

Abriß der Festigkeitslehre und Bemerkungen zur Berechnung von Maschinenteilen.

Die Festigkeitslehre bildet die Grundlage für die Ermittlung der Abmessungen der Maschinenteile, soweit Kraftwirkungen maßgebend sind.

In jedem Körper, der äußeren Kräften ausgesetzt ist, entstehen auch innere Kräfte, — Spannungen —, wie sich leicht zeigen läßt, wenn man nach Abb. 1 durch einen Körper, an dem die unter sich im Gleichgewicht stehenden Kräfte P_1 bis P_5 wirken, einen Schnitt AB legt und so den Zusammenhang zwischen den Körperteilen aufhebt. Dadurch werden auch die Spannungen unmöglich; die beiden Stücke trennen sich infolge der äußeren Kräfte voneinander. Die Verteilung der Spannungen hängt von der Lage der Angriffspunkte, der Richtung und der Größe der Kräfte ab. Überschreitet die Spannung an irgendeiner Stelle die Widerstandsfähigkeit oder die Festigkeit des Baustoffs, so tritt eine örtliche Zerstörung oder der Bruch des gesamten Körpers ein. Maschinenteile müssen dagegen genügende Sicherheit bieten.

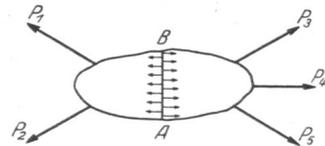


Abb. 1. Äußere und innere Kräfte.

Zu Vergleichszwecken werden die inneren Kräfte auf die Flächeneinheit, für die man im Maschinenbau meist das Quadratcentimeter, seltener das Quadratmillimeter benutzt, bezogen, so daß die Spannung in kg/cm^2 oder kg/mm^2 ausgedrückt zu werden pflegt.

Alle an einem Körper angreifenden Kräfte kann man in solche in Richtung der Achse des Körpers und senkrecht dazu zerlegen und deren Wirkung auf die folgenden Belastungsfälle Nr. 1 bis 5 zurückführen:

A. Inanspruchnahme durch Längskräfte in der Achse des Körpers (die erzeugten Spannungen sind Längsspannungen):

1. auf Zug, Abb. 2. Die Kraft sucht den Körper zu verlängern;

2. auf Druck, Abb. 3. Die Kraft verkürzt den Körper. Bei größerer Länge des Stabes im Vergleich zu seinem Querschnitt treten Ausbiegungen ein; man spricht dann von einer Beanspruchung auf Knickung.



Abb. 2. Inanspruchnahme auf Zug.



Abb. 3. Belastung auf Druck.

B. Inanspruchnahme durch senkrecht zur Stabachse gerichtete Kräfte:

3. auf Biegung. Die äußeren Kräfte lassen sich auf ein Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabachse geht, zurückführen. Z. B. werden in Abb. 4 alle Querschnitte zwischen A und B lediglich durch



Abb. 4. Beanspruchung auf Biegung.

das Kräftepaar $P \cdot a$ auf Biegung beansprucht. In den Stabquerschnitten treten sowohl Zug- wie Druckspannungen auf;

4. auf Schub und Abscherung, Abb. 5. Die Kraft wirkt in der Querschnittsebene und sucht zwei unmittelbar benachbarte Querschnitte gegeneinander zu verschieben;

5. auf Drehung, Abb. 6. Ein Kräftepaar in einer zur Stabachse senkrechten Ebene verdreht die Stabquerschnitte gegeneinander. In den Fällen 4 und 5 entstehen Schubspannungen.

Treten mehrere Belastungsfälle gleichzeitig auf, so wird der Körper auf zusammengesetzte Festigkeit beansprucht. So wirkt auf den Querschnitt x des einseitig einge-



Abb. 5. Inanspruchnahme auf Abscherung.

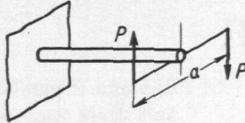


Abb. 6. Beanspruchung auf Drehung.

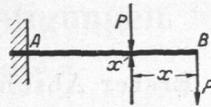


Abb. 7. Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit, auf Biegung und Schub.

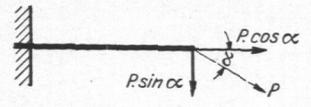


Abb. 8. Belastung auf Zug, Biegung und Schub.

spannten, am freien Ende belasteten Balkens AB der Abb. 7 neben dem Biegemoment $P \cdot x$ die Schubkraft P , deren Einfluß allerdings bei größerer Balkenlänge vernachlässigt werden darf. Der Stab, Abb. 8, erfährt durch $P \cdot \cos \alpha$ eine Belastung auf Zug, durch $P \cdot \sin \alpha$ eine solche auf Biegung und Schub.

I. Zugfestigkeit und Grundbegriffe der Festigkeitslehre.

A. Zugspannung. Proportionalitäts-, Fließ-, Bruch- und Zerreißgrenze, Zugfestigkeit, Elastizitätsgrenze.

Die Stange in Abb. 9 wird durch das angehängte, in der Stabachse wirkende Gewicht von P kg auf Zug beansprucht. Schneidet man ein beliebiges Stück aus dem Stabe heraus, so kann in diesem bei Vernachlässigung des Eigengewichtes die gleiche Wirkung durch zwei entgegengesetzt gerichtete, an den Enden angreifende Kräfte P erzeugt werden, die den Stab zu verlängern suchen. Unter der Annahme gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt von der Größe F ergibt sich die auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft, die Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{P}{F}. \quad (1)$$

Bei $d = 2$ cm Durchmesser und $P = 1500$ kg würde z. B.

$$\sigma_z = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{1500}{3,14} = 477 \text{ kg/cm}^2$$

betragen.

σ_z muß geringer als die für den betreffenden Stoff und Belastungsfall zulässige Spannung k_z nach S. 12 sein.

Formeln für die Flächeninhalte verschiedener Querschnitte enthält die Zusammenstellung 6, S. 30.

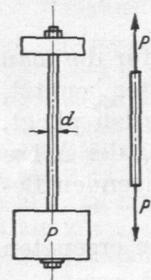


Abb. 9. Auf Zug beanspruchte Stange.

Jeder Einwirkung einer Kraft entspricht eine Formänderung. Zugkräfte rufen Verlängerungen und gleichzeitig Querschnittverminderungen hervor. Abb. 10 zeigt in den Abszissen die Verlängerungen λ in Abhängigkeit von den als Ordinaten aufgetragenen Kräften P , wie sie bei einem Zugversuche an einem ausgeglühten, weichen Flußstahlstabe von 20 mm Durchmesser und 200 mm Meßlänge, Abb. 11, erhalten wurden. Als Meßlänge gilt dabei die Strecke l des Stabes, an der die Formänderungen beobachtet und festgestellt werden. Die Verlängerungen nehmen zunächst verhältnismäßig den Belastungen zu. Die Linie, Abb. 10, ist dementsprechend bis P gerade. Über P krümmt sich die Linie ein wenig, fällt bei F_o plötzlich auf F_u und verläuft bis G annähernd parallel zur Abszissenachse. Der Stab verlängert sich also, ohne daß die Kraft zunimmt; der Baustoff fließt. P heißt Proportionalitätsgrenze, F_o obere, F_u untere Fließ- oder Streckgrenze. Vom Punkte G ab sind größere Kräfte nötig, um weitere Formänderungen zu erzeugen; die Linie steigt an. In B erreicht die Belastung ihren Höchstwert, schließlich zerreißt der Stab in Z . Der Abfall von B nach Z ist in der Ein-

schnürung, Abb. 12, der örtlich starken Querschnittsverminderung, die zum Bruch bei abnehmenden Kräften führt, begründet. B kennzeichnet die Bruch-, Z die Zerreißgrenze. Die aus der Höchst- oder Bruchlast P_B berechnete und auf den ursprünglichen Querschnitt bezogene Spannung ist die Zugfestigkeit K_z des Stoffes, die in dem betrachteten Falle

$$K_z = \frac{P_B}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{11500}{3,14} = 3660 \text{ kg/cm}^2$$

betrug.

Entlastet man bei Beginn des Versuchs den Stab, so verschwinden die Formänderungen wieder vollständig. Der Baustoff ist vollkommen elastisch. Bei höheren Be-

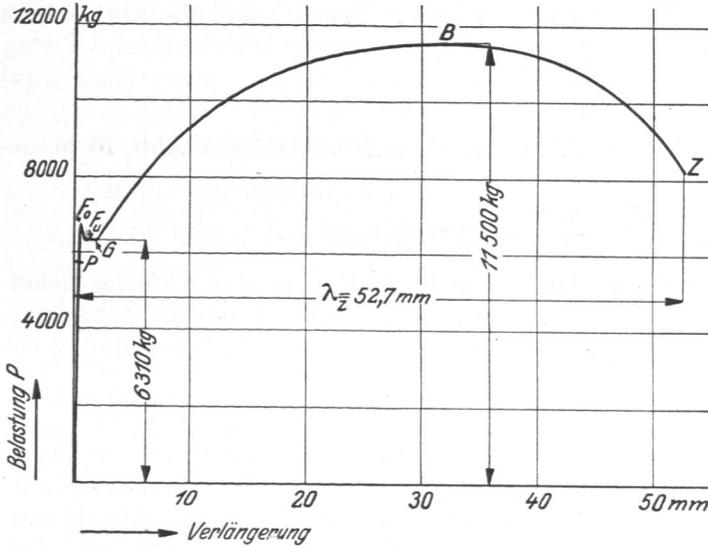


Abb. 10. Schaulinie eines Zugversuchs an weichem Flußstahl.

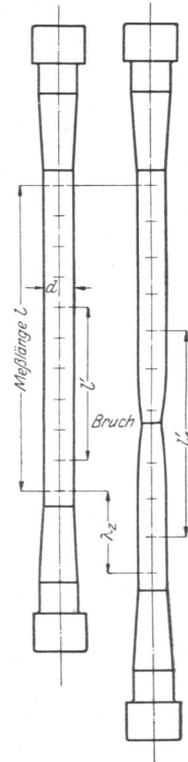


Abb. 11/12. Probestab vor und nach dem Zugversuch.

lastungen treten zunächst geringe bleibende Verlängerungen auf; nach dem Überschreiten der Fließgrenze überwiegen die bleibenden gegenüber den elastischen. Die Elastizitätsgrenze, d. i. der Punkt, bis zu welchem sich der Baustoff vollkommen elastisch verhält, ist, da die bleibenden Formänderungen ganz allmählich auftreten, schwierig nachzuweisen. Man läßt ein bestimmtes, noch sicher zu beobachtendes Maß bleibender Formänderung zu und hat demgemäß durch einen Beschluß des internationalen Verbandes der Materialprüfungen der Technik in Brüssel 1906 die Elastizitätsgrenze bei einer bleibenden Verlängerung von 0,001% der Meßlänge festgelegt. Krupp benutzt 0,03%.

Bei vielen Stoffen prägt sich die Fließgrenze weniger scharf aus, wie bei weichem Flußstahl nach Abb. 10. An härteren Flußstahlsorten ist sie nur durch einen kurzen Absatz parallel zur Abszissenachse oder, wie auch an Messing, Bronze usw., durch allmähliches Abbiegen der Schaulinie ohne besonderen Knick oder Absatz, Abb. 127, gekennzeichnet. Zur Bestimmung der Fließgrenze benutzt man in solchen Fällen nach dem Beschluß des eben erwähnten Verbandes 0,5% bleibende Verlängerung. Die deutschen Industrienormen haben dieses Maß in Dinorm 1602 auf 0,2% herabgesetzt und bezeichnen die zugehörige Spannung kurz mit 0,2-Grenze und durch $\sigma_{0,2}$.

B. Die Sicherheit von Konstruktionsteilen.

Merkbare bleibende Formänderungen sind an den Maschinenteilen unzulässig. Die in den letzteren auftretenden Beanspruchungen dürfen deshalb die Elastizitätsgrenze, sicher aber die Fließgrenze, nicht erreichen. Die Sicherheit \mathcal{S}' eines Konstruktionsteiles gegenüber dem Auftreten dauernder Formänderungen ist demgemäß nach dem

Verhältnis der Spannungen an der Elastizitäts- bzw. Fließgrenze σ_s des Baustoffes zu den tatsächlich auftretenden Spannungen σ_z zu beurteilen. Nun ist die Ermittlung der Elastizitätsgrenze wegen der notwendigen Feinmessungen umständlich und zeitraubend und wird selten ausgeführt. Leichter ist die Fließgrenze an Hand einer während des Versuches aufgenommenen Schaulinie oder bei ausgeprägter oberer Fließgrenze durch Beobachten des Absinkens der Kraft zu bestimmen. Da außerdem beide Grenzen nahe beieinander zu liegen pflegen, kann die erwähnte Sicherheit genügend genau nach der Fließgrenze des Baustoffes, also nach $\mathfrak{S}' = \frac{\sigma_s}{\sigma_z}$ beurteilt werden.

Meist begnügt man sich damit, die Festigkeit der Baustoffe vorzuschreiben und ihr gegenüber die Bruchsicherheit des Konstruktionsteiles, die durch das Verhältnis der Bruchfestigkeit zur auftretenden Spannung gegeben ist, zu berechnen. Im Falle der Beanspruchung auf Zug würde diese Sicherheit gegen Bruch oder die Sicherheit schlechthin

$$\mathfrak{S} = \frac{K_z}{\sigma_z} \quad (2)$$

sein.

Wäre die Stange des Beispiels, Abb. 9, aus weichem Flußstahl der Abb. 10 hergestellt, so würde die Bruchsicherheit

$$\mathfrak{S} = \frac{K_z}{\sigma_z} = \frac{3660}{477} = 7,7 \text{ fach}$$

sein. Gegen das Auftreten bleibender Verlängerungen ist aber nur eine 4,2fache Sicherheit vorhanden, wenn man von der unteren Fließgrenze ausgeht. Denn die Schaulinie, Abb. 10, ergibt an dieser Stelle eine Belastung $P_f = 6310 \text{ kg}$ und eine Fließspannung von

$$\sigma_s = \frac{P_f}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{6310}{3,14} = 2010 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß

$$\mathfrak{S}' = \frac{\sigma_s}{\sigma_z} = \frac{2010}{477} = 4,2$$

wird.

Die Beurteilung einer Konstruktion an Hand des Sicherheitsgrades gegen Bruch ist für Baustoffe, die nicht kalt bearbeitet, gehärtet oder vergütet sind, immerhin zulässig, weil dann das Verhältnis der Spannungen an der Bruchgrenze zu denen an der Fließ- bzw. Elastizitätsgrenze bei ein und demselben Baustoffe annähernd unveränderlich zu sein pflegt. Durch Ziehen, Walzen, Hämmern, Pressen usw. im kalten Zustande, ferner durch Härten oder Vergüten kann dagegen das genannte Verhältnis wesentlich beeinflußt werden. Beispielweise wird die Streckgrenze von Flußstahldraht durch Kaltziehen ganz bedeutend gehoben und der Bruchgrenze näher gebracht. Die übliche Sicherheitszahl gegenüber Bruch kann daher niedriger sein, weil die hohe Streckgrenze das Auftreten bleibender Formänderungen verhindert.

Die Sicherheit hoch beanspruchter oder aus Sonderbaustoffen hergestellter Konstruktionsteile sollte deshalb stets an Hand der Fließgrenze und nicht nach der Bruchfestigkeit des Werkstoffes beurteilt werden.

Dagegen ist man bei Stoffen, die so geringe Formänderungen aufweisen, daß sich die Fließgrenze $\sigma_{0,2}$ im Sinne der DIN 1602 nicht ermitteln läßt, wie bei Gußeisen, Beton und Steinen, nach wie vor auf die Benutzung der Sicherheit gegenüber Bruch angewiesen.

C. Dehnung und Einschnürung, Dehnungszahl.

Um die Formänderungen verschieden langer Stäbe miteinander vergleichen zu können, bezieht man die Verlängerung λ auf die Längeneinheit und erhält so die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}, \quad (3)$$

wenn l die ursprüngliche Meßlänge des Stabes, an welcher λ festgestellt wurde, bedeutet. Bei gewöhnlichen Zugversuchen pflegt nur die Dehnung an der Zerreißgrenze, also nach dem Bruch, bestimmt zu werden. Nach Abb. 10 betrug

$$\lambda_z = 5,27 \text{ cm}, \quad l = 20 \text{ cm},$$

mithin die Bruchdehnung

$$\delta = \frac{\lambda_z}{l} = \frac{5,27}{20} = 0,263 \quad \text{oder} \quad 26,3\%.$$

Da sich die Dehnung, wie Abb. 12 zeigt, über die Stablänge ungleichmäßig verteilt, indem die durch Querstriche gekennzeichneten, am ursprünglichen Stab gleich langen Strecken, Abb. 11, in der Nähe des Bruches am meisten an Länge zugenommen haben, erhält man für die Dehnung je nach Wahl der Meßlänge l verschiedene Zahlen. Um Vergleichswerte zu bekommen, wird l deshalb an Rundstäben gleich $10 d$ oder bei beliebig geformtem Querschnitt von der Größe F zu $l = 11,3 \sqrt{F}$ gewählt. Neuerdings benutzt man auch $l = 5 d = 5,65 \sqrt{F}$ als normale Meßlänge, erhält dabei aber größere Werte für die Dehnung. Am Probestab, Abb. 12, wäre in dem Falle die Dehnung an den fünf der Bruchstelle nächstliegenden Teilstrecken, die ursprünglich $l' = 100 \text{ mm}$ lang waren, zu ermitteln. Aus ihrer Verlängerung $\lambda' = 36 \text{ mm}$ ergibt sich die Dehnung $\delta_5 = \frac{\lambda'}{l'} = \frac{36}{100} = 0,36$ oder 36% . Der Wert ist 1,37mal größer als der an $l = 10 d = 200 \text{ mm}$ Meßlänge festgestellte. Zur richtigen Beurteilung der Dehnungswerte ist es daher immer notwendig, die benutzte Meßlänge oder ihr Verhältnis zum Stabquerschnitt zu kennen.

Die Dehnung gilt als ein Maß der Zähigkeit, einer sowohl bei der weiteren Verarbeitung, wie auch bei der Verwendung der Werkstoffe zu Maschinenteilen sehr wichtigen Eigenschaft. So legt man beispielweise Wert auf große Dehnung bei allen Kesselbaustoffen, obgleich die Beanspruchungen durch den normalen Betrieb weit unter der Fließgrenze liegen, die Ausnutzung der Dehnbarkeit also gar nicht in Frage kommt. Wohl aber wird diese entscheidend im Falle von Überbeanspruchungen, wie sie an Flammrohrkesseln bei zu tiefem Sinken des Wasserspiegels, Steigerung der Temperatur bis zum Glühendwerden und Einbeulen der Flammrohre vorkommen. Nur sehr zähes Flußeisen hält Formänderungen, wie sie Abb. 13 zeigt, aus, ohne zu reißen. Flammrohre aus Stahl von hoher Festigkeit böten die Möglichkeit, mit viel geringerem Konstruktionsgewicht auszukommen und sehr leichte Kessel zu bauen, würden aber bei Inanspruchnahmen, wie eben geschildert, wegen zu geringer Zähigkeit sicher zum Bruch und mindestens zum plötzlichen Ausströmen großer Wasser- und Dampfmenge führen. Ein anderes Beispiel bietet das Einziehen größerer Nieten. Die Bleche werden um die Nieten herum, wie am Abspringen des Zunders zu erkennen ist, über die Fließgrenze hinaus beansprucht. In Baustoffen von geringer Dehnbarkeit entstehen dabei oft äußerlich nicht erkennbare Anrisse, die aber im Betriebe leicht größer und sehr bedenklich werden können.

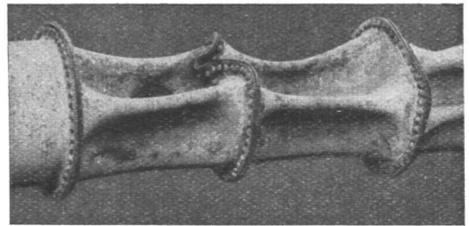


Abb. 13. Eingebulstes Flammrohr.

Sehr wichtig sind zähe Baustoffe im Falle plötzlicher oder stoßweiser Belastung. So sollen die Verbindungsschrauben offener Schubstangenköpfe aus zähem Werkstoffe hergestellt werden, damit sie bei Überlastungen, wie sie gelegentlich eines Wasserschlags vorkommen können, zwar nachgeben und sich längen, aber nicht brechen. Der Bruch einer solchen Schraube kann die völlige Zerstörung der Maschine zur Folge haben. An solchen Teilen ist ferner sorgfältig auf die Vermeidung von Einschnürungen, Kerben und plötzlichen Querschnittverminderungen, die die Ausbildung der Formänderungen beeinträchtigen, zu achten.

In ähnlicher Weise wie die Dehnung dient die Querschnittverminderung oder Einschnürung ψ zur Beurteilung der Zähigkeit. War der ursprüngliche Querschnitt eines Probestabes F cm², der Bruchquerschnitt F_1 cm² so ist die Einschnürung durch

$$\psi = \frac{F - F_1}{F} \cdot 100 \quad (3a)$$

in Hundertteilen ausgedrückt.

Trägt man die bei einem Zugversuch ermittelten Spannungen als Ordinaten, die zugehörigen Dehnungen als Abszissen auf, so wird man in der so erhaltenen Spannungsdehnungslinie unabhängig von dem Querschnitt und der Länge der verwandten Probe. Bei ein und demselben Baustoffe findet man den gleichen Linienzug, gleichgültig, ob er etwa an einem Stabe von 20 mm Durchmesser und 200 mm Meßlänge oder an einem solchen von 10 mm Durchmesser und 100 mm Meßlänge ermittelt wurde, wenn die Proben nur geometrisch ähnlich waren. Dagegen sind die Kräfte im ersten Falle viermal, die Formänderungen doppelt so groß wie im zweiten, so daß bei Anwendung gleicher Maßstäbe für die Kräfte und Formänderungen zwei ganz verschiedene Kurven entstehen. Im folgenden ist aus dem Grunde meist von der Spannungsdehnungslinie Gebrauch gemacht.

Die oben erwähnte Eigenschaft weichen Flußstahls, daß die Verlängerungen bis zum Punkte P , Abb. 10, verhältnismäßig den Belastungen sind, bildet als Hookesches Gesetz die Grundlage für die Berechnung der Formänderungen aus den wirkenden Kräften oder Spannungen oder umgekehrt. Bezeichnet λ die Verlängerung, c einen Festwert, so kann man das Gesetz durch $\lambda = c \cdot P$ ausdrücken. Aus Gleichung (1) folgt $P = F \cdot \sigma_z$ und damit $\lambda = c \cdot F \cdot \sigma_z$ oder da der Querschnitt F an einem prismatischen Stabe innerhalb der Proportionalitätsgrenze als unveränderlich angesehen werden darf, $\lambda = c' \cdot \sigma_z$. Die Verlängerung ist also auch verhältnismäßig der im Stabe vorhandenen Zugspannung. Setzt man nach Gleichung (3) $\lambda = \varepsilon \cdot l$, so wird $\varepsilon \cdot l = c' \cdot \sigma_z$ oder

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_z} = \frac{c'}{l} = \text{konst.} = \alpha \quad (4)$$

α heißt Dehnungs- oder Elastizitätszahl und ist nach der linken Seite der Gleichung die auf die Spannungseinheit bezogene Dehnung. Sie gibt die Verlängerung an, die ein Körper von der Länge 1 und dem Querschnitt 1 durch die Spannungseinheit erfährt. Ihr reziproker Wert ist das Elastizitätsmaß oder der Elastizitätsmodul

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma_z}{\varepsilon} \quad (5)$$

Mit $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma_z$ gibt die Gleichung (4)

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sigma_z \quad (6a)$$

und da $\sigma_z = \frac{P}{F}$ ist,

$$\lambda = \frac{\alpha \cdot P \cdot l}{F} \quad (6b)$$

Bei $\alpha = \frac{1}{2100000}$ kg/cm² errechnet sich z. B. die Verlängerung, die die Meßstrecke $l = 20$ cm des oben erwähnten weichen Flußstahlstabes von 2 cm Durchmesser bei $P = 3000$ kg erfahren hat, zu

$$\lambda = \frac{\alpha \cdot P \cdot l}{F} = \frac{1 \cdot 3000 \cdot 20}{2100000 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2^2} = 0,0091 \text{ cm.}$$

Manche Stoffe, wie Gußeisen, Leder, Steine und Beton, zeigen keine Verhältnismäßigkeit zwischen den Spannungen und den Formänderungen, so daß auch die zugehörige Dehnungsziffer α von Anfang an veränderlich ist. Für die Zwecke des Maschinenbaues pflegt jedoch die Annahme eines Mittelwertes für α meist genügend genau und daher auch die Benutzung der auf dem Hookeschen Gesetz begründeten Festigkeitsformeln zulässig zu sein.

D. Das Arbeitsvermögen der Werkstoffe.

Der Flächeninhalt der Schaulinie, Abb. 10, stellt die zur Formänderung nötig gewesene Arbeit, das Arbeitsvermögen \mathfrak{A} des Baustoffes, dar, das vergleichshalber gewöhnlich auf die Raumeinheit des untersuchten Stabstückes bezogen und dann als spezifisches Arbeitsvermögen α bezeichnet wird. In Abb. 10 beträgt der Flächeninhalt $39,9 \text{ cm}^2$, und da ein Quadratzentimeter $2000 \cdot 0,667 = 1333 \text{ kg cm}$ darstellt, so ist die gesamte Formänderungsarbeit

$$\mathfrak{A} = 39,9 \cdot 1333 = 53190 \text{ kgcm.}$$

Sie war an einem Stabstücke von 2 cm Durchmesser und 20 cm Meßlänge, mithin von $V = 62,82 \text{ cm}^3$ Inhalt ermittelt worden, so daß die spezifische Formänderungsarbeit

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}}{V} = \frac{53190}{62,82} = 847 \frac{\text{kgcm}}{\text{cm}^3}$$

wird.

