

ruhende Wirkung angegeben sind; rasch bewegte müssen geschmiert werden. Das Wesen der Schmierung ist, die große Reibung zwischen festen Körpern durch die geringere Flüssigkeitsreibung zwischen den Teilchen des Schmiermittels zu ersetzen. Das Schmiermittel darf nicht verdrängt werden; deswegen sind nur geringere, von den Betriebsverhältnissen und der Art des Schmiermittels abhängige Flächendrücke zulässig, für welche bei den Zapfen, Lagern, Schrauben usw. Einzelwerte angegeben sind.

VI. Biegefestigkeit.

Der Fall der Biegung liegt vor, wenn die äußeren Kräfte in bezug auf den Stabquerschnitt ein Kräftepaar bilden, dessen Ebene durch die Stabachse geht. Bei dem an seinem

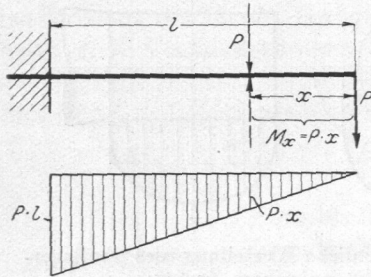


Abb. 29. Freitragler, durch Einzelkraft belastet, darunter Momentenfläche.

Ende durch die Einzelkraft P belasteten Freitragler, Abb. 29, läßt sich das Kräftepaar nachweisen, wenn man in einem beliebigen Querschnitte im Abstände x vom Ende die Kraft P gleich- und entgegengesetzt gerichtet anbringt. Dadurch wird das Gleichgewicht nicht gestört, aber die Inanspruchnahme zurückgeführt auf ein Kräftepaar, das Biegemoment, $M_x = P \cdot x$ und eine Einzelkraft P , die den Querschnitt auf Schub in Anspruch nimmt. Die letztere kann meist vernachlässigt werden und gewinnt erst bei verhältnismäßig kurzer Länge des Freitragers Bedeutung.

Die Biegemomente wachsen verhältnismäßig mit der Entfernung x ; sie können mithin durch die dreieckige Momentenfläche, Abb. 29, dargestellt werden, in welcher die Ordinaten die zu den einzelnen Querschnitten gehörigen Biegemomente angeben. Das größte Moment $M_{\max} = P \cdot l$ entsteht an der Einspannstelle. Für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle sind die Momente und ihre Verteilung in der folgenden Zusammenstellung enthalten.

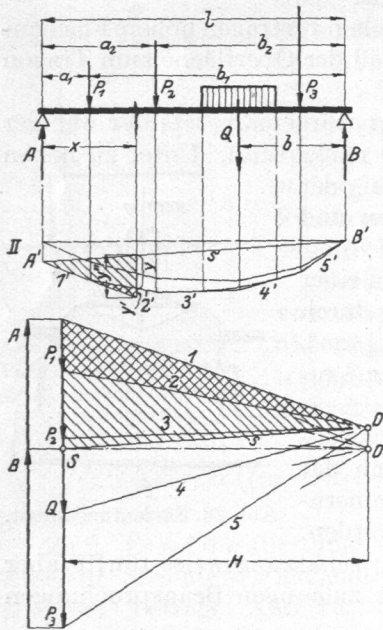


Abb. 30. Ermittlung der Biegemomente.

A. Ermittlung der Biegemomente, der Momentenflächen und der Biegespannungen.

An einem beliebig belasteten Träger, Abb. 30, bestimmt man das Biegemoment M_x für den Querschnitt im Abstände x vom linken Lager rechnerisch, indem man zunächst einen der Auflagerdrücke A oder B ermittelt. Z. B. ergibt die Momentengleichung um den Punkt B

$$A = \frac{P_1 b_1 + P_2 \cdot b_2 + \dots + Q \cdot b}{l}$$

M_x ist dann durch die algebraische Summe der Momente der äußeren Kräfte links oder rechts vom Querschnitt x dargestellt:

$$M_x = Ax - P_1(x - a_1).$$

Zeichnerisch wird die Momentenfläche, Abb. 30, wie folgt gefunden. Nachdem die gleichmäßig verteilte Last Q durch eine Mittelkraft ersetzt ist, trägt man die Kräfte der Reihe nach untereinander auf der Kraftlinie in irgendeinem Maßstabe an und wählt einen Pol O in einem beliebigen Abstände H . Die von O aus nach den Endpunkten der Kräfte gezogenen Geraden $1 \dots 5$ bilden zusammen mit der Kraftlinie das Krafteck I und heißen Polstrahlen. Parallel zu ihnen laufen die Seilstrahlen $1' \dots 5'$,

die zum Seilzug *II* führen. Ihre Schnittpunkte liegen unter derjenigen Kraft, welche die entsprechenden Polstrahlen im Kraffteck einschließen. So schneiden sich die Seilstrahlen *2'* und *3'* unter der Kraft *P*₂, die von den Polstrahlen *2* und *3* eingefasst ist. Die Verbindungslinie der senkrecht unter den Auflagern *A* und *B* auf den äußersten Seilstrahlen liegenden Punkte *A'* und *B'* ist die Schlußlinie *s'* des Seilzuges. Sie liefert die Größe der Auflagerkräfte *A* und *B* im Kraffteck, wenn man die Parallele *s* zu *s'* durch *O* bis zum Schnitt *S* mit der Kraftlinie zieht. *B* ist von *s* und *5* eingeschlossen, da sich *s'* und *5'* unter dem Stützpunkte *B* schneiden, *A* von *s* und *1*. Die Ordinaten des Seilzuges stellen nun die zu den einzelnen Querschnitten gehörenden Biegemomente dar. Das Seileck ist also zugleich Momentenfläche. Denn zur Abszisse *x* gehört das Moment $M_x = A \cdot x - P_1(x - a_1)$, während sich die entsprechende Ordinate *y* der Momentenfläche als Differenz von *y''* - *y'* ausdrücken läßt. Für diese folgt aus der Ähnlichkeit der gleichartig gestrichelten Dreiecke:

$$\frac{y''}{x} = \frac{A}{H}, \quad \frac{y'}{x - a_1} = \frac{P_1}{H}; \quad y'' \cdot H = A \cdot x, \quad y' \cdot H = P_1(x - a_1)$$

und

$$y \cdot H = (y'' - y')H = A \cdot x - P_1(x - a_1) = M_x,$$

so daß

$$M_x = y \cdot H \tag{24}$$

wird.

Da aber der Polabstand *H* ein Festwert ist, so wachsen die Biegemomente verhältnismäßig den Ordinaten *y* der Momentenfläche. Zu ihrer zahlenmäßigen Ermittlung ist eine der Größen *y* und *H* im Längenmaßstabe *m*_l, die andere im Kräftemaßstab *m*_k zu messen.

Die gleichmäßige Verteilung der Last *Q* auf einer größeren Strecke bedingt eine Verringerung der Momente, die durch parabolische Ausrundung des Seilzuges unter *Q*, Abb. 30, berücksichtigt werden kann.

