

Geht man dagegen von der größten Schubspannung aus, so muß

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_s \quad (44)$$

sein. Die wieder nur für den kreisförmigen Querschnitt geltende Formel für das ideale Moment lautet dann

$$M_{ai} = \sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \quad (45)$$

während die dazugehörige Beanspruchung nach

$$\tau_d = \frac{16 M_{ai}}{\pi d^3}$$

zu beurteilen wäre.

Wirken drei Längsspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 senkrecht zueinander, von denen z. B. σ_1 den größten und σ_2 den kleinsten Wert habe, so entsteht eine größte Schubspannung $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Auf sie hat die dritte, zwischen der größten und der kleinsten liegende Spannung — in dem betrachteten Falle σ_3 — keinen Einfluß.

Für den Grenzfall $\tau = 0$ erhält man aus Gleichung (44) $\frac{\tau_{\max}}{\sigma} = \frac{1}{2}$. Bestätigungen dieser Beziehung und der Theorie, daß die größte Schubspannung maßgebend ist, bieten die Arbeiten von Guest [I, 10], v. Kármán [I, 11] u. a., die die Fließvorgänge an Flußeisen, Kupfer und Marmor näher untersuchten, so daß sich der Widerspruch zwischen den Formeln (41) und (44) vielleicht dadurch aufklärt, daß für die Einleitung des Bruches die größte Dehnung, für die ersten Fließerscheinungen dagegen die größte Schubspannung maßgebend ist.

Da nun die Spannungen in den Maschinenteilen unter der Fließgrenze bleiben sollen, um größere und bleibende Formänderungen zu vermeiden, ist es wohl berechtigt, nach den Formeln (44) und (45) zu rechnen. Dabei darf aber die Beurteilung der Sicherheit nicht nach der Bruchfestigkeit des Werkstoffes erfolgen; die errechneten Werte müssen vielmehr mit der Schubspannung an der Streckgrenze $\tau_s = \frac{1}{2}\sigma_s$ verglichen werden. Die so gefundenen Sicherheitsgrade weichen von den gewohnten ab. Es empfiehlt sich daher, solange genügende Erfahrungszahlen fehlen, die Festigkeitsrechnungen nach der bisherigen Art durchzuführen, sie aber nach der zweiten auf die Sicherheit gegen Eintreten des Fließens nachzuprüfen. Für Werkstoffe ohne ausgeprägte Fließgrenze, wie Gußeisen, erübrigt sich die Rechnung nach der zweiten Anschauung.

In geeigneten Beispielen des Buches sind die Ergebnisse der Rechnung nach den beiden Annahmen nebeneinander gestellt.

X. Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

Es bedeuten:

e_1 und e_2 Abstände der äußersten Fasern des Querschnittes von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie. Positiv zu rechnen, wenn sie von dem Krümmungsmittelpunkt abliegen, negativ, wenn sie nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet sind,

F Querschnittsfläche in cm^2 ,

M_b das den Querschnitt beanspruchende Biegemoment in kg cm . Positiv, wenn es den Körper stärker zu krümmen, negativ, wenn es die Krümmung zu verringern sucht,

P die im Schwerpunkt des Querschnittes wirkende Längskraft in kg , als Zugkraft positiv, als Druckkraft negativ einzusetzen,

r Krümmungshalbmesser der Stabachse in cm,
 σ die entstehenden Normalspannungen in kg/cm²,
 x Abstand der Faser, in der die Spannung σ herrscht, von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie positiv und negativ zu rechnen, wie e_1 und e_2 ,

$$Z = -r^2 \int \frac{x}{r+x} dF \text{ eine dem Trägheitsmoment verwandte Größe in cm}^4.$$

Die Berechnung sta r gekrümmter Körper nach den Formeln für den geraden Balken führt zur Unterschätzung der Beanspruchungen. Unter den Voraussetzungen,

1. daß die Schwerpunkte aller Querschnitte in der Kraftebene liegen,
 2. daß diese Ebene jeden Querschnitt symmetrisch teilt und
 3. daß die Querschnitte eben bleiben,
- gilt für einen beliebigen Punkt in der Entfernung x von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie, Abb. 53a,

$$\sigma = \frac{P + \frac{M_b}{r}}{F} + \frac{M_b \cdot r}{Z} \cdot \frac{x}{r+x} \quad (46)$$

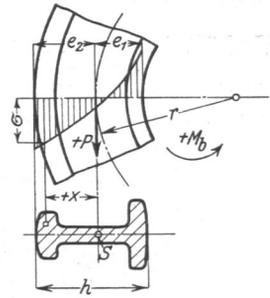


Abb. 53 a. Zur Ermittlung der Beanspruchung gekrümmter Körper.

Für die äußersten Fasern des Querschnittes, in denen die größten Zug- und Druckspannungen entstehen, ist für x e_1 und e_2 einzusetzen. Ist der Krümmungshalbmesser r im Verhältnis zur Querschnittshöhe h groß, so darf Z in den Fällen 1, 2 und 3 der nachstehenden Zusammenstellung genügend genau durch das Trägheitsmoment J ersetzt werden, da dann die rasch fallenden Reihen in

Zusammenstellung 10. Festwert Z zur Berechnung gekrümmter Stäbe.

