist.

Wir definieren ebenso

$$\hat{\tau}(i) := \inf \left\{ j : i \leq j \leq m, Z_j > \max_{j+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_j] \right\} .$$

Dann gilt offensichtlich

$$\hat{\tau}(i) \geq \tilde{\tau}(i)$$

da $\tilde{\tau}$ mit „ \geq “ statt „ $>$ “ definiert ist.

Satz 34

Seien τ und $\bar{\tau}$ zwei konsistente Familien von Stoppzeiten und gelte

$$\tilde{\tau}(i) \leq \bar{\tau}(i) \leq \hat{\tau}(i) . \quad (20)$$

Dann gilt

$$Y(i, \bar{\tau}) \geq Y(i, \tilde{\tau}) \geq \max \left\{ Z_i, \max_{p \geq i} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_i] \right\} \geq Y(i, \tau) \quad (21)$$

Beweis. Die letzte Ungleichung gilt, da $Y(i, \tau) = \mathbb{E}[Z_{\tau(i)} | \mathcal{F}_i]$.

Für die beiden noch zu beweisenden Ungleichungen definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(i, \tau) &= \max_{p \geq i} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_i] \\ \hat{Y}(i, \tau) &= \max_{p \geq i+1} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_i] \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\tilde{Y}(i, \tau) = \mathbf{1}_{\{\tau(i) > i\}} \hat{Y}(i, \tau) + \mathbf{1}_{\{\tau(i) = i\}} \max \left\{ \hat{Y}(i, \tau), Z_i \right\} \quad (22)$$

und mit der Konsistenz von τ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{\tau(i)}|\mathcal{F}_i] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau(i)=i\}}Z_i|\mathcal{F}_i] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau(i)>i\}}Z_{\tau(i+1)}|\mathcal{F}_i] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau(i)=i\}}Z_i + \mathbf{1}_{\{\tau(i)>i\}}\mathbb{E}[Z_{\tau(i+1)}|\mathcal{F}_i] .\end{aligned}$$

Behauptung 1:

$$Y(i, \bar{\tau}) \geq \max \left\{ Z_i, \max_{p \geq i} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)}|\mathcal{F}_i] \right\}$$

Beweis der Behauptung durch Rückwärtsinduktion nach i .

Basis: $\tau(m) = \bar{\tau}(m) = m$

Schritt $i + 1 \rightarrow i$ für $0 \leq i \leq m - 1$:

Durch die Ungleichung in (20) gilt die Inklusion der Ereignisse

$$\{\bar{\tau}(i) = i\} \subset \{\tilde{\tau}(i) = i\} .$$

Somit gilt auf dem Ereignis $\{\bar{\tau}(i) = i\}$,

$$Y(i, \bar{\tau}) = Z_i \geq \tilde{Y}(i, \tau) .$$

Auf dem Ereignis $\{\bar{\tau}(i) > i\}$ liefert die Induktions-Annahme,

$$\begin{aligned}Y(i, \bar{\tau}) &= \mathbb{E}[Z_{\bar{\tau}(i+1)}|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[Y(i+1, \bar{\tau})|\mathcal{F}_i] \geq \mathbb{E}[\tilde{Y}(i+1, \tau)|\mathcal{F}_i] \\ &= \mathbb{E} \left[\max_{i+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)}|\mathcal{F}_{i+1}] \right] \geq \max_{i+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)}|\mathcal{F}_i] \\ &= \hat{Y}(i, \tau) .\end{aligned}$$

Wiederum liefert (20) die Implikation

$$\{\bar{\tau}(i) > i\} \subset \{\hat{\tau}(i) > i\} .$$

Dadurch gilt auf $\{\bar{\tau}(i) > i\}$,

$$\hat{Y}(i, \tau) \geq Z_i$$

und wegen (22)

$$\widehat{Y}(i, \tau) = \widetilde{Y}(i, \tau) \text{ auf } \{\bar{\tau}(i) > i\} .$$

Somit gilt Behauptung 1,

$$Y(i, \bar{\tau}) \geq \max \left\{ Z_i, \max_{p \geq i} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_i] \right\} .$$

Mit der speziellen Wahl $\bar{\tau} = \widetilde{\tau}$ folgt die zweite Ungleichung des Theorems.

