

Querschnitt $F = 39,8 \text{ cm}^2$, $r = 8,3 \text{ cm}$,

$$F' = F_1 - F_2 = 3,46 - 7,17 = - 3,71 \text{ cm}^2,$$

$$P_0 = P \frac{\overline{K_I M}}{K_T S} = \frac{6000 \cdot 1,5}{8,3} = + 1085 \text{ kg},$$

$$P' = P - P_0 = 6000 - 1085 = + 4915 \text{ kg},$$

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F} = \frac{1085}{39,8} = + 27,3 \text{ kg/cm}^2,$$

σ' in der innersten Faser bei D ,

$$\sigma'_D = \frac{P'}{F'} \cdot \frac{e_2}{r + e_2} = \frac{+4915}{-3,71} \cdot \frac{(-3,8)}{(8,3 - 3,8)} = + 1120 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zugbeanspruchung.}$$

Durch algebraische Addition von σ_0 und σ' folgt schließlich die größte Spannung in D zu

$$1120 + 27 = 1147 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zum Vergleich in dem Abschnitt über Haken durchgeführte Rechnung nach der Theorie der geraden Balken gibt nur 850 kg/cm^2 .

Auf Grund der Formel für gekrümmte, stabförmige Körper berechnet Bach [I, 15] auch die durch die sogenannte Kerbwirkung erhöhte Beanspruchung von Maschinenteilen mit scharfen oder abgerundeten Kehlen. Gußeiserne Probekörper, die an den Seitenflächen bearbeitet waren, an den ebenen Vorder- und Rückflächen aber die Gußhaut behalten hatten und die nach Abb. 54 belastet wurden, brachen längs schräger, unter ungefähr 45° in der Kehle ansetzender Flächen. Die Bruchlast nimmt annähernd geradlinig mit abnehmendem Rundungshalbmesser ρ ab. Im Mittel aus je zwei Versuchen betrug sie:

bei $\rho =$	15	5	0	mm
$P =$	35000	26995	22700	kg.

Bei der Berechnung der Spannung empfiehlt Bach den Krümmungshalbmesser r etwas größer als den Abstand des Schwerpunktes der unter 45° angenommenen Bruchfläche vom Mittelpunkt der Hohlkehle zu setzen, und zwar:

$$r = \sqrt{0,01 e^2 + \rho^2} + e \quad \text{bis} \quad \sqrt{0,018 e^2 + \rho^2} + e.$$

Die Kraft, die den Bruchquerschnitt auf Zug beansprucht, ist $\frac{P}{2} \sin 45^\circ$, das Biegemoment $M_b = \frac{P}{2} \cdot (x + y)$, während die Schubkraft $\frac{P}{2} \cos 45^\circ$ vernachlässigt werden darf. Der Bruchquerschnitt ist rechteckig und besitzt die Breite b , die Höhe e . (Vgl. auch die Berechnung des Kurbelwellenlagers im Abschnitt Lager.)

XI. Federn.

Man unterscheidet Biegungs- und Drehungsfedern. Die Grundlagen für ihre Berechnung bilden die Formeln der Biege- und Drehfestigkeit. Für Federn, die zur Aufnahme oder Ausübung von Kräften dienen, ist die Tragfähigkeit oder die Kraft, die sie ausüben können, für Federn, die Stöße auffangen oder zum Antriebe benutzt werden sollen, außerdem die Arbeitsfähigkeit maßgebend. Letztere ist unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität und der Verhältnismöglichkeit zwischen Formänderungen und Spannungen des Baustoffes durch eine Dreiecksfläche

$$ABC = \mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} \tag{47}$$

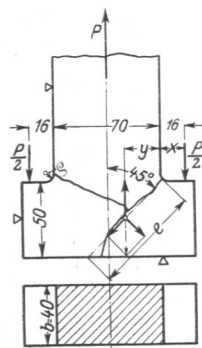


Abb. 54. Zur Berechnung von Teilen mit scharfen oder abgerundeten Kehlen.

