oder ein Elastizitätsmaß $E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma_d}{\varepsilon}$ ermitteln. Weniger ausgeprägt ist die der Fließgrenze entsprechende Stauch- oder Quetschgrenze Q, weil mit der Verkürzung des Stabes eine Querschnittvergrößerung und daher eine Vermehrung der Tragfähigkeit verbunden ist. In diesem Umstande ist auch das spätere ständige Ansteigen der Kräfte zum weiteren Zusammenpressen der Probe begründet. Ein Bruch tritt bei zähen Stoffen oft überhaupt nicht ein. Zur Beurteilung des Baustoffs begnügt man sich deshalb häufig mit der Feststellung der Quetschgrenze, weil an dieser die für den Konstrukteur maßgebende Widerstandsfähigkeit erschöpft ist. Besondere Wichtigkeit hat der meist an würfelförmigen Proben vorgenommene Druckversuch für Steine und Beton, die ja auch als Werkstoffe vor allem auf Druck beansprucht zu werden pflegen.

Wird durch vollständiges Einschließen der Druckkörper das seitliche Entweichen des Stoffes oder die mit der Stauchung verbundene Ausbauchung gehindert, so erhöht sich die Widerstandsfähigkeit ganz wesentlich. Selbst sehr nachgiebige Stoffe, wie Blei und Gummi, halten dann hohe Pressungen aus.

Die Verkürzung oder Zusammendrückung, die der Körper durch die Kraft P erleidet, ist

$$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l}{F}. \tag{14}$$

IV. Knickfestigkeit.

Während bei kurzen prismatischen Probekörpern die durch eine Druckkraft hervorgerufene Formänderung lediglich in einer Verkürzung des Körpers unter Erhaltung seiner geraden Achse besteht, tritt bei längeren Stäben Ausbiegen ein, weil der Baustoff stets mehr oder weniger ungleichmäßig ist, die Achse Abweichungen von der geraden Linie aufweisen wird und eine genau axiale Kraftwirkung nur sehr schwierig zu erreichen ist, jedenfalls an Konstruktionsteilen selten vorausgesetzt werden darf. Mit zunehmender Belastung steigt die schon früh auftretende Durchbiegung allmählich, nimmt aber bei einer bestimmten Kraft, der Knickkraft, rasch, oft plötzlich sehr große Werte an; der Stab knickt zusammen. Nach Euler sind die Tragfähigkeiten auf Knickung beanspruchter Teile bei $\mathfrak{S}$facher Sicherheit gegen Ausknicken in den vier Belastungsfällen, Abb. 16—19, die folgenden:

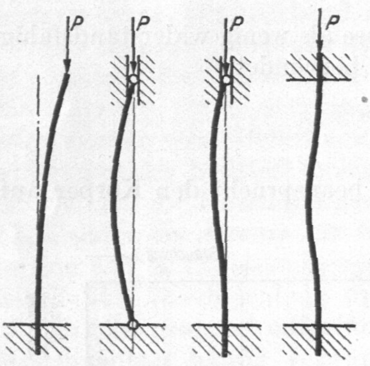

Abb. 16—19. Die vier Eulerschen Fälle der Inanspruchnahme auf Knickung.

I. Eines an einem Ende frei beweglichen, am anderen Ende eingespannten Stabes, Abb. 16,

$$P = \frac{\pi^2}{4\mathfrak{S}} \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{2{,}5\,J}{\mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2}. \tag{15}$$

II. Eines an beiden Enden in der Stabachse geführten, aber gelenkig gelagerten Stabes, Abb. 17,

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{10 \cdot J}{\mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2}. \tag{16}$$

III. Eines einerseits eingespannten, andererseits geführten Stabes, Abb. 18,

$$P = \frac{2 \cdot \pi^2}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{20 \cdot J}{\mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2}. \tag{17}$$

IV. Eines Stabes mit beiderseits eingespannten Enden, Abb. 19,

$$P = \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{40 \cdot J}{\mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2}. \tag{18}$$

Die Formeln III und IV werden im Maschinenbau wegen der meist vorhandenen Unsicherheit über den Grad der Einspannung selten benutzt. Selbst in Fällen, in denen eine Einspannung beabsichtigt ist, wird größerer Sicherheit wegen nach Formel I oder II gerechnet.