Behauptung 2:

$$Y(i, \bar{\tau}) \geq Y(i, \widetilde{\tau})$$

Zum Zeitpunkt $i = m$ gilt hier sogar Gleichheit. Wieder verwenden wir Rückwärtsinduktion, nehmen also an, dass für $0 \leq i \leq m-1$ die Ungleichung für $i+1$ gelte.

Dann folgt auf $\{\bar{\tau}(i) > i\} \cap \{\widetilde{\tau}(i) > i\}$

$$Y(i, \bar{\tau}) = \mathbb{E}[Y(i+1, \bar{\tau}) | \mathcal{F}_i] \geq \mathbb{E}[Y(i+1, \widetilde{\tau}) | \mathcal{F}_i] = Y(i, \widetilde{\tau})$$

durch die Induktions-Annahme.

Auf $\{\bar{\tau}(i) > i\} \cap \{\widetilde{\tau}(i) = i\}$ gilt durch Behauptung 1,

$$Y(i, \bar{\tau}) \geq Z_i = Y(i, \widetilde{\tau})$$

Schlussendlich verschwindet durch (20) das Ereignis $\{\bar{\tau}(i) = i\} \cap \{\widetilde{\tau}(i) > i\}$.

Mit Behauptung 2 sind nun alle Ungleichungen des Theorems bewiesen.

□

Nehmen wir nun an, $\widetilde{\tau}^{(N)}(i)$ konvergiere \mathbb{P} -fast-sicher gegen einen Stoppzeit $\bar{\tau}(i)$. Als Grenzwert einer konsistenten Familie von Stoppzeiten ist auch $\bar{\tau}$ selbst eine konsistente Familie. Durch Rückwärtsinduktion kann auch gezeigt werden, dass $\bar{\tau}$ die Ungleichung (20) erfüllt. Die Idee dahinter sieht wie folgt aus:

Für den Fall $\bar{\tau}(i) = i$, wähle $N \geq N_0(\omega)$, groß genug, so dass

$$\tilde{\tau}^{(N)}(i) = i ,$$

das heißt

$$Z_i \geq \max_{i+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | \mathcal{F}_i] + \epsilon_i^{(N)} .$$

Mit dem Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$Z_i \geq \max_{i+1 \leq p \leq m} \mathbb{E}[Z_{\tau(p)} | F_j] ,$$

das bedeutet

$$\tilde{\tau}(i) = i .$$

Daraus folgt auf $\{\bar{\tau}(i) = i\}$,

$$\tilde{\tau}(i) \leq \bar{\tau}(i) \leq \hat{\tau}(i) .$$

Mit einem ähnlichen Argument und der Induktions-Annahme, erhalten wir diese Ungleichung auch auf dem Ereignis $\{\bar{\tau}(i) > i\}$.

Wir können nun

$$\bar{\tau}^{(N)} = \bar{\tau}$$

definieren und a) ist erfüllt.

Jedoch können wir, wie bereits erwähnt, nicht erwarten, dass $\tilde{\tau}^{(N)}(i)$ im Allgemeinen konvergiert. Hier müssen wir etwas Vorsicht wahren und folgenderweise fortfahren. Für jene ω für die $\tilde{\tau}^{(N)}(i, \omega)$ nicht konvergiert, sei $\tilde{\tau}^{(M)}(i, \omega)$ eine Folge, die den bedingten Erwartungswert besser approximiert ($M \gg N$), sodass $\tilde{\tau}^{(M)}(i, \omega)$ konvergiert. Dann definieren wir $\bar{\tau}^{(N)}(i, \omega)$ für alle N als diesen Grenzwert. Andernfalls setzen wir $\bar{\tau}^{(N)}(i, \omega) = i$, genau dann wenn eine Teilfolge von $\tilde{\tau}^{(M)}$ gegen i konvergiert und $\tilde{\tau}^{(N)}(i, \omega) = i$. Intuitiv gesagt, sollten wir im letzteren Fall beliebig einen Grenzwert einer Teilfolge frei wählen können, sodass wir (20) erhalten. Somit wählen wir $\bar{\tau}^{(N)}(i, \omega)$ so nah wie möglich an $\tilde{\tau}^{(N)}(i, \omega)$.

