ruhende Wirkung angegeben sind; rasch bewegte müssen **geschmiert** werden. Das Wesen der Schmierung ist, die große Reibung zwischen festen Körpern durch die geringere Flüssigkeitsreibung zwischen den Teilchen des Schmiermittels zu ersetzen. Das Schmiermittel darf nicht verdrängt werden; deswegen sind nur geringere, von den Betriebsverhältnissen und der Art des Schmiermittels abhängige Flächendrücke zulässig, für welche bei den Zapfen, Lagern, Schrauben usw. Einzelwerte angegeben sind.

VI. Biegefestigkeit.

Der Fall der Biegung liegt vor, wenn die äußeren Kräfte in bezug auf den Stabquerschnitt ein Kräftepaar bilden, dessen Ebene durch die Stabachse geht. Bei dem an seinem Ende durch die Einzelkraft P belasteten Freiträger, Abb. 29, läßt sich das Kräftepaar nachweisen, wenn man in einem beliebigen Querschnitte im Abstande x vom Ende die Kraft P gleich- und entgegengesetzt gerichtet anbringt. Dadurch wird das Gleichgewicht nicht gestört, aber die Inanspruchnahme zurückgeführt auf ein Kräftepaar, das **Biegemoment**, $M_x = P \cdot x$ und eine Einzelkraft P, die den Querschnitt auf Schub in Anspruch nimmt. Die letztere kann meist vernachlässigt werden und gewinnt erst bei verhältnismäßig kurzer Länge des Freiträgers Bedeutung.

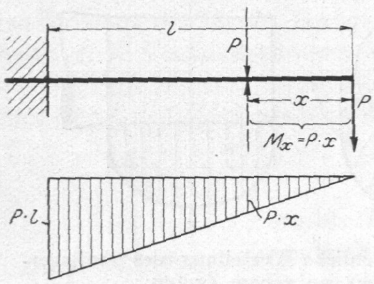


Abb. 29. Freiträger, durch Einzelkraft belastet, darunter Momentenfläche.

Die Biegemomente wachsen verhältnisgleich mit der Entfernung x; sie können mithin durch die dreieckige **Momentenfläche**, Abb. 29, dargestellt werden, in welcher die Ordinaten die zu den einzelnen Querschnitten gehörigen Biegemomente angeben. Das größte Moment $M_{max} = P \cdot l$ entsteht an der Einspannstelle. Für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle sind die Momente und ihre Verteilung in der folgenden Zusammenstellung enthalten.

A. Ermittlung der Biegemomente, der Momentenflächen und der Biegespannungen.

An einem **beliebig** belasteten Träger, Abb. 30, bestimmt man das **Biegemoment** M_x für den Querschnitt im Abstande x vom linken Lager rechnerisch, indem man zunächst einen der Auflagerdrücke A oder B ermittelt. Z. B. ergibt die Momentengleichung um den Punkt B

$$A = \frac{P_1 b_1 + P_2 \cdot b_2 + \cdots + Q \cdot b}{l}.$$

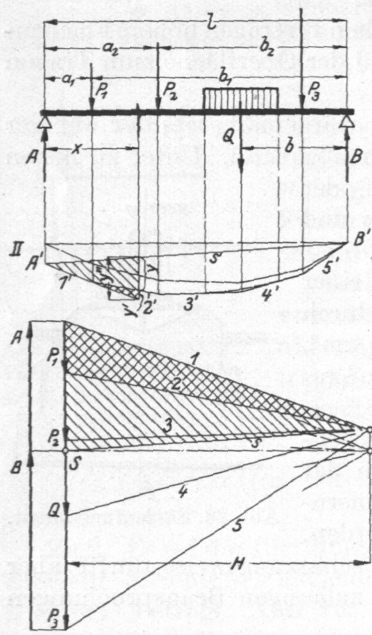


Abb. 30. Ermittlung der Biegemomente.

M_x ist dann durch die algebraische Summe der Momente der äußeren Kräfte links oder rechts vom Querschnitt x dargestellt:

$$M_x = A\,x - P_1\,(x - a_1).$$

Zeichnerisch wird die **Momentenfläche**, Abb. 30, wie folgt gefunden. Nachdem die gleichmäßig verteilte Last Q durch eine Mittelkraft ersetzt ist, trägt man die Kräfte der Reihe nach untereinander auf der Kraftlinie in irgendeinem Maßstabe an und wählt einen Pol O in einem beliebigen Abstande H. Die von O aus nach den Endpunkten der Kräfte gezogenen Geraden $1 \ldots 5$ bilden zusammen mit der Kraftlinie das Krafteck I und heißen Polstrahlen. Parallel zu ihnen laufen die Seilstrahlen $1' \ldots 5'$, die zum Seilzug *II* führen. Ihre Schnittpunkte liegen unter derjenigen Kraft, welche die entsprechenden Polstrahlen im Krafteck einschließen. So schneiden sich die Seilstrahlen *2′* und *3′* unter der Kraft P_2, die von den Polstrahlen *2* und *3* eingefaßt ist. Die Verbindungslinie der senkrecht unter den Auflagern A und B auf den äußersten Seilstrahlen liegenden Punkte A' und B' ist die Schlußlinie s' des Seilzuges. Sie liefert die Größe der Auflagerkräfte A und B im Krafteck, wenn man die Parallele s zu s' durch O bis zum Schnitt S mit der Kraftlinie zieht. B ist von s und *5* eingeschlossen, da sich s' und *5′* unter dem Stützpunkte B schneiden, A von s und *1*. Die Ordinaten des Seilzuges stellen nun die zu den einzelnen Querschnitten gehörenden Biegemomente dar. Das Seileck ist also zugleich Momentenfläche. Denn zur Abszisse x gehört das Moment $M_x = A \cdot x - P_1 (x - a_1)$, während sich die entsprechende Ordinate y der Momentenfläche als Differenz von $y'' - y'$ ausdrücken läßt. Für diese folgt aus der Ähnlichkeit der gleichartig gestrichelten Dreiecke:

$$\frac{y''}{x} = \frac{A}{H}, \quad \frac{y'}{x - a_1} = \frac{P_1}{H}; \quad y'' \cdot H = A \cdot x, \quad y' \cdot H = P_1 (x - a_1)$$

und

$$y \cdot H = (y'' - y') H = A \cdot x - P_1 (x - a_1) = M_x,$$

so daß

$$M_x = y \cdot H \tag{24}$$

wird.

Da aber der Polabstand H ein Festwert ist, so wachsen die Biegemomente verhältnisgleich den Ordinaten y der Momentenfläche. Zu ihrer zahlenmäßigen Ermittlung ist eine der Größen y und H im Längenmaßstabe m_l, die andere im Kräftemaßstab m_k zu messen.

Die gleichmäßige Verteilung der Last Q auf einer größeren Strecke bedingt eine Verringerung der Momente, die durch parabolische Ausrundung des Seilzuges unter Q, Abb. 30, berücksichtigt werden kann.

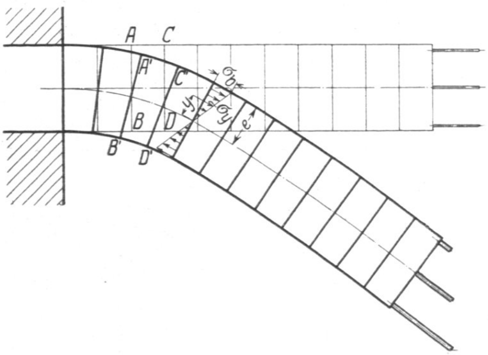
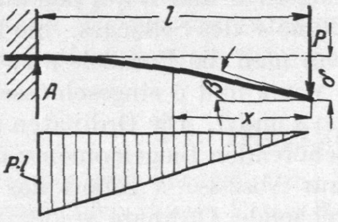
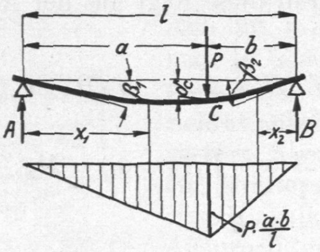
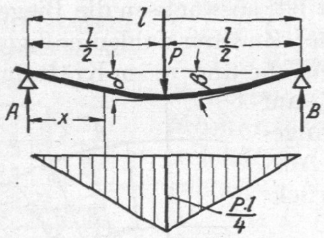
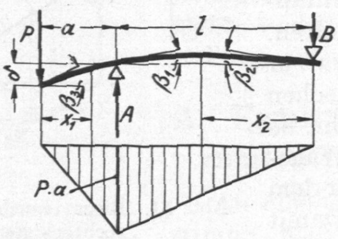
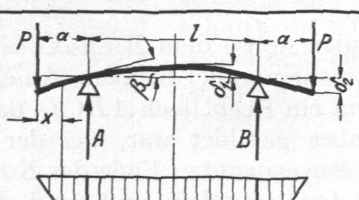
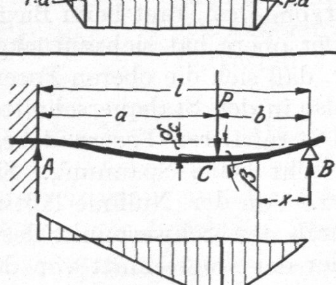


Abb. 31. Biegeversuch an einem Gummikörper rechteckigen Querschnitts.