Abb. 55, dargestellt, wenn die Feder allmählich von 0 auf P kg belastet und dabei um δ cm durchgebogen wird. Ist die Feder mit P_0 kg vorgespannt, so kann sie noch die durch das Trapez $DECB$ wiedergegebene Arbeit

$$\mathfrak{A}' = \frac{P_0 + P}{2} \cdot \delta' \tag{48}$$

aufnehmen.

Die Arbeitsfähigkeit läßt sich in Beziehung zum Federinhalt bringen und kann dann als Maßstab für die Ausnutzung des Baustoffes dienen. Z. B. nimmt die Dreieckfeder als Körper gleichen Widerstands eine dreimal so große Arbeit auf als die Rechteckfeder gleichen Inhalts (vgl. die letzten Spalten der Nr. 1 und 2 der untenstehenden Zusammenstellung).

Drehungsfedern sind in bezug auf die Ausnutzung des Werkstoffes vorteilhafter als Biegungsfedern und schon deshalb diesen vorzuziehen. Zudem verlangen sie meist auch konstruktiv weniger Raum. Beispielweise folgt aus den Arbeitsfähigkeiten beim Vergleich einer Dreieckfeder Nr. 2 mit einer zylindrischen Schraubenfeder Nr. 10 der Rauminhalt der ersteren:

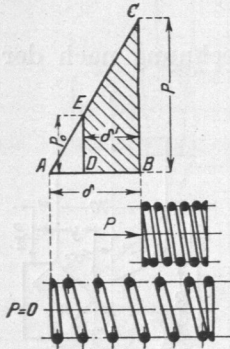


Abb. 55. Arbeitsfähigkeit einer zylindrischen Schraubenfeder.

$$V_1 = \frac{6 \mathfrak{A}}{\alpha \cdot k_b^2},$$

der der zweiten:

$$V_2 = \frac{4 \mathfrak{A}}{\beta \cdot k_a^2}$$

und das Verhältnis beider:

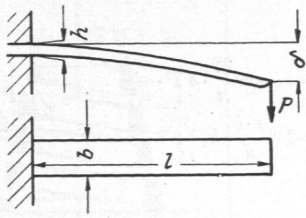
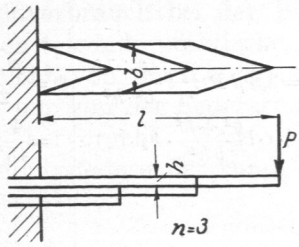
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3 \beta \cdot k_a^2}{2 \alpha \cdot k_b^2}.$$

Zahlenmäßig wird für Federstahl bei ruhender Belastung:

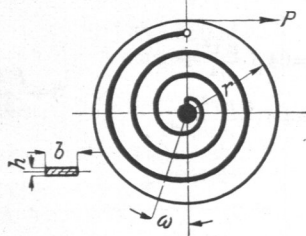
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2200000}{850000} \cdot \frac{6000^2}{7500^2} \approx 2,5,$$

Zusammenstellung 11. Federn.

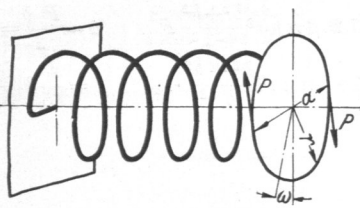
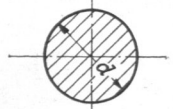
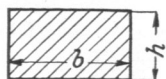
Lfd. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
Gerade Biegungsfedern.				
1	<p>Rechteckfeder</p>	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$	$\delta = \alpha \cdot \frac{P l^3}{J \cdot 3}$ $= 4 \alpha \cdot \frac{l^3}{b h^3} \cdot P = \frac{2}{3} \alpha \frac{l^2}{h} k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{18} \alpha k_b^2 \cdot V$
2	<p>Dreieckfeder</p>	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$	$\delta = \alpha \cdot \frac{P l^3}{J \cdot 2} = 6 \alpha \cdot \frac{l^3}{b h^3} \cdot P$ $= \alpha \cdot \frac{l^2}{h} \cdot k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha \cdot k_b^2 \cdot V$