Diese Argumentation kann formalisiert werden durch die Definition

$$\bar{\tau}^{(N)}(m) = m$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{(N)}(i) = i & \iff (\tilde{\tau}^{(M)}(i) > i \text{ für nur endlich viele } M) \\ & \quad \vee (\tilde{\tau}^{(M)}(i) = i \text{ für unendlich viele } M \text{ und } \tilde{\tau}^{(N)}(i) = i) \\ \bar{\tau}^{(N)}(i) \neq i & \implies \bar{\tau}^{(N)}(i) = \bar{\tau}^{(N)}(i+1) . \end{aligned}$$

Damit gilt:

Lemma 3

$\bar{\tau}^{(N)}$ erfüllt ia)

Beweis (Bender and Schoenmakers [2006]).

□

Bemerkung

Durch $\bar{\tau}^{(N)} \leq \hat{\tau}(i)$ erhalten wir,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \bar{\tau}^{(N)}(i) \leq \hat{\tau}(i) .$$

Auf der anderen Seite liefert die Supermartingal-Eigenschaft der Snell-Einhüllenden

$$\hat{\tau}(i) \leq \hat{\tau}^*(i) = \inf \{j : i \leq j \leq n, Z(j) > \mathbb{E}[Y^*(j+1)|\mathcal{F}_j]\} .$$

Aufgrund der Tatsache, dass $\hat{\tau}^*$ eine Familie der zuletzt-stoppenden optimalen Stoppzeiten ist, können wir daraus schließen, dass die Suboptimalität von $\bar{\tau}^{(N)}$ (für großes N) daran liegt, dass eventuell zu früh ausgeübt wird.

11 Resultate

Das vorliegende Kapitel liefert einen Überblick über die Bewertung von amerikanischen Optionen mit den numerischen und simulierten Methoden, die in dieser Arbeit beschrieben wurden. Hierbei werden zuerst Ergebnisse der simplen, aber schnellen Verfahren mit einem Binomialmodell bzw. über die Lösung der partiellen Differentialgleichung präsentiert. Anschließend finden sich die Resultate der Longstaff-Schwartz-Methode und des Andersen-Broadie-Algorithmus zum Vergleich wieder.

11.1 Amerikanische Put-Option

Betrachtet wurde ein Black-Scholes-Setting, mit folgenden Parametern:

Startpreis der Aktie ... $S_0 = 1$

Volatilität ... $\sigma = 0.1$

Risikofreier Zins ... $r = 0.01$

Eine **amerikanische Put-Option** mit Laufzeit $T = 1$ und unterschiedlichen Strikes $K = 0.9, 1$ und 1.1 wurde nun mit den beschriebenen Verfahren bepreist. Zusätzlich zu den errechneten Preisen sind die jeweilige Rechenzeit in Sekunden angegeben. Die Berechnung erfolgte mit einem Intel Quadcore i7 Prozessor und 16 GB RAM.

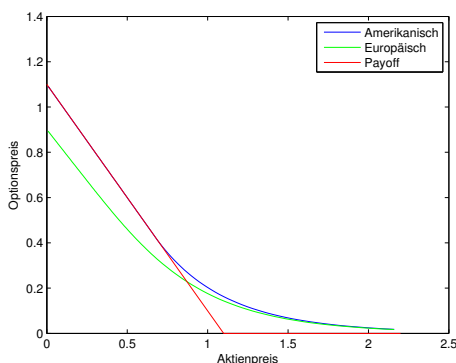


Abbildung 2: Preisfunktion von amerikanischer bzw. europäischer Put-Option

11.1.1 Binomialmodell

Die Berechnung des Put-Preises im Binomialmodell ist hier mit drei verschiedenen Diskretisierungsszenarien graphisch veranschaulicht. Äquidistante Zeitschritte im Modell wurden hierfür mit $m = 10, 30, 50$ gewählt. Zur Approximation ergibt sich nun ein Binomialbaum, der startend bei der Wurzel $S_0 = 1$, zu den Knoten $S_0 \cdot u$ und $S_0 \cdot d$ weiterrankt. Im Beispiel ergeben sich $\rho = 0.01$, $u = 1.00448$ und $d = 0.99553$. Wie im Theorieteil beschrieben, kann das Modell dargestellt werden durch eine binomialverteilte Zufallsvariable W_n mit Parameter $p = 0.50111$.

