IX. Zusammengesetzte Festigkeit.

Bei Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit empfiehlt es sich, zunächst den Einfluß der einzelnen Kräfte oder Momente getrennt zu ermitteln, um die Größe ihres Einflusses und ihre Wichtigkeit beurteilen zu können und dann erst die Spannungen zusammenzusetzen. Gleichartige Spannungen, einerseits Längs-, andererseits Schubspannungen, werden algebraisch summiert, wenn sie dieselbe Richtung haben, so daß z. B. bei der gleichzeitigen Inanspruchnahme auf Zug durch σ_z und auf Biegung durch $+\sigma_{b1}$ und $-\sigma_{b2}$ die größten auftretenden Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_z + \sigma_{b1} = \frac{P}{F} + \frac{M_b}{J}\cdot e_1, \\ \sigma_2 &= \sigma_z - \sigma_{b2} = \frac{P}{F} - \frac{M_b}{J}\cdot e_2 \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

werden. σ_1 und σ_2 dürfen die zulässigen Beanspruchungen auf Zug k_z, Druck k oder Biegung k_b nicht überschreiten.

Für den Fall, daß die zulässige Biegespannung von der auf Zug wesentlich verschieden ist, wie es für Gußeisen zutrifft, empfiehlt Bach eine Berichtigungszahl $\beta_0 = \frac{k_b}{k_z}$ einzuführen: es muß

$$\sigma_1' = \beta_0\cdot\sigma_z + \sigma_{b1} \leqq k_b \quad (40)$$

sein.

Erzeugt ein Drehmoment in irgendeinem Punkte eines Querschnitts die Schubspannung τ_d, eine Schubkraft die Spannung τ_s, so summieren sich beide, wenn ihre Richtungen übereinstimmen; anderenfalls sind sie geometrisch zu vereinigen.

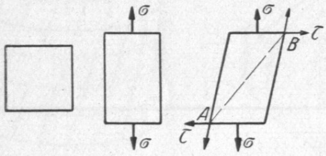

Abb. 47—49. Zur Zusammensetzung von Längs- und Schubspannungen.

Für die häufig vorkommende Zusammensetzung von Längsspannungen σ mit Schubspannungen τ, die in ein und demselben Querschnitt gleichzeitig auftreten, erhält man verschiedene Formeln, je nachdem, ob man davon ausgeht, daß die größte Dehnung, die der Baustoff erleidet, oder die größte Schubspannung, die gegebenenfalls das Abgleiten einzelner Teile gegeneinander bedingt, maßgebend ist. Im Maschinenbau benutzt man bisher meist die erste Annahme, die zur sogenannten ideellen Hauptspannung, reduzierten Spannung oder Anstrengung des Werkstoffes führt. Zu dem Begriff sei das folgende bemerkt: Ein würfelförmiges Element von der Seitenlänge *1*, Abb. 47, geht unter der Wirkung einer Längsspannung σ in ein Rechtflach, Abb. 48, über. Tritt noch eine Schubspannung τ, Abb. 49, hinzu, die bekanntlich längs der vier Begrenzungsflächen des Elementes gleichzeitig wirkt, so wird das Rechtflach in ein Parallelepiped verzerrt. Betrachtet man die einzelnen Fasern desselben, so werden offenbar diejenigen in der Nähe der Diagonale AB am stärksten gedehnt. Unter „Anstrengung" versteht man nun die innere Kraft, welche diese Fasern in gleichem Maße dehnen würde; man kann sie begrifflich bestimmen als die gedachte innere Kraft, die für sich allein die größte Dehnung erzeugen würde, die tatsächlich durch das Zusammenwirken zweier oder mehrerer Spannungen entsteht. (Unter Spannung dagegen versteht man die wirkliche, auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft.)