Bei der ersten Wahl des Pols wird die Schlußlinie im allgemeinen eine Neigung erhalten. Ist ein wagrechter Verlauf derselben, etwa zur Ermittlung der Neigungswinkel der elastischen Linie bei Wellenuntersuchungen erwünscht, so braucht der neue Pol *O'* nur auf einer Wagerechten durch *S* senkrecht unter oder über dem früheren Pol *O* gewählt zu werden. Damit würde sich der gestrichelte Seilzug ergeben.

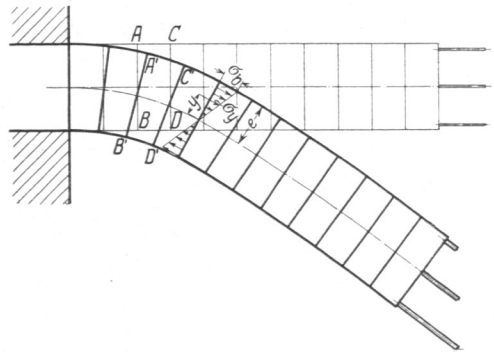
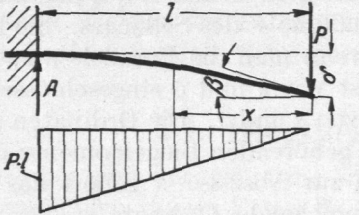
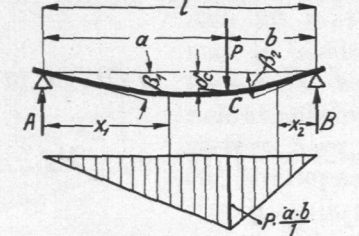
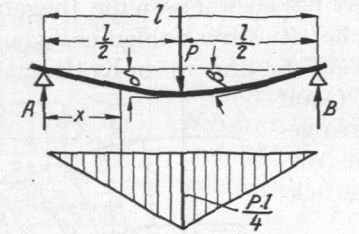
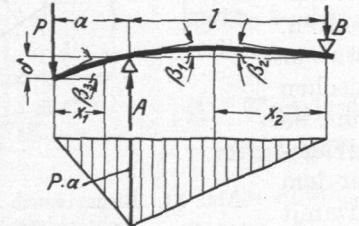
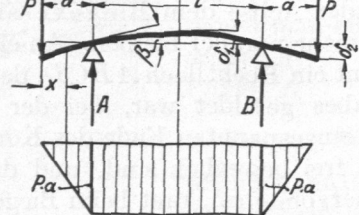
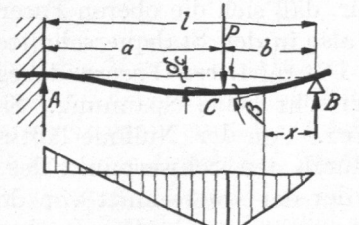


Abb. 31. Biegeversuch an einem Gummikörper rechteckigen Querschnitts.

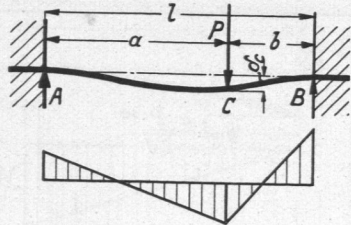
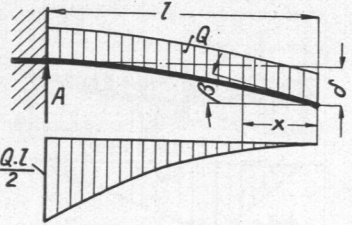
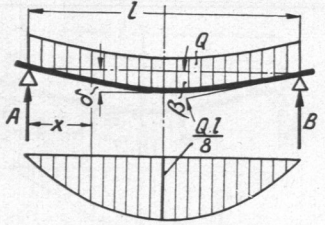
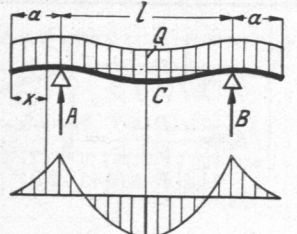
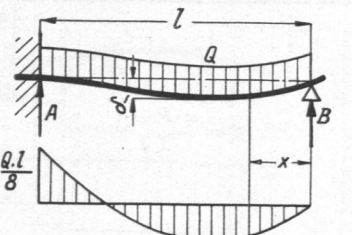
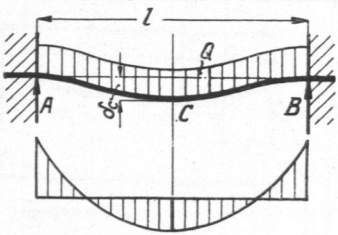
Unterwirft man einen Stab mit gerader Achse dem Biegeversuch, so zeigt sich, daß seine Querschnitte eben, aber nicht mehr parallel bleiben. An einem Gummikörper rechteckigen Querschnitts, Abb. 31, nimmt ein Rechteck *ABCD*, das durch zwei Querschnitte des unbelasteten, geraden Stabes gebildet war, bei der Biegung Keilform *A'B'C'D'* an. Von drei Drähten, die am eingespannten Ende des Körpers ebenfalls festgehalten, im übrigen aber in Bohrungen frei beweglich sind, und die im unbelasteten Zustande gleich weit aus der Endfläche hervorstehen, ragt beim Biegen des Körpers nur der mittlere noch eben so weit heraus. Der obere hat sich zurückgezogen, der untere ist weiter hervorgetreten, ein Beweis dafür, daß sich die oberen Fasern des Körpers verlängert, die unteren verkürzt haben, daß also in den Stabquerschnitten gleichzeitig Zug- und Druckspannungen vorhanden sind. Die mittleren Fasern dagegen haben ihre ursprüngliche Länge behalten; in ihnen herrscht keine Spannung. Sie bilden im Querschnitt die Nulllinie oder neutrale Faser. Von der Nulllinie läßt sich zeigen, daß sie bei reiner Beanspruchung auf Biegung durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und senkrecht zur Kraftlinie steht, in der der Querschnitt von der Biegemomentenebene getroffen wird, vorausgesetzt, daß diese mit einer der Hauptachsen des Querschnitts