Lfd. Nr.	Querschnittform	Z
1		$\frac{b h^3}{12} \left\{ 1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{3}{112} \left(\frac{h}{r} \right)^4 + \dots \right\}$
2		$\frac{\pi a^4}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^4 + \frac{7}{32} \left(\frac{a}{r} \right)^6 + \dots \right\}$
3		$\frac{\pi a^3 \cdot b}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^4 + \frac{7}{32} \left(\frac{a}{r} \right)^6 + \dots \right\}$
4		$r^3 \left\{ \left[b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} (e_2 + r) \right] \ln \frac{r + e_2}{r - e_1} - (b_1 - b_2) \right\} - r^2 h \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right)$ $e_1 = \frac{1}{3} \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \cdot h; \quad e_2 = \frac{1}{3} \frac{2 b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \cdot h$

Querschnitt $F = 39,8 \text{ cm}^2$, $r = 8,3 \text{ cm}$,

$$F' = F_1 - F_2 = 3,46 - 7,17 = - 3,71 \text{ cm}^2,$$

$$P_0 = P \frac{K_I M}{K_T S} = \frac{6000 \cdot 1,5}{8,3} = + 1085 \text{ kg},$$

$$P' = P - P_0 = 6000 - 1085 = + 4915 \text{ kg},$$

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F} = \frac{1085}{39,8} = + 27,3 \text{ kg/cm}^2,$$

σ' in der innersten Faser bei D ,

$$\sigma'_D = \frac{P'}{F'} \cdot \frac{e_2}{r + e_2} = \frac{+4915}{-3,71} \cdot \frac{(-3,8)}{(8,3 - 3,8)} = + 1120 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zugbeanspruchung.}$$

Durch algebraische Addition von σ_0 und σ' folgt schließlich die größte Spannung in D zu

$$1120 + 27 = 1147 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zum Vergleich in dem Abschnitt über Haken durchgeführte Rechnung nach der Theorie der geraden Balken gibt nur 850 kg/cm^2 .

Auf Grund der Formel für gekrümmte, stabförmige Körper berechnet Bach [I, 15] auch die durch die sogenannte Kerbwirkung erhöhte Beanspruchung von Maschinenteilen mit scharfen oder abgerundeten Kehlen. Gußeiserne Probekörper, die an den Seitenflächen bearbeitet waren, an den ebenen Vorder- und Rückflächen aber die Gußhaut behalten hatten und die nach Abb. 54 belastet wurden, brachen längs schräger, unter ungefähr 45° in der Kehle ansetzender Flächen. Die Bruchlast nimmt annähernd geradlinig mit abnehmendem Rundungshalbmesser ρ ab. Im Mittel aus je zwei Versuchen betrug sie:

bei $\rho =$	15	5	0	mm
$P =$	35000	26995	22700	kg.

Bei der Berechnung der Spannung empfiehlt Bach den Krümmungshalbmesser r etwas größer als den Abstand des Schwerpunktes der unter 45° angenommenen Bruchfläche vom Mittelpunkt der Hohlkehle zu setzen, und zwar:

$$r = \sqrt{0,01 e^2 + \rho^2} + e \quad \text{bis} \quad \sqrt{0,018 e^2 + \rho^2} + e.$$

Die Kraft, die den Bruchquerschnitt auf Zug beansprucht, ist $\frac{P}{2} \sin 45^\circ$, das Biegemoment $M_b = \frac{P}{2} \cdot (x + y)$, während die Schubkraft $\frac{P}{2} \cos 45^\circ$ vernachlässigt werden darf. Der Bruchquerschnitt ist rechteckig und besitzt die Breite b , die Höhe e . (Vgl. auch die Berechnung des Kurbelwellenlagers im Abschnitt Lager.)

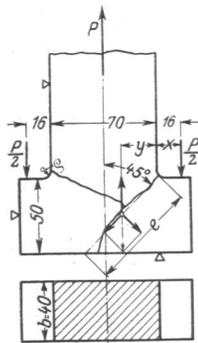


Abb. 54. Zur Berechnung von Teilen mit scharfen oder abgerundeten Kehlen.

XI. Federn.

Man unterscheidet Biegungs- und Drehungsfedern. Die Grundlagen für ihre Berechnung bilden die Formeln der Biege- und Drehfestigkeit. Für Federn, die zur Aufnahme oder Ausübung von Kräften dienen, ist die Tragfähigkeit oder die Kraft, die sie ausüben können, für Federn, die Stöße auffangen oder zum Antriebe benutzt werden sollen, außerdem die Arbeitsfähigkeit maßgebend. Letztere ist unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität und der Verhältnismöglichkeit zwischen Formänderungen und Spannungen des Baustoffes durch eine Dreiecksfläche

$$ABC = \mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} \tag{47}$$