Im genannten Falle wird die Anstrengung:

$$\sigma_i = \frac{m-1}{2m}\cdot\sigma \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}\,.$$

Die Formel geht mit $m = \frac{10}{3}$ in

$$\sigma_i = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\tau)^2}$$

über und kann in der angenäherten Form

$$\sigma_i = \frac{1}{3}\,\sigma \pm \frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\tau)^2} \quad (41)$$

leicht im Gedächtnis behalten werden. α_0 berücksichtigt dabei nach Bach die nach der Art der Belastung (ruhend, schwellend oder wechselnd) oft zahlenmäßig verschieden hohe, zulässige Beanspruchung durch Längs- und Schubspannungen. Es ist

$$\alpha_0 = \frac{\text{zulässige Längsspannung}}{1{,}3 \cdot \text{zulässige Schubspannung}}, \tag{42}$$

also z. B. bei Inanspruchnahme auf Biegung und Drehung

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3 \cdot k_d},$$

bei Belastung durch Zug und Schub

$$\alpha_0 = \frac{k_z}{1{,}3 \cdot k_s}$$

zu setzen. Die errechnete Anstrengung darf die dem Belastungsfalle entsprechende Längsspannung k_z, k, k_b nicht überschreiten.

Die Formel (41) gestattet die Ableitung einer Gleichung für die unmittelbare Zusammensetzung der die Spannungen erzeugenden Biege- und Drehmomente M_b und M_d zu ideellen Biegemomenten M_i, jedoch nur im Falle kreisförmigen Querschnitts des Körpers. Hat dieser einen Durchmesser d, so ergibt sich, wenn beide Seiten mit $\frac{\pi}{32} d^3$ multipliziert werden

$$\frac{\pi}{32} d^3 \cdot \sigma_i = \frac{1}{3} \frac{\pi}{32} d^3 \cdot \sigma_b \pm \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{32} d^3 \sigma_b\right)^2 + \left(\alpha_0 \frac{\pi}{16} d^3 \tau_d\right)^2}$$

oder

$$M_i = \frac{1}{3} M_b + \frac{2}{3} \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}. \tag{43}$$

Aus dem ideellen Moment M_i folgt die Höhe der Beanspruchung:

$$\sigma_b = \frac{32\, M_i}{\pi \cdot d^3}.$$

Eine Benutzung der Formel für sonstige Querschnitte, an denen die größten Biegespannungen in anderen Fasern als die größten Schubspannungen auftreten, so daß diese nicht unmittelbar zusammengesetzt werden können, ist nicht zulässig.

Nimmt man in der Formel (41) $\sigma = 0$ und $\alpha_0 = 1$ an, betrachtet also den Grenzfall, daß nur Schubspannungen wirken, so führt die Gleichung zu der Beziehung $\sigma_i = \frac{2}{3} \sqrt{4\tau^2}$, also $\frac{\tau}{\sigma_i} = 0{,}75$, daß also das Verhältnis gleichwertiger Schub- und Längsspannungen an Körpern gleichen Baustoffes 0,75 betragen müßte. Scher- und Zugversuche liefern nun im Durchschnitt eine nur wenig höhere Zahl, nämlich 0,8, wenn man die Spannungen aus den Bruchlasten berechnet.

Den Fall, daß gleichzeitig zwei senkrecht zueinander gerichtete Längsspannungen wirken, wie es u. a. bei der Beanspruchung von Gefäßwänden durch äußeren oder inneren Druck vorkommt, verdeutlichen Abb. 50—52. Durch die Spannung σ_1 wird das gezeichnete Element in Richtung dieser Spannung gereckt; tritt aber die Zugspannung σ_2 hinzu, so wird die Verlängerung und damit auch die Anstrengung des Elementes in Richtung von σ_1 vermindert. Eine Druckspannung $-\sigma_2$ würde sie dagegen erhöhen. Bei drei senkrecht zueinander wirkenden Längsspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 werden die Anstrengungen in Richtung der drei Achsen:

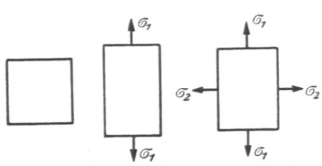

Abb. 50—52. Zur Zusammensetzung von Längsspannungen.

$$\sigma_{i1} = \sigma_1 - \frac{1}{m}(\sigma_2 + \sigma_3); \quad \sigma_{i2} = \sigma_2 - \frac{1}{m}(\sigma_1 + \sigma_3); \quad \sigma_{i3} = \sigma_3 - \frac{1}{m}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Die größte von ihnen darf die zulässige Längsspannung nicht überschreiten.