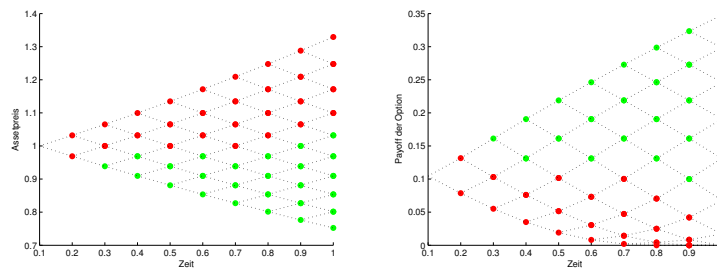


Abbildung 3: Preis und Payoff bei 10 Zeitschritten, Grün: Haltegebiet, Rot: Ausübungsgebiet

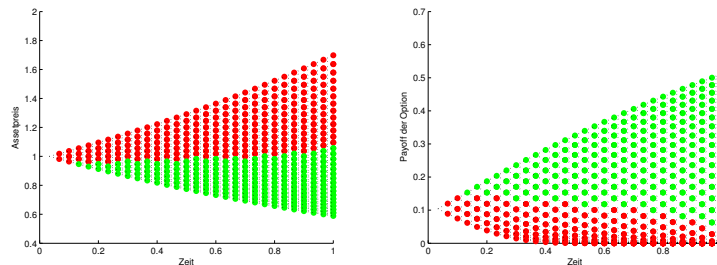


Abbildung 4: Preis und Payoff bei 30 Zeitschritten, Grün: Haltegebiet, Rot: Ausübungsgebiet

Bei zunehmender Anzahl der Diskretisierungsschritte m erkennt man die Konvergenz des Verfahrens, bzw. den Grenzwert in Abbildung 11.1.1. Einen detaillierten Überblick über das rechenzeittechnisch gesehen schnelle Binomialverfahren liefert Tabelle 11.1.1

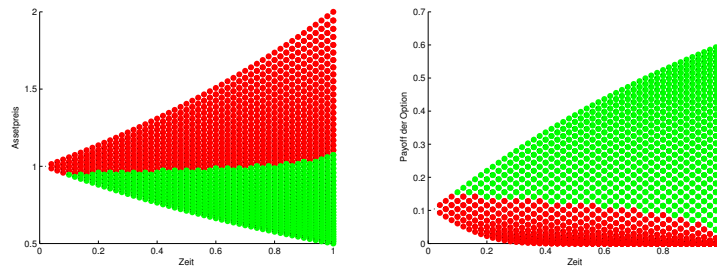


Abbildung 5: Preis und Payoff bei 50 Zeitschritten, Grün: Haltegebiet, Rot: Ausübungsgebiet

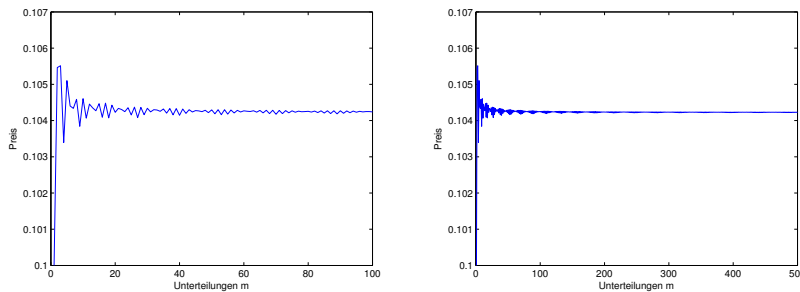


Abbildung 6: Konvergenz des Verfahrens mit Zunahme der Diskretisierungsschritte m