Während das eben ermittelte Arbeitsvermögen, ähnlich wie die Bruchdehnung einen Vergleichswert für die Zähigkeit der Baustoffe abgibt, ist das elastische Arbeitsvermögen, welches durch das der Elastizitätsgrenze entsprechende Formänderungsdreieck dargestellt ist, wichtig für die Aufnahme von Stößen.

Der Baustoff kann eine entsprechende Stoßarbeit durch seine Elastizität, also ohne bleibende Formänderung, auffangen. Für das Flußeisen, Abb. 10, berechnet sich die elastische Formänderungsarbeit, wenn die Elastizitätsgrenze schätzungsweise in Höhe der unteren Fließgrenze, also bei einer Belastung des Stabes von $P_E = 6310 \text{ kg}$ angenommen wird, und die zugehörige Verlängerung aus Formel (6b) zu

$$\lambda_E = \frac{\alpha \cdot P_E \cdot l}{F} = \frac{6310 \cdot 20}{2100000 \cdot 3,14} = 0,0191 \text{ cm}$$

bestimmt ist, zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_E &= \frac{P_E \cdot \lambda_E}{2} \\ &= \frac{6310 \cdot 0,0191}{2} = 60,3 \text{ kgcm.} \end{aligned} \quad (7)$$

Auf die Raumeinheit bezogen, wird die spezifische elastische Formänderungsarbeit

$$\begin{aligned} \alpha_E &= \frac{\mathfrak{A}_E}{V} \\ &= \frac{60,3}{62,8} = 0,96 \frac{\text{kgcm}}{\text{cm}^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Mit $V = F \cdot l$, $\frac{P_E}{F} = \sigma_E$, $\frac{\lambda_E}{l} = \varepsilon_E$ geht α_E übrigens in

$$\alpha_E = \frac{P_E \cdot \lambda_E}{2F \cdot l} = \frac{\sigma_E \cdot \varepsilon_E}{2} \quad (9)$$

über, ist also durch das halbe Produkt aus der Spannung und Dehnung an der Elastizitätsgrenze gegeben.

Zahlenbeispiel. Wenn die Stange der Abb. 9 zwischen Kopf und Innenfläche der Mutter gemessen, eine Länge $L = 150 \text{ cm}$ und dementsprechend

$$V = F \cdot L = 3,141 \cdot 150 = 471 \text{ cm}^3 \text{ Inhalt}$$

hat, so kann sie, aus dem Flußeisen nach Abb. 10 hergestellt, eine Arbeit

$$\mathfrak{A}_E^* = V \cdot \alpha_E^* = 471 \cdot 0,96 = 452 \text{ cmkg}$$

elastisch aufnehmen. Um eine Vorstellung über die Wirkung von Stößen zu geben, sei erwähnt, daß das an der Stange hängende Gewicht von 1500 kg diese elastische Formänderungsarbeit erschöpft hätte, wenn es nach einem Fall von nur $1,6 \text{ mm}$ durch die

Stange aufgefangen würde. Bei stärkeren Stößen wird die Elastizitätsgrenze überschritten, und müssen bleibende Formänderungen entstehen. Dabei ist auf die Kerbwirkung im Gewinde und an der Ansatzstelle des Kopfes, welche die Widerstandsfähigkeit der Stange gegen Stoß noch wesentlich herabsetzt, (vergl. den Abschnitt 3) noch gar nicht Rücksicht genommen.

Der Rechnungsgang ist folgender. Es bezeichne x die Strecke, um welche das Gewicht P herabfällt. Nach Durchlauf dieser Strecke trifft P auf den Kopf der Schraube und erzeugt in deren Schaft bei der weiteren Bewegung Spannungen, die höchstens bis zur Elastizitätsgrenze heranreichen dürfen, wenn keine bleibenden Formänderungen auftreten sollen. Die zu dieser Spannung σ_E gehörige Verlängerung des Stabes sei λ_E . Dann ist der gesamte Weg, den das Gewicht zurücklegt, $x + \lambda_E$ und die von ihm geleistete Arbeit $P \cdot (x + \lambda_E)$. Sie muß gleich der Formänderungsarbeit des Stabes $\frac{P_E \cdot \lambda_E}{2}$ sein, wenn P_E die Kraft bedeutet, die der Spannung σ_E entspricht. Aus

$$P(x + \lambda_E) = \frac{P_E \cdot \lambda_E}{2}$$

folgt

$$x = \frac{\lambda_E (P_E - 2P)}{2P},$$

das sich mit $P_E = \sigma_E \cdot F$ und $\lambda_E = \frac{\alpha \cdot P_E \cdot l}{F} = \alpha \cdot \sigma_E \cdot l$ auf die Spannung an der Elastizitätsgrenze σ_E zurückführen läßt:

$$x = \frac{\alpha \cdot \sigma_E \cdot l (\sigma_E \cdot F - 2P)}{2P}.$$

Mit den gegebenen und oben ermittelten Zahlenwerten wird

$$x = \frac{2010 \cdot 150 (2010 \cdot 3,14 - 2 \cdot 1500)}{2100000 \cdot 2 \cdot 1500} = 0,158 \text{ cm.}$$

Die Verlängerung λ_E , die der Stab bei der stoßweisen Belastung erleidet, ist

$$\lambda_E = \alpha \cdot \sigma_E \cdot l = \frac{2010 \cdot 150}{2100000} = 0,144 \text{ cm,}$$

während bei ruhiger Einwirkung der Belastung P nur eine Verlängerung von

$$\lambda = \frac{\alpha \cdot P \cdot l}{F} = \frac{1500 \cdot 150}{2100000 \cdot 3,14} = 0,0342 \text{ cm}$$

entsteht. Dadurch gerät der Stab in Längsschwingungen, bis er sich allmählich auf den zuletzt berechneten Wert einstellt. Tritt aber Resonanz ein, so können die Schwingungen verstärkt werden und zu bleibenden Formänderungen und schließlich zum Bruch führen!

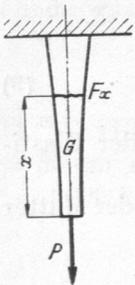


Abb. 14. Zur Berechnung des Körpers gleicher Zugfestigkeit.

Besitzt ein auf Zug beanspruchter Körper verschiedene Querschnitte, so ändern sich die Spannungen umgekehrt verhältnismäßig den Flächeninhalten, so daß der gefährliche Querschnitt, in dem die größten Spannungen auftreten, durch den kleinsten Querschnitt gekennzeichnet ist.

Unter Berücksichtigung des Eigengewichtes ist die Spannung in einem beliebigen Querschnitte F_x an der Stelle x des Stabes Abb. 14,

$$\sigma_z = \frac{P + G}{F_x},$$

wenn G das Eigengewicht des unter dem betrachteten Querschnitt liegenden Stabteiles bedeutet. Wird die Form des Stabes so gewählt, daß in allen Querschnitten gleiche Spannungen vorhanden sind, so entsteht der Körper gleicher Zugfestigkeit, der bei dem Einheitsgewicht s des Baustoffes der Gleichung

$$F_x = \frac{P}{\sigma_z} \cdot e^{\frac{s \cdot x}{\sigma_z}} \quad (10)$$

entsprechen müßte. e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.

Beispiel. Ein Förderseil von 17 mm Durchmesser, aus sechs Litzen zu je sechs Drähten von 1,8 mm Durchmesser und sieben Hanfseelen bestehend und von 0,88 kg/m Eigengewicht hält bei einer Zugfestigkeit des Drahtes $K_z = 12000 \text{ kg/cm}^2$ eine Bruchlast von 10970 kg aus. Auf das reine Drahtvolumen bezogen, hat es ein Einheitsgewicht $s = 0,00861 \text{ kg/cm}^3$. Bei achtfacher Sicherheit oder $k_z = 1500 \text{ kg/cm}^2$ zulässiger Spannung, könnte es mit $\frac{10970}{8} = 1372 \text{ kg}$ belastet werden und bei 1000 kg Nutzlast $G = 372 \text{ kg}$

Eigengewicht haben. Das entspricht einer Länge von $\frac{372}{0,88} = 423 \text{ m}$. Wenn es als Seil gleicher Festigkeit den theoretischen Anforderungen entsprechend genau hergestellt werden könnte, erhielte es einen Endquerschnitt

$$F_0 = \frac{P}{k_z} = \frac{1000}{1500} = 0,667 \text{ cm}^2$$

und eine Länge $l = 550 \text{ m}$, die sich aus

$$F_1 = \frac{P}{k_z} \cdot e^{\frac{s \cdot l}{k_z}} = F_0 \cdot e^{\frac{s \cdot l}{k_z}}$$

ergibt, wenn F_1 den obersten Querschnitt von

$$36 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,18^2 = 0,916 \text{ cm}^2$$

bedeutet. Durch Logarithmieren folgt

$$\log F_1 = \log F_0 + \frac{s \cdot l}{k_z} \cdot \log e,$$

$$l = \frac{k_z}{s} \frac{\log F_1 - \log F_0}{\log e} = \frac{1500}{0,00861} \frac{\log 0,916 - \log 0,667}{\log e} = 55000 \text{ cm}.$$

II. Die zulässigen Spannungen bei der Berechnung von Maschinenteilen.

Grundsätzlich ist zu beachten, daß an den Maschinenteilen weniger die entstehenden Spannungen als die auftretenden Formänderungen maßgebend und entscheidend sind. Letztere müssen im wesentlichen elastischer Art sein; größere bleibende sind unbedingt zu vermeiden, da sie nicht allein die Gefahr einer Beschädigung oder des Bruches näherücken, sondern auch zu anderer Wirkung und Verteilung der Kräfte und zu Überanstrengungen weiterer Teile führen können. Wenn man bei der Berechnung meist die Bestimmung der Formänderungen umgeht, so geschieht das aus zwei Gründen: weil die Berechnung der Spannungen mittels einfacherer Formeln und unter Vermeidung der Elastizitätsziffer möglich ist und weil unsere Festigkeitslehre nach dem Hooke'schen Gesetz Verhältnigleichheit zwischen Spannungen und Formänderungen voraussetzt, so daß — nicht immer in Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen — die Spannungen den Formänderungen gleichwertig werden. Sollen die Formänderungen klein sein, so hilft man sich dadurch, daß man niedrige Beanspruchungen einsetzt.

Der Berechnung von Konstruktionsteilen werden die zulässigen Spannungen zugrunde gelegt. Bei ihrer Wahl sind drei Gesichtspunkte zu beachten:

1. die mechanischen Eigenschaften der zu verwendenden Werkstoffe,
2. die Sicherheit, mit der die Spannungen durch die Rechnung ermittelt werden können,
3. die Art der Kraftwirkung.

1. Einfluß der mechanischen Eigenschaften der Werkstoffe. Zur Vermeidung bleibender Formänderungen müssen, wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, die Spannungen in den Maschinenteilen unterhalb der Elastizitätsgrenze, zum mindesten unterhalb der Fließgrenze bleiben. Bei den üblichen Prüfungen der Baustoffe werden freilich die Spannungen an diesen Grenzen nur selten genau festgestellt; meist beschränkt man sich auf die Ermittlung der Bruchfestigkeit K und der Formänderung während des Bruches oder nach demselben und benutzt den oben erläuterten Sicherheitsgrad gegen Bruch \mathcal{S} dazu, die zulässige Spannung $k = \frac{K}{\mathcal{S}}$ festzulegen. Dabei sind verschiedene Zahlen für \mathcal{S} nötig, je nach der Gewißheit, mit der vorgeschriebene Festigkeitseigenschaften bei der Herstellung erreicht und gewährleistet werden können und je nach der Lage der Bruch- und Elastizitätsgrenze zueinander. Schmiedeeisen und Stahl werden in bestimmten, recht gleichmäßigen Sorten geliefert, so daß niedrige Werte für \mathcal{S} zulässig sind; dagegen verlangen gewöhnlicher Stahlguß, in noch stärkerem Maße aber viele Legierungen höhere Werte, weil sie ungleichmäßiger und unzuverlässiger sind, soweit nicht Sonderfirmen mit weitgehenden Erfahrungen genügende Gewähr bieten können.

Die zulässige Beanspruchung muß um so kleiner genommen werden, je niedriger die Elastizitätsgrenze im Verhältnis zur Bruchgrenze liegt.

Schließlich wird der Sicherheitsgrad im allgemeinen bei zähen Stoffen mit bedeutendem Arbeitsvermögen und großen Dehnungszahlen kleiner gewählt werden dürfen, weil selbst im Falle des Überschreitens der Fließgrenze noch beträchtliche Formänderungen nötig sind, ehe es zum Bruche kommt. Doch ist dabei etwaige Kerbwirkung (Abschn. 3, II, e) besonders zu beachten. Durch scharfe Absätze, geringe Ausrundungen oder unvermittelte Querschnittübergänge kann die Formänderung gehindert oder beeinträchtigt und die Widerstandsfähigkeit erheblich vermindert werden. Auch hier pflegt man sich wieder dadurch zu helfen, daß man bei der üblichen Rechnung niedrige Spannungen einsetzt.

Die in der Zusammenstellung 2 gegebenen Zahlen gelten für gewöhnliche Wärmegrade. Der Einfluß der Wärme auf die Festigkeit ist bei der Besprechung der einzelnen Werkstoffe behandelt.

2. Einfluß der Spannungsermittlung. Je sicherer es ist, daß die errechneten Spannungen nicht überschritten werden, um so höher darf die Beanspruchung unter voller Beachtung der Gesichtspunkte 1 und 3 liegen. Bei ruhender Belastung ist es z. B. zulässig, bis nahe an die Elastizitätsgrenze heranzugehen. Wenn aber Nebenbeanspruchungen auftreten, die vernachlässigt sind oder rechnermäßig nicht verfolgt werden können, so ist die zulässige Beanspruchung unter sorgfältiger Einschätzung der Umstände zu erniedrigen. Beispielweise werden auf diese Art oft das Eigengewicht, Nebenspannungen, zufällige Überlastungen, etwa durch Überschreiten der normalen Geschwindigkeiten, Stöße oder Erschütterungen, dynamische oder Massenwirkungen, Guß- und Wärmespannungen berücksichtigt. Auch die Art des Betriebes — bei Kranen: Walzwerkbetrieb, im Gegensatz zu dem vorsichtigeren Werkstattbetrieb —, oder die bei Betriebsmaschinen der chemischen Großindustrie gestellte Forderung, daß sie ohne Überholen vier bis fünf Monate Tag und Nacht durchlaufen müssen, ist zu beachten.

3. Einfluß der Art der Kraftwirkung. Es ist nicht gleichgültig, ob eine Kraft ihre Größe und Richtung dauernd beibehält oder wechselt. In der Beziehung braucht nur daran erinnert zu werden, daß ein Stab dem einmaligen Abbiegen oft sehr gut widersteht, dagegen durch mehrfaches Hin- und Herbiegen zum Bruch gebracht wird. Seine Fasern sind im letzteren Falle wechselnd auf Biegung beansprucht und deshalb weniger widerstandsfähig.

Man unterscheidet die folgenden drei Arten der Inanspruchnahme:

a) Ruhende Beanspruchung. Die Belastung wirkt dauernd und ändert ihre Größe und Richtung nicht. (Tragstange eines Belastungsgewichts, $\sigma_z = \text{konst.}$)

Zusammenstellung 1. Auszug aus den Wöhlerschen Versuchen.

Lfd. Nr.	Werkstoff	Belastungsweise	Zahl der Belastungen n		Bruchspannung nach Wöhler	Verhältnis der Bruchspannungen
			Bruch erfolgte bei $n =$	noch nicht gebrochen bei $n =$		
1	Bearbeitete Stäbe aus schweißeisernen Achsen, von Phönix 1857 geliefert	a) Ruhend auf Zug (2 Versuche)	800	48 200 000	a) Ruhende Bel. $K_z = 3250 \text{ kg/cm}^2$	2,77
2		b) Schwellend auf Zug $\dots \sigma_z = 0 \dots 3500 \text{ kg/cm}^2$	10 141 645			
3			169 750			
4		b) Schwellend auf Biegung $\sigma_b = 0 \dots 4010$	481 950			
5			4 035 400			
6						
7		c) Wechselnd auf Biegung $\dots \sigma_b = 0 \dots 2190$	56 430			
8			99 000			
9			183 145			
10			479 490			
11			909 810			
12			3 632 588			
13			4 917 992			
14			19 186 791			
15						
16			132 250 000			
17	Bearbeitete Stäbe aus Gußstahlachsen, von Krupp 1862 geliefert.	a) Ruhend auf Zug (3 Versuche)	18 741	13 600 000	a) Ruhende Bel. $K_z = 7600 \text{ kg/cm}^2$	3,7
18		b) Schwellend auf Zug $\dots \sigma_z = 0 \dots 5840 \text{ kg/cm}^2$	473 766			
19						
20						
21		b) Schwellend auf Biegung $\sigma_b = 0 \dots 4020$	1 762 300			
22			1 031 200			
23			5 234 200			
24		c) Wechselnd auf Biegung $\dots \sigma_b = 0 \dots 3650$	55 100			
25			797 525			
26			45 050 640			
27			373 800			
28		b) Schwellend auf Drehung $\tau_d = 0 \dots 3280$	879 900			
29						
30			859 700			
31		c) Wechselnd auf Drehung $\dots \tau_d = 0 \dots 2770$				
32						
33	Bearbeitete Stäbe aus Gußeisen aus einem Lokomotivzylinder (Vulkan).	b) Schwellend auf Zug $\dots \sigma_z = 0 \dots 1100 \text{ kg/cm}^2$	3140	7 200 000	b) Schwellende Bel. $K_z = 730 \text{ kg/cm}^2$	1
34			4 000			
35			10 342			
36			45 028			
37			78 685			
38			27 885			
39			35 599			
40			208 439			
41						
42			7 600 000			

b) Schwellende Beanspruchung. Die Belastung schwankt stetig, aber beliebig oft zwischen Null und einem höchsten Werte. (Lastseil eines Krans, wenn man die Belastung durch das Eigengewicht und die Hakenflasche unberücksichtigt läßt. Es entstehen nur Zugspannungen σ_z , die aber alle Werte zwischen 0 bei leerem Haken bis σ_z bei voller Last durchlaufen.)

c) Wechselnde Beanspruchung. Die äußeren Kräfte erzeugen Spannungen, die beliebig oft zwischen einem positiven und einem negativen größten Wert wechseln. (Die Achse eines Eisenbahnwagens ist wechselnd auf Biegung belastet, indem ihre Fasern bei jeder Umdrehung einmal auf Zug durch $+\sigma_b$ und einmal auf Druck durch $-\sigma_b$ in Anspruch genommen werden.)

Die ersten sorgfältigen und grundlegenden Versuche über den Einfluß der Art der

Zusammenstellung 2. Zulässige Bean-

Unter Benutzung der Werte von

Werkstoff	Anforderungen		Zulässige								
	Festigkeit K_z, K, K_b kg/cm ²	Bruchdehnung δ %	Zug k_z kg/cm ²			Druck k kg/cm ²		Flächendruck p kg/cm ² an nicht gleitenden Flächen			
			a) ruhend	b) schwellend	c) wechselnd	a) ruhend	b) schwellend	a) ruhend	b) schwellend	c) hämmernd	
			$\frac{\sigma}{K_z} = K_z : k_z$								
Flußstahl, weich	$K_z = 3000-5000$	25-15	4-3	900-1500	600-1000	300-500	900-1500	600-1000	800-1000	530-670	270-330
Flußstahl	$K_z = 5000-7000$	20-10	4	1200-1800	800-1200	400-600	1200-1800	800-1200	1000-1500	700-1000	350-500
Flußstahl, gehärtet Federstahl, gehärtet									1500-1800	900-1200	400-600
Tiegelstahl	$K_z = 4500-9000$	20-6	4-3	1200-2500	800-1670	400-830	1200-2500	800-1670	1000-2000	670-1330	330-670
Nickelstahl, weich- mittelhart	$K_z = 4500-6000$	20-16	4-3	1200-1800	800-1200	400-600	1200-1800	800-1200	1000-1500	700-1000	350-500
Schweißbeisen	$K_z = 3000-4200$	20-12	4-3,5	900-1200	600-800	300-400	900-1200	600-800	700-900	470-600	230-300
Stahlguß	$K_z = 3600-6000$	20-10	6-5	600-1200	400-800	200-400	900-1500	600-1000	800-1000	530-670	270-330
Gußeisen mit Guß- haut	K_b an normalen Rundstäben 2800-3600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
			5-4,5	300-350	200-230	100-120	900-1000	600-660			
Gußeisen bearbeitet	$K_z = 1350-1750$	—	—	—	—	—	—	—	700-800	470-530	230-270
Schmiedbarer Guß	$K_z = 2000-3100$	7,5-1	5-4	450-700	300-470	150-230	600-900	400-600	500-800	330-530	170-270
Hartguß	$K_z = 3000-4500$	35-25	5-4	400-540	270-360	130-180	400-540	270-360	1000-1500	670-1000	330-500
Kupfer, gewalzt	$K_z = 2000-2700$								350-500	230-330	120-170
Blei	$K_z = 900-1200$	3	10-8	100-120	70-80	30-40			20-50		
Aluminiumguß											
Zinnbronzen, gegos- sen	$K_z = 2000-2500$	20-6	6-5	400-500	270-330	130-170	400-500	270-330	300-400	200-270	100-130
Phosphorbronzen	$K_z = 3000-4500$	25-10	6-5	600-900	400-600	200-300	600-900	400-600	500-750	330-500	170-250
Rotguß	$K_z = 1800-2200$	15-5	6-5	300-400	200-270	100-130	300-400	200-270	250-350	170-230	80-120
Messing, gewalzt	$K_z = 2000-3000$	30-20	5	400-600	270-400	130-200	400-600	270-400	300-450	270-300	130-150
Durana-Deltametall usw.	$K_z = 3500-6000$	20-12	6-5	600-1000	400-670	200-330	600-1000	400-670	500-800	330-530	170-270
Eiche	$K = 350-500$	$K_b = 600-750$	—	180	120	60	90	60			
Tanne, Fichte, Kiefer	$K = 250-400$	$K_b = 300-500$	—	150	100	50	75	50			
Granit	in Richtung der Faser.	—	—	—	—	—	60	40			
Kalkstein		—	—	—	—	—	30	20			
Sandstein		—	—	—	—	—	20	14			
Ziegelmauerwerk, in Kalk		—	—	—	—	—	10	7			
Ziegelmauerwerk in Zement		—	—	—	—	—	16	10			
Beton		—	—	—	—	—	10	7			

Belastung hat Wöhler 1858—1870 ausgeführt [I, 5]. Die vorstehende Zusammenstellung 1 beschränkt sich auf einige Versuche an Stäben aus Schweißeisen, Gußstahl und Gußeisen, während sich die Untersuchungen Wöhlers noch auf zahlreiche andere Stahl- und Eisenproben, auf gehärteten und ungehärteten Federstahl und Kupfer, sowie auf die Wirkung scharfer Absätze bezogen. Einige Stäbe der Versuchsreihen wurden dem gewöhnlichen Zerreiversuch unter allmählicher Steigerung der Last bis zum Bruch, ruhender Beanspruchung entsprechend, auf Zugfestigkeit untersucht, eine weitere Anzahl unter schwellender Inanspruchnahme allmählich bis zu den angegebenen Grenzlasten be- und dann wieder entlastet. Auf Biegung wurden die Stäbe schwellend beansprucht, indem die Last, welche die angeführten Spannungen hervorrief, allmählich aufgebracht und dann wieder abgenommen wurde, wechselnd, indem die Stäbe sich unter der Last drehen

spruchungen der Werkstoffe des Maschinenbaues.

Bach, Stephan, Kammerer u. a.

Beanspruchung auf										Bemerkungen		
Biegung k_b kg/cm ²			Abscherung k_s kg/cm ²			Drehung k_d kg/cm ²						
a) ruhend	b) schwellend	c) wechselnd	a) ruhend	b) schwellend	c) wechselnd	a) ruhend	b) schwellend	c) wechselnd				
Querschnittform und $\frac{K_b}{k_b}$			$\frac{K_s}{k_s}$			Querschnittf. u. $\frac{K_d}{k_d}$						
	900—1500 1200—1800	600—1000 800—1200	300—500 400—600	4—3 4	720—1200 960—1440	480—800 640—960	240—400 320—480	600—1200 900—1440	400— 800 600— 960	200—400 300—480		
	7500	5000	—	—	—	—	—	6000	4000	—	vgl. Zus.-Stell. 12	
	1200—2500	800—1670	400—830	4—3	960—2000	640—1330	320—670	900—2000	600—1330	300—670	vgl. Zus.-Stell. 27	
	1200—1800	800—1200	400—600	4	960—1440	640—960	320—480	900—1440	600— 960	300—480	vgl. Zus.-Stell. 27	
	900—1200 750—1200	600— 800 500— 800	300—400 250—400	4—3,5 6—5	720—950 480—960	480—640 320—640	240—320 160—320	360— 480 480— 960	240— 320 320— 640	120—160 160—320	vgl. Abschn. 2, II, D	
 6	460— 600	310— 400	150—200									
 7,5	370— 480	250— 320	120—160					 5	270—350	180—230	90—120	
 9	310— 400	210— 270	100—130		300—350	200—230	100—120	 6	220—290	150—190	70—100	vgl. Abschn. 2, II, E, 2
 5	560— 720	370— 480	190—240					 3,5	380—500	250—330	130—160	
 6	460— 600	310— 400	150—200					 3,2	420—550	280—370	140—180	
 7	400— 510	270— 340	130—170									
	450— 700	300— 470	150—230	—	—	—	—	—	300—400	200—270	100—130	
	400— 540	270— 360	130—180									
	150— 200	100— 130	50—70									
	400— 500 600— 900 300— 400 400— 600	270— 330 400— 600 200— 270 270— 400	130—170 200—300 100—130 130—200	— — — —	— 450—700 320—480	— 300—470 210—320	— 150—230 110—160	— 300—400 450—700 320—480	200—270 300—470 210—320	100—130 150—230 110—160		vgl. Abschn. 2, IV, B
	600—1000	400— 670	200—330	—	480—800	320—530	160—270	480—800	320—530	160—270		vgl. Abschn. 2, IV, C
	130 105	90 70	45 35	— —	— —	10 8						

mußten, so daß die Fasern bald Druck-, bald Zugspannungen gleicher Größe ausgesetzt waren. Eine dieser Reihen ist unter lfd. Nr. 1—16 vollständig wiedergegeben und zeigt deutlich den Einfluß der Höhe der Beanspruchung auf die Zahl der Belastungen, die zum Bruche nötig sind. Endlich wurde an einer Anzahl Proben das Verhalten gegenüber schwellonder und wechselnder Beanspruchung auf Drehung festgestellt.