Zusammenstellung 5. Die wichtigsten Fälle

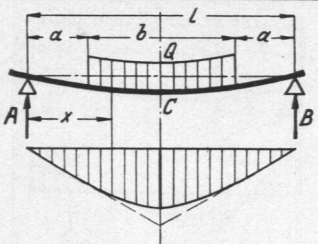
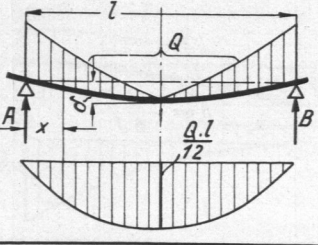
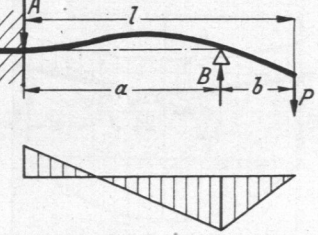
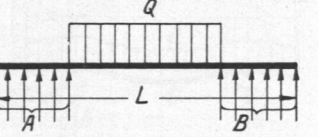
Lfde. Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
1	Freitragler, am Ende belastet 	$A = P$	$M_x = P \cdot x$
2	Träger auf 2 Stützen, dazwischen belastet 	$A = \frac{P \cdot b}{l}; B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{x_1} = A \cdot x_1$ $M_{x_2} = B \cdot x_2$
3	Träger auf 2 Stützen, in der Mitte belastet 	$A = B = \frac{P}{2}$	$M_x = \frac{P}{2} \cdot x$
4	Träger auf 2 Stützen, außerhalb belastet 	$A = \frac{P(a+l)}{l}$ $B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{x_1} = P \cdot x_1$ $M_{x_2} = B \cdot x_2$
5	Kragträger auf 2 Stützen, an beiden Enden symmetrisch belastet 	$A = B = P$	$M_x = P \cdot x$
6	An einem Ende eingespannter, am anderen Ende gestützter Träger 	$A = \frac{P(2b^2 + 6ab + 3a^2)b}{2l^3}$ $B = \frac{Pa^2(2a + 3b)}{2l^3}$	$M_x = B \cdot x$

der Inanspruchnahme auf Biegung.

Biegemomente M_{\max}	Durchbiegung δ	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = P \cdot l$ an der Einspannstelle	$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{3 \cdot J}$	$\beta = \frac{\bar{\alpha} \cdot P \cdot l^2}{2J}$	—
$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$ in C	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot a^2 \cdot b^2}{3J \cdot l}$	$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot b (a + 2b)}{6J \cdot l}$ $\beta_2 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot b (2a + b)}{6J \cdot l}$	—
$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4}$	$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{48 \cdot J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2}{16 \cdot J}$	—
$M_{\max} = P \cdot a$ über A	Am freien Ende: $\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot a^2 (a + l)}{3J}$	$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{3 \cdot J}$ $\beta_2 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{6J} = \frac{\beta_1}{2}$ $\beta_3 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a (3a + 2l)}{6J}$	—
$M_{\max} = P \cdot a$ zwischen A und B	$\delta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2 \cdot a}{8 \cdot J}$ $\delta_2 = \frac{\alpha \cdot P}{J} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 \cdot l}{2} \right)$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{2J}$	Elastische Linie zwischen A und B: Kreisbogen vom Halbmesser $\rho = \frac{J}{\alpha \cdot P \cdot a}$
Einspannungsmoment $M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b (a + 2b)}{2l^2}$ Moment in C $M_C = \frac{P \cdot a^2 \cdot b (2a + 3b)}{2l^3}$	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot a^3 \cdot b^2 (3a + 4b)}{12 \cdot J^3}$	—	$M_A = M_C$ für $a = 1,41 \cdot b$

Lfde. Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
7	Beiderseits eingespannter Träger 	$A = \frac{P \cdot (3a + b) \cdot b^2}{l^3}$ $B = \frac{P \cdot (a + 3b) \cdot a^2}{l^3}$	$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2}$ $M_C = \frac{2P \cdot a^2 \cdot b^2}{l^3}$
8	Freiträger, gleichmäßig belastet 	$A = Q$	$M_x = \frac{Q \cdot x^2}{2l}$
9	Träger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q \cdot x}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$
10	Kragträger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q \cdot x^2}{2(l + 2a)}$
11	An einem Ende eingespannter, am andern gestützter Träger, gleichmäßig belastet 	$A = \frac{5}{8} Q$ $B = \frac{3}{8} Q$	$M_x = B \cdot x - \frac{Q \cdot x^2}{2}$ $= \frac{Q}{2} \left(\frac{3}{4} x + \frac{x^2}{l}\right)$
12	Beiderseits eingespannter Träger, gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_C = \frac{1}{24} Q \cdot l$

Biegemomente M_{\max}	Durchbiegung	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = M_B$ $= \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$	$\delta_c = \frac{\alpha P a^3 \cdot b^3}{3 J \cdot l^3}$	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{2}$ an der Einspannstelle	$\delta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{8 J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^2}{6 J}$	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8}$ in der Mitte	$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^2}{24 \cdot J}$	—
$M_A = M_B = \frac{Q \cdot a^2}{2(l + 2a)}$ $M_C = \frac{Q}{4} \left(a - \frac{l}{2} \right)$	—	—	$M_A = M_B = -M_C \text{ für}$ $a = \frac{l}{\sqrt{8}} = 0,354 l$
Einspannungsmoment $M_A = \frac{Q \cdot l}{8}$	$\delta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{185 J}$	—	—
Einspannungsmoment $M_A = M_B = \frac{1}{12} Q \cdot l$	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{384 J}$	—	—

Lfd. Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
13	Träger auf 2 Stützen, im mittleren Teil gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q}{2} \left(x - \frac{(x-a)^2}{b} \right)$
14	Träger auf 2 Stützen, durch dreieckförmig verteilte Last beansprucht 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = Q \cdot x \left(\frac{1}{2} \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right)$
15	Träger an einem Ende eingespannt, am andern gestützt, außen belastet 	$A = \frac{3}{2} P \frac{b}{a}$ $B = \frac{P \cdot (2a + 3b)}{2a}$	$M_A = \frac{P \cdot b}{2}$
16	Körper auf 2 Stützen, Last und Auflagerdruck gleichmäßig verteilt 	$A = B = \frac{Q}{2}$	—

zusammenfällt. Das letztere trifft immer zu, wenn der Querschnitt symmetrisch zur Kraftlinie ausgebildet ist. Unter der Annahme der Verhältnissgleichheit zwischen Dehnungen und Spannungen nehmen diese geradlinig mit der Entfernung von der Nulllinie zu und erreichen im Abstände y die Größe

$$\sigma_y = \frac{M_b}{J} \cdot y, \quad (25)$$

wenn J das auf die Nulllinie bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet. Die größte Spannung tritt in den von der Nulllinie am weitesten entfernten Fasern im Abstände e ein und ist

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_b}{J} \cdot e. \quad (26)$$

$\frac{J}{e}$ wird als Widerstandsmoment W bezeichnet, so daß schließlich

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad (27)$$

wird. Die Spannungsverteilung ist also durch überschlagene Dreiecke gegeben, wie sie u. a. Abb. 34 für mehrere Querschnitte zeigt.

Überschreitet die größte Spannung bei zähen Stoffen die Fließgrenze, so treten bleibende Durchbiegungen auf. Bei spröden ist der Bruch zu erwarten, wenn in den

Biegemomente M_{\max}	Durchbiegung	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = M_C = \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4} \right)$	—	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{12}$ in der Mitte	$\delta = \frac{3}{320} \cdot \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{J}$	—	—
$M_B = P \cdot b$	—	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot L}{8}$ in der Mitte	—	—	—

äußersten Fasern die Festigkeit des Baustoffes, in der Regel die Zugfestigkeit, erreicht wird.