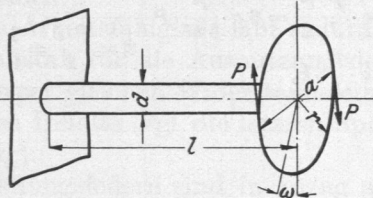
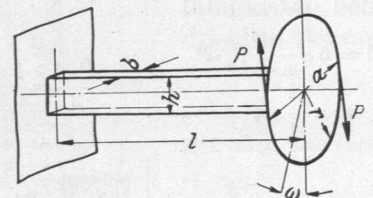
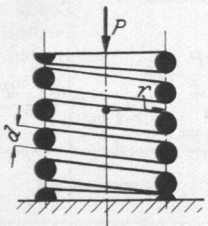
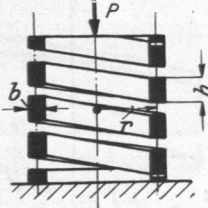
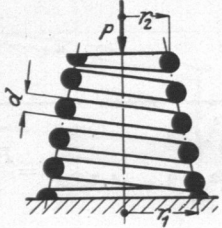
Lfd. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
3	Nach kubischer Parabel zugeschärfte Rechteckfeder 	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$	$\delta = \alpha \cdot \frac{P l^3}{J \cdot 2} = 6 \alpha \cdot \frac{l^3}{b h^3} \cdot P$ $= \alpha \cdot \frac{l^2}{h} \cdot k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{9} \alpha k_b^2 \cdot V$
4	Geschichtete Dreieckfeder 	$P = \frac{n \cdot b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$	$\delta = 6 \alpha \frac{l^3}{n \cdot b h^3} \cdot P$ $= \alpha \frac{l^2}{h} \cdot k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha k_b^2 \cdot V$

Gewundene Biegefedern (l Länge der gestreckt gedachten Feder).

5	Spiralfeder rechteckigen Querschnitts 	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{r}$	$\delta = r \cdot \omega = \alpha \cdot \frac{P}{J} \cdot l r^2$ $= 12 \frac{\alpha P \cdot l r^2}{b h^3} = 2 \alpha \frac{r \cdot l k_b}{h}$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha k_b^2 \cdot V$
---	---	---	--	--

Gewundene Biegefedern (l Länge der gestreckt gedachten Feder).

6	Schraubenfeder  Querschnitt rund 	$P = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{k_b}{a}$	$\delta = r \cdot \omega = \alpha \cdot \frac{P}{J} \cdot l \cdot r^2$ $= \frac{64 \alpha \cdot P \cdot l \cdot r^2}{\pi \cdot d^4} = 2 \alpha \cdot \frac{r \cdot l}{d} \cdot k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{8} \alpha k_b^2 \cdot V$
7	Querschnitt rechteckig 	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{a}$	$\delta = r \cdot \omega = \alpha \cdot \frac{P}{J} \cdot l \cdot r^2$ $= 12 \alpha \cdot \frac{P \cdot l \cdot r^2}{b h^3} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot r \cdot l \cdot k_b}{h}$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha k_b^2 \cdot V$