Für die einzelnen Baustoffe und Belastungsarten sind in der vorletzten Spalte die Spannungen, bei denen der Bruch zu erwarten ist, aufgeführt. Sie nehmen in der Reihenfolge: ruhende, schwellonde und wechselnde Beanspruchung sehr bedeutend ab und ergeben, wenn man die Bruchspannung bei wechselnder Belastung gleich 1 setzt, die in der letzten Spalte eingetragenen Verhältniszahlen, die nur für das untersuchte Gußeisen fehlen, da der entsprechende einfache Zugversuch leider unterblieben ist. Aus ihnen, sowie aus den praktischen Erfahrungen im Maschinenbau kann man das Verhältnis der Bruchspannungen K und — gleiche Sicherheit gegen das Eintreten des Bruches vorausgesetzt —, das Verhältnis der zulässigen Beanspruchungen k in den drei Fällen der ruhenden, schwellonden und wechselnden Einwirkung der Kräfte wie 3 : 2 : 1 annehmen, so daß z. B. weicher Flußstahl, der bei ruhender Belastung auf Zug mit 1200 kg/cm^2 beansprucht werden darf, bei schwellonder 800 und bei häufigem Wechsel zwischen Zug und Druck nur $\pm 400 \text{ kg/cm}^2$ verträgt.

Die Erklärung für die Erscheinungen und besonders für den auffallenden Umstand, daß bei schwellonder Belastung recht hohe Spannungen, die offenbar über der gewöhnlichen Fließgrenze des Baustoffs liegen, dauernd ausgehalten werden und nicht zum Bruche führen, gab Bauschinger [I, 6]. Er zeigte an Schweißstahl und Flußstahl, daß Belastungen in einer Richtung, z. B. auf Zug, die über die Streckgrenze des Werkstoffes hinausgehen, die Streck- und die Elastizitätsgrenze bis zu einem gewissen Grade heben, wodurch der Baustoff zur Aufnahme beliebig häufiger Wiederholungen von Belastungen in gleichem Sinne, entsprechend schwellonder Beanspruchung fähig wird. War aber an einer Probe bei einer Belastung auf Zug die Elastizitätsgrenze überschritten worden, und wurde nunmehr die Probe auf Druck in Anspruch genommen, so ergab sich, daß die Elastizitätsgrenze für diese entgegengesetzte Belastung erniedrigt und oft auf Null herabgeworfen worden war. Derartigen, zwischen Zug und Druck wechselnden Beanspruchungen widersteht der Baustoff dauernd nur, wenn die Spannungen unter einer bestimmten Grenze bleiben, die Bauschinger als natürliche Elastizitätsgrenze bezeichnete, und die erheblich unter der Grenze für schwellonde Belastung liegt.

Zu den auf S. 12 zusammengestellten zulässigen Beanspruchungen der wichtigeren Werkstoffe des Maschinenbaus sind die folgenden Bemerkungen zu machen. Die in der Spalte „Anforderungen“ aufgeführten Festigkeits- und Dehnungszahlen sind an guten, im Maschinenbau häufig verwandten Werkstoffen ermittelte Durchschnittswerte. Sie werden gelegentlich unterschritten, können aber bei Sondersorten wesentlich übertroffen werden, wie bei der Einzelbesprechung der Baustoffe näher gezeigt ist.

Was die Zahlen für die Dehnung anlangt, so gehören die größeren Dehnungsziffern im allgemeinen zu den kleineren Festigkeitszahlen, da die Dehnung mit steigender Festigkeit abnimmt. Es ist unzulässig, neben hoher Festigkeit auch große Werte für die Dehnung zu verlangen.

In den folgenden Spalten sind Einzelzahlen für die zulässigen Spannungen bei den verschiedenen Inanspruchnahmen auf Zug, Druck, Flächendruck, Biegung, Abscherung und Drehung aufgeführt. Wenn dabei fast durchweg zwei Werte angegeben wurden, so ist das zunächst wegen der in verschiedenen Grenzen liegenden Festigkeit der Werkstoffe geschehen. Die größeren Werte sollten im allgemeinen nur an besseren, den höheren Festigkeitszahlen entsprechenden Baustoffen zugelassen werden. Dann ist sorgfältig zu berücksichtigen, ob die Bedingungen der Inanspruchnahme auf ruhende, schwellonde oder wechselnde Wirkung der Kräfte vollkommen erfüllt sind, oder ob nicht Nebenbeanspruchungen, Stöße, Wärme- und Gußspannungen usw. die Wahl niedrigerer Werte verlangen.

Neben den Zahlen für die ruhende Belastung auf Zug, Biegung, Abscherung und Drehung ist vielfach die Sicherheit $\mathfrak{S} = K : k$ angeführt, um einen Anhalt für die zulässige Beanspruchung an ähnlichen Stoffen mit ungewöhnlichen oder durch den Versuch ermittelten besonderen Festigkeitszahlen zu bieten. Bei Gußeisen, das auf Biegung und Drehung beansprucht ist, hat die Querschnittform nach den Versuchen von Bach erheblichen Einfluß auf die Widerstandsfähigkeit, so daß Zahlen für die einzelnen Querschnittarten angegeben wurden.

Für schwellige und wechselnde Inanspruchnahme sind die zulässigen Spannungen unter Benutzung der Wöhlerschen Zahlen in Höhe von $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ derjenigen bei ruhender Belastung ermittelt.

Die Beanspruchung auf Druck und Biegung stimmt bei den meisten Stoffen mit der auf Zug überein, insbesondere dann, wenn die Fließ- und die Quetschgrenze auf etwa der gleichen Höhe liegen. Ausnahmen hiervon bilden Stahlguß, Gußeisen, schmiedbarer Guß und Holz, von denen die ersteren höhere, Holz dagegen geringere Widerstandsfähigkeit gegen Druck aufweisen. Entsprechend müssen die Zahlen für die Inanspruchnahme auf Biegung gewählt werden.

Der Flächendruck an nicht gleitenden Flächen setzt gut bearbeitete Auflagestellen voraus und darf erklärlicherweise die Höhe der Inanspruchnahme auf Druck im Innern von Körpern nicht erreichen. Er muß, falls die Flächen weniger sorgfältig hergestellt sind, noch niedriger als in der Zusammenstellung angegeben, genommen werden. Hämmernde Wirkung infolge von Erschütterungen oder Stößen ist durch ein Drittel der Werte für ruhende Belastung berücksichtigt.

Im Falle von Abscherung und Drehung kann rund 0,8 der Beanspruchung auf Zug eingesetzt werden, da Versuche an den meisten Stoffen das Verhältnis der Scherfestigkeit zur Zugfestigkeit zu 0,8 ergeben. Nur bei Gußeisen können für k_s etwa dieselben Werte wie für k_z genommen werden.

Schweißisen erweist sich infolge der Schlackeneinschlüsse als wenig widerstandsfähig gegen Verdrehen; hierin sind die niedrigen Zahlen für k_d begründet.

III. Druckfestigkeit.

Eine nach Abb. 3 in der Stabachse wirkende Kraft P beansprucht den Körper auf Druck und ruft Druckspannungen in der Größe

$$\sigma_d = \frac{P}{F} \tag{11}$$

hervor, wenn man voraussetzt, daß diese sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilen. An Konstruktionsteilen dürfen sie die zulässigen Beanspruchungen k Seite 12 nicht überschreiten.

Den Druckversuch an einem Körper aus weichem Flußstahl ergibt das Schaubild 15, wenn die Druckspannungen σ_d als Ordinaten nach unten, die auf die Längeneinheit bezogenen Zusammendrückungen oder Stauchungen

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \tag{12}$$

als Abszissen nach links abgetragen werden. Durch Feinmessungen läßt sich eine Elastizitätsgrenze E und eine Proportionalitätsgrenze P in ähnlicher Weise, wie beim Zugversuch beschrieben, nachweisen, sowie eine Dehnungs- oder Elastizitätszahl

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma_d} \tag{13}$$

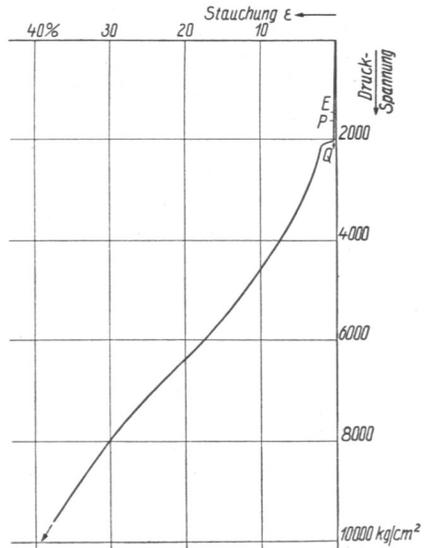


Abb. 15. Druckversuch an weichem Flußstahl.

oder ein Elastizitätsmaß $E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma_a}{\epsilon}$ ermitteln. Weniger ausgeprägt ist die der Fließgrenze entsprechende Stauch- oder Quetschgrenze Q , weil mit der Verkürzung des Stabes eine Querschnittsvergrößerung und daher eine Vermehrung der Tragfähigkeit verbunden ist. In diesem Umstande ist auch das spätere ständige Ansteigen der Kräfte zum weiteren Zusammenpressen der Probe begründet. Ein Bruch tritt bei zähen Stoffen oft überhaupt nicht ein. Zur Beurteilung des Baustoffs begnügt man sich deshalb häufig mit der Feststellung der Quetschgrenze, weil an dieser die für den Konstrukteur maßgebende Widerstandsfähigkeit erschöpft ist. Besondere Wichtigkeit hat der meist an würfelförmigen Proben vorgenommene Druckversuch für Steine und Beton, die ja auch als Werkstoffe vor allem auf Druck beansprucht zu werden pflegen.

Wird durch vollständiges Einschließen der Druckkörper das seitliche Entweichen des Stoffes oder die mit der Stauchung verbundene Ausbauchung gehindert, so erhöht sich die Widerstandsfähigkeit ganz wesentlich. Selbst sehr nachgiebige Stoffe, wie Blei und Gummi, halten dann hohe Pressungen aus.

Die Verkürzung oder Zusammendrückung, die der Körper durch die Kraft P erleidet, ist

$$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l}{F} \quad (14)$$

IV. Knickfestigkeit.

Während bei kurzen prismatischen Probekörpern die durch eine Druckkraft hervorgerufene Formänderung lediglich in einer Verkürzung des Körpers unter Erhaltung seiner geraden Achse besteht, tritt bei längeren Stäben Ausbiegen ein, weil der Baustoff stets mehr oder weniger ungleichmäßig ist, die Achse Abweichungen von der geraden Linie aufweisen wird und eine genau axiale Kraftwirkung nur sehr schwierig zu erreichen ist, jedenfalls an Konstruktionsteilen selten vorausgesetzt werden darf. Mit zunehmender Belastung steigt die schon früh auftretende Durchbiegung allmählich, nimmt aber bei einer bestimmten Kraft, der Knickkraft, rasch, oft plötzlich sehr große Werte an; der Stab knickt zusammen. Nach Euler sind die Tragfähigkeiten auf Knickung beanspruchter Teile bei \mathcal{E} facher Sicherheit gegen Ausknicken in den vier Belastungsfällen, Abb. 16–19, die folgenden:

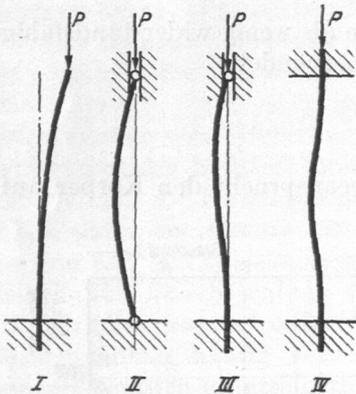


Abb. 16–19. Die vier Eulerschen Fälle der Inanspruchnahme auf Knickung.

I. Eines an einem Ende frei beweglichen, am anderen Ende eingespannten Stabes, Abb. 16,

$$P = \frac{\pi^2}{4\mathcal{E}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{2,5J}{\mathcal{E} \cdot \alpha \cdot l^2} \quad (15)$$

II. Eines an beiden Enden in der Stabachse geführten, aber gelenkig gelagerten Stabes, Abb. 17,

$$P = \frac{\pi^2}{\mathcal{E}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{10 \cdot J}{\mathcal{E} \cdot \alpha \cdot l^2} \quad (16)$$

III. Eines einerseits eingespannten, andererseits geführten Stabes, Abb. 18,

$$P = \frac{2 \cdot \pi^2}{\mathcal{E}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{20 \cdot J}{\mathcal{E} \cdot \alpha \cdot l^2} \quad (17)$$

IV. Eines Stabes mit beiderseits eingespannten Enden, Abb. 19,

$$P = \frac{4\pi^2}{\mathcal{E}} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} \approx \frac{40 \cdot J}{\mathcal{E} \cdot \alpha \cdot l^2} \quad (18)$$

Die Formeln III und IV werden im Maschinenbau wegen der meist vorhandenen Unsicherheit über den Grad der Einspannung selten benutzt. Selbst in Fällen, in denen eine Einspannung beabsichtigt ist, wird größerer Sicherheit wegen nach Formel I oder II gerechnet.

Zur Anwendung der Eulerschen Formeln ist jedoch zu bemerken, daß ihr Gültigkeitsbereich beschränkt ist und ihre unrichtige Anwendung zu Täuschungen über den Sicherheitsgrad der Konstruktionen führen kann. Setzt man in der Formel 16 den Sicherheitsgrad $\zeta = 1$, so gibt

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}$$

die Knickkraft an. Mit $J = i^2 F$, wobei i den Trägheitshalbmesser, F den Stabquerschnitt bedeutet, wird

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot F \cdot i^2}{\alpha \cdot l^2}$$

oder

$$\frac{P_k}{F} = K_k = \frac{\pi^2}{\alpha \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2} \tag{19}$$

K_k heißt Knickspannung. Das Verhältnis $\frac{l}{i}$, eine Beziehung zwischen der Stablänge und dem Trägheitshalbmesser und damit dem Trägheitsmoment, bezeichnet man als Schlankheit des Stabes. Trägt man K_k in Abhängigkeit von $\frac{l}{i}$ in einem Schaubilde auf, so bekommt man eine hyperbolische Linie mit sehr hohen Knickspannungen bei kleinem $\frac{l}{i}$ wie Abb. 20 für Flußeisen mit einer Dehnungsziffer $\alpha = \frac{1}{2120000}$ zeigt. Die Gültigkeit

der Eulerschen Formel erstreckt sich nun nur auf das durch senkrechte Strichelung hervorgehobene Gebiet, in welchem die Knickspannung unterhalb der Fließgrenze bleibt und die Formänderungen ausschließlich oder doch vorwiegend elastischer Natur sind (Gebiet der elastischen Knickung). Links von der Linie AA' , die durch den Schnitt der Eulerschen Hyperbel mit der bei 1900 kg/cm^2 angenommenen Fließgrenze geht, ist der Knickvorgang stets mit Fließerscheinungen und deshalb mit bleibenden Formänderungen verbunden. Der Stab federt bei der Entlastung nicht wieder

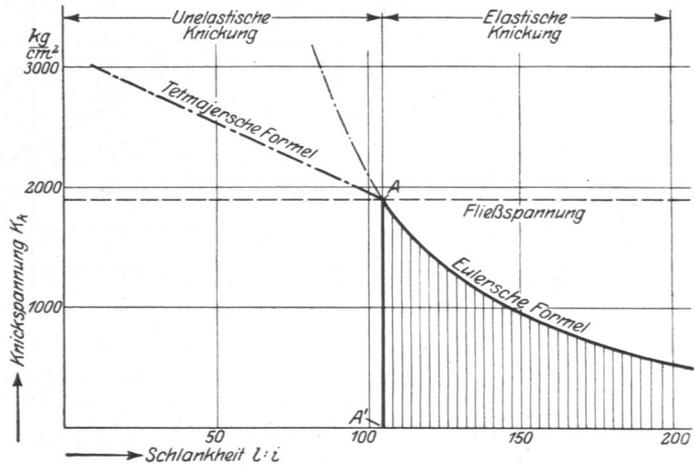


Abb. 20. Gebiete der elastischen und unelastischen Knickung.

völlig zurück (Gebiet der unelastischen Knickung). Erst bei sehr kleinen Werten von $\frac{l}{i}$ verschwindet die Erscheinung des Ausknickens. Das Zusammendrücken erfolgt dann längs der Körperachse; der Knickversuch geht allmählich in den Druckversuch über. Im Gebiet der unelastischen Knickung gilt für die Knickspannung nach Tetmajer auf Grund umfangreicher Versuche im Belastungsfall II die empirische Formel:

$$K_k = \frac{P_k}{F} = K \cdot \left[1 - c_1 \frac{l}{i} + c_2 \left(\frac{l}{i}\right)^2 \right], \tag{20}$$

wobei K , c_1 und c_2 vom Baustoff abhängige Festwerte sind. Zahlen dafür enthält die folgende Zusammenstellung, die gleichzeitig den Gültigkeitsbereich der Formel durch die Grenzwerte von $\frac{l}{i}$ angibt; beim Überschreiten der Größtwerte ist im Belastungsfalle II die Eulersche Formel anzuwenden.

Zusammenstellung 3. Festwerte der Tetmajerschen Knickformel.

Stoff	K	c_1	c_2	Grenzen für $\frac{l}{i}$	
				min	max
Flußstahl	3350	0,00185	0	—	90
Weicher Flußstahl (Fluß- eisen)	3100	0,00368	0	10	105
Nickelstahl (mit $< 5\%$ Ni)	4700	0,00490	0	—	86
Gußeisen	7760	0,01546	0,00007	5	80
Bauholz	293	0,00662	0	1,8	100

Aus der Tetmajerschen Gleichung folgt die Tragkraft P eines Konstruktionsteiles bei \mathcal{S} facher Sicherheit

$$P = \frac{P_k}{\mathcal{S}} = F \cdot \frac{K}{\mathcal{S}} \left[1 - c_1 \cdot \frac{l}{i} + c_2 \left(\frac{l}{i} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

Leider gestattet die Formel nicht die unmittelbare Berechnung des Trägheitsmomentes oder Querschnittes eines Stabes aus der gegebenen Belastung P und der Länge l , da in

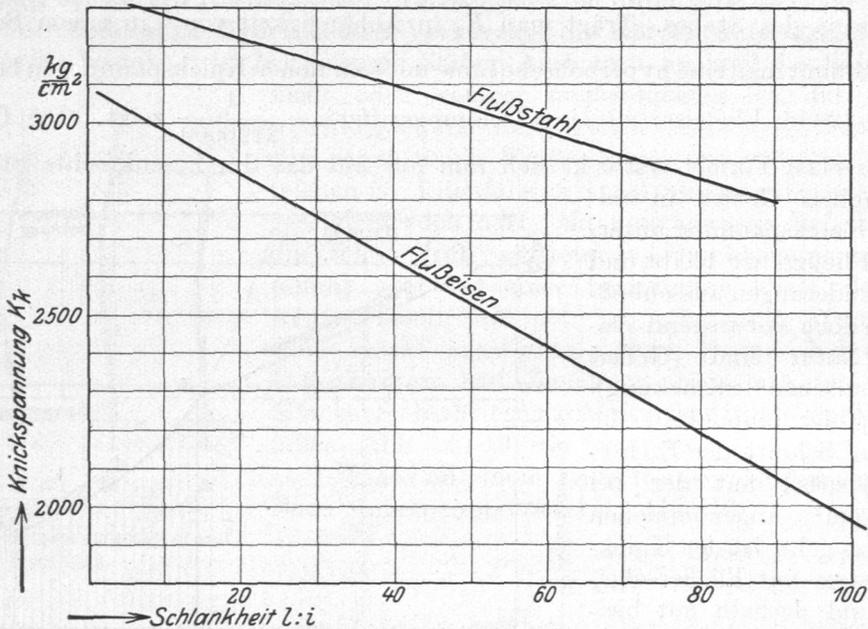


Abb. 21. Knickspannungen in Abhängigkeit von der Schlankheit an Flußeisen und -stahl.

ihr zwei Unbekannte, F und i vorkommen. Man ist vielmehr auf Probieren angewiesen, das am einfachsten durchgeführt wird, indem man zunächst die Knickspannung K_k und die Sicherheit \mathcal{S} annimmt und aus $\frac{K_k}{\mathcal{S}} = k_k$ die zulässige Druckspannung und damit den Querschnitt

$$F = \frac{P}{k_k}$$

ermittelt. Aus der gewählten Querschnittform folgt dann das Trägheitsmoment J und der Trägheitshalbmesser $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ und damit die Schlankheit $\frac{l}{i}$, die die Nachprüfung,

ob K_k richtig gewählt war, nach der folgenden Zusammenstellung oder für Flußeisen und -stahl nach Abb. 21 ermöglicht. Bei kreisrundem, rechteckigem oder dünnwandigem Kreisringquerschnitt kann auch das Verhältnis $\frac{l}{d}$ oder $\frac{l}{b}$ herangezogen werden, so daß sich die Berechnung von J und i erübrigt.

Zusammenstellung 4. Knickspannungen nach Tetmajer.

Schlankheit $\frac{l}{i}$	 $\frac{l}{d}$	 $\frac{l}{b}$	 δ klein $\frac{l}{d}$	Knickspannungen K_k nach Tetmajer			
				Flußstahl	Weicher Flußstahl	Gußeisen	Bauholz
105	26,3	30,2	37,2	—	1900	—	—
100	25	28,8	35,4	—	1960	—	99
90	22,5	25,9	31,8	2790	2070	—	120
80	20	23	28,3	2850	2190	1645	138
70	17,5	20,2	24,8	2910	2300	2030	157
60	15	17,3	21,2	2970	2420	2670	180
50	12,5	14,4	17,7	3030	2530	3120	196
40	10	11,5	14,2	3095	2640	3830	215
30	7,5	8,6	10,6	3160	2760	4650	235
20	5	5,8	7,1	3220	2870	5580	254
10	2,5	2,9	3,5	3280	2980	6610	274
5	1,25	1,44	1,77	3310	—	7180	283

Beispiel. Schubstangenschäfte runden Querschnitts werden gewöhnlich nach der Eulerschen Formel mit $\mathfrak{S} = 25$ facher Sicherheit berechnet, fallen aber meist in das Gebiet der unelastischen Knickung und zeigen deshalb nach der Tetmajerschen Formel nachgerechnet, viel geringere Sicherheiten. Bei einer Stangenkraft von $P = 8000$ kg, einer Länge $l = 875$ mm, $\alpha = \frac{1}{2100000}$ cm²/kg für weichen Flußstahl und $\mathfrak{S} = 25$, wird nach der Eulerschen Formel II

$$J = \frac{P \cdot \mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2}{10} = \frac{8000 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 87,5^2}{2100000 \cdot 10} = 73 \text{ cm}^4$$

und

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot J}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 73}{\pi}} = 6,21 \text{ cm.}$$

Wählt man $d = 6,2$ cm, so sieht man aus dem Verhältnis $\frac{l}{d} = \frac{87,5}{6,2} = 14,1$ nach der Zusammenstellung 3 auf Seite 18, daß die Eulersche Formel nicht zuständig ist. Nach der Tetmajerschen ergibt sich die Knickspannung mit

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = 1,55 \text{ cm,}$$

$$K_k = K \left(1 - c_1 \cdot \frac{l}{i} \right) = 3100 \left(1 - 0,00368 \cdot \frac{87,5}{1,55} \right) \approx 2460 \text{ kg/cm}^2$$

und, da die mittlere Druckspannung

$$\sigma_a = \frac{P}{F} = \frac{8000}{30,19} = 266 \text{ kg/cm}^2$$

ist, ist die tatsächliche Sicherheit nur

$$\mathfrak{S} = \frac{K_k}{\sigma_a} = \frac{2460}{266} = 9,25 \text{ fach.}$$

V. Flächenpressung.

Im engen Zusammenhang mit der Beanspruchung auf Druck steht diejenige auf Flächenpressung, die an der Berührungsfläche zweier aufeinanderliegender Körper auftritt, Abb. 22. Der Flächendruck ist senkrecht zu den sich berührenden Oberflächenteilen gerichtet und nach Größe und Verteilung abhängig:

1. von der Art des Angriffes und der Einwirkung der Kräfte,
2. von der Form und
3. von dem Zustande der Berührungsflächen.

Zu 1. Der Flächendruck wird um so gleichmäßiger verteilt sein, je geringere elastische oder bleibende Formänderungen die aufeinanderliegenden Teile erleiden und je kleiner das Moment der Kraft, bezogen auf den Schwerpunkt der Druckfläche ist. Je vollkommener diese Voraussetzungen erfüllt sind, um so eher darf der mittlere Flächendruck p zur Beurteilung der Beanspruchung herangezogen werden, der sich bei ebener Auflagerfläche und bei einer senkrecht zu dieser gerichteten Kraft aus

$$p = \frac{P}{f} \quad (22)$$

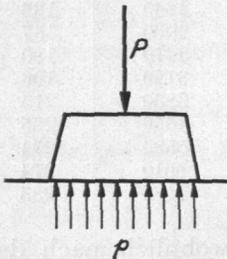


Abb. 22. Flächendruck.