Geht man von der zulässigen Beanspruchung auf Biegung k_b aus, so wird das nötige Widerstandsmoment

$$W = \frac{M_b}{k_b}. \tag{28}$$

B. Trägheits- und Widerstandsmomente.

Die Trägheits- und Widerstandsmomente der wichtigsten Querschnitte sind in der folgenden Zusammenstellung, bezogen auf die durch NN gekennzeichneten Nulllinien, enthalten. Zusammengesetzte Querschnitte, deren Trägheitsmoment für eine beliebige Achse, z. B. in bezug auf die Nulllinie NN , Abb. 32, zu ermitteln ist, zerlegt man in Teile, deren Inhalte $f_1, f_2 \dots$ und Trägheitsmomente J_1, J_2, \dots um die zu NN parallelen Schwerachsen leicht bestimmbar sind. Dann ergibt sich das Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts aus

$$J = J_1 + a_1^2 \cdot f_1 + J_2 + a_2^2 \cdot f_2 + \dots,$$

wenn $a_1, a_2 \dots$ die Abstände der Schwerlinien der Teilquerschnitte von NN bedeuten.

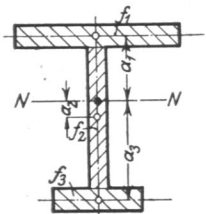


Abb. 32. Zur Ermittlung des Trägheitsmoments.

Zusammenstellung 6. Flächeninhalte, Trägheits- und Widerstandsmomente und Abstände der äußersten Fasern für die wichtigsten Querschnitte.

Lfd. Nr.	Querschnittform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W	Flächeninhalt F	Abstände der äußersten Fasern e_1, e_2
1		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$e_1 = e_2 = \frac{d}{2}$
2		$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$	$\frac{\pi D^4 - d^4}{32 D}$	$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$	$e_1 = e_2 = \frac{D}{2}$
3		$0,0069 d^4$	$W_1 = 0,0323 d^3$ $W_2 = 0,0238 d^3$	$\frac{\pi d^2}{8}$	$e_1 = 0,212 d$ $e_2 = 0,288 d$
4		$\frac{\pi a^3 \cdot b}{4}$	$\frac{\pi a^2 \cdot b}{4}$	$\pi a \cdot b$	$e_1 = e_2 = a$
5		$\frac{\pi (a^3 b - a_0^3 \cdot b_0)}{4}$	$\approx \frac{\pi}{4} (a + 3b) \cdot s$	$\pi (a b - a_0 b_0)$	$e_1 = e_2 = a$
6		$\frac{b h^3}{36}$	$W_1 = \frac{b h^2}{12}$ $W_2 = \frac{b h^2}{24}$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$e_1 = \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2}{3} h$
7		$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{b h^2}{6}$	$b \cdot h$	$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}$

Lfde. Nr.	Querschnittform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W	Flächeninhalt F	Abstände der äußersten Fasern e_1, e_2
8		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{12} = 0,118 a^3$	a^2	$e_1 = e_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,707 a$
9		$\frac{1}{12} (b h^3 - b_0 h_0^3)$	$\frac{1}{6} \frac{(b h^3 - b_0 h_0^3)}{h}$	$b \cdot h - b_0 \cdot h_0$	$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}$
10		$\frac{1}{12} (s h^3 + b_0 \cdot s_0^3)$	$\frac{1}{6} \frac{(s h^3 + b_0 \cdot s_0^3)}{h}$	$s \cdot h + b_0 \cdot s_0$	$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}$
11		$\frac{1}{12} (s \cdot h^3 + b_0 \cdot s_0^3) + s \cdot h \left(\frac{h - e_1}{2} \right)^2 + b_0 \cdot s_0 \left(e_1 - \frac{s_0}{2} \right)^2$	$W_1 = \frac{J}{e_1} \quad W_2 = \frac{J}{e_2}$	$s \cdot h + b_0 \cdot s_0$	$e_1 = \frac{1}{2} \frac{s h^2 + b_0 s_0^2}{s \cdot h + b_0 s_0}$ $e_2 = h - e_1$
12		$\frac{1}{36} \cdot \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2} h^3$	$W_1 = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{12 (b_1 + 2 b_2)} h^2$ $W_2 = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{12 (2 b_1 + b_2)} h^2$	$\frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$	$e_1 = \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2 b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3}$
13		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} a^4 = 0,54 \cdot a^4$	$0,625 a^3$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = 2,6 a^2$	$e_1 = e_2 = \frac{a \sqrt{3}}{2} = 0,866 \cdot a$
14		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} a^4 = 0,54 a^4$	$0,54 a^3$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = 2,6 a^2$	$e_1 = e_2 = a$

Ein zeichnerisches Verfahren hat Mohr angegeben. Der Querschnitt, Abb. 33, vom Gesamtflächeninhalte F , wird in eine Anzahl Streifen parallel zu der Achse BCD zerlegt, in bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll. Ihre einzelnen Flächeninhalte faßt man als Kräfte auf, denkt sie sich in den Schwerpunkten gleichlaufend zu BCD wirkend und zeichnet den zugehörigen Kräfte- und Seilzug unter Benutzung der Polweite $F/2$. Der Schnittpunkt A der äußersten Polstrahlen liefert die Schwerlinie SS ; der Inhalt der schräg gestrichelten Fläche f , multipliziert mit F , ergibt annähernd das Trägheitsmoment J in bezug auf SS .

$$J = f \cdot F,$$

wenn der Querschnitt in wirklicher Größe aufgezeichnet war. Genau erhält man das Trägheitsmoment, wenn an Stelle des Seilecks die von ihm eingehüllte, in Abb. 33 strichpunktierte Seilkurve als obere Begrenzung von f benutzt wird, die das Seileck unter den Trennungslinien der Streifen berührt.

Ist der Längenmaßstab, in welchem der Querschnitt aufgetragen wurde, $1 : m_l$,

so wird

$$J = f \cdot F \cdot m_l^4.$$

Für die zu SS parallele Achse BCD vergrößert sich das Trägheitsmoment entsprechend dem Inhalt des wagrecht gestrichelten Dreiecks ABC .

Beispiel. An dem in Abb. 33 im Maß-

stabe $\frac{1}{m_l} = 1 : 3$ dargestellten Querschnitte beträgt der Flächeninhalt $F = 3,98 \text{ cm}^2$, derjenige der Mohrschen Fläche unterhalb der Seilkurve $f = 5,10 \text{ cm}^2$, so daß das Trägheitsmoment

$$J = f \cdot F \cdot m_l^4 = 3,98 \cdot 5,10 \cdot 3^4 = 1640 \text{ cm}^4$$

wird. Bezogen auf die Achse BCD würde das Trägheitsmoment gemäß dem Inhalte des Dreiecks ABC von $1,14 \text{ cm}^2$ um $3,98 \cdot 1,14 \cdot 3^4 = 368 \text{ cm}^4$ wachsen. (Für die Ermittlung auf dem Reißbrett empfiehlt es sich im vorliegenden Falle, den Querschnitt in natürlicher Größe aufzuzeichnen.)