Geht man dagegen von der **größten Schubspannung** aus, so muß

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqq k_s \tag{44}$$

sein. Die wieder nur für den kreisförmigen Querschnitt geltende Formel für das **ideelle Moment** lautet dann

$$M_{di} = \sqrt{M_b^2 + M_d^2}\,, \tag{45}$$

während die dazugehörige Beanspruchung nach

$$\tau_d = \frac{16\, M_{di}}{\pi\, d^3}$$

zu beurteilen wäre.

Wirken drei Längsspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 senkrecht zueinander, von denen z. B. σ_1 den größten und σ_2 den kleinsten Wert habe, so entsteht eine größte Schubspannung $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Auf sie hat die dritte, zwischen der größten und der kleinsten liegende Spannung — in dem betrachteten Falle σ_3 — keinen Einfluß.

Für den Grenzfall $\tau = 0$ erhält man aus Gleichung (44) $\frac{\tau_{\max}}{\sigma} = \frac{1}{2}$. Bestätigungen dieser Beziehung und der Theorie, daß die größte Schubspannung maßgebend ist, bieten die Arbeiten von **Guest** [I,10], v. **Kármán** [I,11] u. a., die die Fließvorgänge an Flußeisen, Kupfer und Marmor näher untersuchten, so daß sich der Widerspruch zwischen den Formeln (41) und (44) vielleicht dadurch aufklärt, daß für die Einleitung des Bruches die größte Dehnung, für die ersten Fließerscheinungen dagegen die größte Schubspannung maßgebend ist.

Da nun die Spannungen in den Maschinenteilen unter der Fließgrenze bleiben sollen, um größere und bleibende Formänderungen zu vermeiden, ist es wohl berechtigt, nach den Formeln (44) und (45) zu rechnen. Dabei darf aber die Beurteilung der Sicherheit nicht nach der Bruchfestigkeit des Werkstoffes erfolgen; die errechneten Werte müssen vielmehr mit der Schubspannung an der Streckgrenze $\tau_s = \frac{1}{2}\sigma_s$ verglichen werden. Die so gefundenen Sicherheitsgrade weichen von den gewohnten ab. Es empfiehlt sich daher, solange genügende Erfahrungszahlen fehlen, die Festigkeitsrechnungen nach der bisherigen Art durchzuführen, sie aber nach der zweiten auf die Sicherheit gegen Eintreten des Fließens nachzuprüfen. Für Werkstoffe ohne ausgeprägte Fließgrenze, wie Gußeisen, erübrigt sich die Rechnung nach der zweiten Anschauung.

In geeigneten Beispielen des Buches sind die Ergebnisse der Rechnung nach den beiden Annahmen nebeneinander gestellt.

X. Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

Es bedeuten:

e_1 und e_2 Abstände der äußersten Fasern des Querschnittes von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie. Positiv zu rechnen, wenn sie von dem Krümmungsmittelpunkt abliegen, negativ, wenn sie nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet sind,

F Querschnittfläche in cm²,

M_b das den Querschnitt beanspruchende Biegemoment in kg cm. Positiv, wenn es den Körper stärker zu krümmen, negativ, wenn es die Krümmung zu verringern sucht,

P die im Schwerpunkt des Querschnittes wirkende Längskraft in kg, als Zugkraft positiv, als Druckkraft negativ einzusetzen,