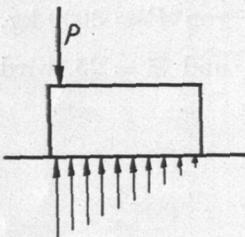


Abb. 23. Ungleichmäßige Verteilung des Flächendrucks bei exzentrischem Kraftangriff.

ergibt. Exzentrische Kraftwirkung kann sehr ungleichmäßige Druckverteilung zur Folge haben, Abb. 23.

Bei der Fortpflanzung des Druckes durch einen Körper hindurch bilden sich Druckkegel oder -pyramiden mit etwa 45° Neigung der Seitenflächen aus, so daß man z. B. im Falle der Abb. 24 erwarten darf, daß sich der Flächendruck an der Unterfläche auf einer Breite $B = b + 2H$ annähernd gleichmäßig verteilt, wenn die Belastung P an der Angriffsstelle gleichmäßig auf der Breite b wirkt. Ein Fundament kann der strichpunktierten Linie entsprechend abgestuft werden.

Verlangt man dagegen, daß die Belastung P von einem niedrigeren Träger, Abb. 25, annähernd gleichmäßig auf den Untergrund übertragen wird, so muß der Träger biegefest gegenüber einem Moment

$$M_b = \frac{P(L-b)}{8}$$

gestaltet sein.

Zu 2. Es sei die allerdings willkürliche Annahme gemacht, daß der senkrecht zu jedem Element gerichtete Flächendruck, auf die Flächeneinheit bezogen, gleich groß sei und p kg/cm² betrage, Abb. 26. Stellt man die Gleichgewichtsbedingung in Richtung der äußeren Kraft P auf, so kommt für das unter dem Winkel α liegende Flächenteilchen df nur die Seitenkraft $df \cdot p \cdot \cos \alpha$ in Betracht, so daß

$$P = \int p \cdot df \cdot \cos \alpha$$

oder, da $p = \text{konst.}$ vorausgesetzt ist,

$$P = p \int df \cdot \cos \alpha$$

wird. Das Integral stellt die Projektion f' der Auflagerfläche senkrecht zur Richtung P dar, so daß $P = p \cdot f'$ oder

$$p = \frac{P}{f'} \quad (23)$$

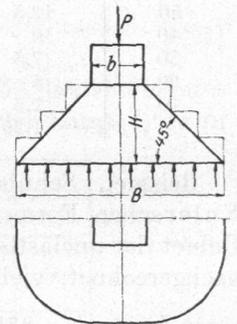


Abb. 24. Druckkegelwirkung.

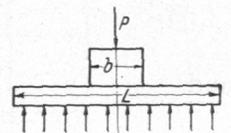


Abb. 25.

wird. p heißt mittlerer Flächendruck und dient als Vergleichswert. Wenn sich beispielweise an zylindrischen, geschmierten Zapfen, wie Versuche gezeigt haben, der Auflagerdruck nicht gleichmäßig verteilt, vgl. Abb. 27, so wird doch an ähnlich geformten Zapfen das Verhältnis zwischen dem größten wirklich auftretenden und dem nach der Formel berechneten mittleren Auflagerdruck $\frac{p_{max}}{p}$ nahezu dasselbe sein. Entnimmt man daher p bewährten Ausführungen, so wird an damit berechneten neuen Zapfen auch p_{max} die zulässige Grenze nicht überschreiten.

Bedenklich ist es freilich, die üblichen Auflagerdrucke auf ungewöhnliche Zapfen-

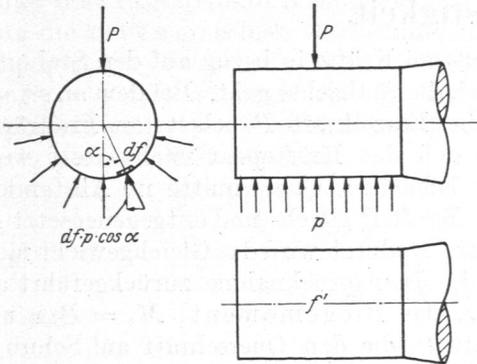


Abb. 26. Zur Ermittlung des mittleren Flächendrucks an einem Zapfen.

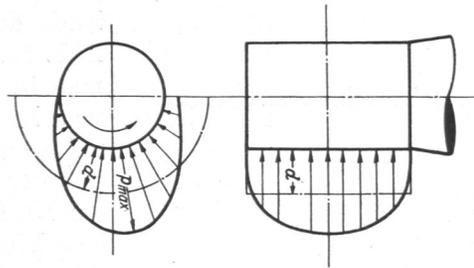


Abb. 27. Tatsächliche Verteilung des Auflagerdrucks an einem Zapfen.

formen, z. B. auf sehr kurze anzuwenden, an denen die Schmierung schwieriger ist, weil das Schmiermittel leichter seitlich entweichen kann!

Zu 3. Sauber bearbeitete und zusammengepaßte Oberflächen vertragen höhere Flächendrücke, da man darauf rechnen kann, daß ein größerer Teil der Oberfläche zum Tragen kommt.

Bei der Wahl der zulässigen Flächenpressung ist naturgemäß stets der weniger widerstandsfähige Baustoff der aufeinanderliegenden Teile maßgebend. Unter zu hohen Flächendrücken weicht entweder der Stoff seitlich aus oder dringen die Körper ineinander ein; örtliche Zerstörungen und Fressen treten auf.

Beispielweise ist in Abb. 28, bei der Aufnahme der in einer Säule dauernd, also ruhend wirkenden Kraft von 50000 kg durch den Erdboden, an der Stelle B das Mauerwerk, mit etwa 10 kg/cm², bei C der Untergrund, je nach Umständen mit 2 bis 0,2 kg/cm² zulässiger Belastung maßgebend.

Sorgfältig ist die Art der Kraftwirkung zu berücksichtigen. Bei ruhender und unveränderlicher Belastung kann der Flächendruck höher als bei veränderlicher oder gar hämmerner, mehr oder weniger stoßweiser Einwirkung genommen werden. Vergleichende Versuche liegen allerdings noch nicht vor; schätzungsweise dürfte aber auch hier das oben begründete Verhältnis 3 : 2 : 1 für die zulässigen Beanspruchungen in den drei aufgeführten Fällen gelten.

Schwellende Beanspruchung liegt vor bei den Druckstücken und Spindelköpfen von Pressen, die während des Pressens einer Höchstbelastung ausgesetzt, beim Rückgang aber entlastet sind, so daß auch die Flächenpressung zwischen einem Höchstwert und Null schwankt.

Hämmernde Wirkung tritt u. a. an den Sitzen selbsttätiger Ventile auf, für die allerdings wegen der Eigenart des Betriebes später aufgeführte Sonderwerte gelten.

Bei der Bemessung des Auflagerdruckes an Flächen, die sich aufeinander bewegen, ist die Reibung, und zwar in bezug auf Abnutzung und Erwärmung maßgebend. Selten und langsam bewegte Teile können nahezu bis zu den Grenzen belastet werden, die für

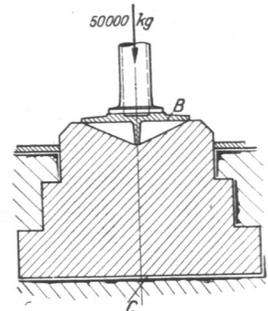


Abb. 28. Säulenfundament.

ruhende Wirkung angegeben sind; rasch bewegte müssen geschmiert werden. Das Wesen der Schmierung ist, die große Reibung zwischen festen Körpern durch die geringere Flüssigkeitsreibung zwischen den Teilchen des Schmiermittels zu ersetzen. Das Schmiermittel darf nicht verdrängt werden; deswegen sind nur geringere, von den Betriebsverhältnissen und der Art des Schmiermittels abhängige Flächendrücke zulässig, für welche bei den Zapfen, Lagern, Schrauben usw. Einzelwerte angegeben sind.

VI. Biegefestigkeit.

Der Fall der Biegung liegt vor, wenn die äußeren Kräfte in bezug auf den Stabquerschnitt ein Kräftepaar bilden, dessen Ebene durch die Stabachse geht. Bei dem an seinem

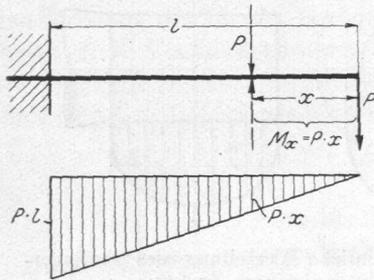


Abb. 29. Freitragler, durch Einzelkraft belastet, darunter Momentenfläche.

Ende durch die Einzelkraft P belasteten Freitragler, Abb. 29, läßt sich das Kräftepaar nachweisen, wenn man in einem beliebigen Querschnitte im Abstände x vom Ende die Kraft P gleich- und entgegengesetzt gerichtet anbringt. Dadurch wird das Gleichgewicht nicht gestört, aber die Inanspruchnahme zurückgeführt auf ein Kräftepaar, das Biegemoment, $M_x = P \cdot x$ und eine Einzelkraft P , die den Querschnitt auf Schub in Anspruch nimmt. Die letztere kann meist vernachlässigt werden und gewinnt erst bei verhältnismäßig kurzer Länge des Freitragers Bedeutung.

Die Biegemomente wachsen verhältnismäßig mit der Entfernung x ; sie können mithin durch die dreieckige Momentenfläche, Abb. 29, dargestellt werden, in welcher die Ordinaten die zu den einzelnen Querschnitten gehörigen Biegemomente angeben. Das größte Moment $M_{\max} = P \cdot l$ entsteht an der Einspannstelle. Für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle sind die Momente und ihre Verteilung in der folgenden Zusammenstellung enthalten.

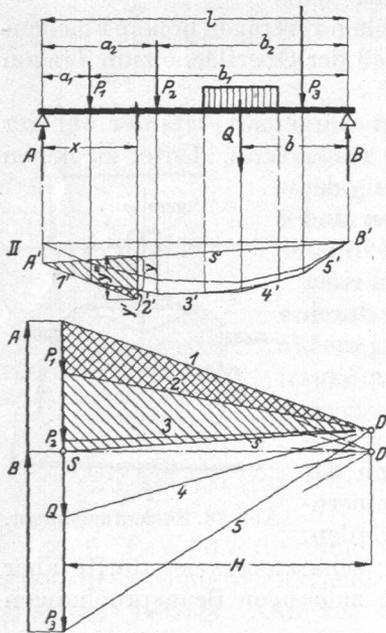


Abb. 30. Ermittlung der Biegemomente.

A. Ermittlung der Biegemomente, der Momentenflächen und der Biegespannungen.

An einem beliebig belasteten Träger, Abb. 30, bestimmt man das Biegemoment M_x für den Querschnitt im Abstände x vom linken Lager rechnerisch, indem man zunächst einen der Auflagerdrücke A oder B ermittelt. Z. B. ergibt die Momentengleichung um den Punkt B

$$A = \frac{P_1 b_1 + P_2 \cdot b_2 + \dots + Q \cdot b}{l}$$

M_x ist dann durch die algebraische Summe der Momente der äußeren Kräfte links oder rechts vom Querschnitt x dargestellt:

$$M_x = Ax - P_1(x - a_1).$$

Zeichnerisch wird die Momentenfläche, Abb. 30, wie folgt gefunden. Nachdem die gleichmäßig verteilte Last Q durch eine Mittelkraft ersetzt ist, trägt man die Kräfte der Reihe nach untereinander auf der Kraftlinie in irgendeinem Maßstabe an und wählt einen Pol O in einem beliebigen Abstände H . Die von O aus nach den Endpunkten der Kräfte gezogenen Geraden $1 \dots 5$ bilden zusammen mit der Kraftlinie das Krafteck I und heißen Polstrahlen. Parallel zu ihnen laufen die Seilstrahlen $1' \dots 5'$,

die zum Seilzug *II* führen. Ihre Schnittpunkte liegen unter derjenigen Kraft, welche die entsprechenden Polstrahlen im Kraffteck einschließen. So schneiden sich die Seilstrahlen *2'* und *3'* unter der Kraft *P*₂, die von den Polstrahlen *2* und *3* eingefasst ist. Die Verbindungslinie der senkrecht unter den Auflagern *A* und *B* auf den äußersten Seilstrahlen liegenden Punkte *A'* und *B'* ist die Schlußlinie *s'* des Seilzuges. Sie liefert die Größe der Auflagerkräfte *A* und *B* im Kraffteck, wenn man die Parallele *s* zu *s'* durch *O* bis zum Schnitt *S* mit der Kraftlinie zieht. *B* ist von *s* und *5* eingeschlossen, da sich *s'* und *5'* unter dem Stützpunkte *B* schneiden, *A* von *s* und *1*. Die Ordinaten des Seilzuges stellen nun die zu den einzelnen Querschnitten gehörenden Biegemomente dar. Das Seileck ist also zugleich Momentenfläche. Denn zur Abszisse *x* gehört das Moment $M_x = A \cdot x - P_1(x - a_1)$, während sich die entsprechende Ordinate *y* der Momentenfläche als Differenz von *y''* - *y'* ausdrücken läßt. Für diese folgt aus der Ähnlichkeit der gleichartig gestrichelten Dreiecke:

$$\frac{y''}{x} = \frac{A}{H}, \quad \frac{y'}{x - a_1} = \frac{P_1}{H}; \quad y'' \cdot H = A \cdot x, \quad y' \cdot H = P_1(x - a_1)$$

und

$$y \cdot H = (y'' - y')H = A \cdot x - P_1(x - a_1) = M_x,$$

so daß

$$M_x = y \cdot H \tag{24}$$

wird.

Da aber der Polabstand *H* ein Festwert ist, so wachsen die Biegemomente verhältnismäßig den Ordinaten *y* der Momentenfläche. Zu ihrer zahlenmäßigen Ermittlung ist eine der Größen *y* und *H* im Längenmaßstabe *m*₁, die andere im Kräftemaßstab *m*₂ zu messen.

Die gleichmäßige Verteilung der Last *Q* auf einer größeren Strecke bedingt eine Verringerung der Momente, die durch parabolische Ausrundung des Seilzuges unter *Q*, Abb. 30, berücksichtigt werden kann.

Bei der ersten Wahl des Pols wird die Schlußlinie im allgemeinen eine Neigung erhalten. Ist ein wagrechter Verlauf derselben, etwa zur Ermittlung der Neigungswinkel der elastischen Linie bei Wellenuntersuchungen erwünscht, so braucht der neue Pol *O'* nur auf einer Wagerechten durch *S* senkrecht unter oder über dem früheren Pol *O* gewählt zu werden. Damit würde sich der gestrichelte Seilzug ergeben.

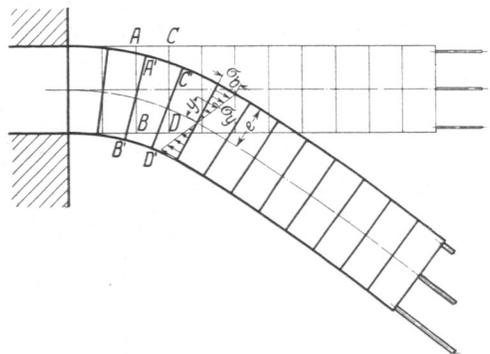
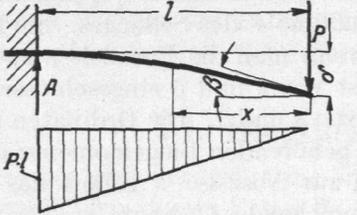
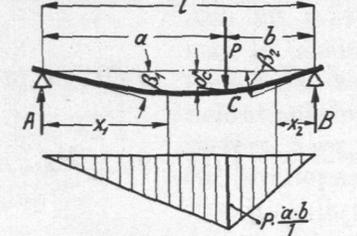
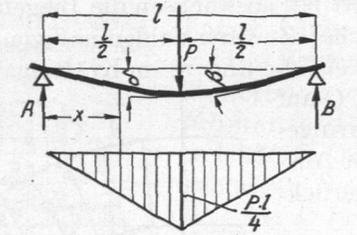
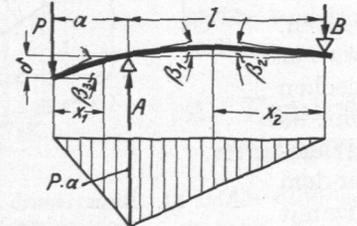
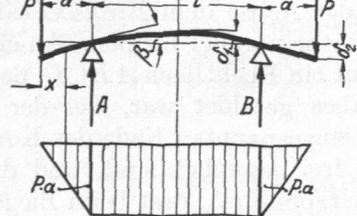
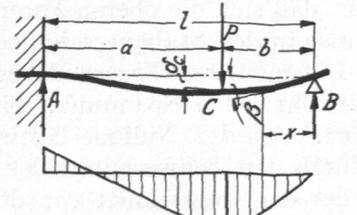


Abb. 31. Biegeversuch an einem Gummikörper rechteckigen Querschnitts.

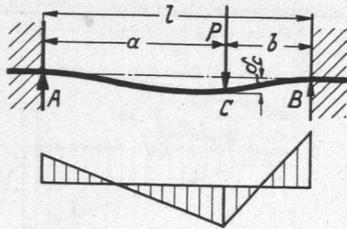
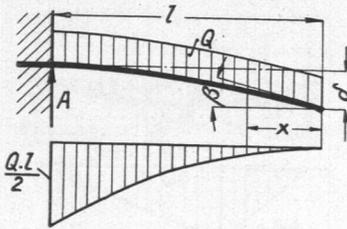
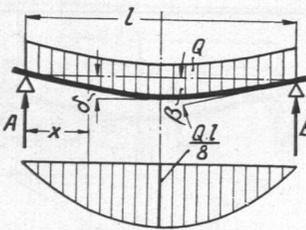
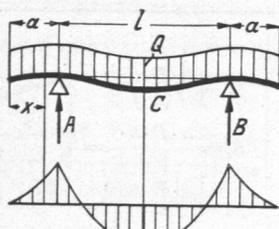
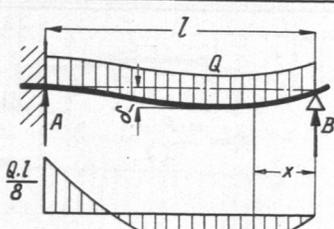
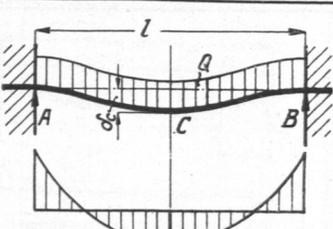
Unterwirft man einen Stab mit gerader Achse dem Biegeversuch, so zeigt sich, daß seine Querschnitte eben, aber nicht mehr parallel bleiben. An einem Gummikörper rechteckigen Querschnitts, Abb. 31, nimmt ein Rechteck *ABCD*, das durch zwei Querschnitte des unbelasteten, geraden Stabes gebildet war, bei der Biegung Keilform *A'B'C'D'* an. Von drei Drähten, die am eingespannten Ende des Körpers ebenfalls festgehalten, im übrigen aber in Bohrungen frei beweglich sind, und die im unbelasteten Zustande gleich weit aus der Endfläche hervorstehen, ragt beim Biegen des Körpers nur der mittlere noch eben so weit heraus. Der obere hat sich zurückgezogen, der untere ist weiter hervorgetreten, ein Beweis dafür, daß sich die oberen Fasern des Körpers verlängert, die unteren verkürzt haben, daß also in den Stabquerschnitten gleichzeitig Zug- und Druckspannungen vorhanden sind. Die mittleren Fasern dagegen haben ihre ursprüngliche Länge behalten; in ihnen herrscht keine Spannung. Sie bilden im Querschnitt die Nulllinie oder neutrale Faser. Von der Nulllinie läßt sich zeigen, daß sie bei reiner Beanspruchung auf Biegung durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und senkrecht zur Kraftlinie steht, in der der Querschnitt von der Biegemomentenebene getroffen wird, vorausgesetzt, daß diese mit einer der Hauptachsen des Querschnitts

Zusammenstellung 5. Die wichtigsten Fälle

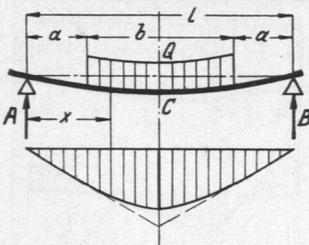
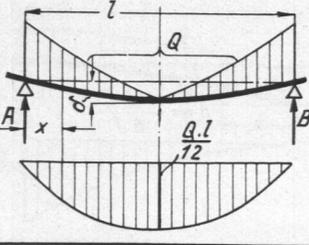
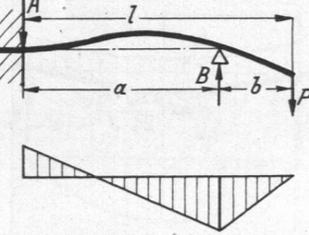
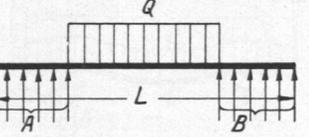
Lfde. Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
1	Freitragler, am Ende belastet 	$A = P$	$M_x = P \cdot x$
2	Träger auf 2 Stützen, dazwischen belastet 	$A = \frac{P \cdot b}{l}; B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{x_1} = A \cdot x_1$ $M_{x_2} = B \cdot x_2$
3	Träger auf 2 Stützen, in der Mitte belastet 	$A = B = \frac{P}{2}$	$M_x = \frac{P}{2} \cdot x$
4	Träger auf 2 Stützen, außerhalb belastet 	$A = \frac{P(a+l)}{l}$ $B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{x_1} = P \cdot x_1$ $M_{x_2} = B \cdot x_2$
5	Kragträger auf 2 Stützen, an beiden Enden symmetrisch belastet 	$A = B = P$	$M_x = P \cdot x$
6	An einem Ende eingespannter, am anderen Ende gestützter Träger 	$A = \frac{P(2b^2+6ab+3a^2)b}{2l^3}$ $B = \frac{Pa^2(2a+3b)}{2l^3}$	$M_x = B \cdot x$

der Inanspruchnahme auf Biegung.

Biegemomente M_{\max}	Durchbiegung δ	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = P \cdot l$ an der Einspannstelle	$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{3 \cdot J}$	$\beta = \frac{\bar{\alpha} \cdot P \cdot l^2}{2J}$	—
$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$ in C	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot a^2 \cdot b^2}{3J \cdot l}$	$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot b (a + 2b)}{6J \cdot l}$ $\beta_2 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot b (2a + b)}{6J \cdot l}$	—
$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4}$	$\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{48 \cdot J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2}{16 \cdot J}$	—
$M_{\max} = P \cdot a$ über A	Am freien Ende: $\delta = \frac{\alpha \cdot P \cdot a^2 (a + l)}{3J}$	$\beta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{3 \cdot J}$ $\beta_2 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{6J} = \frac{\beta_1}{2}$ $\beta_3 = \frac{\alpha \cdot P \cdot a (3a + 2l)}{6J}$	—
$M_{\max} = P \cdot a$ zwischen A und B	$\delta_1 = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^2 \cdot a}{8 \cdot J}$ $\delta_2 = \frac{\alpha \cdot P}{J} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 \cdot l}{2} \right)$	$\beta = \frac{\alpha \cdot P \cdot a \cdot l}{2J}$	Elastische Linie zwischen A und B: Kreisbogen vom Halbmesser $\rho = \frac{J}{\alpha \cdot P \cdot a}$
Einspannungsmoment $M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b (a + 2b)}{2l^2}$ Moment in C $M_C = \frac{P \cdot a^2 \cdot b (2a + 3b)}{2l^3}$	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot a^3 \cdot b^2 (3a + 4b)}{12 \cdot J^3}$	—	$M_A = M_C$ für $a = 1,41 \cdot b$

Lfd. Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
7	Beiderseits eingespannter Träger 	$A = \frac{P \cdot (3a + b) \cdot b^2}{l^3}$ $B = \frac{P \cdot (a + 3b) \cdot a^2}{l^3}$	$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2}$ $M_C = \frac{2P \cdot a^2 \cdot b^2}{l^3}$
8	Freiträger, gleichmäßig belastet 	$A = Q$	$M_x = \frac{Q \cdot x^2}{2l}$
9	Träger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q \cdot x}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$
10	Kragträger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q \cdot x^2}{2(l + 2a)}$
11	An einem Ende eingespannter, am andern gestützter Träger, gleichmäßig belastet 	$A = \frac{5}{8} Q$ $B = \frac{3}{8} Q$	$M_x = B \cdot x - \frac{Q \cdot x^2}{2}$ $= \frac{Q}{2} \left(\frac{3}{4} x + \frac{x^2}{l}\right)$
12	Beiderseits eingespannter Träger, gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_C = \frac{1}{24} Q \cdot l$

Biegemomente M_{\max}	Durchbiegung	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = M_B$ $= \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$	$\delta_c = \frac{\alpha P a^3 \cdot b^3}{3 J \cdot l^3}$	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{2}$ an der Einspannstelle	$\delta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{8 J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^2}{6 J}$	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8}$ in der Mitte	$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{J}$	$\beta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^2}{24 \cdot J}$	—
$M_A = M_B = \frac{Q \cdot a^2}{2(l + 2a)}$ $M_C = \frac{Q}{4} \left(a - \frac{l}{2} \right)$	—	—	$M_A = M_B = -M_C \text{ für}$ $a = \frac{l}{\sqrt{8}} = 0,354 l$
Einspannungsmoment $M_A = \frac{Q \cdot l}{8}$	$\delta = \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{185 J}$	—	—
Einspannungsmoment $M_A = M_B = \frac{1}{12} Q \cdot l$	$\delta_c = \frac{\alpha \cdot P \cdot l^3}{384 J}$	—	—

Lfd. Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Biegemomente M_x
13	Träger auf 2 Stützen, im mittleren Teil gleichmäßig belastet 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = \frac{Q}{2} \left(x - \frac{(x-a)^2}{b} \right)$
14	Träger auf 2 Stützen, durch dreieckförmig verteilte Last beansprucht 	$A = B = \frac{Q}{2}$	$M_x = Q \cdot x \left(\frac{1}{2} \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right)$
15	Träger an einem Ende eingespannt, am andern gestützt, außen belastet 	$A = \frac{3}{2} P \frac{b}{a}$ $B = \frac{P \cdot (2a + 3b)}{2a}$	$M_A = \frac{P \cdot b}{2}$
16	Körper auf 2 Stützen, Last und Auflagerdruck gleichmäßig verteilt 	$A = B = \frac{Q}{2}$	—

zusammenfällt. Das letztere trifft immer zu, wenn der Querschnitt symmetrisch zur Kraftlinie ausgebildet ist. Unter der Annahme der Verhältnissgleichheit zwischen Dehnungen und Spannungen nehmen diese geradlinig mit der Entfernung von der Nulllinie zu und erreichen im Abstände y die Größe

$$\sigma_y = \frac{M_b}{J} \cdot y, \quad (25)$$

wenn J das auf die Nulllinie bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet. Die größte Spannung tritt in den von der Nulllinie am weitesten entfernten Fasern im Abstände e ein und ist

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_b}{J} \cdot e. \quad (26)$$

$\frac{J}{e}$ wird als Widerstandsmoment W bezeichnet, so daß schließlich

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad (27)$$

wird. Die Spannungsverteilung ist also durch überschlagene Dreiecke gegeben, wie sie u. a. Abb. 34 für mehrere Querschnitte zeigt.