m	K=0,9		K=1		K=1,1	
	Preis	Zeit	Preis	Zeit	Preis	Zeit
10	0,00622457	0,000	0,035132221	0,168	0,104605016	0,169
100	0,00591013	0,001	0,035660902	0,003	0,104239574	0,003
1000	0,00590291	0,027	0,035712533	0,060	0,104223925	0,063
10000	0,00590030	1,613	0,035717608	1,716	0,104225771	1,722
20000	0,00590022	6,299	0,035717888	6,159	0,10422563	6,264

Tabelle 1: Preise von amerikanischer Put-Option im Binomialmodell

11.1.2 PDE-Methoden

Das implizite, als auch das explizite Finite-Differenzen-Verfahren zur numerischen Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung liefert eine einfache Methode, die gleichzeitig äußerst effizient ist. In kurzer Laufzeit lassen sich akkurate Bepreisungsergebnisse erzielen. Insbesondere liefert das Verfahren Preise für verschiedene Aktienstartpreise und Strikes implizit mit. Dieser Vorteil kann beispielsweise bei der Kalibrierung von Modellen genutzt werden, wenn eine Vielzahl von Options-Preisen berechnet werden muss. Man

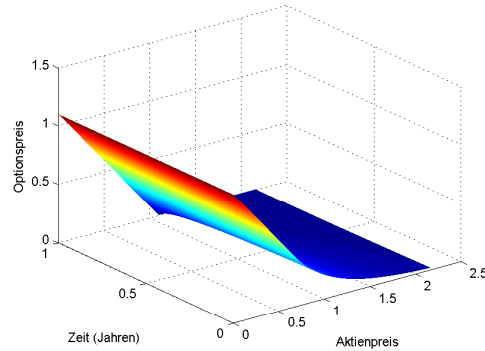


Abbildung 7: Preisoberfläche in Abhängigkeit von Startpreis und Zeit

erhält eine Fläche an Preisen $V(S_0, K)$ parametrisiert durch Aktienwert S_0 und Strike-Preis K , vgl. Abbildung 11.1.2.

		$K = 0,9$		$K = 1$		$K = 1,1$	
N_T	N_S	Preis	Zeit	Preis	Zeit	Preis	Zeit
100	100	0,00591344	0,003	0,036047418	0,074	0,104459244	0,077
1000	100	0,00591017	0,019	0,03599401	0,022	0,10443875	0,021
5000	100	0,00590990	0,096	0,035989287	0,099	0,104436955	0,100
10000	100	0,00590987	0,217	0,035988697	0,222	0,104436731	0,221
10000	1000	0,00590013	0,448	0,035721094	0,447	0,104227673	0,44

Tabelle 2: Preise des expliziten Euler-Verfahrens

Die Diskretisierung innerhalb des PDE-Lösungs-Algorithmus beinhaltet jeweils eine Unterteilung der Aktienpreise N_S und eine Unterteilung der Zeit N_T . Beim expliziten Verfahren können numerische Fehler auftreten, wenn die Bedingung für Konvergenz, $0 \leq \Delta T \leq \frac{1}{2}\Delta S^2$, nicht erfüllt ist. Eine praktische Wahl scheint $N_S = 1000$, $N_T = 10000$ zu sein. Hier bepreisen beide Verfahren zügig und liefern akkurate Ergebnisse. Im Falle des impliziten Euler-Verfahrens könnte sogar eine gröbere Diskretisierung gewählt werden um bessere Performance zu gewähren.

11.1.3 Longstaff-Schwartz

Der Zeithorizont $[0, T]$ wurde diskretisiert, unterteilt in m Teile mit äquidistanten Stützstellen. Zur Bepreisung wurden n Pfade simuliert, die gemäß dem Modell einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen. Für die Regression wurden Polynome der Ordnung 2 verwendet.