Zur Anwendung der Eulerschen Formeln ist jedoch zu bemerken, daß ihr Gültigkeitsbereich beschränkt ist und ihre unrichtige Anwendung zu Täuschungen über den Sicherheitsgrad der Konstruktionen führen kann. Setzt man in der Formel 16 den Sicherheitsgrad $\mathfrak{S} = 1$, so gibt

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}$$

die Knickkraft an. Mit $J = i^2 F$, wobei i den Trägheitshalbmesser, F den Stabquerschnitt bedeutet, wird

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot F}{\alpha} \frac{i^2}{l^2}$$

oder

$$\frac{P_k}{F} = K_k = \frac{\pi^2}{\alpha \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{19}$$

K_k heißt Knickspannung. Das Verhältnis $\frac{l}{i}$, eine Beziehung zwischen der Stablänge und dem Trägheitshalbmesser und damit dem Trägheitsmoment, bezeichnet man als Schlankheit des Stabes. Trägt man K_k in Abhängigkeit von $\frac{l}{i}$ in einem Schaubilde auf, so bekommt man eine hyperbolische Linie mit sehr hohen Knickspannungen bei kleinem $\frac{l}{i}$ wie Abb. 20 für Flußeisen mit einer Dehnungsziffer $\alpha = \frac{1}{2120000}$ zeigt. Die Gültigkeit der Eulerschen Formel erstreckt sich nun nur auf das durch senkrechte Strichelung hervorgehobene Gebiet, in welchem die Knickspannung unterhalb der Fließgrenze bleibt und die Formänderungen ausschließlich oder doch vorwiegend elastischer Natur sind (Gebiet der elastischen Knickung). Links von der Linie AA', die durch den Schnitt der Eulerschen Hyperbel mit der bei 1900 kg/cm² angenommenen Fließgrenze geht, ist der Knickvorgang stets mit Fließerscheinungen und deshalb mit bleibenden Formänderungen verbunden. Der Stab federt bei der Entlastung nicht wieder völlig zurück (Gebiet der unelastischen Knickung). Erst bei sehr kleinen Werten von $\frac{l}{i}$ verschwindet die Erscheinung des Ausknickens. Das Zusammendrücken erfolgt dann längs der Körperachse; der Knickversuch geht allmählich in den Druckversuch über. Im Gebiet der unelastischen Knickung gilt für die Knickspannung nach Tetmajer auf Grund umfangreicher Versuche im Belastungsfall II die empirische Formel:

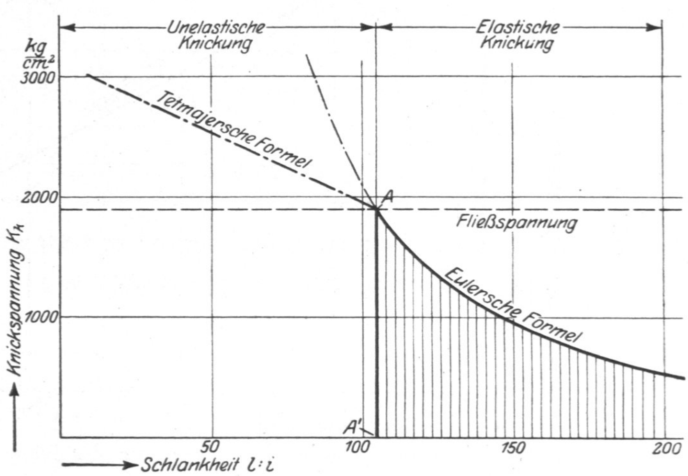

Abb. 20. Gebiete der elastischen und unelastischen Knickung.