Lfde. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
Gerade Drehungsfedern.				
8	<p style="text-align: center;">Querschnitt rund</p> 	$P = \frac{\pi d^3 k_a}{16 a}$	$\begin{aligned} \delta = r \cdot \omega &= \frac{32}{\pi} \cdot \beta \cdot P \cdot \frac{r^2 l}{d^4} \\ &= 2 \beta \frac{r \cdot l}{d} \cdot k_a \end{aligned}$	$\mathcal{W} = \frac{P \delta}{2} = \frac{1}{4} \beta k_a^2 \cdot V$
9	<p style="text-align: center;">Querschnitt rechteckig</p> 	$P = \frac{2}{9} \cdot b^2 \cdot h \frac{k_a}{a}$	$\begin{aligned} \delta = r \omega &= 3,6 \beta \cdot P \cdot r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 \cdot h^3} \\ &= 0,8 \beta \cdot r \cdot l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{P \cdot \delta}{2} \\ &= \frac{4}{45} \beta \left(\frac{b^2}{h^2} + 1 \right) k_a^2 \cdot V \end{aligned}$
Gewundene Drehungsfedern (n = Anzahl der wirksamen Windungen).				
10	<p style="text-align: center;">Zylindrische Schraubenfeder Querschnitt rund</p> 	$\begin{aligned} P &= \frac{\pi d^3}{16} \cdot \frac{k_a}{r} \\ &= 0,1963 \frac{d^3}{r} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \delta &= 64 \beta \cdot \frac{n r^3}{d^4} \cdot P \\ &= 4 \beta \cdot \frac{\pi n r^2}{d} \cdot k_a \end{aligned}$	$\mathcal{W} = \frac{P \delta}{2} = \frac{1}{4} \beta k_a^2 \cdot V$
11	<p style="text-align: center;">Zylindrische Schraubenfeder Querschnitt rechteckig</p> 	$P = \frac{2}{9} b^2 \cdot h \cdot \frac{k_a}{r}$	$\begin{aligned} \delta &= 7,2 \cdot \beta \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \\ &= 1,6 \beta \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{P \cdot \delta}{2} \\ &= \frac{4}{45} \beta \left(\frac{b^2}{h^2} + 1 \right) k_a^2 \cdot V \end{aligned}$
12	<p style="text-align: center;">Kegelstumpffeder Querschnitt rund</p> 	$\begin{aligned} P &= \frac{\pi \cdot d^3 k_a}{16 r_1} \\ &= 0,1963 \frac{d^3}{r_1} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \delta &= 16 \beta \frac{(r_1^2 + r_2^2) \cdot n (r_1 + r_2)}{d^4} \cdot P \\ &= \beta \cdot \frac{r_1 \cdot \pi n (r_1 + r_2)}{d} k_a \end{aligned}$	$\mathcal{W} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{8} \beta \cdot k_a^2 \cdot V$

Lfd. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
13	<p>Kegelstumpffeder Querschnitt rechteckig</p>	$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r_1} k_a$	$\delta = 1,8\beta(r_1^2 + r_2^2) \pi \cdot n (r_1 + r_2) \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \cdot P$ $= 0,4 \beta \cdot r_1 \pi n (r_1 + r_2) \frac{b^2 + h^2}{b h^2} k_a$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} =$ $= \frac{2}{45} \cdot \beta \left(\frac{b^2}{h^2} + 1 \right) k_a^2 \cdot V$

der Stahlverbrauch bei der Biegungsfeder also theoretisch 2,5mal größer. Vgl. dazu das unten folgende praktische Beispiel. Dagegen sind der Inhalt und das Gewicht der Feder nicht von der Länge oder den übrigen zu wählenden Abmessungen abhängig, sondern nur von der Federart und der Höhe der Beanspruchung, wie aus dem Bau der Formeln hervorgeht. Wegen der gleichmäßigeren Inanspruchnahme des Werkstoffes ist bei Drehungsfedern der runde Querschnitt dem rechteckigen überlegen.

Zusammenstellung 12. Zulässige Beanspruchung von Federn.