Überschreitet die größte Spannung bei zähen Stoffen die Fließgrenze, so treten bleibende Durchbiegungen auf. Bei spröden ist der Bruch zu erwarten, wenn in den

Biegemomente M_{\max}	Durchbiegung	Neigungswinkel der elastischen Linie	Bemerkungen
$M_{\max} = M_c = \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4} \right)$	—	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{12}$ in der Mitte	$\delta = \frac{3}{320} \cdot \frac{\alpha \cdot Q \cdot l^3}{J}$	—	—
$M_B = P \cdot b$	—	—	—
$M_{\max} = \frac{Q \cdot L}{8}$ in der Mitte	—	—	—

äußersten Fasern die Festigkeit des Baustoffes, in der Regel die Zugfestigkeit, erreicht wird.

Geht man von der zulässigen Beanspruchung auf Biegung k_b aus, so wird das nötige Widerstandsmoment

$$W = \frac{M_b}{k_b}. \tag{28}$$

B. Trägheits- und Widerstandsmomente.

Die Trägheits- und Widerstandsmomente der wichtigsten Querschnitte sind in der folgenden Zusammenstellung, bezogen auf die durch NN gekennzeichneten Nulllinien, enthalten. Zusammengesetzte Querschnitte, deren Trägheitsmoment für eine beliebige Achse, z. B. in bezug auf die Nulllinie NN , Abb. 32, zu ermitteln ist, zerlegt man in Teile, deren Inhalte $f_1, f_2 \dots$ und Trägheitsmomente J_1, J_2, \dots um die zu NN parallelen Schwerachsen leicht bestimmbar sind. Dann ergibt sich das Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts aus

$$J = J_1 + a_1^2 \cdot f_1 + J_2 + a_2^2 \cdot f_2 + \dots,$$

wenn $a_1, a_2 \dots$ die Abstände der Schwerlinien der Teilquerschnitte von NN bedeuten.

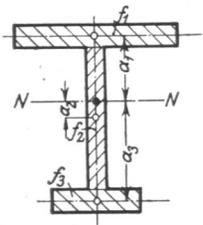


Abb. 32. Zur Ermittlung des Trägheitsmoments.

Zusammenstellung 6. Flächeninhalte, Trägheits- und Widerstandsmomente und Abstände der äußersten Fasern für die wichtigsten Querschnitte.

Lfd. Nr.	Querschnittform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W	Flächeninhalt F	Abstände der äußersten Fasern e_1, e_2
1		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$e_1 = e_2 = \frac{d}{2}$
2		$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi D^4 - d^4}{32 D}$	$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$	$e_1 = e_2 = \frac{D}{2}$
3		$0,0069 d^4$	$W_1 = 0,0323 d^3$ $W_2 = 0,0238 d^3$	$\frac{\pi d^2}{8}$	$e_1 = 0,212 d$ $e_2 = 0,288 d$
4		$\frac{\pi a^3 \cdot b}{4}$	$\frac{\pi a^2 \cdot b}{4}$	$\pi a \cdot b$	$e_1 = e_2 = a$
5		$\frac{\pi}{4} (a^3 b - a_0^3 \cdot b_0)$	$\approx \frac{\pi}{4} (a + b) \cdot s$	$\pi (a b - a_0 b_0)$	$e_1 = e_2 = a$
6		$\frac{b h^3}{36}$	$W_1 = \frac{b h^2}{12}$ $W_2 = \frac{b h^2}{24}$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$e_1 = \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2}{3} h$
7		$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{b h^2}{6}$	$b \cdot h$	$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}$

Lfd. Nr.	Querschnittform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W	Flächeninhalt F	Abstände der äußersten Fasern e_1, e_2
8		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{12} = 0,118 a^3$	a^2	$e_1 = e_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,707 a$
9		$\frac{1}{12} (b h^3 - b_0 h_0^3)$	$\frac{1}{6} \frac{(b h^3 - b_0 h_0^3)}{h}$	$b \cdot h - b_0 \cdot h_0$	$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}$
10		$\frac{1}{12} (s h^3 + b_0 \cdot s_0^3)$	$\frac{1}{6} \frac{(s h^3 + b_0 \cdot s_0^3)}{h}$	$s \cdot h + b_0 \cdot s_0$	$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}$
11		$\frac{1}{12} (s \cdot h^3 + b_0 \cdot s_0^3) + s \cdot h \left(\frac{h - e_1}{2} \right)^2 + b_0 \cdot s_0 \left(e_1 - \frac{s_0}{2} \right)^2$	$W_1 = \frac{J}{e_1} \quad W_2 = \frac{J}{e_2}$	$s \cdot h + b_0 \cdot s_0$	$e_1 = \frac{1}{2} \frac{s h^2 + b_0 s_0^2}{s \cdot h + b_0 s_0}$ $e_2 = h - e_1$
12		$\frac{1}{36} \cdot \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2} h^3$	$W_1 = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{12 (b_1 + 2 b_2)} h^2$ $W_2 = \frac{b_1^2 + 4 b_1 b_2 + b_2^2}{12 (2 b_1 + b_2)} h^2$	$\frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$	$e_1 = \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2 b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3}$
13		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} a^4 = 0,54 \cdot a^4$	$0,625 a^3$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = 2,6 a^2$	$e_1 = e_2 = \frac{a \sqrt{3}}{2} = 0,866 \cdot a$
14		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} a^4 = 0,54 a^4$	$0,54 a^3$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = 2,6 a^2$	$e_1 = e_2 = a$

Ein zeichnerisches Verfahren hat Mohr angegeben. Der Querschnitt, Abb. 33, vom Gesamtflächeninhalte F , wird in eine Anzahl Streifen parallel zu der Achse BCD zerlegt, in bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll. Ihre einzelnen Flächeninhalte faßt man als Kräfte auf, denkt sie sich in den Schwerpunkten gleichlaufend zu BCD wirkend und zeichnet den zugehörigen Kräfte- und Seilzug unter Benutzung der Polweite $F/2$. Der Schnittpunkt A der äußersten Polstrahlen liefert die Schwerlinie SS ; der Inhalt der schräg gestrichelten Fläche f , multipliziert mit F , ergibt annähernd das Trägheitsmoment J in bezug auf SS .

$$J = f \cdot F,$$

wenn der Querschnitt in wirklicher Größe aufgezeichnet war. Genau erhält man das Trägheitsmoment, wenn an Stelle des Seilecks die von ihm eingehüllte, in Abb. 33 strichpunktierte Seilkurve als obere Begrenzung von f benutzt wird, die das Seileck unter den Trennungslinien der Streifen berührt.

Ist der Längenmaßstab, in welchem der Querschnitt aufgetragen wurde, $1 : m_l$, so wird

$$J = f \cdot F \cdot m_l^4.$$

Für die zu SS parallele Achse BCD vergrößert sich das Trägheitsmoment entsprechend dem Inhalt des wagrecht gestrichelten Dreiecks ABC .

Beispiel. An dem in Abb. 33 im Maßstabe $\frac{1}{m_l} = 1 : 3$ dargestellten Querschnitte beträgt der Flächeninhalt $F = 3,98 \text{ cm}^2$, derjenige der Mohrschen Fläche unterhalb der Seilkurve $f = 5,10 \text{ cm}^2$, so daß das Trägheitsmoment

$$J = f \cdot F \cdot m_l^4 = 3,98 \cdot 5,10 \cdot 3^4 = 1640 \text{ cm}^4$$

wird. Bezogen auf die Achse BCD würde das Trägheitsmoment gemäß dem Inhalte des Dreiecks ABC von $1,14 \text{ cm}^2$ um $3,98 \cdot 1,14 \cdot 3^4 = 368 \text{ cm}^4$ wachsen. (Für die Ermittlung auf dem Reißbrett empfiehlt es sich im vorliegenden Falle, den Querschnitt in natürlicher Größe aufzuzeichnen.)

Fällt die Kraftlinie nicht mit einer der Hauptachsen des Querschnitts zusammen, so steht die Nulllinie schief zu jener. Die Bestimmung der auftretenden Spannungen erfolgt dann am einfachsten in der Weise,

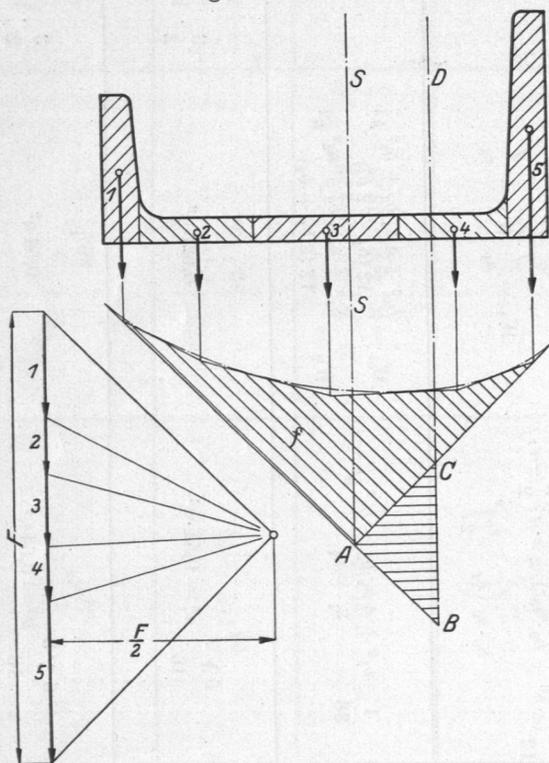


Abb. 33. Bestimmung des Trägheitsmomentes nach Mohr.

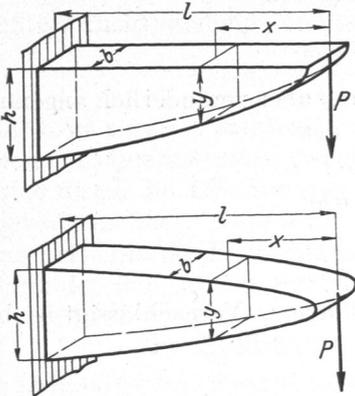
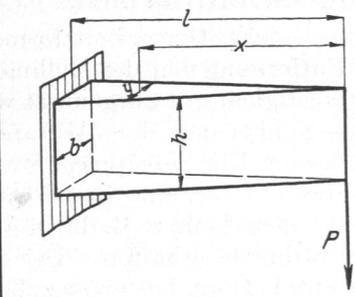
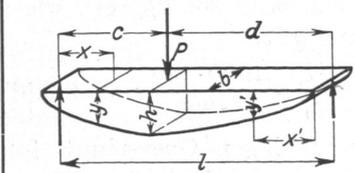
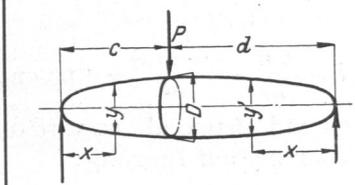
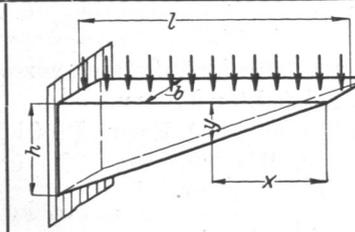
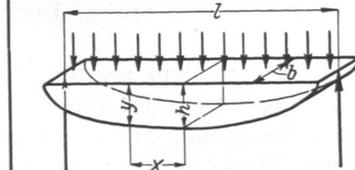
daß das Biegemoment nach den Hauptachsen zerlegt, die durch die Einzelmomente hervorgerufenen Spannungen ermittelt und für die zu untersuchenden Fasern, wie später gezeigt, wieder zusammengesetzt werden.

C. Körper gleichen Widerstandes gegen Biegung.

Wählt man die Form der auf Biegung beanspruchten Teile derart, daß die größte Beanspruchung in allen Querschnitten die gleiche ist, so entstehen Körper gleichen Widerstandes, die man vorteilhafterweise bei der Gestaltung von Maschinenteilen benutzen kann, weil sie den geringsten Aufwand an Baustoff verlangen. Sie sind durch die Gleichung

$$\sigma_b = \frac{M_x}{W_x} = \text{konst.} \tag{29}$$

Zusammenstellung. 7. Körper gleichen Widerstandes gegen Biegung.

Lfd. Nr.	Art des Trägers und der Belastung	Querschnitt	Begrenzungslinie
1		Freiträger durch Einzelkraft am freien Ende belastet	Rechteck mit konstanter Breite Parabel, $y^2 = x \cdot \frac{h^2}{l}$
2		Freiträger durch Einzelkraft am freien Ende belastet	Rechteck mit konstanter Höhe Gerade, $y = x \cdot \frac{b}{l}$
3		Träger auf 2 Stützen durch Einzelkraft belastet	Rechteck mit konstanter Breite Parabeln, links von P: $y^2 = \frac{x \cdot h^2}{c}$, rechts von P: $y'^2 = \frac{x' \cdot h^2}{d}$
4		Träger auf 2 Stützen durch Einzelkraft belastet	Kreis Kubische Parabeln links von P: $y^3 = \frac{x \cdot D^3}{c}$, rechts von P: $y'^3 = \frac{x' \cdot D^3}{d}$
5		Freiträger, gleichmäßig belastet	Rechteck mit konstanter Breite Gerade, $y = x \cdot \frac{h}{l}$
6		Träger auf 2 Stützen, gleichmäßig belastet	Rechteck mit konstanter Breite Ellipse, $\frac{y^2}{h^2} + \frac{4x^2}{l^2} = 1$

gekennzeichnet. Beispielweise ergibt sich für den Fall Nr. 1 der Zusammenstellung 7 über die Hauptformen, nämlich für einen Freitragler rechteckigen Querschnitts von der Länge l , der am Ende durch eine Einzelkraft P belastet ist, im Einspannungsquerschnitt von b cm Breite und h cm Höhe eine Biegespannung von

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b h^2}.$$

Wird die Breite des Trägers durchweg gleich, die Höhe y aber veränderlich angenommen, so folgt die Größe von y im Abstände x vom Ende aus

$$\frac{M_x}{W_x} = \frac{6 \cdot P \cdot x}{b \cdot y^2} = \text{konst.} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b h^2},$$

$$\frac{x}{y^2} = \frac{l}{h^2} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{h^2}{l} \cdot x.$$

Mithin ergibt sich eine parabolische Begrenzung des Trägers. Vernachlässigt ist bei den Ableitungen die Wirkung der Querkkräfte.

D. Gegenüber Biegung günstige Querschnittformen.

Zur Aufnahme von Biegemomenten sind besonders solche Querschnittformen geeignet, bei denen die Mehrzahl der Fasern in größerer Entfernung von der Nulllinie liegt,

weil dann deren Festigkeit gut ausgenutzt werden kann, da die Spannungen mit dem Abstände von der Nulllinie wachsen. Ein flußeiserner Unterzug von $l = 1$ m Stützweite für eine Säule, auf der $P = 1000$ kg Last ruhen, kann z. B. die in Abb. 34 dargestellten Querschnitte erhalten. Das nötige Widerstandsmoment beträgt bei einer zulässigen Beanspruchung von $k_b = 900$ kg/cm², wie sie für ruhende Belastung gilt,

$$W = \frac{M_b}{k_b} = \frac{P \cdot l}{4 \cdot k_b} = \frac{1000 \cdot 100}{4 \cdot 900} = 27,8 \text{ cm}^3.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt folgt die Breite b , wenn man seine Höhe h zu 60 mm annimmt, aus

$$\frac{b h^2}{6} = W; \quad b = \frac{6W}{h^2} = \frac{6 \cdot 27,8}{6^2} = 4,63 \text{ cm}.$$

Rundet man sie auf 46 mm ab, so wird die tatsächliche Beanspruchung auf Biegung:

$$\sigma_b = \frac{6 \cdot P \cdot l}{4 \cdot b h^2} = \frac{6 \cdot 1000 \cdot 100}{4 \cdot 4,6 \cdot 6^2} = 906 \text{ kg/cm}^2,$$

und zwar ebenso groß für die äußersten gezogenen wie die äußersten gedrückten Fasern.

Das dem geforderten Trägheitsmoment am nächsten kommende I-Eisen, Profil Nr. 9, hat eine Höhe von 90 mm und ein Widerstandsmoment $W = 26,0$ cm³. Es erfährt mithin durch die Belastung eine Beanspruchung von $\sigma_b = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W} = \frac{1000 \cdot 100}{4 \cdot 26,0} = 962$ kg/cm², in den äußersten Fasern, die zwar etwas größer ausfällt, als bei der ersten Rechnung angenommen war, aber noch zulässig ist.

Ein T-Eisen, das wegen der besseren Stützung der Säule auf dem breiten Flansch vorteilhaft sein kann, müßte Normalprofil 18/9 haben. Es besitzt ein Trägheitsmoment $J = 185$ cm⁴, bezogen auf die zum Flansch parallele Schwerlinie, bei $e = 19,3$ mm Schwerpunktabstand von der Flanschfläche und $h = 90$ mm Steghöhe. Damit berechnet

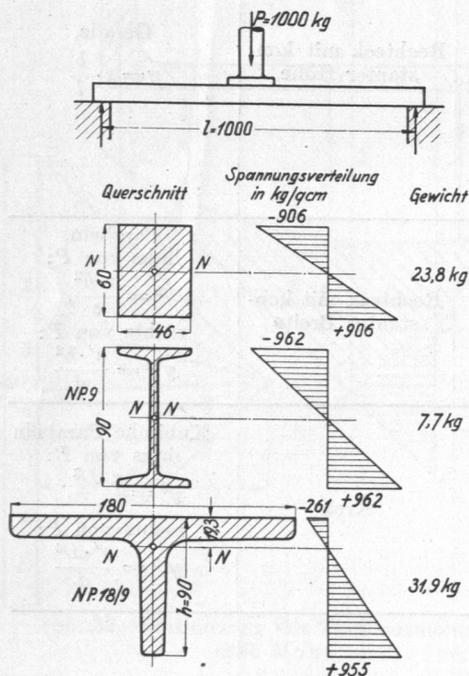


Abb. 34. Unterzugquerschnitte.

sich die größte Zugspannung in der äußersten Faser des Steges

$$+\sigma_b = \frac{P \cdot l(h - e)}{4J} = \frac{1000 \cdot 100(9 - 1,93)}{4 \cdot 185} = 955 \text{ kg/cm}^2,$$

die größte Druckspannung im Flansch

$$-\sigma_b = \frac{P \cdot l \cdot e}{4J} = \frac{1000 \cdot 100 \cdot 1,93}{4 \cdot 185} = 261 \text{ kg/cm}^2.$$

In Abb. 34 sind die tatsächlich auftretenden Spannungen und ihre Verteilung durch die neben den Querschnitten dargestellten Spannungsdreiecke, die Ausnutzung des Baustoffs aber durch die dahinter aufgeführten Gewichte der Unterzüge bei je 1,1 m Gesamtlänge gekennzeichnet. Beim rechteckigen Querschnitt werden die mittleren Fasern, beim T-Querschnitt die des Flansches sehr gering beansprucht und daher schlecht ausgenutzt; das begründet den großen Baustoffaufwand in den beiden Fällen.

E. Zulässige Beanspruchung auf Biegung.

Die zulässige Beanspruchung auf Biegung k_b stimmt bei Baustoffen, wie Schmiedeeisen und Stahl, die annähernd die gleiche Widerstandsfähigkeit gegenüber Zug und Druck, insbesondere gleiche Spannungen an der Fließ- und Quetschgrenze aufweisen, mit der zulässigen Beanspruchung auf Zug überein, vgl. die Zusammenstellung 2 S. 12. Anders bei Gußeisen, das bei Versuchen an Biegestäben wesentlich höhere Belastungen aushält, als nach Zugversuchen an demselben Gußeisen zu erwarten ist. Beispielweise brach ein von Bach untersuchter, bearbeiteter Stab von 80 · 80 mm Querschnitt und $l = 1$ m Stützlänge bei einer Einzelbelastung in der Mitte von $P = 7380$ kg, also bei

$$K_b = \frac{P \cdot l}{4 \cdot W} = \frac{7380 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 8^3} = 2162 \text{ kg/cm}^2,$$

während man glauben sollte, daß der Bruch einträte, wenn die Spannung in den äußersten Fasern die Zugfestigkeit des Gußeisens erreicht hätte, die sich an den Bruchstücken des Biegestabes im Mittel zu $K_z = 1315$ kg/cm² ergab. Über die Erklärung dieses Widerspruches zwischen der Theorie und dem tatsächlichen Verhalten des Gußeisens, sowie über den Einfluß der Querschnittform vgl. Abschnitt 2, II, E, 2, b.

Die verschiedene Widerstandsfähigkeit des Gußeisens gegenüber Zug und Druck läßt bei ruhender und schwellender Belastung auf Biegung wegen der besseren Ausnutzung des Werkstoffes zur Nulllinie unsymmetrische Querschnitte, Abb. 35, vorteilhaft erscheinen. Legt man in den gezogenen Fasern die aus Biegeversuchen abgeleitete zulässige Spannung k_b , in den gedrückten dagegen die Druckspannungen k nach der Zusammenstellung 2 Seite 12 zugrunde, so gelten z. B. für unbearbeitetes Gußeisen, ruhende Belastung und I-förmigen Querschnitt vorausgesetzt,

$$k_b = 310\text{—}400 \quad \text{und} \quad k = 900\text{—}1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Will man den Querschnitt diesen Verhältnissen entsprechend ausbilden, so müssen sich die Abstände der äußersten Fasern e_1 und e_2 von der Nulllinie bei geradliniger Spannungsverteilung wie die zulässigen Beanspruchungen auf Biegung und Druck verhalten:

$$\begin{aligned} \frac{e_1}{e_2} &= \frac{k_b}{k} \\ &= \frac{310}{900} \text{ bis } \frac{400}{1000}. \end{aligned} \quad (30)$$

Zahlenbeispiel. Gußeiserner Träger für das Drucklager einer Wasserturbine: Druck $P = 20000$ kg, Stützweite $L = 2$ m.

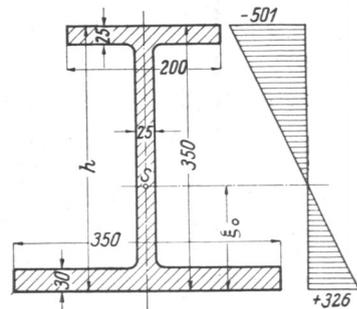


Abb. 35. Unsymmetrischer Querschnitt für gußeisernen Träger.

Wenn man bis zu den eben angeführten Spannungsgrenzen geht, ergeben sich ungünstige Querschnittformen; eine praktisch noch brauchbare ist in Abb. 35 dargestellt; an ihr werden die Druckspannungen nach dem daneben stehenden Spannungsdreieck im mittleren Querschnitt 1,54mal so groß wie die Zugspannungen.

Beim Aufsuchen derartiger Querschnitte ist man auf das Probieren angewiesen. An Abb. 35 findet man den Schwerpunktabstand ξ_0 von der Unterfläche:

$$\xi_0 = \frac{\sum F \cdot \xi}{\sum F} = \frac{35 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2,5 \cdot 33,75 + 29,5 \cdot 2,5 \cdot 17,75}{35 \cdot 3 + 20 \cdot 2,5 + 29,5 \cdot 2,5} = 13,8 \text{ cm}$$

und das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur Unterkante parallele Schwerlinie

$$J = \frac{35 \cdot 3^3}{12} + 35 \cdot 3 \cdot 12,3^2 + \frac{20 \cdot 2,5^3}{12} + 20 \cdot 2,5 \cdot 19,95^2 + \frac{2,5 \cdot 29,5^3}{12} + 2,5 \cdot 29,5 \cdot 3,95^2 = 42400 \text{ cm}^4.$$

Die größte Zugspannung längs der Unterfläche des Trägers ist:

$$+\sigma_b = \frac{P \cdot L \cdot \xi_0}{4J} = \frac{20000 \cdot 200 \cdot 13,8}{4 \cdot 42400} = 326 \text{ kg/cm}^2,$$

die größte Druckspannung in der oben liegenden Faser:

$$-\sigma_b = \frac{P \cdot L \cdot (h - \xi_0)}{4J} = \frac{20000 \cdot 200 \cdot (35 - 13,8)}{4 \cdot 42400} = 501 \text{ kg/cm}^2.$$

d. i. $(-\sigma_b) = 1,54 \cdot (+\sigma_b)$.