$$K_k = \frac{P_k}{F} = K \cdot \left[1 - c_1 \frac{l}{i} + c_2 \left(\frac{l}{i}\right)^2\right], \tag{20}$$

wobei K, c_1 und c_2 vom Baustoff abhängige Festwerte sind. Zahlen dafür enthält die folgende Zusammenstellung, die gleichzeitig den Gültigkeitsbereich der Formel durch die Grenzwerte von $\frac{l}{i}$ angibt; beim Überschreiten der Größtwerte ist im Belastungsfalle II die Eulersche Formel anzuwenden.

Zusammenstellung 3. **Festwerte der Tetmajerschen Knickformel.**

Stoff	K	c_1	c_2	Grenzen für $\frac{l}{i}$	
				min	max
Flußstahl	3350	0,00185	0	—	90
Weicher Flußstahl (Flußeisen)	3100	0,00368	0	10	105
Nickelstahl (mit $< 5\%$ Ni)	4700	0,00490	0	—	86
Gußeisen	7760	0,01546	0,00007	5	80
Bauholz	293	0,00662	0	1,8	100

Aus der Tetmajerschen Gleichung folgt die Tragkraft P eines Konstruktionsteiles bei $\mathfrak{S}$facher Sicherheit

$$P = \frac{P_k}{\mathfrak{S}} = F \cdot \frac{K}{\mathfrak{S}}\left[1 - c_1 \cdot \frac{l}{i} + c_2\left(\frac{l}{i}\right)^2\right]. \tag{21}$$

Leider gestattet die Formel nicht die unmittelbare Berechnung des Trägheitsmomentes oder Querschnittes eines Stabes aus der gegebenen Belastung P und der Länge l, da in

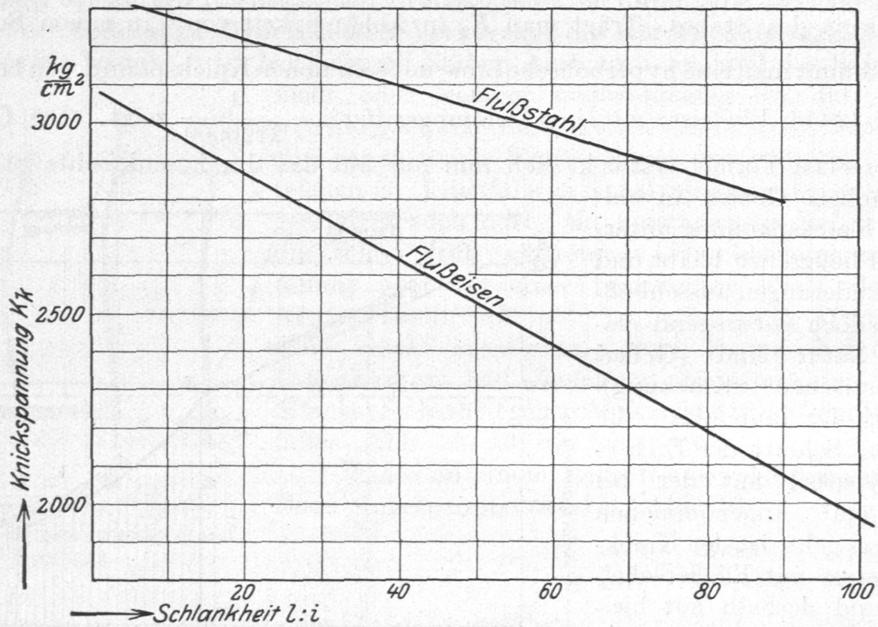

Abb. 21. Knickspannungen in Abhängigkeit von der Schlankheit an Flußeisen und -stahl.