Verwendungszweck	Werkstoff	Dehnungszahl α cm ² /kg	Schubzahl β cm ² /kg	Belastungsart	Zulässige Beanspruchung	
					auf Biegung k_b kg/cm ²	auf Drehung k_a kg/cm ²
Belastungsfedern	Federstahl, ungehärtet	1 2200000	1 850000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	3000 2000	2400 1600
	Guter Federstahl, gehärtet			Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	7500 5000	6000 4000
Eisenbahnwagenfedern	Guter Federstahl, gehärtet			Berechnet für die statische Last	5500 ... 5800 (Stambke) 6000 ... 6500 (Bach)	—
Rennwagenfedern	Spezialfederstahl F 64 D, Krupp			—	bis 14500	—
Belastungsfedern	Phosphorbronzedraht	—	1 480000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	— —	2500 1670
	Durana-metalldraht ML	—	1 380000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	— —	2000 1330
	Neusilberdraht EK	—	1 510000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	— —	2000 1330

Zu den zulässigen Beanspruchungen ist zu bemerken, daß Federn, die höheren Wärmegraden ausgesetzt werden, leicht schlaff werden und daß sie deshalb mit niedrigen zulässigen Spannungen berechnet werden müssen.

Die geschichtete Dreieckfeder Nr. 4 kann als eine Dreieckfeder Nr. 2, in $2n$ Stufen von der Breite $\frac{b}{2}$ zerlegt, betrachtet werden. Sie wird besonders häufig an Fahrzeugen verwendet und hat den Vorteil, infolge ihrer größeren inneren Reibung die bei Stößen auftretenden Schwingungen rascher zu dämpfen.

An den auf Druck beanspruchten Schraubenfedern sind des guten Aufliegens wegen die letzten Windungen auf die vorhergehenden niederzubiegen, und zur Vermeidung des Ausbiegens beim Zusammendrücken eben abzuschleifen, Abb. 55^a. Dadurch tritt ein etwas größerer Werkstoffverbrauch ein als oben berechnet wurde. Lange Federn neigen trotzdem zum seitlichen Ausknicken, was man nur durch Unterteilen und besondere Führungsteller verhindern kann.

Für Gummifedern und -puffer lassen sich keine allgemein gültigen Formeln angeben, da die verschiedenen Gummisorten stark abweichende Festigkeitseigenschaften haben.

Zahlenbeispiel. Eine geschichtete Dreieckfeder von 600 mm wirksamer Länge für eine dauernde Belastung von 1500 kg bei rund 3 cm Durchbiegung ist zu berechnen. Abb. 56.

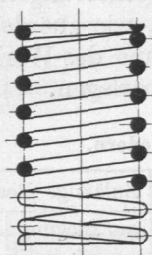


Abb. 55a.
Schraubenfeder
mit niedergebogenen
Enden.

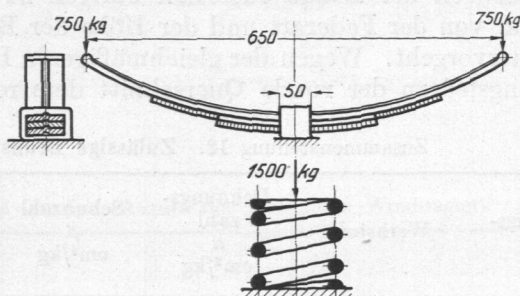


Abb. 56. Vergleich zwischen einer geschichteten
Dreieck- und eine Schraubenfeder.

Die Feder kann in der Mitte eingespannt angenommen und daher nach Formelreihe 4 mit $P = 750$ kg Belastung für jede Hälfte berechnet werden.

Gewählt: $k_b = 7500$ kg/cm².

Aus der verlangten Durchbiegung folgt

$$h = \frac{\alpha \cdot l^2 \cdot k_b}{\delta} = \frac{30^2 \cdot 7500}{2200000 \cdot 3} = 1,02 \text{ cm}$$

und aus der Tragfähigkeit:

$$n \cdot b = \frac{6 \cdot P \cdot l}{h^2 \cdot k_b} = \frac{6 \cdot 750 \cdot 30}{1,02^2 \cdot 7500} = 17,2 \text{ cm.}$$

Gewählt: 3 Schichten von $h = 1$, $b = 6$ cm; damit:

$$P = \frac{n \cdot b \cdot h^2 \cdot k_b}{6 \cdot l} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 1^2 \cdot 7500}{6 \cdot 30} = 750 \text{ kg,}$$

$$\delta = \alpha \cdot \frac{l^2}{h} k_b = \frac{30^2 \cdot 7500}{2200000 \cdot 1} = 3,07 \text{ cm.}$$

Die Feder verlangt unter Einschluß des mittleren Stückes von 5 cm Länge zur Fassung rund 5,5 kg Stahl.