Bei der ersten Wahl des Pols wird die Schlußlinie im allgemeinen eine Neigung erhalten. Ist ein wagrechter Verlauf derselben, etwa zur Ermittelung der Neigungswinkel der elastischen Linie bei Wellenuntersuchungen erwünscht, so braucht der neue Pol O' nur auf einer Wagerechten durch S senkrecht unter oder über dem früheren Pol O gewählt zu werden. Damit würde sich der gestrichelte Seilzug ergeben.

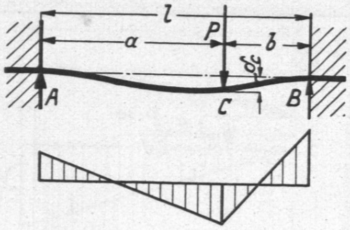
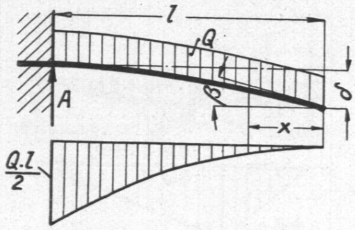
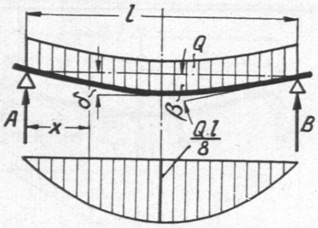
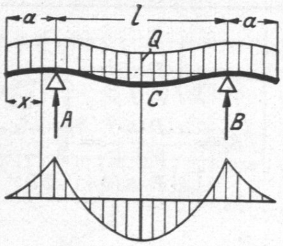
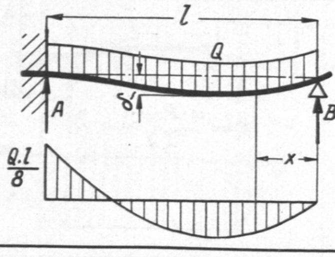
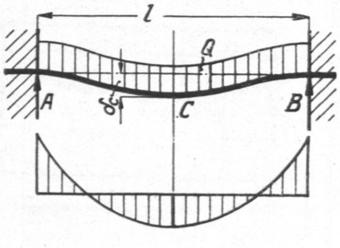
Unterwirft man einen Stab mit gerader Achse dem Biegeversuch, so zeigt sich, daß seine Querschnitte eben, aber nicht mehr parallel bleiben. An einem Gummikörper rechteckigen Querschnitts, Abb. 31, nimmt ein Rechtflach $ABCD$, das durch zwei Querschnitte des unbelasteten, geraden Stabes gebildet war, bei der Biegung Keilform $A'B'C'D'$ an. Von drei Drähten, die am eingespannten Ende des Körpers ebenfalls festgehalten, im übrigen aber in Bohrungen frei beweglich sind, und die im unbelasteten Zustande gleich weit aus der Endfläche hervorstehen, ragt beim Biegen des Körpers nur der mittlere noch eben so weit heraus. Der obere hat sich zurückgezogen, der untere ist weiter hervorgetreten, ein Beweis dafür, daß sich die oberen Fasern des Körpers verlängert, die unteren verkürzt haben, daß also in den Stabquerschnitten gleichzeitig Zug- und Druckspannungen vorhanden sind. Die mittleren Fasern dagegen haben ihre ursprüngliche Länge behalten; in ihnen herrscht keine Spannung. Sie bilden im Querschnitt die Nullinie oder neutrale Faser. Von der Nullinie läßt sich zeigen, daß sie bei reiner Beanspruchung auf Biegung durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und senkrecht zur Kraftlinie steht, in der der Querschnitt von der Biegemomentenebene getroffen wird, vorausgesetzt, daß diese mit einer der Hauptachsen des Querschnitts