Wegen der Durchführung der Welle und der Stützung des Lagers wurde der Träger in der Mitte durchbrochen und oben verbreitert. Im übrigen ist er der besseren Ausnutzung des Werkstoffes wegen als Körper annähernd gleichen Widerstandes durchgebildet. Nach laufender Nummer 3 der Zusammenstellung 7, Seite 33, würde ein Träger rechteckigen Querschnittes durchweg gleicher Breite parabolische Begrenzungen erhalten. Annähernd gilt das auch für die vorliegende Querschnittform, wenn die Flanschstärken nach den Auflagern zu allmählich abnehmen. In Abb. 36 wurden dieselben der einfacheren Herstellung wegen durchweg gleich groß,

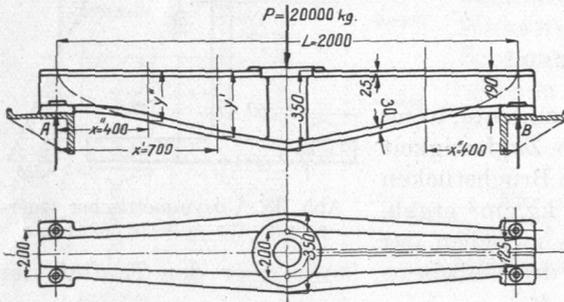


Abb. 36. Träger für das Drucklager einer Turbine.

zu 30 mm unten und 25 mm oben, angenommen, dafür aber die Flanschbreiten dem Grundriß entsprechend nach den Enden zu verringert. Die Querschnittshöhe y' im Abstand $x' = 700$ mm von den Auflagern folgt nach der letzten Spalte der Zusammenstellung 7 Seite 33, laufende Nummer 3, aus

$$(y')^2 = \frac{x' h^2}{L/2} = \frac{70 \cdot 35^2}{100}; \quad y' = 29,2 \text{ cm};$$

die in $x'' = 400$ mm Abstand von den Auflagern aus

$$(y'')^2 = \frac{x'' h^2}{L/2} = \frac{40 \cdot 35^2}{100}; \quad y'' = 22,1 \text{ cm}.$$

In den beiden Querschnitten entstehen auf Grund einer genaueren Nachrechnung die folgenden Beanspruchungen:

	Größte Zugspannung im unteren Flansch	Größte Druckspannung im oberen Flansch
b) Querschnitt in 700 mm Abstand von den Auflagern.	+ 338 kg/cm ²	- 522 kg/cm ²
b) Querschnitt in 400 mm Abstand von den Auflagern.	+ 322 kg/cm ²	- 485 kg/cm ²

An den Trägerenden ergibt sich die nötige Höhe aus der Querkraft, die im wesentlichen durch Schubspannungen im Steg aufgenommen wird; vgl. Berechnungsbeispiel 2 des Abschnittes über Schub und Abscherung.

Stahlguß und schmiedbarer Guß besitzen ebenfalls größere Belastungsfähigkeit gegenüber Druck als gegenüber Biegung; Holz dagegen zeigt entgegengesetzte Eigenschaften. Sinngemäß lassen sich daher die vorstehenden Ausführungen auch auf diese Baustoffe anwenden.

Betont sei aber nochmals, daß die unsymmetrischen Querschnitte nur für die Wirkung der Kraft in einer Richtung vorteilhaft sind; für den Fall wechselnder Beanspruchung ist die Zugspannung in den äußersten Fasern allein maßgebend und ein zur Nulllinie symmetrischer Querschnitt mit niedrigen Biegespannungen geboten.

Auf die Widerstandsfähigkeit gegossenen Werkstoffs gegenüber Biegung hat schließlich noch die Gushaut, besonders auf der den Zugspannungen ausgesetzten Seite erheblichen Einfluß. Die geringe Dehnungsfähigkeit der spröden Oberfläche führt leicht zu Anrissen und infolgedessen zum Beginn des Bruches: daher die geringere Belastungsfähigkeit unbearbeiteter Gußstücke, vgl. Zusammenstellung 33.

F. Widerstandsfähigkeit geschlitzter Balken.

Irrig ist die Annahme, daß der längs der neutralen Schicht eines Balkens liegende Stoff wegen der dort herrschenden niedrigen Biegespannungen entbehrlich sei, und daß der Träger durch Aussparungen an dieser Stelle ohne wesentliche Beeinträchtigung seiner Tragfähigkeit leichter gehalten werden könne. Gußeiserne, geschlitzte Balken, Abb. 38, brechen, wie Pfeilerer gezeigt hat [I, 12], bei verhältnismäßig geringen Belastungen, indem der Bruch am inneren Rande der Aussparungen beginnt. Beispielweise traten an dem dargestellten Träger bei $P = 5520$ kg Last die Risse a_1b_1 , bei 6420 kg die Risse a_2b_2 im Stege und bei 7950 kg der Bruch links ein, während ein Balken gleichen Querschnittes, aber ohne Schlitz, erst bei 18000 kg, also der 3,25fachen Last in der Mitte, brach. Die Tragfähigkeit wird um so mehr beeinträchtigt, je länger die Schlitz sind.

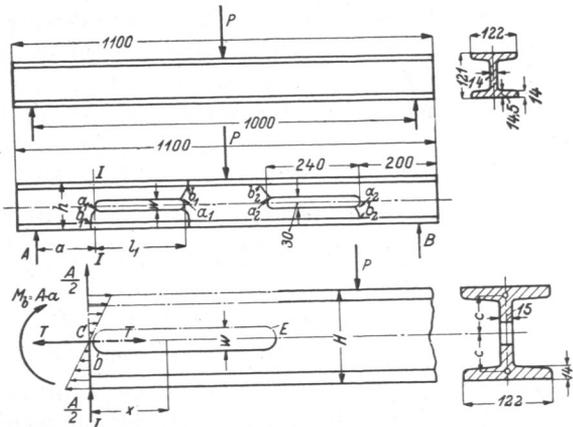


Abb. 37—39. Versuche an geschlitzten Balken.

Neben den aus der Abb. 39 ersichtlichen Bezeichnungen bedeute:

A die Auflagerkraft am linken Auflager in kg,

$2c$ die Entfernung der Schwerpunkte der beiden Querschnitte ober- und unterhalb des Schlitzes in cm,

F den Querschnitt derselben in cm^2 ,

J_1 ihre Trägheitsmomente in cm^4 ,

J das Trägheitsmoment des gesamten durch das Loch geschwächten Querschnittes in cm^4 ,

$M_b = A \cdot a$ das Biegemoment im Stabquerschnitt I in kgcm .

Legt man durch den Balken kurz vor dem Schlitz einen Schnitt I , so verlangt das Gleichgewicht die Anbringung des dort wirkenden Momentes $M_b = A \cdot a$ und der Querkraft A . Trennt man auch noch die obere Trägerhälfte durch einen Schnitt längs der Mittellinie von der unteren, so müssen dort noch Schubkräfte

$T = \frac{A \cdot l_1}{4c}$ angebracht werden, die an der oberen, strichpunktiert gezeichneten Hälfte

nach rechts, an der unteren nach links wirken. T ergibt sich aus der Annahme, daß die Tangenten an der elastischen Linie über den Enden des Schlitzes zueinander parallel sein müssen. In einem beliebigen Querschnitt der unteren Wange in der Entfernung x von der Ebene I entstehen dann folgende Einzelspannungen:

1. durch das Moment $M_b = A \cdot a$ in den äußeren Fasern:

$$\sigma_1 = + \frac{A \cdot a \cdot H}{J \cdot 2},$$

2. durch die Kraft A , die sich zu gleichen Teilen, also zu je $\frac{A}{2}$ auf die Trägerhälften verteilt, längs der Schlitzkante:

$$\sigma_2 = - \frac{A}{2} \cdot x \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1},$$

3. durch die Kraft $T = \frac{A \cdot l_1}{4c}$ längs der Schlitzkante

$$\sigma_3 = + \frac{A \cdot l_1}{4c} \left(\frac{1}{F} + c \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1} \right) = \frac{A \cdot l_1}{4} \left(\frac{1}{F \cdot c} + \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1} \right),$$

4. Schubspannungen durch die Kraft A , die vernachlässigt werden können.

Die Erhöhung der Spannungen durch die Kerbwirkung an den Schlitzenden empfiehlt Pfeleiderer durch die Annahme zu berücksichtigen, daß die Spannung σ_1 über den ganzen Querschnitt gleich groß sei. Die größte Beanspruchung σ ergibt sich aus der algebraischen Summe der Spannungen, wobei jedoch im Falle gußeiserner Träger I-förmigen Querschnitts zu beachten ist, daß sich σ_2 und σ_3 auf eine andere Querschnittform, nämlich auf die T-förmigen Hälften beziehen und daß sie deshalb nach den Versuchen Bachs mit einer Berichtigungszahl $\mu = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{H}{c}}$ zu vervielfältigen sind. Für Schmiedeeisen ist $\mu = 1$. Die größte positive Spannung entsteht am inneren Rande des Schlitzes in der Nähe des Querschnittes I im Punkte D der unteren Trägerhälfte. Sie beträgt

$$\sigma = \sigma_1 + \mu \sigma_3 = \frac{A \cdot a \cdot H}{J \cdot 2} + \mu \frac{A \cdot l_1}{4} \left(\frac{1}{F \cdot c} + \frac{c - \frac{w}{2}}{J_1} \right). \quad (30a)$$

Hervorgehoben sei der beträchtliche Einfluß, den die Schubkraft T hat, wie es denn die Hauptaufgabe des Steges ist, die Querkraft aufzunehmen und dadurch die Flanschen zu gleichmäßigen Durchbiegungen zu zwingen.

Die Rißbildung wird im Punkte D beginnen und sich im Punkte E der oberen Trägerhälfte fortsetzen, die durch das Biegemoment hoch beansprucht wird, wenn die Tragfähigkeit der unteren Hälfte durch den Riß bei D vermindert oder erschöpft ist.

Die bei den Versuchen von Pfeleiderer nach der Formel (30a) berechneten Spannungen im Augenblick des ersten Risses (im Balken, Abb. 37, $\sigma = 2160 \text{ kg/cm}^2$) entsprachen im Mittel etwa der Zugfestigkeit, nicht aber der höheren Biegefestigkeit des verwandten Gußeisens, so daß es sich empfiehlt, bei der Wahl der zulässigen Beanspruchung von der ersteren auszugehen.

G. Die Formänderung gebogener Teile.

Die Formänderung auf Biegung beanspruchter Teile besteht in einer Krümmung der Achse. Die entstehende Kurve heißt elastische oder Biegelinie. Ein Element des Stabes, Abb. 40, von der Länge dx , das durch zwei zur Stabachse senkrecht stehende Ebenen begrenzt ist, geht in ein keilförmiges Stück über, dessen Seitenflächen um den Winkel $d\gamma$ gegeneinander geneigt sind. Dabei haben die auf der Zugseite gelegenen,

durch die Spannung σ_b beanspruchten Fasern in der Entfernung e von der Nulllinie nach Formel (6a) eine Verlängerung $aa_1 = \alpha \cdot \sigma_b \cdot dx$ erlitten, so daß

$$d\gamma = \frac{aa_1}{e} = \frac{\alpha \cdot \sigma_b \cdot dx}{e}$$

wird, das mit

$$\sigma_b = \frac{M_x}{J_x} \cdot e$$

in

$$d\gamma = \alpha \cdot \frac{M_x \cdot dx}{J_x}$$

übergeht. Für eine endliche Stablänge wird

$$\gamma = \int \frac{\alpha \cdot M_x \cdot dx}{J_x} = \alpha \int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx, \tag{31}$$

wenn die Dehnungszahl α als unveränderlich angenommen wird.



Abb. 40 und 41. Formänderungen gebogener Stäbe.

An einem einseitig eingespannten Stabe, Abb. 41, hat nun die besprochene Formänderung des in der Entfernung x vom freien Ende liegenden Elementes dx eine Durchbiegung

$$d\delta = d\gamma \cdot x$$

zur Folge, so daß sich die Gesamtdurchbiegung δ durch

$$\delta = \int d\gamma \cdot x = \alpha \int \frac{M_x \cdot x \cdot dx}{J_x} \tag{32}$$

darstellen läßt. Den meist vorliegenden Fall eines Stabes auf zwei Stützen kann man auf zwei Freitragler zurückführen, die im Scheitel der Biegelinie eingespannt sind. Für die häufiger vorkommenden Belastungsfälle sind die Neigungswinkel der elastischen Linie und die Durchbiegungen in der Zusammenstellung 5, Seite 24, aufgeführt.

VII. Schub und Abscherung.

Beanspruchung auf Schub liegt vor, wenn die Kraft in der Querschnittebene wirkt und unmittelbar benachbarte Querschnitte gegeneinander zu verschieben sucht (Quer- oder Schubkräfte). Die Größe und Verteilung der entstehenden Schubspannungen τ hängt von der Querschnittform ab; für die wichtigeren ist sie in der Zusammenstellung 8 enthalten.

Zusammenstellung 8. Größe und Verteilung der Schubspannungen.

Lfd. Nr.	Querschnittform und Spannungsverteilung	Schubspannung im Abstände y von der Schwerlinie τ	Größte Schubspannung τ_{max}
1		$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{F} \sqrt{1 - 4 \frac{y^2}{d^2}}$	$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{P}{F}$

Zusammenstellung 8 (Fortsetzung).

Lfd. Nr.	Querschnittform und Spannungsverteilung	Schubspannung im Abstände y von der Schwerlinie τ	Größte Schubspannung τ_{max}
2		$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{F} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$	$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{P}{F}$
3		—	Im Steg $\tau \approx \frac{P}{s \cdot h_0}$

In einem beliebigen, zur Kraftlinie SO symmetrischen Querschnitt, Abb. 42, ist die Schubspannung τ im Punkte A des Umfanges im Abstände y von der Schwerlinie durch

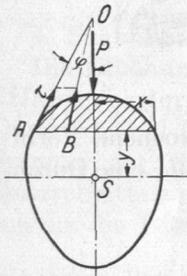


Abb. 42. Zur Ermittlung der Schubspannungen.

$$\tau = \frac{P \cdot S_y}{2x \cdot J \cdot \cos \varphi}$$

gegeben. Hierin bedeutet S_y das statische Moment der gestrichelten Fläche, bezogen auf die zur Kraftlinie senkrechte Schwerlinie. Der Winkel φ , durch die Tangente AO am Umfange bestimmt, gibt die Richtung der Schubspannung an. Für einen Punkt B im Innern des Querschnitts im gleichen Abstände y liefert BO die Richtung der Spannung; ihre Größe folgt daraus, daß die Seitenkraft parallel zu SO gleich groß derjenigen von τ ist.

An einem I-Querschnitt wird nach Nr. 3 der Zusammenstellung 8 der größte Teil der Querkraft durch den Steg, in welchem annähernd gleich große Spannungen entstehen, aufgenommen, während die Flanschen nur niedrig beansprucht sind, so daß es berechtigt erscheint, mit

$$\tau = \frac{P}{s \cdot h_0}$$

zu rechnen.

Die aufgeführten Formeln werden hauptsächlich angewendet, wenn es sich darum handelt, die größten Spannungen bei der Inanspruchnahme auf zusammengesetzte Festigkeit zu ermitteln.

Vielfach spielen freilich die Schubspannungen eine untergeordnete Rolle und können vernachlässigt werden. So pflegen an auf Biegung und Schub beanspruchten Teilen die größten Schubspannungen an den Stellen sehr geringer Biegespannungen und umgekehrt aufzutreten. Im Falle des unten folgenden Beispiels 1 haben sie ihren größten Wert in den Fasern der Nulllinie, in denen die Biegespannung Null ist und den Wert Null in den äußersten Fasern, wo die Biegespannung ihren Höchstwert erreicht.

Wird ein Maschinenteil in einer Weise in-Anspruch genommen, die der Wirkung einer Schere beim Abschneiden eines Bleches entspricht, wie es z. B. für eingepaßte, quer zu ihrer Längsachse belastete Bolzen gilt, so treten neben den Schubspannungen Biegebeanspruchungen auf, die sich nicht genau ermitteln lassen. Dann pflegt die Beanspruchung auf „Abscheren“ nach der Formel

$$\sigma_s = \frac{P}{F}, \tag{33}$$

oder der Querschnitt aus $F = \frac{P}{k_s}$ bestimmt zu werden, also unter der Voraussetzung

gleichmäßiger Verteilung der Spannungen über den ganzen Querschnitt. Die nach Formel (33) errechnete Scherspannung hat lediglich die Bedeutung eines Vergleichswertes und gibt für die tatsächlich auftretenden Beanspruchungen keinen Anhalt; doch ist die Anwendung der Formel um so eher zugänglich, wenn die zulässigen Spannungen k_s für die einzelnen Werkstoffe aus Scherversuchen, Abb. 43, nach der gleichen Formel ermittelt werden, wie das für die Zahlen der Zusammenstellung 2 Seite 13 zutrifft. Durchschnittlich ergibt sich die aus der Bruchbelastung berechnete Scherfestigkeit K_s zu 0,8 der Zugfestigkeit K_z der Werkstoffe.

Berechnungsbeispiele. 1. Ermittlung der Schubspannungen in dem auf Biegung beanspruchten Unterzug rechteckigen Querschnitts, Abb. 34 oben. Höhe 60, Breite 46 mm. Belastung durch $P = 1000$ kg in der Mitte des Trägers.

Die den Balken beanspruchenden Querkräfte sind gleich den Auflagerkräften $A = B = \frac{P}{2} = 500$ kg. Mithin ist die größte Schubspannung in den mittleren Fasern des Querschnitts nur

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{A}{F} = \frac{3}{2} \frac{500}{6 \cdot 4,6} = 27,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Sie kann gegenüber den Biegespannungen vernachlässigt werden.

2. Mindesthöhe des gußeisernen Trägers gleichen Widerstandes, Abb. 36, an den Auflagerstellen. Belastung $P = 20000$ kg in der Mitte, Stützweite 2 m. Querschnitt in der Mitte, Abb. 35. Die Stegstärke soll durchweg $s = 25$ mm betragen.

An den Auflagerstellen muß nach Nr. 3 der Zusammenstellung 8 der Steg allein imstande sein, die Querkräfte, das sind die Auflagerdrucke $A = B = \frac{P}{2} = 10000$ kg, durch Schubspannungen aufzunehmen. Läßt man im Gußeisen bei ruhender Wirkung der Last $\tau = 300$ kg/cm² zu, so wäre seine Mindesthöhe

$$h = \frac{A}{s \cdot \tau} = \frac{10000}{2,5 \cdot 300} = 13,3 \text{ cm}.$$

Die Gesamthöhe des Trägers an den Auflagerstellen setzt sich aus h und den beiden Flanschstärken von 30 und 25 mm zusammen und wird dadurch rund 190 mm.

3. Der wagrechte wechselnde Druck von 2500 kg an einem Lager, Abb. 44, soll durch Paßstifte am Lagerfuß übertragen werden.

Gewählt: Zwei Stifte aus Stahl. Sie sind auf Abscheren, auf je $P = 1250$ kg bei wechselnder Beanspruchung zu berechnen. Angenommen $k_s = 400$ kg/cm².

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{k_s} = \frac{1250}{400} = 3,13 \text{ cm}^2.$$

Stiftdurchmesser $d = 20$ mm.

Beispiele für die Zusammensetzung von Längs- und Schubspannungen bietet u. a. die Berechnung der Kurbelarme im Abschnitt Achsen und Wellen.

VIII. Drehfestigkeit.

Ein Körper ist auf Drehung beansprucht, wenn die äußeren Kräfte sich auf ein Kräftepaar, $P \cdot a$, Abb. 6, dessen Ebene senkrecht zur Körperachse steht, zurückführen lassen.

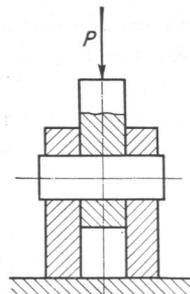


Abb. 43.
Scherversuch.

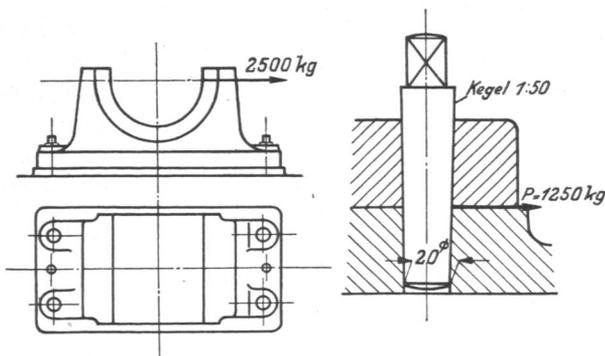


Abb. 44. Scherstifte an einem Lagerfuß.

$P \cdot a = M_a$ heißt Drehmoment. Es sucht die Querschnitte des Stabes gegeneinander zu verdrehen und ruft Schubspannungen τ_a in ihnen hervor, über deren Größe und Verteilung Zusammenstellung 9 Aufschluß gibt.

An Stäben runden Querschnitts, Abb. 45, bleiben die Querschnitte eben. Teilt man die Oberfläche eines solchen Körpers durch Längs- und Querlinien in Rechtecke ein, so gehen diese bei der Verdrehung in durchweg gleiche Rhomben über, eine Erscheinung, die auf überall gleich große Spannungen an der Oberfläche von Zylindern schließen läßt. Ein Drehversuch an einem Gummistück rechteckigen Querschnitts, Abb. 46, zeigt dagegen, daß sich die ursprünglich ebenen Querschnitte verformen, indem sich die Rechtecke in der Mitte der Seitenflächen am stärksten verzerren — dort treten die größten Spannungen auf —, während die Querschnittlinien an den Kanten senkrecht zu diesen bleiben,

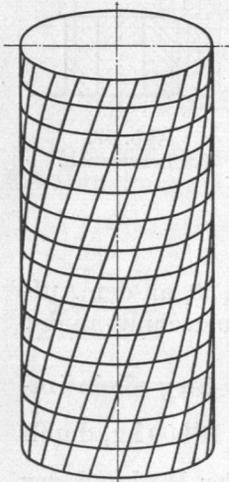


Abb. 45. Körper runden Querschnitts auf Drehung beansprucht.

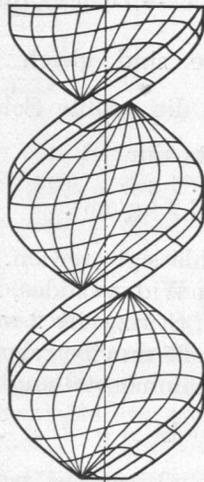


Abb. 46. Körper rechteckigen Querschnitts auf Drehung beansprucht.

so daß die Teilchen dort keine gegenseitige Verschiebung erfahren, und die Schubspannungen Null sind.

$\tau_{a_{\max}}$ insbesondere ist von dem kleinsten Trägheitsmoment des Querschnittes J_{\min} abhängig:

$$\tau_{\max} = \frac{M_a}{c \cdot J_{\min}} \cdot e, \quad (34)$$

wobei e den Abstand des der Achse am nächsten liegenden Punktes des Stabumfanges vom Schwerpunkte, c einen von der Querschnittform abhängigen Festwert bedeutet. Die größten auftretenden Spannungen dürfen die auf Seite 13 angegebenen Werte der zulässigen Beanspruchungen k_a in den einzelnen Belastungsfällen nicht überschreiten.

Die Formänderung wird durch den Verdrehungswinkel ψ , den zwei um die Länge l voneinander abstehende Querschnitte erfahren, gekennzeichnet. Bis zur Proportionalitätsgrenze nimmt der Winkel ψ geradlinig mit den Spannungen zu; bis zur Elastizitätsgrenze bleiben die Formänderungen federnd und verschwinden bei der Entlastung wieder völlig. Die auf die Längeneinheit bezogene Verdrehung oder Schiebung

$$\vartheta = \frac{\psi}{l}, \quad (35)$$

im Bogenmaß gemessen, entspricht der Dehnung ε bei Zugversuchen, die durch die Spannungseinheit erzeugte Schiebung

$$\beta = \frac{\vartheta}{\tau_a} \quad (36)$$

der Dehnungszahl α . Die Größe β heißt Gleit- oder Schubzahl, ihr reziproker Wert $G = \frac{1}{\beta}$ Gleit- oder Schubmodul. Beide Werte sind unterhalb der Proportionalitätsgrenze unveränderlich. Zwischen β und α besteht die Beziehung

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \cdot \alpha, \quad (37)$$

die mit der Querdehnungszahl $m = 10/3$ in

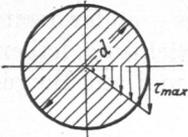
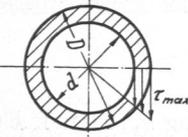
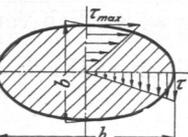
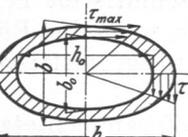
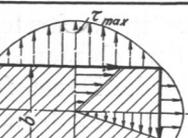
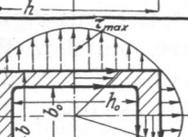
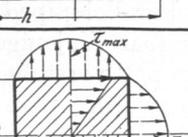
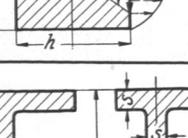
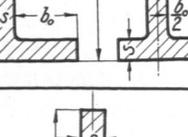
$$\beta = 2,6 \alpha$$

übergeht. Die eben abgeleiteten Begriffe ermöglichen die Berechnung der Formänderung aus den auftretenden Spannungen, indem

$$\psi = \vartheta \cdot l = \beta \tau_a \cdot l \quad (38)$$

wird. Werte für ψ enthält die Zusammenstellung 9.