		$K = 0,9$		$K = 1$		$K = 1,1$	
N_T	N_S	Preis	Zeit	Preis	Zeit	Preis	Zeit
100	100	0,00590355	0,073	0,035914256	0,089	0,104384959	0,077
	1000	0,00588960	0,006	0,035632119	0,007	0,104155707	0,006
	5000	0,00588941	0,024	0,035629494	0,030	0,104153542	0,024
	10000	0,00588940	0,050	0,035629416	0,053	0,104153469	0,051
1000	100	0,00590917	0,020	0,035980624	0,021	0,104431277	0,020
	1000	0,00589866	0,058	0,035710732	0,062	0,104219582	0,057
	5000	0,00589859	0,225	0,035708456	0,250	0,104217651	0,225
	10000	0,00589858	0,436	0,035708385	0,459	0,104217589	0,473
5000	100	0,00590971	0,100	0,035986609	0,129	0,104435459	0,108
	1000	0,00589974	0,278	0,035718367	0,389	0,104225757	0,324
	5000	0,00589971	1,211	0,035716216	3,077	0,104223893	1,447
	10000	0,00589971	2,689	0,035716149	2,914	0,104223834	2,735
10000	100	0,00590977	0,234	0,035987358	0,221	0,104435983	0,218
	1000	0,00589988	0,588	0,035719345	0,573	0,104226544	0,578
	5000	0,00589987	2,775	0,035717221	2,867	0,104224696	2,704
	10000	0,00589987	6,136	0,035717157	5,360	0,104224638	7,013

Tabelle 3: Preise des impliziten Euler-Verfahrens

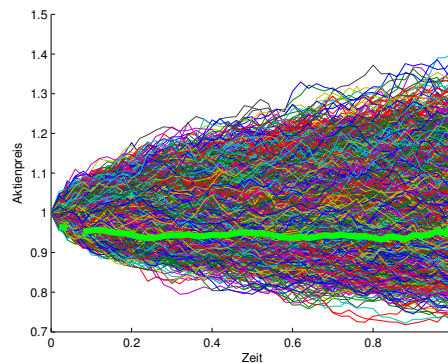


Abbildung 8: 10000 Pfade einer Brownschen Bewegung mit Ausübungsrand der Longstaff-Schwartz-Methode

Der Algorithmus läuft in passabler Zeit, liefert aber eine relativ ungenaue untere Schranke in Relation zum Rechenaufwand. Hinzukommt die numerische Instabilität: Problematisch ist, dass numerisch gesehen Probleme auftreten, wenn die Anzahl der Pfade erhöht werden. Durch die zusätzlichen Realisationen kann es vorkommen, dass die Matrix im Regressionsschritt nicht mehr gut konditioniert ist und in Folge beim Invertieren numerische Fehler auftreten können.

		$K = 0,9$		$K = 1$		$K = 1,1$	
n	m	Preis	Zeit	Preis	Zeit	Preis	Zeit
1000	100	0,00684333	0,347	0,03802581	0,454	0,10501135	0,461
1000	500	0,00664250	1,846	0,03723309	1,735	0,10661532	2,798
5000	100	0,00615735	1,595	0,03569475	1,624	0,10427962	1,639
5000	500	0,00656782	8,396	0,03626897	11,250	0,10429155	10,830
10000	100	0,00622537	3,294	0,03530596	3,110	0,10424250	3,079
10000	500	0,00622245	16,669	0,03571383	16,934	0,10394816	16,958
50000	100	0,00579604	15,602	0,03575490	16,464	0,10376960	17,700
50000	500	0,00583776	72,746	0,03554348	76,769	0,10380620	79,558

Tabelle 4: Preise des Longstaff-Schwartz-Algorithmus

		$K = 0,9$		$K = 1$		$K = 1,1$	
m	n	Preis	Zeit	Preis	Zeit	Preis	Zeit
10	100	0,00813731	0,197	0,04610318	0,185	0,11783630	0,202
100	100	0,00637088	1,884	0,04279044	2,012	0,13741542	2,060
10	500	0,00607661	2,694	0,03688785	2,764	0,10761240	3,132
100	500	0,00689431	32,077	0,04365915	30,064	0,11876643	32,398
10	1000	0,00597077	9,035	0,03748490	9,116	0,10735708	9,549
100	1000	0,00702085	101,601	0,03856707	105,454	0,11126404	106,767
10	5000	0,00606774	191,252	0,03583700	206,307	0,10494161	211,568
100	5000	0,00612214	2059,597	0,03657773	2049,927	0,10667371	2088,100