Zum Vergleich sei eine gewundene Drehungsfeder runden Querschnitts mit $k_d = 6000$ kg/cm² bei gleicher Durchbiegung berechnet. Windungshalbmesser angenommen zu 60 mm. Formelreihe 10.

$$d^3 = \frac{P \cdot r}{0,1963 \cdot k_d} = \frac{1500 \cdot 6}{0,1963 \cdot 6000} = 7,64;$$

$$d = 1,97 \sim 2 \text{ cm.}$$

$$n = \frac{\delta \cdot d}{4 \beta \cdot \pi \cdot r^2 \cdot k_d} = \frac{3,07 \cdot 2 \cdot 850000}{4 \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6000} = 1,92.$$

Gewicht rund 3,3 kg unter Berücksichtigung der beiden Endwindungen.

XII. Festigkeit der Gefäßwände.

Die folgenden Formeln sind unter der Annahme einer unveränderlichen Dehnungszahl α abgeleitet. Gefäße aus Gußeisen, bei dem α mit steigenden Zugspannungen zunimmt, erfahren durch inneren Druck etwas geringere Zugbeanspruchungen und weisen eine gleichmäßigere Spannungsverteilung auf als die Formeln erwarten lassen.

Eine etwaige Gußhaut wirkt besonders an den Stellen größter Zugspannungen schädlich.

Bei zusammengesetzten Gefäßen ist naturgemäß die Sicherheit der Verbindungsnahte durch Löten, Nieten, Schweißen usw. zu beachten und häufig entscheidend.

Widerstandsfähige Böden versteifen die anschließenden zylindrischen Wandungen, und zwar um so mehr, je kürzer die Zylinder sind. Besondere Sorgfalt verdienen die Übergänge zwischen beiden; scharfe Absätze, Eindrehungen, Bohrungen oder sonstige Unterbrechungen führen zu oft beträchtlichen Spannungserhöhungen und selbst zu Brüchen. Häufig sind besondere Zuschläge zu den rechnerisch ermittelten Wandstärken in Rücksicht auf die Herstellung, Aufstellung oder die Abnutzung im Betrieb nötig.

A. Kugelige Gefäße.

1. Hohlkugel durch inneren Überdruck von p_i kg/cm² beansprucht. Die größte Anstrengung auf Zug tritt an der Innenfläche in tangentialer Richtung auf und beträgt bei einem Außenhalbmesser r_a und einem Innenhalbmesser r_i in cm

$$\sigma_{z \max} = \frac{0,65 r_a^3 + 0,4 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_i. \quad (49)$$

Die Spannungen nehmen nach außen hin ab. Ist die zulässige Beanspruchung k_z und der Innenhalbmesser r_i gegeben, so wird

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 0,65 p_i}}. \quad (50)$$

Bei $k_z = 0,65 p_i$ wird der Nenner des Bruches Null und $r_a = \infty$. Mithin ist in

$$p_i = \frac{k_z}{0,65}$$

die Grenze der Verwendbarkeit des Werkstoffes gegeben.

Bei geringer Wandstärke s im Verhältnis zum Durchmesser darf man gleichmäßige Verteilung der Spannungen in der ganzen Wandung annehmen und nach

$$\sigma_z = \frac{d_i \cdot p_i}{4 \cdot s}, \quad (51)$$

oder

$$s = \frac{d_i \cdot p_i}{4 k_z}$$

rechnen.

2. Hohlkugel, durch äußeren Druck von p_a kg/cm² beansprucht. Unter der Voraussetzung, daß Einknicken der Wandung nicht zu fürchten ist, wird die größte