Fällt die Kraftlinie nicht mit einer der Hauptachsen des Querschnitts zusammen, so steht die Nulllinie schief zu jener. Die Bestimmung der auftretenden Spannungen erfolgt dann am einfachsten in der Weise,

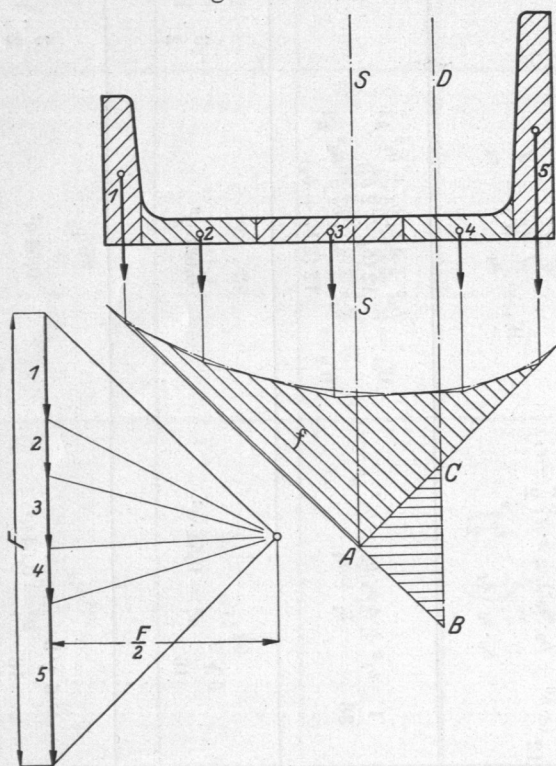


Abb. 33. Bestimmung des Trägheitsmomentes nach Mohr.

daß das Biegemoment nach den Hauptachsen zerlegt, die durch die Einzelmomente hervorgerufenen Spannungen ermittelt und für die zu untersuchenden Fasern, wie später gezeigt, wieder zusammengesetzt werden.

C. Körper gleichen Widerstandes gegen Biegung.

Wählt man die Form der auf Biegung beanspruchten Teile derart, daß die größte Beanspruchung in allen Querschnitten die gleiche ist, so entstehen Körper gleichen Widerstandes, die man vorteilhafterweise bei der Gestaltung von Maschinenteilen benutzen kann, weil sie den geringsten Aufwand an Baustoff verlangen. Sie sind durch die Gleichung

$$\sigma_b = \frac{M_x}{W_x} = \text{konst.} \quad (29)$$

Zusammenstellung. 7. Körper gleichen Widerstandes gegen Biegung.

Lfd. Nr.		Art des Trägers und der Belastung	Querschnitt	Begrenzungslinie
1		Freiträger durch Einzelkraft am freien Ende belastet	Rechteck mit konstanter Breite	Parabel, $y^2 = x \cdot \frac{h^2}{l}$
2		Freiträger durch Einzelkraft am freien Ende belastet	Rechteck mit konstanter Höhe	Gerade, $y = x \cdot \frac{b}{l}$
3		Träger auf 2 Stützen durch Einzelkraft belastet	Rechteck mit konstanter Breite	Parabeln, links von P: $y^2 = \frac{x \cdot h^2}{c}$, rechts von P: $y'^2 = \frac{x' \cdot h^2}{d}$
4		Träger auf 2 Stützen durch Einzelkraft belastet	Kreis	Kubische Parabeln links von P: $y^3 = \frac{x \cdot D^3}{c}$, rechts von P: $y'^3 = \frac{x' \cdot D^3}{d}$
5		Freiträger, gleichmäßig belastet	Rechteck mit konstanter Breite	Gerade, $y = x \cdot \frac{h}{l}$
6		Träger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet	Rechteck mit konstanter Breite	Ellipse, $\frac{y^2}{h^2} + \frac{4x^2}{l^2} = 1$

gekennzeichnet. Beispielweise ergibt sich für den Fall Nr. 1 der Zusammenstellung 7 über die Hauptformen, nämlich für einen Freitragler rechteckigen Querschnitts von der Länge l , der am Ende durch eine Einzelkraft P belastet ist, im Einspannungsquerschnitt von b cm Breite und h cm Höhe eine Biegespannung von

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b h^2}.$$

Wird die Breite des Trägers durchweg gleich, die Höhe y aber veränderlich angenommen, so folgt die Größe von y im Abstände x vom Ende aus

$$\frac{M_x}{W_x} = \frac{6 \cdot P \cdot x}{b \cdot y^2} = \text{konst.} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b h^2},$$

$$\frac{x}{y^2} = \frac{l}{h^2} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{h^2}{l} \cdot x.$$

Mithin ergibt sich eine parabolische Begrenzung des Trägers. Vernachlässigt ist bei den Ableitungen die Wirkung der Querkkräfte.

D. Gegenüber Biegung günstige Querschnittsformen.

Zur Aufnahme von Biegemomenten sind besonders solche Querschnittsformen geeignet, bei denen die Mehrzahl der Fasern in größerer Entfernung von der Nulllinie liegt,

weil dann deren Festigkeit gut ausgenutzt werden kann, da die Spannungen mit dem Abstände von der Nulllinie wachsen. Ein flußeiserner Unterzug von $l = 1$ m Stützweite für eine Säule, auf der $P = 1000$ kg Last ruhen, kann z. B. die in Abb. 34 dargestellten Querschnitte erhalten. Das nötige Widerstandsmoment beträgt bei einer zulässigen Beanspruchung von $k_b = 900$ kg/cm², wie sie für ruhende Belastung gilt,

$$W = \frac{M_b}{k_b} = \frac{P \cdot l}{4 \cdot k_b} = \frac{1000 \cdot 100}{4 \cdot 900} = 27,8 \text{ cm}^3.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt folgt die Breite b , wenn man seine Höhe h zu 60 mm annimmt, aus

$$\frac{b h^2}{6} = W; \quad b = \frac{6W}{h^2} = \frac{6 \cdot 27,8}{6^2} = 4,63 \text{ cm}.$$

Rundet man sie auf 46 mm ab, so wird die tatsächliche Beanspruchung auf Biegung:

$$\sigma_b = \frac{6 \cdot P \cdot l}{4 \cdot b h^2} = \frac{6 \cdot 1000 \cdot 100}{4 \cdot 4,6 \cdot 6^2} = 906 \text{ kg/cm}^2,$$

und zwar ebenso groß für die äußersten gezogenen wie die äußersten gedrückten Fasern.

Das dem geforderten Trägheitsmoment am nächsten kommende I-Eisen, Profil Nr. 9, hat eine Höhe von 90 mm und ein Widerstandsmoment $W = 26,0$ cm³. Es erfährt mithin durch die Belastung eine Beanspruchung von $\sigma_b = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W} = \frac{1000 \cdot 100}{4 \cdot 26,0} = 962$ kg/cm², in den äußersten Fasern, die zwar etwas größer ausfällt, als bei der ersten Rechnung angenommen war, aber noch zulässig ist.