Tabelle 5: Preise des Andersen-Broadie-Algorithmus

11.1.4 Andersen-Broadie

Ähnlich dem Longstaff-Schwartz-Algorithmus zeigt auch der Algorithmus von Andersen und Broadie gute Ergebnisse für eine obere Schranke, allerdings zu Lasten noch höherer Laufzeit. Durch die verschachtelte Simulation von 500 Pfaden innerhalb des Algorithmus für jeden Zeitschritt entsteht ein enormer Berechnungsaufwand, der die praktische Nutzung des Verfahrens erschwert. Hinzu kommt, dass der Monte-Carlo-Fehler durch die innere Simulation ebenso schwerer kontrollierbar wird.

Nichtsdestoweniger ist das Verfahren nützlich um Optionen mit komplizierten Payoff-Funktionen zu bewerten, bei denen nur mehr auf Simulation zurückgegriffen werden kann. Zumindest erhält man eine Art Konfidenzintervall durch die untere Schranke aus Longstaff-Schwartz und die obere Schranke aus Andersen-Broadie. Mit dem Durchschnittswert aus oberer und unterer Schranke kann ein vernünftiger Punktschätzer definiert werden.

Name	$K = 0,9$		$K = 1$		$K = 1,1$	
	Preis	Zeit	Preis	Zeit	Preis	Zeit
PDE explicit	0,00590013	0,448	0,035721094	0,447	0,104227673	0,444
Binomialbaum	0,00590022	6,299	0,035717888	6,159	0,10422563	6,264
PDE implicit	0,00589987	6,136	0,035717157	5,360	0,104224638	7,013
Longstaff-Schwartz	0,00583776	72,746	0,03554348	76,769	0,10380620	79,558
Andersen-Broadie	0,00612214	2059,597	0,03657773	2049,927	0,10667371	2088,100

Tabelle 6: Vergleich der berechneten Preise der verschiedenen Algorithmen

11.2 Multidimensionale Resultate

Im selben Setting wie oben, bepreisen wir eine Multiple-Max-Call-Option auf ein Bündel von 3,5 beziehungsweise 10 Aktien, unkorreliert mit Startwert $S_0^i = 1$, Return $\mu = 0.01$, Volatilität $\sigma = 0.1$ und $r = 0.01$. Die Preise sind nicht mehr so akkurat wie im Eindimensionalen, trotzdem liefern die Ergebnisse trotz der hohen Dimension des Bepreisungs-Problems durch die Simulation immerhin ein gutes Intervall für den wahren Optionspreis.

K	m	n	LS-Preis	AB-Preis
0,9	100	5000	0,99711908	1,15743473
0,9	100	10000	0,98792108	1,15382903
0,9	200	5000	0,99559171	1,14664510
0,9	200	10000	0,98425042	1,15666225
1	100	5000	0,92867589	1,08025302
1	100	10000	0,92170306	1,08241068
1	200	5000	0,91244554	1,07562599
1	200	10000	0,90959480	1,07860184
1,1	100	5000	0,84970736	1,00804423
1,1	100	10000	0,84929572	1,01074283
1,1	200	5000	0,83157095	1,02382657
1,1	200	10000	0,83710605	1,01178387

Tabelle 7: Preise einer Multiple-Max-Call-Option auf 3 Aktien

K	m	n	LS-Preis	AB-Preis
0,9	100	5000	1,16925596	1,32292853
0,9	100	10000	1,16927185	1,30225759
0,9	200	5000	1,16160364	1,30682800
0,9	200	10000	1,16131799	1,30144155
1	100	5000	1,09378506	1,23484211
1	100	10000	1,09535732	1,24066828
1	200	5000	1,08256110	1,22955134
1	200	10000	1,09673104	1,24375947
1,1	100	5000	1,01926791	1,16639525
1,1	100	10000	1,02272606	1,16655099
1,1	200	5000	1,01676884	1,14519523
1,1	200	10000	1,01828669	1,16257494