Zusammenstellung 5. Die wichtigsten Fälle

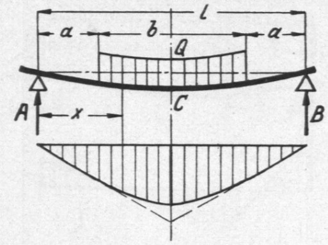
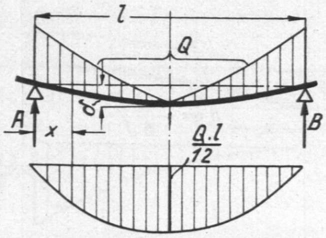
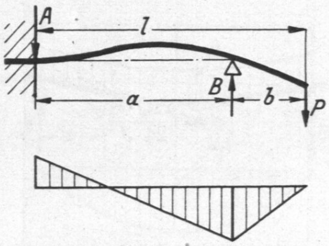
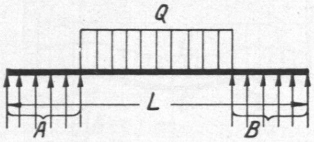
Lfde. Nr.	Belastungsfall		Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
1	Freiträger, am Ende belastet		$A = P$	$M_x = P \cdot x$
2	Träger auf 2 Stützen, dazwischen belastet		$A = \frac{P \cdot b}{l}$; $B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{x_1} = A \cdot x_1$ $M_{x_2} = B \cdot x_2$
3	Träger auf 2 Stützen, in der Mitte belastet		$A = B = \frac{P}{2}$	$M_x = \frac{P}{2} \cdot x$
4	Träger auf 2 Stützen, außerhalb belastet		$A = \frac{P\,(a+l)}{l}$ $B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{x_1} = P \cdot x_1$ $M_{x_2} = B \cdot x_2$
5	Kragträger auf 2 Stützen, an beiden Enden symmetrisch belastet		$A = B = P$	$M_x = P \cdot x$
6	An einem Ende eingespannter, am anderen Ende gestützter Träger		$A = \frac{P(2b^2 + 6ab + 3a^2)b}{2l^3}$ $B = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{2l^3}$	$M_x = B \cdot x$

der Inanspruchnahme auf Biegung.

Biegemomente $M_{\max}$	Durchbiegung δ	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = P \cdot l$ an der Einspannstelle	$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{3 \cdot J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2}{2 J}$	—
$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$ in C	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P\, a^2 \cdot b^2}{3 J \cdot l}$	$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot P a \cdot b (a + 2b)}{6 J \cdot l}$ $\beta_2 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a b (2a + b)}{6 J \cdot l}$	—
$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4}$	$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{48 \cdot J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2}{16 \cdot J}$	—
$M_{\max} = P \cdot a$ über A	Am freien Ende: $\delta = \frac{\alpha\, P \cdot a^2 (a + l)}{3 J}$	$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{3 \cdot J}$ $\beta_2 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{6 J} = \frac{\beta_1}{2}$ $\beta_3 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a (3a + 2l)}{6 J}$	—
$M_{\max} = P \cdot a$ zwischen A und B	$\delta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2 \cdot a}{8 \cdot J}$ $\delta_2 = \frac{\alpha \cdot P}{J} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 \cdot l}{2} \right)$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{2 J}$	Elastische Linie zwischen A und B: Kreisbogen vom Halbmesser $\varrho = \frac{J}{\alpha \cdot P \cdot a}$
Einspannungsmoment $M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b (a + 2b)}{2 l^2}$ Moment in C $M_C = \frac{P\, a^2 \cdot b (2a + 3b)}{2 l^3}$	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P\, a^3 b^2 (3a + 4b)}{12 \cdot \cdot J l^3}$	—	$M_A = M_C$ für $a = 1{,}41 \cdot b$

Lfde. Nr.	Belastungsfall		Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
7	Beiderseits eingespannter Träger		$A = \frac{P\cdot(3a+b)\cdot b^2}{l^3}$ $B = \frac{P\,(a+3b)\cdot a^2}{l^3}$	$M_A = \frac{P\cdot a\,b^2}{l^2}$ $M_C = \frac{2\,P\cdot a^2\cdot b^2}{l^3}$
8	Freiträger, gleichmäßig belastet		$A = Q$	$M_x = \frac{Q\cdot x^2}{2\,l}$
9	Träger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet		$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q\cdot x}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$
10	Kragträger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet		$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q\cdot x^2}{2\,(l+2\,a)}$
11	An einem Ende eingespannter, am andern gestützter Träger, gleichmäßig belastet		$A = \frac{5}{8}\,Q$ $B = \frac{3}{8}\,Q$	$M_x = B\cdot x - \frac{Q}{l}\,\frac{x^2}{2}$ $= \frac{Q}{2}\left(\frac{3}{4}\,x + \frac{x^2}{l}\right)$
12	Beiderseits eingespannter Träger, gleichmäßig belastet		$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_C = \frac{1}{24}\,Q\cdot l$