Ein T-Eisen, das wegen der besseren Stützung der Säule auf dem breiten Flansch vorteilhaft sein kann, müßte Normalprofil 18/9 haben. Es besitzt ein Trägheitsmoment $J = 185$ cm⁴, bezogen auf die zum Flansch parallele Schwerlinie, bei $e = 19,3$ mm Schwerpunktabstand von der Flanschfläche und $h = 90$ mm Steghöhe. Damit berechnet

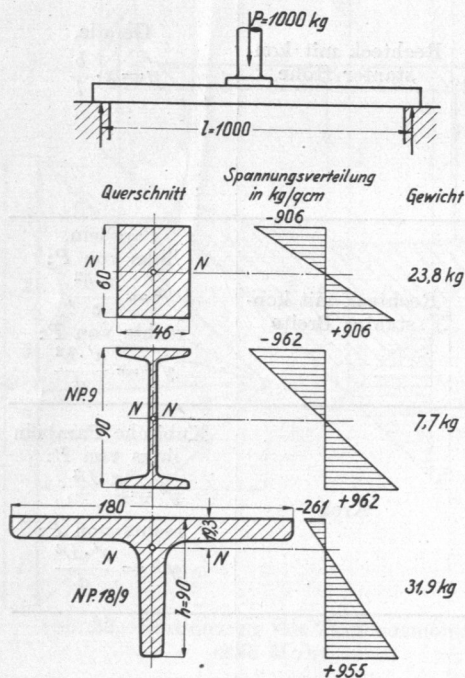


Abb. 34. Unterzugquerschnitte.

sich die größte Zugspannung in der äußersten Faser des Steges

$$+\sigma_b = \frac{P \cdot l(h - e)}{4J} = \frac{1000 \cdot 100(9 - 1,93)}{4 \cdot 185} = 955 \text{ kg/cm}^2,$$

die größte Druckspannung im Flansch

$$-\sigma_b = \frac{P \cdot l \cdot e}{4J} = \frac{1000 \cdot 100 \cdot 1,93}{4 \cdot 185} = 261 \text{ kg/cm}^2.$$

In Abb. 34 sind die tatsächlich auftretenden Spannungen und ihre Verteilung durch die neben den Querschnitten dargestellten Spannungsdreiecke, die Ausnutzung des Baustoffs aber durch die dahinter aufgeführten Gewichte der Unterzüge bei je 1,1 m Gesamtlänge gekennzeichnet. Beim rechteckigen Querschnitt werden die mittleren Fasern, beim T-Querschnitt die des Flansches sehr gering beansprucht und daher schlecht ausgenutzt; das begründet den großen Baustoffaufwand in den beiden Fällen.

E. Zulässige Beanspruchung auf Biegung.

Die zulässige Beanspruchung auf Biegung k_b stimmt bei Baustoffen, wie Schmiedeeisen und Stahl, die annähernd die gleiche Widerstandsfähigkeit gegenüber Zug und Druck, insbesondere gleiche Spannungen an der Fließ- und Quetschgrenze aufweisen, mit der zulässigen Beanspruchung auf Zug überein, vgl. die Zusammenstellung 2 S. 12. Anders bei Gußeisen, das bei Versuchen an Biegestäben wesentlich höhere Belastungen aushält, als nach Zugversuchen an demselben Gußeisen zu erwarten ist. Beispielweise brach ein von Bach untersuchter, bearbeiteter Stab von 80 · 80 mm Querschnitt und $l = 1$ m Stützlänge bei einer Einzelbelastung in der Mitte von $P = 7380$ kg, also bei

$$K_b = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W} = \frac{7380 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 8^3} = 2162 \text{ kg/cm}^2,$$

während man glauben sollte, daß der Bruch einträte, wenn die Spannung in den äußersten Fasern die Zugfestigkeit des Gußeisens erreicht hätte, die sich an den Bruchstücken des Biegestabes im Mittel zu $K_z = 1315$ kg/cm² ergab. Über die Erklärung dieses Widerspruches zwischen der Theorie und dem tatsächlichen Verhalten des Gußeisens, sowie über den Einfluß der Querschnittform vgl. Abschnitt 2, II, E, 2, b.

Die verschiedene Widerstandsfähigkeit des Gußeisens gegenüber Zug und Druck läßt bei ruhender und schwellender Belastung auf Biegung wegen der besseren Ausnutzung des Werkstoffes zur Nulllinie unsymmetrische Querschnitte, Abb. 35, vorteilhaft erscheinen. Legt man in den gezogenen Fasern die aus Biegeversuchen abgeleitete zulässige Spannung k_b , in den gedrückten dagegen die Druckspannungen k nach der Zusammenstellung 2 Seite 12 zugrunde, so gelten z. B. für unbearbeitetes Gußeisen, ruhende Belastung und I-förmigen Querschnitt vorausgesetzt,

$$k_b = 310\text{—}400 \quad \text{und} \quad k = 900\text{—}1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Will man den Querschnitt diesen Verhältnissen entsprechend ausbilden, so müssen sich die Abstände der äußersten Fasern e_1 und e_2 von der Nulllinie bei geradliniger Spannungsverteilung wie die zulässigen Beanspruchungen auf Biegung und Druck verhalten:

$$\begin{aligned} \frac{e_1}{e_2} &= \frac{k_b}{k} \\ &= \frac{310}{900} \text{ bis } \frac{400}{1000}. \end{aligned} \quad (30)$$

Zahlenbeispiel. Gußeiserner Träger für das Drucklager einer Wasserturbine: Druck $P = 20000$ kg, Stützweite $L = 2$ m.

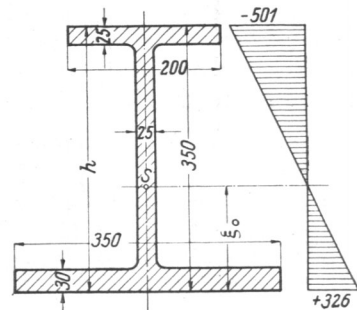


Abb. 35. Unsymmetrischer Querschnitt für gußeisernen Träger.

Wenn man bis zu den eben angeführten Spannungsgrenzen geht, ergeben sich ungünstige Querschnittformen; eine praktisch noch brauchbare ist in Abb. 35 dargestellt; an ihr werden die Druckspannungen nach dem daneben stehenden Spannungsdreieck im mittleren Querschnitt 1,54mal so groß wie die Zugspannungen.

Beim Aufsuchen derartiger Querschnitte ist man auf das Probieren angewiesen. An Abb. 35 findet man den Schwerpunktabstand ξ_0 von der Unterfläche:

$$\xi_0 = \frac{\sum F \cdot \xi}{\sum F} = \frac{35 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2,5 \cdot 33,75 + 29,5 \cdot 2,5 \cdot 17,75}{35 \cdot 3 + 20 \cdot 2,5 + 29,5 \cdot 2,5} = 13,8 \text{ cm}$$

und das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur Unterkante parallele Schwerlinie

$$J = \frac{35 \cdot 3^3}{12} + 35 \cdot 3 \cdot 12,3^2 + \frac{20 \cdot 2,5^3}{12} + 20 \cdot 2,5 \cdot 19,95^2 + \frac{2,5 \cdot 29,5^3}{12} + 2,5 \cdot 29,5 \cdot 3,95^2 = 42400 \text{ cm}^4.$$

Die größte Zugspannung längs der Unterfläche des Trägers ist:

$$+\sigma_b = \frac{P \cdot L \cdot \xi_0}{4J} = \frac{20000 \cdot 200 \cdot 13,8}{4 \cdot 42400} = 326 \text{ kg/cm}^2,$$

die größte Druckspannung in der oben liegenden Faser:

$$-\sigma_b = \frac{P \cdot L \cdot (h - \xi_0)}{4J} = \frac{20000 \cdot 200 \cdot (35 - 13,8)}{4 \cdot 42400} = 501 \text{ kg/cm}^2.$$

d. i. $(-\sigma_b) = 1,54 \cdot (+\sigma_b)$.