ihr zwei Unbekannte, F und i vorkommen. Man ist vielmehr auf Probieren angewiesen, das am einfachsten durchgeführt wird, indem man zunächst die Knickspannung K_k und die Sicherheit $\mathfrak{S}$ annimmt und aus $\frac{K_k}{\mathfrak{S}} = k_k$ die zulässige Druckspannung und damit den Querschnitt

$$F = \frac{P}{k_k}$$

ermittelt. Aus der gewählten Querschnittform folgt dann das Trägheitsmoment J und der Trägheitshalbmesser $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ und damit die Schlankheit $\frac{l}{i}$, die die Nachprüfung, ob K_k richtig gewählt war, nach der folgenden Zusammenstellung oder für Flußeisen und -stahl nach Abb. 21 ermöglicht. Bei kreisrundem, rechteckigem oder dünnwandigem Kreisringquerschnitt kann auch das Verhältnis $\frac{l}{d}$ oder $\frac{l}{b}$ herangezogen werden, so daß sich die Berechnung von J und i erübrigt.

Zusammenstellung 4. **Knickspannungen nach Tetmajer.**

Schlankheit $\frac{l}{i}$	$\frac{l}{d}$	$\frac{l}{b}$	δ klein $\frac{l}{d}$	Knickspannungen K_k nach Tetmajer: Flußstahl	Weicher Flußstahl	Gußeisen	Bauholz
105	26,3	30,2	37,2	—	1900	—	—
100	25	28,8	35,4	—	1960	—	99
90	22,5	25,9	31,8	2790	2070	—	120
80	20	23	28,3	2850	2190	1645	138
70	17,5	20,2	24,8	2910	2300	2030	157
60	15	17,3	21,2	2970	2420	2670	180
50	12,5	14,4	17,7	3030	2530	3120	196
40	10	11,5	14,2	3095	2640	3830	215
30	7,5	8,6	10,6	3160	2760	4650	235
20	5	5,8	7,1	3220	2870	5580	254
10	2,5	2,9	3,5	3280	2980	6610	274
5	1,25	1,44	1,77	3310	—	7180	283

Beispiel. Schubstangenschäfte runden Querschnitts werden gewöhnlich nach der Eulerschen Formel mit $\mathfrak{S} = 25$facher Sicherheit berechnet, fallen aber meist in das Gebiet der unelastischen Knickung und zeigen deshalb nach der Tetmajerschen Formel nachgerechnet, viel geringere Sicherheiten. Bei einer Stangenkraft von $P = 8000$ kg, einer Länge $l = 875$ mm, $\alpha = \frac{1}{2100000}$ cm/²kg für weichen Flußstahl und $\mathfrak{S} = 25$, wird nach der Eulerschen Formel II

$$J = \frac{P \cdot \mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2}{10} = \frac{8000 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 87{,}5^2}{2100000 \cdot 10} = 73 \text{ cm}^4$$

und

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot J}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 73}{\pi}} = 6{,}21 \text{ cm}.$$

Wählt man $d = 6{,}2$ cm, so sieht man aus dem Verhältnis $\frac{l}{d} = \frac{87{,}5}{6{,}2} = 14{,}1$ nach der Zusammenstellung 3 auf Seite 18, daß die Eulersche Formel nicht zuständig ist. Nach der Tetmajerschen ergibt sich die Knickspannung mit

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi}{4} d^2}} = \frac{d}{4} = 1{,}55 \text{ cm},$$

$$K_k = K\left(1 - c_1 \cdot \frac{l}{i}\right) = 3100\left(1 - 0{,}00368 \cdot \frac{87{,}5}{1{,}55}\right) \approx 2460 \text{ kg/cm}^2$$

und, da die mittlere Druckspannung

$$\sigma_d = \frac{P}{F} = \frac{8000}{30{,}19} = 266 \text{ kg/cm}^2$$

ist, ist die tatsächliche Sicherheit nur

$$\mathfrak{S} = \frac{K_k}{\sigma_d} = \frac{2460}{266} = 9{,}25 \text{ fach}.$$