Zusammenstellung 9. Größe und Verteilung der Drehspannungen, sowie Verdrehungswinkel für die wichtigsten Querschnittformen.

Lfd. Nr.	Querschnitt und Spannungsverteilung	c	Spannung	Verdrehungswinkel
1		2	$\tau_{\max} = \frac{M_d}{\pi d^3}$	$\psi = \frac{32}{\pi d^4} \cdot M_d \cdot \beta \cdot l$
2		2	$\tau_{\max} = \frac{16 M_d \cdot D}{\pi(D^4 - d^4)}$	$\psi = \frac{32}{\pi(D^4 - d^4)} \cdot M_d \cdot \beta \cdot l$
3		2	$\tau_{\max} = \frac{M_d}{\pi b^2 \cdot h}$ $\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{b}{h} \dots (h > b)$	$\psi = \frac{16 b^2 + h^2}{\pi b^3 \cdot h^3} \cdot M_d \cdot \beta \cdot l$
4		2	$\tau_{\max} = \frac{M_d}{\pi b^3 \cdot h - b_0^3 \cdot h_0} \cdot \frac{h_0}{b}$ $(h > b; h:h_0 = b:b_0)$	—
5		$\frac{4}{3}$	$\tau_{\max} = \frac{9 M_d}{2 b^2 h}$ $(h > b)$	$\psi = 3,6 \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 \cdot h^3} \cdot M_d \cdot \beta \cdot l$
6		$\frac{4}{3}$	$\tau_{\max} = \frac{9 M_d}{2 b^3 \cdot h - b_0^3 \cdot h_0} \cdot \frac{h_0}{b}$ $(h > b, h:h_0 = b:b_0)$	—
7		$\frac{4}{3}$	$\tau_{\max} = \frac{9}{2} \cdot \frac{M_d}{h^3}$	$\psi = 7,2 \cdot \frac{1}{h^4} \cdot M_d \cdot \beta \cdot l$
8		—	$\tau_{\max} = \frac{9 M_d}{2 s^2 \cdot (h + 2 b_0)}$	—
9		—	$\tau_{\max} = \frac{9 M_d}{2 s^2 (h + b - s)}$	—

IX. Zusammengesetzte Festigkeit.

Bei Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit empfiehlt es sich, zunächst den Einfluß der einzelnen Kräfte oder Momente getrennt zu ermitteln, um die Größe ihres Einflusses und ihre Wichtigkeit beurteilen zu können und dann erst die Spannungen zusammensetzen. Gleichartige Spannungen, einerseits Längs-, andererseits Schubspannungen, werden algebraisch summiert, wenn sie dieselbe Richtung haben, so daß z. B. bei der gleichzeitigen Inanspruchnahme auf Zug durch σ_z und auf Biegung durch $+\sigma_{b1}$ und $-\sigma_{b2}$ die größten auftretenden Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_z + \sigma_{b1} = \frac{P}{F} + \frac{M_b}{J} \cdot e_1, \\ \sigma_2 &= \sigma_z - \sigma_{b2} = \frac{P}{F} - \frac{M_b}{J} \cdot e_2 \end{aligned} \tag{39}$$

werden. σ_1 und σ_2 dürfen die zulässigen Beanspruchungen auf Zug k_z , Druck k oder Biegung k_b nicht überschreiten.

Für den Fall, daß die zulässige Biegespannung von der auf Zug wesentlich verschieden ist, wie es für Gußeisen zutrifft, empfiehlt Bach eine Berichtigungszahl $\beta_0 = \frac{k_b}{k_z}$ einzuführen: es muß sein.

$$\sigma_1' = \beta_0 \cdot \sigma_z + \sigma_{b1} \leq k_b \tag{40}$$

Erzeugt ein Drehmoment in irgendeinem Punkte eines Querschnitts die Schubspannung τ_a , eine Schubkraft die Spannung τ_s , so summieren sich beide, wenn ihre Richtungen übereinstimmen; anderenfalls sind sie geometrisch zu vereinigen.

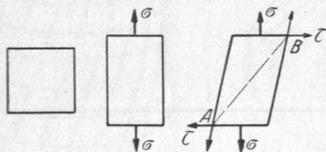


Abb. 47—49. Zur Zusammensetzung von Längs- und Schubspannungen.

Für die häufig vorkommende Zusammensetzung von Längsspannungen σ mit Schubspannungen τ , die in ein und demselben Querschnitt gleichzeitig auftreten, erhält man verschiedene Formeln, je nachdem, ob man davon ausgeht, daß die größte Dehnung, die der Baustoff erleidet, oder die größte Schubspannung, die gegebenenfalls das

Abgleiten einzelner Teile gegeneinander bedingt, maßgebend ist. Im Maschinenbau benutzt man bisher meist die erste Annahme, die zur sogenannten ideellen Hauptspannung, reduzierten Spannung oder Anstrengung des Werkstoffes führt. Zu dem Begriff sei das folgende bemerkt: Ein würfelförmiges Element von der Seitenlänge l , Abb. 47, geht unter der Wirkung einer Längsspannung σ in ein Rechteck, Abb. 48, über. Tritt noch eine Schubspannung τ , Abb. 49, hinzu, die bekanntlich längs der vier Begrenzungsflächen des Elementes gleichzeitig wirkt, so wird das Rechteck in ein Parallelepiped verzerrt. Betrachtet man die einzelnen Fasern desselben, so werden offenbar diejenigen in der Nähe der Diagonale AB am stärksten gedehnt. Unter „Anstrengung“ versteht man nun die innere Kraft, welche diese Fasern in gleichem Maße dehnen würde; man kann sie begrifflich bestimmen als die gedachte innere Kraft, die für sich allein die größte Dehnung erzeugen würde, die tatsächlich durch das Zusammenwirken zweier oder mehrerer Spannungen entsteht. (Unter Spannung dagegen versteht man die wirkliche, auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft.)

Im genannten Falle wird die Anstrengung:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \\ \text{Die Formel geht mit } m &= \frac{10}{3} \text{ in} \\ \sigma_i &= 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \\ \text{über und kann in der angenäherten Form} \\ \sigma_i &= \frac{1}{3} \sigma \pm \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \end{aligned} \right\} \tag{41}$$

leicht im Gedächtnis behalten werden. α_0 berücksichtigt dabei nach Bach die nach der Art der Belastung (ruhend, schwellend oder wechselnd) oft zahlenmäßig verschieden hohe, zulässige Beanspruchung durch Längs- und Schubspannungen. Es ist

$$\alpha_0 = \frac{\text{zulässige Längsspannung}}{1,3 \cdot \text{zulässige Schubspannung}}, \quad (42)$$

also z. B. bei Inanspruchnahme auf Biegung und Drehung

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1,3 \cdot k_d},$$

bei Belastung durch Zug und Schub

$$\alpha_0 = \frac{k_z}{1,3 \cdot k_s}$$

zu setzen. Die errechnete Anstrengung darf die dem Belastungsfalle entsprechende Längsspannung k_z , k , k_b nicht überschreiten.

Die Formel (41) gestattet die Ableitung einer Gleichung für die unmittelbare Zusammensetzung der die Spannungen erzeugenden Biege- und Drehmomente M_b und M_d zu ideellen Biegemomenten M_i , jedoch nur im Falle kreisförmigen Querschnitts des Körpers. Hat dieser einen Durchmesser d , so ergibt sich, wenn beide Seiten mit

$\frac{\pi}{32} d^3$ multipliziert werden

$$\frac{\pi}{32} d^3 \cdot \sigma_i = \frac{1}{3} \frac{\pi}{32} d^3 \cdot \sigma_b \pm \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{32} d^3 \sigma_b\right)^2 + \left(\alpha_0 \frac{\pi}{16} d^3 \tau_d\right)^2}$$

oder

$$M_i = \frac{1}{3} M_b + \frac{2}{3} \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}. \quad (43)$$

Aus dem ideellen Moment M_i folgt die Höhe der Beanspruchung:

$$\sigma_b = \frac{32 M_i}{\pi \cdot d^3}.$$

Eine Benutzung der Formel für sonstige Querschnitte, an denen die größten Biegespannungen in anderen Fasern als die größten Schubspannungen auftreten, so daß diese nicht unmittelbar zusammengesetzt werden können, ist nicht zulässig.

Nimmt man in der Formel (41) $\sigma = 0$ und $\alpha_0 = 1$ an, betrachtet also den Grenzfall, daß nur Schubspannungen wirken, so führt die Gleichung zu der Beziehung $\sigma_i = \frac{2}{3} \sqrt{4\tau^2}$, also $\frac{\tau}{\sigma_i} = 0,75$, daß also das Verhältnis gleichwertiger Schub- und Längsspannungen an Körpern gleichen Baustoffes 0,75 betragen müßte. Scher- und Zugversuche liefern nun im Durchschnitt eine nur wenig höhere Zahl, nämlich 0,8, wenn man die Spannungen aus den Bruchlasten berechnet.

Den Fall, daß gleichzeitig zwei senkrecht zueinander gerichtete Längsspannungen wirken, wie es u. a. bei der Beanspruchung von Gefäßwänden durch äußeren oder inneren Druck vorkommt, verdeutlichen Abb. 50–52. Durch die Spannung σ_1 wird das gezeichnete Element in Richtung dieser Spannung gereckt; tritt aber die Zugspannung σ_2 hinzu, so wird die Verlängerung und damit auch die Anstrengung des Elementes in Richtung von σ_1 vermindert. Eine Druckspannung $-\sigma_2$ würde sie dagegen erhöhen. Bei drei senkrecht zueinander wirkenden Längsspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 werden die Anstrengungen in Richtung der drei Achsen:

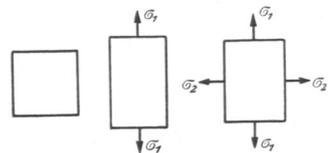


Abb. 50–52. Zur Zusammensetzung von Längsspannungen.

$$\sigma_{i1} = \sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3); \quad \sigma_{i2} = \sigma_2 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_3); \quad \sigma_{i3} = \sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Die größte von ihnen darf die zulässige Längsspannung nicht überschreiten.

Geht man dagegen von der größten Schubspannung aus, so muß

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_s \quad (44)$$

sein. Die wieder nur für den kreisförmigen Querschnitt geltende Formel für das ideale Moment lautet dann

$$M_{ai} = \sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \quad (45)$$

während die dazugehörige Beanspruchung nach

$$\tau_a = \frac{16 M_{ai}}{\pi d^3}$$

zu beurteilen wäre.

Wirken drei Längsspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 senkrecht zueinander, von denen z. B. σ_1 den größten und σ_2 den kleinsten Wert habe, so entsteht eine größte Schubspannung $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Auf sie hat die dritte, zwischen der größten und der kleinsten liegende Spannung — in dem betrachteten Falle σ_3 — keinen Einfluß.

Für den Grenzfall $\tau = 0$ erhält man aus Gleichung (44) $\frac{\tau_{\max}}{\sigma} = \frac{1}{2}$. Bestätigungen dieser Beziehung und der Theorie, daß die größte Schubspannung maßgebend ist, bieten die Arbeiten von Guest [I, 10], v. Kármán [I, 11] u. a., die die Fließvorgänge an Flußeisen, Kupfer und Marmor näher untersuchten, so daß sich der Widerspruch zwischen den Formeln (41) und (44) vielleicht dadurch aufklärt, daß für die Einleitung des Bruches die größte Dehnung, für die ersten Fließerscheinungen dagegen die größte Schubspannung maßgebend ist.

Da nun die Spannungen in den Maschinenteilen unter der Fließgrenze bleiben sollen, um größere und bleibende Formänderungen zu vermeiden, ist es wohl berechtigt, nach den Formeln (44) und (45) zu rechnen. Dabei darf aber die Beurteilung der Sicherheit nicht nach der Bruchfestigkeit des Werkstoffes erfolgen; die errechneten Werte müssen vielmehr mit der Schubspannung an der Streckgrenze $\tau_s = \frac{1}{2}\sigma_s$ verglichen werden. Die so gefundenen Sicherheitsgrade weichen von den gewohnten ab. Es empfiehlt sich daher, solange genügende Erfahrungszahlen fehlen, die Festigkeitsrechnungen nach der bisherigen Art durchzuführen, sie aber nach der zweiten auf die Sicherheit gegen Eintreten des Fließens nachzuprüfen. Für Werkstoffe ohne ausgeprägte Fließgrenze, wie Gußeisen, erübrigt sich die Rechnung nach der zweiten Anschauung.

In geeigneten Beispielen des Buches sind die Ergebnisse der Rechnung nach den beiden Annahmen nebeneinander gestellt.

X. Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

Es bedeuten:

e_1 und e_2 Abstände der äußersten Fasern des Querschnittes von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie. Positiv zu rechnen, wenn sie von dem Krümmungsmittelpunkt abliegen, negativ, wenn sie nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet sind,

F Querschnittsfläche in cm^2 ,

M_b das den Querschnitt beanspruchende Biegemoment in kg cm . Positiv, wenn es den Körper stärker zu krümmen, negativ, wenn es die Krümmung zu verringern sucht,

P die im Schwerpunkt des Querschnittes wirkende Längskraft in kg , als Zugkraft positiv, als Druckkraft negativ einzusetzen,

r Krümmungshalbmesser der Stabachse in cm,
 σ die entstehenden Normalspannungen in kg/cm²,
 x Abstand der Faser, in der die Spannung σ herrscht, von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie positiv und negativ zu rechnen, wie e_1 und e_2 ,

$$Z = -r^2 \int \frac{x}{r+x} dF \text{ eine dem Trägheitsmoment verwandte Größe in cm}^4.$$

Die Berechnung sta r gekrümmter Körper nach den Formeln für den geraden Balken führt zur Unterschätzung der Beanspruchungen. Unter den Voraussetzungen,

1. daß die Schwerpunkte aller Querschnitte in der Kraftebene liegen,
 2. daß diese Ebene jeden Querschnitt symmetrisch teilt und
 3. daß die Querschnitte eben bleiben,
- gilt für einen beliebigen Punkt in der Entfernung x von der zur Kraftebene senkrechten Schwerlinie, Abb. 53a,

$$\sigma = \frac{P + \frac{M_b}{r}}{F} + \frac{M_b \cdot r}{Z} \cdot \frac{x}{r+x} \quad (46)$$

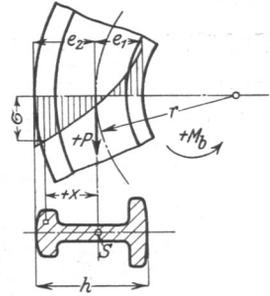


Abb. 53 a. Zur Ermittlung der Beanspruchung gekrümmter Körper.

Für die äußersten Fasern des Querschnittes, in denen die größten Zug- und Druckspannungen entstehen, ist für x e_1 und e_2 einzusetzen. Ist der Krümmungshalbmesser r im Verhältnis zur Querschnittshöhe h groß, so darf Z in den Fällen 1, 2 und 3 der nachstehenden Zusammenstellung genügend genau durch das Trägheitsmoment J ersetzt werden, da dann die rasch fallenden Reihen in

Zusammenstellung 10. Festwert Z zur Berechnung gekrümmter Stäbe.

Lfd. Nr.	Querschnittform	Z
1		$\frac{b h^3}{12} \left\{ 1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{3}{112} \left(\frac{h}{r} \right)^4 + \dots \right\}$
2		$\frac{\pi a^4}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^4 + \frac{7}{32} \left(\frac{a}{r} \right)^6 + \dots \right\}$
3		$\frac{\pi a^3 \cdot b}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^4 + \frac{7}{32} \left(\frac{a}{r} \right)^6 + \dots \right\}$
4		$r^3 \left\{ \left[b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} (e_2 + r) \right] \ln \frac{r + e_2}{r - e_1} - (b_1 - b_2) \right\} - r^2 h \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right)$ $e_1 = \frac{1}{3} \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \cdot h; \quad e_2 = \frac{1}{3} \frac{2 b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \cdot h$

Querschnitt $F = 39,8 \text{ cm}^2$, $r = 8,3 \text{ cm}$,

$$F' = F_1 - F_2 = 3,46 - 7,17 = - 3,71 \text{ cm}^2,$$

$$P_0 = P \frac{\overline{K_I M}}{K_T S} = \frac{6000 \cdot 1,5}{8,3} = + 1085 \text{ kg},$$

$$P' = P - P_0 = 6000 - 1085 = + 4915 \text{ kg},$$

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F} = \frac{1085}{39,8} = + 27,3 \text{ kg/cm}^2,$$

σ' in der innersten Faser bei D ,

$$\sigma'_D = \frac{P'}{F'} \cdot \frac{e_2}{r + e_2} = \frac{+4915}{-3,71} \cdot \frac{(-3,8)}{(8,3 - 3,8)} = + 1120 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zugbeanspruchung.}$$

Durch algebraische Addition von σ_0 und σ' folgt schließlich die größte Spannung in D zu

$$1120 + 27 = 1147 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zum Vergleich in dem Abschnitt über Haken durchgeführte Rechnung nach der Theorie der geraden Balken gibt nur 850 kg/cm^2 .

Auf Grund der Formel für gekrümmte, stabförmige Körper berechnet Bach [I, 15] auch die durch die sogenannte Kerbwirkung erhöhte Beanspruchung von Maschinenteilen mit scharfen oder abgerundeten Kehlen. Gußeiserne Probekörper, die an den Seitenflächen bearbeitet waren, an den ebenen Vorder- und Rückflächen aber die Gußhaut behalten hatten und die nach Abb. 54 belastet wurden, brachen längs schräger, unter ungefähr 45° in der Kehle ansetzender Flächen. Die Bruchlast nimmt annähernd geradlinig mit abnehmendem Rundungshalbmesser ρ ab. Im Mittel aus je zwei Versuchen betrug sie:

bei $\rho =$	15	5	0	mm
$P =$	35000	26995	22700	kg.

Bei der Berechnung der Spannung empfiehlt Bach den Krümmungshalbmesser r etwas größer als den Abstand des Schwerpunktes der unter 45° angenommenen Bruchfläche vom Mittelpunkte der Hohlkehle zu setzen, und zwar:

$$r = \sqrt{0,01 e^2 + \rho^2} + e \quad \text{bis} \quad \sqrt{0,018 e^2 + \rho^2} + e.$$

Die Kraft, die den Bruchquerschnitt auf Zug beansprucht, ist $\frac{P}{2} \sin 45^\circ$, das Biegemoment $M_b = \frac{P}{2} \cdot (x + y)$, während die Schubkraft $\frac{P}{2} \cos 45^\circ$ vernachlässigt werden darf. Der Bruchquerschnitt ist rechteckig und besitzt die Breite b , die Höhe e . (Vgl. auch die Berechnung des Kurbelwellenlagers im Abschnitt Lager.)

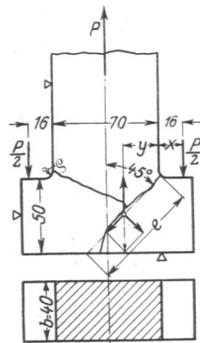


Abb. 54. Zur Berechnung von Teilen mit scharfen oder abgerundeten Kehlen.

XI. Federn.

Man unterscheidet Biegungs- und Drehungsfedern. Die Grundlagen für ihre Berechnung bilden die Formeln der Biege- und Drehfestigkeit. Für Federn, die zur Aufnahme oder Ausübung von Kräften dienen, ist die Tragfähigkeit oder die Kraft, die sie ausüben können, für Federn, die Stöße auffangen oder zum Antriebe benutzt werden sollen, außerdem die Arbeitsfähigkeit maßgebend. Letztere ist unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität und der Verhältnismöglichkeit zwischen Formänderungen und Spannungen des Baustoffes durch eine Dreiecksfläche

$$ABC = \mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} \tag{47}$$

Abb. 55, dargestellt, wenn die Feder allmählich von 0 auf P kg belastet und dabei um δ cm durchgebogen wird. Ist die Feder mit P_0 kg vorgespannt, so kann sie noch die durch das Trapez $DECB$ wiedergegebene Arbeit

$$\mathfrak{A}' = \frac{P_0 + P}{2} \cdot \delta' \tag{48}$$

aufnehmen.

Die Arbeitsfähigkeit läßt sich in Beziehung zum Federinhalt bringen und kann dann als Maßstab für die Ausnutzung des Baustoffes dienen. Z. B. nimmt die Dreieckfeder als Körper gleichen Widerstands eine dreimal so große Arbeit auf als die Rechteckfeder gleichen Inhalts (vgl. die letzten Spalten der Nr. 1 und 2 der untenstehenden Zusammenstellung).

Drehungsfedern sind in bezug auf die Ausnutzung des Werkstoffes vorteilhafter als Biegungsfedern und schon deshalb diesen vorzuziehen. Zudem verlangen sie meist auch konstruktiv weniger Raum. Beispielweise folgt aus den Arbeitsfähigkeiten beim Vergleich einer Dreieckfeder Nr. 2 mit einer zylindrischen Schraubenfeder Nr. 10 der Rauminhalt der ersteren:

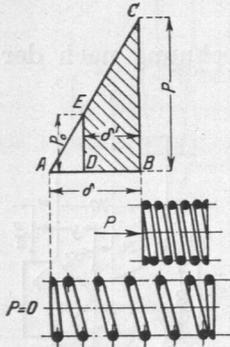


Abb. 55. Arbeitsfähigkeit einer zylindrischen Schraubenfeder.

$$V_1 = \frac{6 \mathfrak{A}}{\alpha \cdot k_b^2},$$

der der zweiten:

$$V_2 = \frac{4 \mathfrak{A}}{\beta \cdot k_a^2}$$

und das Verhältnis beider:

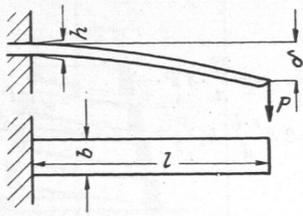
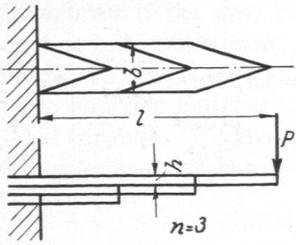
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3 \beta \cdot k_a^2}{2 \alpha \cdot k_b^2}.$$

Zahlenmäßig wird für Federstahl bei ruhender Belastung:

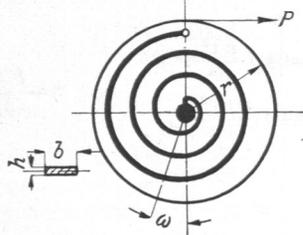
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2200000}{850000} \cdot \frac{6000^2}{7500^2} \approx 2,5,$$

Zusammenstellung 11. Federn.

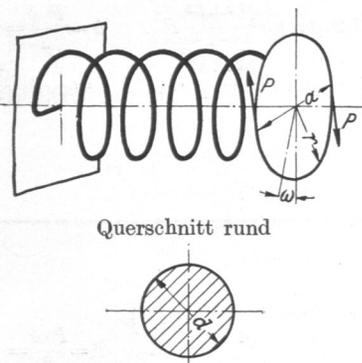
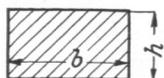
Lfd. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
Gerade Biegungsfedern.				
1	<p>Rechteckfeder</p>	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot k_b$	$\delta = \alpha \cdot \frac{P l^3}{J \cdot 3}$ $= 4 \alpha \cdot \frac{l^3}{b h^3} \cdot P = \frac{2}{3} \alpha \frac{l^2}{h} k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{18} \alpha k_b^2 \cdot V$
2	<p>Dreieckfeder</p>	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot k_b$	$\delta = \alpha \cdot \frac{P l^3}{J \cdot 2} = 6 \alpha \cdot \frac{l^3}{b h^3} \cdot P$ $= \alpha \cdot \frac{l^2}{h} \cdot k_b$	$\mathfrak{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha \cdot k_b^2 \cdot V$

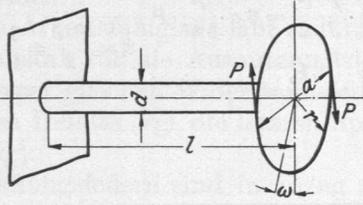
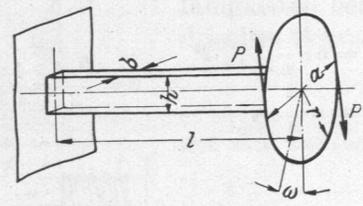
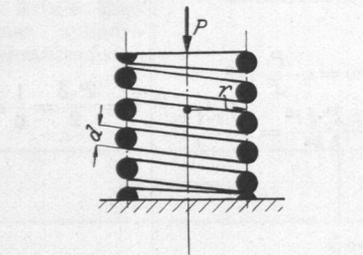
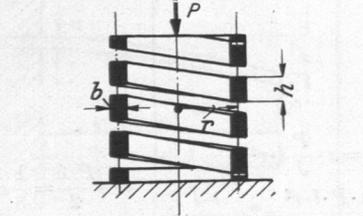
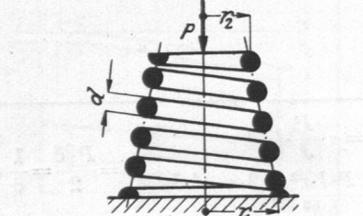
Lfd. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
3	Nach kubischer Parabel zugeschärfte Rechteckfeder 	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$	$\delta = \alpha \cdot \frac{P l^3}{J \cdot 2} = 6 \alpha \cdot \frac{l^3}{b h^3} \cdot P$ $= \alpha \cdot \frac{l^2}{h} \cdot k_b$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{9} \alpha k_b^2 \cdot V$
4	Geschichtete Dreieckfeder 	$P = \frac{n \cdot b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$	$\delta = 6 \alpha \frac{l^3}{n \cdot b h^3} \cdot P$ $= \alpha \frac{l^2}{h} \cdot k_b$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha k_b^2 \cdot V$

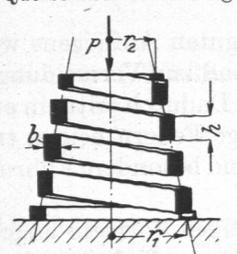
Gewundene Biegefedern (l Länge der gestreckt gedachten Feder).