Wegen der Durchführung der Welle und der Stützung des Lagers wurde der Träger in der Mitte durchbrochen und oben verbreitert. Im übrigen ist er der besseren Aus-

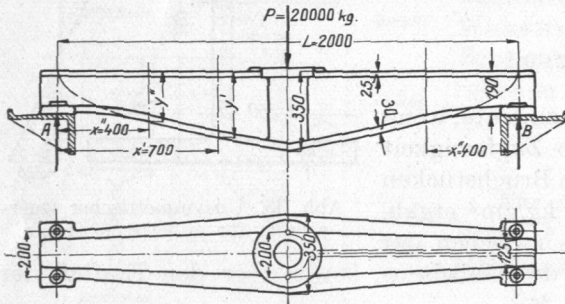


Abb. 36. Träger für das Drucklager einer Turbine.

nutzung des Werkstoffes wegen als Körper annähernd gleichen Widerstandes durchgebildet. Nach laufender Nummer 3 der Zusammenstellung 7, Seite 33, würde ein Träger rechteckigen Querschnittes durchweg gleicher Breite parabolische Begrenzungen erhalten. Annähernd gilt das auch für die vorliegende Querschnittform, wenn die Flanschstärken nach den Auflagern zu allmählich abnehmen. In Abb. 36 wurden dieselben der einfacheren Herstellung wegen durchweg gleich groß,

zu 30 mm unten und 25 mm oben, angenommen, dafür aber die Flanschbreiten dem Grundriß entsprechend nach den Enden zu verringert. Die Querschnittshöhe y' im Abstand $x' = 700$ mm von den Auflagern folgt nach der letzten Spalte der Zusammen-

$$(y')^2 = \frac{x' h^2}{L/2} = \frac{70 \cdot 35^2}{100}; \quad y' = 29,2 \text{ cm};$$

die in $x'' = 400$ mm Abstand von den Auflagern aus

$$(y'')^2 = \frac{x'' h^2}{L/2} = \frac{40 \cdot 35^2}{100}; \quad y'' = 22,1 \text{ cm}.$$

In den beiden Querschnitten entstehen auf Grund einer genaueren Nachrechnung die folgenden Beanspruchungen:

	Größte Zugspannung im unteren Flansch	Größte Druckspannung im oberen Flansch
b) Querschnitt in 700 mm Abstand von den Auflagern.	+ 338 kg/cm ²	- 522 kg/cm ²
b) Querschnitt in 400 mm Abstand von den Auflagern.	+ 322 kg/cm ²	- 485 kg/cm ²

An den Trägerenden ergibt sich die nötige Höhe aus der Querkraft, die im wesentlichen durch Schubspannungen im Steg aufgenommen wird; vgl. Berechnungsbeispiel 2 des Abschnittes über Schub und Abscherung.

Stahlguß und schmiedbarer Guß besitzen ebenfalls größere Belastungsfähigkeit gegenüber Druck als gegenüber Biegung; Holz dagegen zeigt entgegengesetzte Eigenschaften. Sinngemäß lassen sich daher die vorstehenden Ausführungen auch auf diese Baustoffe anwenden.

Betont sei aber nochmals, daß die unsymmetrischen Querschnitte nur für die Wirkung der Kraft in einer Richtung vorteilhaft sind; für den Fall wechselnder Beanspruchung ist die Zugspannung in den äußersten Fasern allein maßgebend und ein zur Nulllinie symmetrischer Querschnitt mit niedrigen Biegespannungen geboten.

Auf die Widerstandsfähigkeit gegossenen Werkstoffs gegenüber Biegung hat schließlich noch die Gushaut, besonders auf der den Zugspannungen ausgesetzten Seite erheblichen Einfluß. Die geringe Dehnungsfähigkeit der spröden Oberfläche führt leicht zu Anrissen und infolgedessen zum Beginn des Bruches: daher die geringere Belastungsfähigkeit unbearbeiteter Gußstücke, vgl. Zusammenstellung 33.

F. Widerstandsfähigkeit geschlitzter Balken.

Irrig ist die Annahme, daß der längs der neutralen Schicht eines Balkens liegende Stoff wegen der dort herrschenden niedrigen Biegespannungen entbehrlich sei, und daß der Träger durch Aussparungen an dieser Stelle ohne wesentliche Beeinträchtigung seiner Tragfähigkeit leichter gehalten werden könne. Gußeiserne, geschlitzte Balken, Abb. 38, brechen, wie Pfeilerer gezeigt hat [I, 12], bei verhältnismäßig geringen Belastungen, indem der Bruch am inneren Rande der Aussparungen beginnt. Beispielweise traten an dem dargestellten Träger bei $P = 5520$ kg Last die Risse a_1b_1 , bei 6420 kg die Risse a_2b_2 im Stege und bei 7950 kg der Bruch links ein, während ein Balken gleichen Querschnittes, aber ohne Schlitz, erst bei 18000 kg, also der 3,25fachen Last in der Mitte, brach. Die Tragfähigkeit wird um so mehr beeinträchtigt, je länger die Schlitz sind.

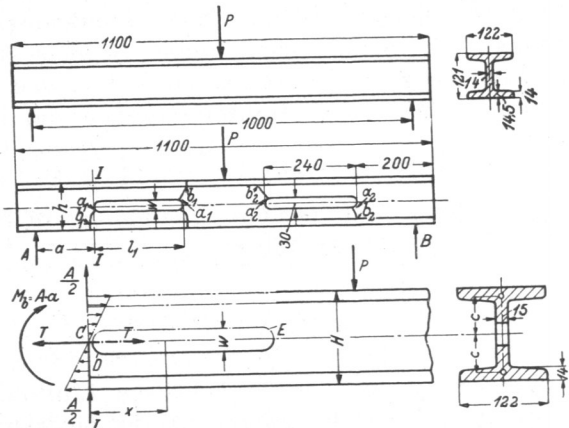


Abb. 37—39. Versuche an geschlitzten Balken.

Neben den aus der Abb. 39 ersichtlichen Bezeichnungen bedeute:

A die Auflagerkraft am linken Auflager in kg,

$2c$ die Entfernung der Schwerpunkte der beiden Querschnitte ober- und unterhalb des Schlitzes in cm,

F den Querschnitt derselben in cm^2 ,

J_1 ihre Trägheitsmomente in cm^4 ,

J das Trägheitsmoment des gesamten durch das Loch geschwächten Querschnittes in cm^4 ,

$M_b = A \cdot a$ das Biegemoment im Stabquerschnitt I in kgcm .