Biegemomente $M_{\max}$	Durchbiegung	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = M_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$	$\delta_c = \frac{\alpha P a^3 \cdot b^3}{3 J \cdot l^3}$	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{2}$ an der Einspannstelle	$\delta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{8 J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^2}{6 J}$	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8}$ in der Mitte	$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^2}{24 \cdot J}$	—
$M_A = M_B = \frac{Q \cdot a^2}{2(l + 2a)}$ $M_C = \frac{Q}{4}\left(a - \frac{l}{2}\right)$	—	—	$M_A = M_B = -M_C$ für $a = \frac{l}{\sqrt{8}} = 0{,}354\, l$
Einspannungsmoment $M_A = \frac{Q \cdot l}{8}$	$\delta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{185 J}$	—	—
Einspannungsmoment $M_A = M_B = \frac{1}{12} Q \cdot l$	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{384 J}$	—	—

Lfde. Nr.	Belastungsfall		Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
13	Träger auf 2 Stützen, im mittleren Teil gleichmäßig belastet		$A=B=\frac{Q}{2}$	$M_x=\frac{Q}{2}\left(x-\frac{(x-a)^2}{b}\right)$
14	Träger auf 2 Stützen, durch dreieckförmig verteilte Last beansprucht		$A=B=\frac{Q}{2}$	$M_x=Q\cdot x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}+\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$
15	Träger an einem Ende eingespannt, am andern gestützt, außen belastet		$A=\frac{3}{2}P\frac{b}{a}$ $B=\frac{P\cdot(2a+3b)}{2a}$	$M_A=\frac{P\cdot b}{2}$
16	Körper auf 2 Stützen, Last und Auflagerdruck gleichmäßig verteilt		$A=B=\frac{Q}{2}$	—

zusammenfällt. Das letztere trifft immer zu, wenn der Querschnitt symmetrisch zur Kraftlinie ausgebildet ist. Unter der Annahme der Verhältnisgleichheit zwischen Dehnungen und Spannungen nehmen diese geradlinig mit der Entfernung von der Nullinie zu und erreichen im Abstande y die Größe

$$\sigma_y=\frac{M_b}{J}\cdot y\,, \tag{25}$$

wenn J das auf die Nullinie bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet. Die größte Spannung tritt in den von der Nullinie am weitesten entfernten Fasern im Abstande e ein und ist

$$\sigma_{\max}=\sigma_b=\frac{M_b}{J}\cdot e\,. \tag{26}$$

$\frac{J}{e}$ wird als Widerstandsmoment W bezeichnet, so daß schließlich

$$\sigma_{\max}=\sigma_b=\frac{M_b}{W} \tag{27}$$

wird. Die Spannungsverteilung ist also durch überschlagene Dreiecke gegeben, wie sie u. a. Abb. 34 für mehrere Querschnitte zeigt.

Überschreitet die größte Spannung bei zähen Stoffen die Fließgrenze, so treten bleibende Durchbiegungen auf. Bei spröden ist der Bruch zu erwarten, wenn in den

Biegemomente M_{max}	Durchbiegung	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{max} = M_C = \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4}\right)$	—	—	—
$M_{max} = \frac{Q \cdot l}{12}$ in der Mitte	$\delta = \frac{3}{320} \cdot \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{J}$	—	—
$M_B = P \cdot b$	—	—	—
$M_{max} = \frac{Q \cdot L}{8}$ in der Mitte	—	—	—

äußersten Fasern die Festigkeit des Baustoffes, in der Regel die Zugfestigkeit, erreicht wird.

Geht man von der zulässigen Beanspruchung auf Biegung k_b aus, so wird das nötige Widerstandsmoment

$$W = \frac{M_b}{k_b}. \qquad (28)$$

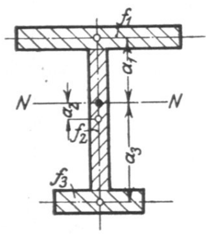


Abb. 32. Zur Ermittelung des Trägheitsmoments.

B. Trägheits- und Widerstandsmomente.

Die Trägheits- und Widerstandsmomente der wichtigsten Querschnitte sind in der folgenden Zusammenstellung, bezogen auf die durch $N\,N$ gekennzeichneten Nullinien, enthalten. Zusammengesetzte Querschnitte, deren Trägheitsmoment für eine beliebige Achse, z. B. in bezug auf die Nullinie NN, Abb. 32, zu ermitteln ist, zerlegt man in Teile, deren Inhalte f_1, f_2 . . . und Trägheitsmomente J_1, J_2, . . . um die zu NN parallelen Schwerachsen leicht bestimmbar sind. Dann ergibt sich das Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts aus

$$J = J_1 + a_1^2 \cdot f_1 + J_2 + a_2^2 \cdot f_2 + \cdots,$$

wenn a_1, a_2 . . . die Abstände der Schwerlinien der Teilquerschnitte von NN bedeuten.