Tabelle 8: Preise einer Multiple-Max-Call-Option auf 5 Aktien

K	m	n	LS-Preis	AB-Preis
0,9	100	5000	2,24011066	2,31712690
0,9	100	10000	2,23644103	2,31819585
0,9	200	5000	2,22683705	2,30236767
0,9	200	10000	2,22215233	2,30341429
1	100	5000	2,16560081	2,22936897
1	100	10000	2,16091708	2,24284508
1	200	5000	2,14432977	2,22491369
1	200	10000	2,14871681	2,23756269
1,1	100	5000	2,08600233	2,16539633
1,1	100	10000	2,09174493	2,16324016
1,1	200	5000	2,07600301	2,16275444
1,1	200	10000	2,06639851	2,15373251

Tabelle 9: Preise einer Multiple-Max-Call-Option auf 10 Aktien

Literatur

Milton Abramowitz and Irene Stegun. *Tables of mathematical functions. National Bureau of Standards, Washington, 1970.*

Yves Achdou and Olivier Pironneau. *Computational methods for option pricing.* Siam, 2005.

Leif Andersen and Mark Broadie. Primal-dual simulation algorithm for pri-

- cing multidimensional american options. *Management Science*, 50(9):1222–1234, 2004.
- Mathias Beiglböck, Walter Schachermayer, and Bezirgen Veliyev. A short proof of the Doob–Meyer theorem. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(4), 2012.
- Christian Bender and John Schoenmakers. An iterative method for multiple stopping: convergence and stability. *Adv. Appl. Prob.*, 38:729–749, 2006.
- Christian Bender, Anastasia Kolodko, and John Schoenmakers. Enhanced policy iteration for american options via scenario selection. *Quantitative Finance*, 8(2), 2008.
- Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, 1968.
- Emmanuelle Clément, Damien Lamberton, and Philip Protter. An analysis of a least squares regression method for american option pricing. *Finance and Stochastics*, 6(4), 2002.
- Darrell Duffie. *Dynamic asset pricing theory*. Princeton University Press, 2010. Dritte Auflage.
- Robert Elliott and Ekkehard Kopp. *Mathematics of Financial Markets*. Springer, 2005. Zweite Auflage.
- Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004. Erste Auflage.
- Martin B Haugh and Leonid Kogan. Pricing american options: a duality approach. *Operations Research*, 52(2):258–270, 2004.
- John Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson/Prentice Hall, 2009. Siebte Auflage.
- Patrick Jaillet, Damien Lamberton, and Bernard Lapeyre. Variational inequalities and the pricing of american options. *Acta Applicandae Mathematica*, 21(3):263–289, 1990.
- Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2006. Erste Auflage.
- Ralf Korn and Elke Korn. *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: moderne Methoden der Finanzmathematik*. Springer, 2013.
- Ralf Korn, Elke Korn, and Gerald Kroisandt. *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. Chapman & Hall, 2010.

- Bernard Lamberton, Damien und Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, 2007.
- Damien Lamberton. Optimal stopping and american options. Lecture notes, <http://www.fmf.uni-lj.si/finmath09/ShortCourseAmericanOptions.pdf>, 2009.
- Francis A Longstaff and Eduardo S Schwartz. Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach. *Review of Financial studies*, 14:113–147, 2001.
- Paul André Meyer. *Probability and potentials*. Blaisdell Publishing Company Waltham, 1966.
- Pierre Moerbeke. On optimal stopping and free boundary problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 60(2):101–148, 1976.
- Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 2003. Fünfte Auflage.
- L. C. G. Rogers. Monte carlo valuation of american options. *Mathematical Finance*, 12(3):271–286, 2002.
- Walter Schachermayer. Fundamental theorem of asset pricing. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, 2010.
- Rüdiger Seydel. *Tools for computational finance*. Springer, 2006. Dritte Auflage.
- Rüdiger Seydel. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*. Springer, 2013. Erste Auflage.