Legt man durch den Balken kurz vor dem Schlitz einen Schnitt I , so verlangt das Gleichgewicht die Anbringung des dort wirkenden Momentes $M_b = A \cdot a$ und der Querkraft A . Trennt man auch noch die obere Trägerhälfte durch einen Schnitt längs der Mittellinie von der unteren, so müssen dort noch Schubkräfte

$T = \frac{A \cdot l_1}{4c}$ angebracht werden, die an der oberen, strichpunktiert gezeichneten Hälfte

nach rechts, an der unteren nach links wirken. T ergibt sich aus der Annahme, daß die Tangenten an der elastischen Linie über den Enden des Schlitzes zueinander parallel sein müssen. In einem beliebigen Querschnitt der unteren Wange in der Entfernung x von der Ebene I entstehen dann folgende Einzelspannungen:

1. durch das Moment $M_b = A \cdot a$ in den äußeren Fasern:

$$\sigma_1 = + \frac{A \cdot a \cdot H}{J \cdot 2},$$

2. durch die Kraft A , die sich zu gleichen Teilen, also zu je $\frac{A}{2}$ auf die Trägerhälften verteilt, längs der Schlitzkante:

$$\sigma_2 = - \frac{A}{2} \cdot x \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1},$$

3. durch die Kraft $T = \frac{A \cdot l_1}{4c}$ längs der Schlitzkante

$$\sigma_3 = + \frac{A \cdot l_1}{4c} \left(\frac{1}{F} + c \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1} \right) = \frac{A \cdot l_1}{4} \left(\frac{1}{F \cdot c} + \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1} \right),$$

4. Schubspannungen durch die Kraft A , die vernachlässigt werden können.

Die Erhöhung der Spannungen durch die Kerbwirkung an den Schlitzenden empfiehlt Pfeleiderer durch die Annahme zu berücksichtigen, daß die Spannung σ_1 über den ganzen Querschnitt gleich groß sei. Die größte Beanspruchung σ ergibt sich aus der algebraischen Summe der Spannungen, wobei jedoch im Falle gußeiserner Träger I-förmigen Querschnitts zu beachten ist, daß sich σ_2 und σ_3 auf eine andere Querschnittform, nämlich auf die T-förmigen Hälften beziehen und daß sie deshalb nach den Versuchen Bachs mit einer Berichtigungszahl $\mu = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{H}{c}}$ zu vervielfältigen sind. Für Schmiedeeisen ist $\mu = 1$. Die größte positive Spannung entsteht am inneren Rande des Schlitzes in der Nähe des Querschnittes I im Punkte D der unteren Trägerhälfte. Sie beträgt

$$\sigma = \sigma_1 + \mu \sigma_3 = \frac{A \cdot a \cdot H}{J \cdot 2} + \mu \frac{A \cdot l_1}{4} \left(\frac{1}{F \cdot c} + \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1} \right). \quad (30a)$$

Hervorgehoben sei der beträchtliche Einfluß, den die Schubkraft T hat, wie es denn die Hauptaufgabe des Steges ist, die Querkraft aufzunehmen und dadurch die Flanschen zu gleichmäßigen Durchbiegungen zu zwingen.

Die Rißbildung wird im Punkte D beginnen und sich im Punkte E der oberen Trägerhälfte fortsetzen, die durch das Biegemoment hoch beansprucht wird, wenn die Tragfähigkeit der unteren Hälfte durch den Riß bei D vermindert oder erschöpft ist.

Die bei den Versuchen von Pfeleiderer nach der Formel (30a) berechneten Spannungen im Augenblick des ersten Risses (im Balken, Abb. 37, $\sigma = 2160 \text{ kg/cm}^2$) entsprachen im Mittel etwa der Zugfestigkeit, nicht aber der höheren Biegefestigkeit des verwandten Gußeisens, so daß es sich empfiehlt, bei der Wahl der zulässigen Beanspruchung von der ersteren auszugehen.

G. Die Formänderung gebogener Teile.

Die Formänderung auf Biegung beanspruchter Teile besteht in einer Krümmung der Achse. Die entstehende Kurve heißt elastische oder Biegelinie. Ein Element des Stabes, Abb. 40, von der Länge dx , das durch zwei zur Stabachse senkrecht stehende Ebenen begrenzt ist, geht in ein keilförmiges Stück über, dessen Seitenflächen um den Winkel $d\gamma$ gegeneinander geneigt sind. Dabei haben die auf der Zugseite gelegenen,

durch die Spannung σ_b beanspruchten Fasern in der Entfernung e von der Nulllinie nach Formel (6a) eine Verlängerung $aa_1 = \alpha \cdot \sigma_b \cdot dx$ erlitten, so daß

$$d\gamma = \frac{aa_1}{e} = \frac{\alpha \cdot \sigma_b \cdot dx}{e}$$

wird, das mit

$$\sigma_b = \frac{M_x}{J_x} \cdot e$$

in

$$d\gamma = \alpha \cdot \frac{M_x \cdot dx}{J_x}$$

übergeht. Für eine endliche Stablänge wird

$$\gamma = \int \frac{\alpha \cdot M_x \cdot dx}{J_x} = \alpha \int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx, \tag{31}$$

wenn die Dehnungszahl α als unveränderlich angenommen wird.



Abb. 40 und 41. Formänderungen gebogener Stäbe.

An einem einseitig eingespannten Stabe, Abb. 41, hat nun die besprochene Formänderung des in der Entfernung x vom freien Ende liegenden Elementes dx eine Durchbiegung

$$d\delta = d\gamma \cdot x$$

zur Folge, so daß sich die Gesamtdurchbiegung δ durch

$$\delta = \int d\gamma \cdot x = \alpha \int \frac{M_x \cdot x \cdot dx}{J_x} \tag{32}$$

darstellen läßt. Den meist vorliegenden Fall eines Stabes auf zwei Stützen kann man auf zwei Freitragler zurückführen, die im Scheitel der Biegelinie eingespannt sind. Für die häufiger vorkommenden Belastungsfälle sind die Neigungswinkel der elastischen Linie und die Durchbiegungen in der Zusammenstellung 5, Seite 24, aufgeführt.

VII. Schub und Abscherung.

Beanspruchung auf Schub liegt vor, wenn die Kraft in der Querschnittebene wirkt und unmittelbar benachbarte Querschnitte gegeneinander zu verschieben sucht (Quer- oder Schubkräfte). Die Größe und Verteilung der entstehenden Schubspannungen τ hängt von der Querschnittform ab; für die wichtigeren ist sie in der Zusammenstellung 8 enthalten.

Zusammenstellung 8. Größe und Verteilung der Schubspannungen.

Lfd. Nr.	Querschnittform und Spannungsverteilung	Schubspannung im Abstände y von der Schwerlinie τ	Größte Schubspannung τ_{max}
1		$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{F} \sqrt{1 - 4 \frac{y^2}{d^2}}$	$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{P}{F}$