5	Spiralfeder rechteckigen Querschnitts 	$P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{r}$	$\delta = r \cdot \omega = \alpha \cdot \frac{P}{J} \cdot l r^2$ $= 12 \frac{\alpha P \cdot l r^2}{b h^3} = 2 \alpha \frac{r \cdot l k_b}{h}$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha k_b^2 \cdot V$
---	---	---	--	---

Gewundene Biegefedern (l Länge der gestreckt gedachten Feder).

6	Schraubenfeder 	$P = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{k_b}{a}$	$\delta = r \cdot \omega = \alpha \cdot \frac{P}{J} \cdot l \cdot r^2$ $= \frac{64 \alpha \cdot P \cdot l \cdot r^2}{\pi \cdot d^4} = 2 \alpha \cdot \frac{r \cdot l}{d} \cdot k_b$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{8} \alpha k_b^2 \cdot V$
7	Querschnitt rechteckig 	$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{a}$	$\delta = r \cdot \omega = \alpha \cdot \frac{P}{J} \cdot l \cdot r^2$ $= 12 \alpha \cdot \frac{P \cdot l \cdot r^2}{b h^3} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot r \cdot l \cdot k_b}{h}$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{6} \alpha k_b^2 \cdot V$

Lfde. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
Gerade Drehungsfedern.				
8	<p style="text-align: center;">Querschnitt rund</p> 	$P = \frac{\pi d^3 k_a}{16 a}$	$\begin{aligned} \delta = r \cdot \omega &= \frac{32}{\pi} \cdot \beta \cdot P \cdot \frac{r^2 l}{d^4} \\ &= 2 \beta \frac{r \cdot l}{d} \cdot k_a \end{aligned}$	$\mathcal{A} = \frac{P \delta}{2} = \frac{1}{4} \beta k_a^2 \cdot V$
9	<p style="text-align: center;">Querschnitt rechteckig</p> 	$P = \frac{2}{9} \cdot b^2 \cdot h \frac{k_a}{a}$	$\begin{aligned} \delta = r \omega &= 3,6 \beta \cdot P \cdot r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 \cdot h^3} \\ &= 0,8 \beta \cdot r \cdot l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{P \cdot \delta}{2} \\ &= \frac{4}{45} \beta \left(\frac{b^2}{h^2} + 1 \right) k_a^2 \cdot V \end{aligned}$
Gewundene Drehungsfedern (n = Anzahl der wirksamen Windungen).				
10	<p style="text-align: center;">Zylindrische Schraubenfeder Querschnitt rund</p> 	$\begin{aligned} P &= \frac{\pi d^3}{16} \cdot \frac{k_a}{r} \\ &= 0,1963 \frac{d^3}{r} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \delta &= 64 \beta \cdot \frac{n r^3}{d^4} \cdot P \\ &= 4 \beta \cdot \frac{\pi n r^2}{d} \cdot k_a \end{aligned}$	$\mathcal{A} = \frac{P \delta}{2} = \frac{1}{4} \beta k_a^2 \cdot V$
11	<p style="text-align: center;">Zylindrische Schraubenfeder Querschnitt rechteckig</p> 	$P = \frac{2}{9} b^2 \cdot h \cdot \frac{k_a}{r}$	$\begin{aligned} \delta &= 7,2 \cdot \beta \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \\ &= 1,6 \beta \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{P \cdot \delta}{2} \\ &= \frac{4}{45} \beta \left(\frac{b^2}{h^2} + 1 \right) k_a^2 \cdot V \end{aligned}$
12	<p style="text-align: center;">Kegelstumpffeder Querschnitt rund</p> 	$\begin{aligned} P &= \frac{\pi \cdot d^3 k_a}{16 r_1} \\ &= 0,1963 \frac{d^3}{r_1} \cdot k_a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \delta &= 16 \beta \frac{(r_1^2 + r_2^2) \cdot n (r_1 + r_2)}{d^4} \cdot P \\ &= \beta \cdot \frac{r_1 \cdot \pi n (r_1 + r_2)}{d} k_a \end{aligned}$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{1}{8} \beta \cdot k_a^2 \cdot V$

Lfd. Nr.	Federform	Tragfähigkeit	Durchbiegung	Arbeitsfähigkeit
13	<p>Kegelstumpffeder Querschnitt rechteckig</p> 	$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r_1} k_a$	$\delta = 1,8\beta(r_1^2 + r_2^2) \pi \cdot n (r_1 + r_2) \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \cdot P$ $= 0,4 \beta \cdot r_1 \pi n (r_1 + r_2) \frac{b^2 + h^2}{b h^2} k_a$	$\mathcal{A} = \frac{P \cdot \delta}{2} =$ $= \frac{2}{45} \cdot \beta \left(\frac{b^2}{h^2} + 1 \right) k_a^2 \cdot V$

der Stahlverbrauch bei der Biegungsfeder also theoretisch 2,5mal größer. Vgl. dazu das unten folgende praktische Beispiel. Dagegen sind der Inhalt und das Gewicht der Feder nicht von der Länge oder den übrigen zu wählenden Abmessungen abhängig, sondern nur von der Federart und der Höhe der Beanspruchung, wie aus dem Bau der Formeln hervorgeht. Wegen der gleichmäßigeren Inanspruchnahme des Werkstoffes ist bei Drehungsfedern der runde Querschnitt dem rechteckigen überlegen.

Zusammenstellung 12. Zulässige Beanspruchung von Federn.

Verwendungszweck	Werkstoff	Dehnungszahl α cm ² /kg	Schubzahl β cm ² /kg	Belastungsart	Zulässige Beanspruchung	
					auf Biegung k_b kg/cm ²	auf Drehung k_a kg/cm ²
Belastungsfedern	Federstahl, ungehärtet	1 2200000	1 850000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	3000 2000	2400 1600
	Guter Federstahl, gehärtet			Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	7500 5000	6000 4000
Eisenbahnwagenfedern	Guter Federstahl, gehärtet			Berechnet für die statische Last	5500 ... 5800 (Stambke) 6000 ... 6500 (Bach)	—
Rennwagenfedern	Spezialfederstahl F 64 D, Krupp			—	bis 14500	—
Belastungsfedern	Phosphorbronzedraht	—	1 480000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	— —	2500 1670
	Durana-metalldraht ML	—	1 380000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	— —	2000 1330
	Neusilberdraht EK	—	1 510000	Ruhend durch P kg Schwellend von 0 ... P kg	— —	2000 1330

Zu den zulässigen Beanspruchungen ist zu bemerken, daß Federn, die höheren Wärmegraden ausgesetzt werden, leicht schlaff werden und daß sie deshalb mit niedrigen zulässigen Spannungen berechnet werden müssen.

Die geschichtete Dreieckfeder Nr. 4 kann als eine Dreieckfeder Nr. 2, in $2n$ Stufen von der Breite $\frac{b}{2}$ zerlegt, betrachtet werden. Sie wird besonders häufig an Fahrzeugen verwendet und hat den Vorteil, infolge ihrer größeren inneren Reibung die bei Stößen auftretenden Schwingungen rascher zu dämpfen.

An den auf Druck beanspruchten Schraubenfedern sind des guten Aufliegens wegen die letzten Windungen auf die vorhergehenden niederzubiegen, und zur Vermeidung des Ausbiegens beim Zusammendrücken eben abzuschleifen, Abb. 55^a. Dadurch tritt ein etwas größerer Werkstoffverbrauch ein als oben berechnet wurde. Lange Federn neigen trotzdem zum seitlichen Ausknicken, was man nur durch Unterteilen und besondere Führungsteller verhindern kann.

Für Gummifedern und -puffer lassen sich keine allgemein gültigen Formeln angeben, da die verschiedenen Gummisorten stark abweichende Festigkeitseigenschaften haben.

Zahlenbeispiel. Eine geschichtete Dreieckfeder von 600 mm wirksamer Länge für eine dauernde Belastung von 1500 kg bei rund 3 cm Durchbiegung ist zu berechnen. Abb. 56.

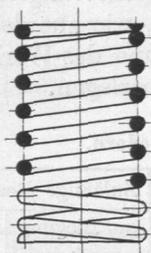


Abb. 55a.
Schraubenfeder
mit niedergebogenen
Enden.

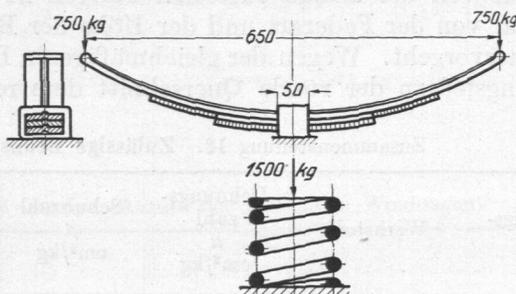


Abb. 56. Vergleich zwischen einer geschichteten
Dreieck- und eine Schraubenfeder.

Die Feder kann in der Mitte eingespannt angenommen und daher nach Formelreihe 4 mit $P = 750$ kg Belastung für jede Hälfte berechnet werden.

Gewählt: $k_b = 7500$ kg/cm².

Aus der verlangten Durchbiegung folgt

$$h = \frac{\alpha \cdot l^2 \cdot k_b}{\delta} = \frac{30^2 \cdot 7500}{2200000 \cdot 3} = 1,02 \text{ cm}$$

und aus der Tragfähigkeit:

$$n \cdot b = \frac{6 \cdot P \cdot l}{h^2 \cdot k_b} = \frac{6 \cdot 750 \cdot 30}{1,02^2 \cdot 7500} = 17,2 \text{ cm.}$$

Gewählt: 3 Schichten von $h = 1$, $b = 6$ cm; damit:

$$P = \frac{n \cdot b \cdot h^2 \cdot k_b}{6 \cdot l} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 1^2 \cdot 7500}{6 \cdot 30} = 750 \text{ kg,}$$

$$\delta = \alpha \cdot \frac{l^2}{h} k_b = \frac{30^2 \cdot 7500}{2200000 \cdot 1} = 3,07 \text{ cm.}$$

Die Feder verlangt unter Einschluß des mittleren Stückes von 5 cm Länge zur Fassung rund 5,5 kg Stahl.

Zum Vergleich sei eine gewundene Drehungsfeder runden Querschnitts mit $k_d = 6000$ kg/cm² bei gleicher Durchbiegung berechnet. Windungshalbmesser angenommen zu 60 mm. Formelreihe 10.

$$d^3 = \frac{P \cdot r}{0,1963 \cdot k_d} = \frac{1500 \cdot 6}{0,1963 \cdot 6000} = 7,64;$$

$$d = 1,97 \sim 2 \text{ cm.}$$

$$n = \frac{\delta \cdot d}{4 \beta \cdot \pi \cdot r^2 \cdot k_d} = \frac{3,07 \cdot 2 \cdot 850000}{4 \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6000} = 1,92.$$

Gewicht rund 3,3 kg unter Berücksichtigung der beiden Endwindungen.

XII. Festigkeit der Gefäßwände.

Die folgenden Formeln sind unter der Annahme einer unveränderlichen Dehnungszahl α abgeleitet. Gefäße aus Gußeisen, bei dem α mit steigenden Zugspannungen zunimmt, erfahren durch inneren Druck etwas geringere Zugbeanspruchungen und weisen eine gleichmäßigere Spannungsverteilung auf als die Formeln erwarten lassen.

Eine etwaige Gußhaut wirkt besonders an den Stellen größter Zugspannungen schädlich.

Bei zusammengesetzten Gefäßen ist naturgemäß die Sicherheit der Verbindungsnahte durch Löten, Nieten, Schweißen usw. zu beachten und häufig entscheidend.

Widerstandsfähige Böden versteifen die anschließenden zylindrischen Wandungen, und zwar um so mehr, je kürzer die Zylinder sind. Besondere Sorgfalt verdienen die Übergänge zwischen beiden; scharfe Absätze, Eindrehungen, Bohrungen oder sonstige Unterbrechungen führen zu oft beträchtlichen Spannungserhöhungen und selbst zu Brüchen. Häufig sind besondere Zuschläge zu den rechnerisch ermittelten Wandstärken in Rücksicht auf die Herstellung, Aufstellung oder die Abnutzung im Betrieb nötig.

A. Kugelige Gefäße.

1. Hohlkugel durch inneren Überdruck von p_i kg/cm² beansprucht. Die größte Anstrengung auf Zug tritt an der Innenfläche in tangentialer Richtung auf und beträgt bei einem Außenhalbmesser r_a und einem Innenhalbmesser r_i in cm

$$\sigma_{z \max} = \frac{0,65 r_a^3 + 0,4 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_i. \quad (49)$$

Die Spannungen nehmen nach außen hin ab. Ist die zulässige Beanspruchung k_z und der Innenhalbmesser r_i gegeben, so wird

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 0,65 p_i}}. \quad (50)$$

Bei $k_z = 0,65 p_i$ wird der Nenner des Bruches Null und $r_a = \infty$. Mithin ist in

$$p_i = \frac{k_z}{0,65}$$

die Grenze der Verwendbarkeit des Werkstoffes gegeben.

Bei geringer Wandstärke s im Verhältnis zum Durchmesser darf man gleichmäßige Verteilung der Spannungen in der ganzen Wandung annehmen und nach

$$\sigma_z = \frac{d_i \cdot p_i}{4 \cdot s}, \quad (51)$$

oder

$$s = \frac{d_i \cdot p_i}{4 k_z}$$

rechnen.

2. Hohlkugel, durch äußeren Druck von p_a kg/cm² beansprucht. Unter der Voraussetzung, daß Einknicken der Wandung nicht zu fürchten ist, wird die größte

Druckbeanspruchung in tangentialer Richtung an der Innenfläche der Kugel:

$$\sigma_{d \max} = \frac{1,05 \cdot r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_a \quad (52)$$

Daraus folgt:

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1,05 p_a}} \quad (53)$$

p_a muß kleiner als $\frac{k}{1,05}$ sein.

Für geringe Wandstärken ist

$$\sigma_a = \frac{d_a \cdot p_a}{4 \cdot s}; \quad s = \frac{d_a \cdot p_a}{4 \cdot k} \quad (54)$$

Formel (49) läßt sich umformen in:

$$\frac{\sigma_{z \max}}{p_i} = \frac{0,65 \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 + 0,4}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1}$$

und zeigt dann, daß das Verhältnis der Anstrengung zum inneren Druck $\frac{\sigma_{z \max}}{p_i}$ nur von dem Verhältnis $\frac{r_a}{r_i}$ abhängt. Die Beziehung, in der Kurve *aa* der Abb. 57 aufgetragen, vereinfacht die Berechnung kugelförmiger Gefäße ganz wesentlich.

Ist beispielweise eine Kugel von 200 mm

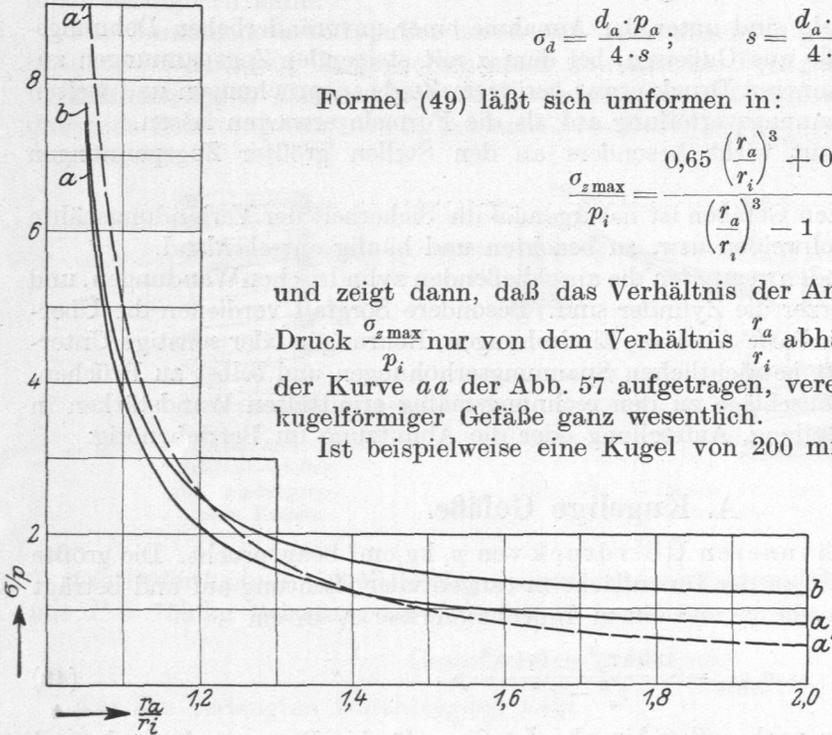


Abb. 57. Zur Berechnung kugelförmiger Gefäße, *a-a* innerem Überdruck ausgesetzt, Formel (49), *b-b* äußerem Überdruck ausgesetzt, Formel (52), *a'-a'* innerem Überdruck ausgesetzt, Formel (51).

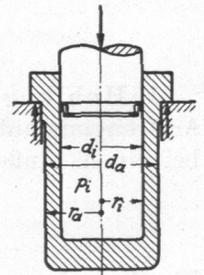


Abb. 58. Hohlzylinder, innerem Druck ausgesetzt.

lichtem und 300 mm äußerem Durchmesser, also $\frac{r_a}{r_i} = \frac{150}{100} = 1,5$ einer Innenpressung von 400 at ausgesetzt, so gibt die zur Abszisse 1,5 gehörige Ordinate

$$\frac{\sigma_{z \max}}{p_i} = 1,09 \quad \text{oder} \quad \sigma_{z \max} = 1,09 \cdot 400 = 436 \text{ kg/cm}^2$$

als größte Anstrengung.

Linie *bb* erleichtert in ähnlicher Weise die Berechnung von Kugelwandungen nach Formel (52), die durch äußeren Druck belastet sind, während Linie *a'a'* Werte der Näherungsformel (51) wiedergibt.

B. Zylinder.

1. Hohlzylinder, geschlossen oder so gestützt, daß die Wandung durch den Bodendruck auf Zug beansprucht wird, Abb. 58, innerem Überdruck p_i ausgesetzt. An der Innenfläche des Zylinders wird in tangentialer Richtung:

die größte Anstrengung:

$$\sigma_{z \max} = p_i \frac{0,4 r_i^2 + 1,3 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}; \quad (55a)$$

Linie *aa* der Abb. 59.

die größte Schubspannung:

$$\tau_s = p_i \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}; \quad (55b)$$

Linie *ff* der Abb. 59.

p_i darf nach der Formel für die größte Anstrengung $\frac{k_z}{1,3}$ nicht erreichen.

Bei geringer Wandstärke wird die mittlere Spannung in Richtung des Umfanges Linie *ee* der Abb. 59)

$$\sigma_z = \frac{d_i \cdot p_i}{2s} \quad \text{oder} \quad \text{die Wandstärke } s = \frac{d_i \cdot p_i}{2 \cdot k_z}. \quad (56)$$

In axialer Richtung ist die mittlere Spannung, die durch den Druck auf den Zylinderboden hervorgerufen wird, nur halb so groß:

$$\sigma'_z = \frac{d_i \cdot p_i}{4s}. \quad (57)$$

2. Hohlzylinder, beiderseits offen, oder so gestützt, daß die Wandung vom Bodendruck entlastet ist, Abb. 60, innerem Überdruck p_i ausgesetzt. An der Zylinderinnenfläche entsteht in tangentialer Richtung:

eine größte Anstrengung:

$$\sigma_{z \max} = p_i \frac{0,7 r_i^2 + 1,3 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}; \quad (58a)$$

Linie *bb* der Abb. 59.

eine größte Schubspannung:

$$\tau_s = p_i \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}; \quad (58b)$$

Linie *ff* der Abb. 59.

An der Zylinderaußenfläche wird die Anstrengung

$$\sigma_z = 2 p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}. \quad (59)$$

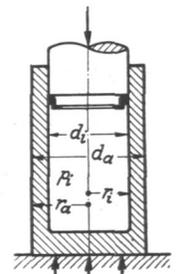
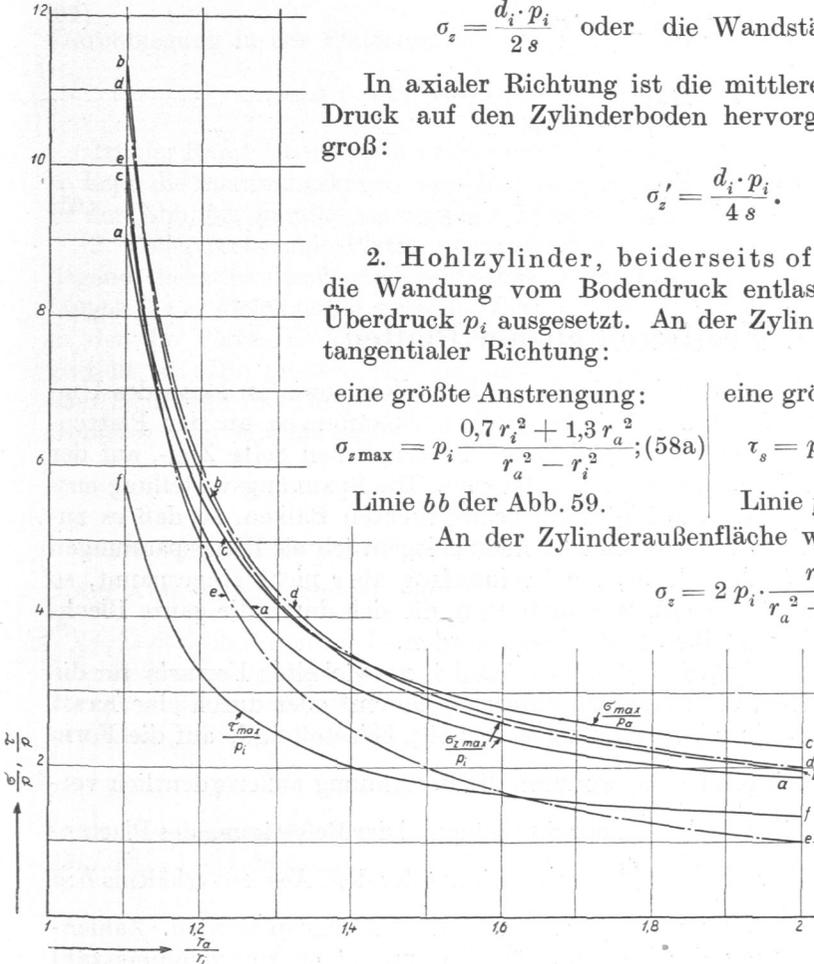


Abb. 60. Hohlzylinder, vom Bodendruck entlastet.

Abb. 59. Zur Berechnung von Hohlzylindern. *a-a* Geschlossene Zylinder, innerem Überdruck ausgesetzt, Formel (55a); *b-b* beiderseits offene Zylinder, innerem Überdruck ausgesetzt, Formel (58a); *c-c* Zylinder, äußerem Überdruck ausgesetzt, Formel (60); *d-d* Zylinder, äußerem Überdruck ausgesetzt, Formel (61); *e-e* Zylinder, innerem Überdruck ausgesetzt, Formel (56); *f-f* Zylinder, innerem Überdruck ausgesetzt, Formeln (55b) und (58b).

Berechnungsbeispiel. An einem Zylinder nach Abb. 60 von 200 mm lichtem und 300 mm äußerem Durchmesser, also mit $\frac{r_a}{r_i} = \frac{150}{100} = 1,5$, für 400 at Betriebsdruck bestimmt, gibt die zur Abszisse 1,5 gehörige Ordinate der Linie *bb*, Abb. 59, $\frac{\sigma_{z \max}}{p_i} = 2,90$ oder $\sigma_{z \max} = 2,90 \cdot 400 = 1160 \text{ kg/cm}^2$ als größte Anstrengung, während Linie *ff* zu $\tau_s = 1,8 \cdot 400 = 720 \text{ kg/cm}^2$ größter Schubspannung führt.

Zum Vergleich sind in der strichpunktierten Linie ee die Werte der Näherungsgleichung (56) aufgetragen. Die Kurve verläuft bei größerem Verhältnis von $\frac{r_a}{r_i}$ weit unter den Linien a und b und kennzeichnet dadurch die bedeutende Unterschätzung der Anstrengung bei der Anwendung der Näherungsformel (56) auf starkwandige Zylinder. (Im voranstehenden Beispiel würden sich nur 800 kg/cm^2 Zugspannung ergeben.)

3. Geschlossener Hohlzylinder, äußerem Überdruck p_a ausgesetzt. Maßgebend ist die Tangentialspannung an der Innenfläche, solange nicht ein Einknicken der Wandung zu erwarten ist.

$$\sigma_d = \frac{1,7 \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a, \quad (60)$$

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k}{k - 1,7 p_a}}$$

Bei kleinem s darf

$$\sigma_d = \frac{d_a \cdot p_a}{2s}, \quad s = \frac{d_a \cdot p_a}{2 \cdot k} \quad (61)$$

gesetzt werden.

XIII. Festigkeit ebener Platten.

Die Belastung erzeugt eine räumliche Wölbung. An vollen, sowie an längs des Umfanges eingespannten Platten treten dabei die größten Spannungen an der Plattenoberfläche in radialer Richtung auf, derart, daß auf der erhabenen Seite Zug-, auf der vertieften Seite gleich große Druckspannungen entstehen. Die Spannungsverteilung entspricht also derjenigen an geraden, auf Biegung beanspruchten Balken, so daß es zulässig erscheint, die radialen Spannungen im folgenden gelegentlich als Biegespannungen zu bezeichnen. Ist die Platte durchlocht, am Lochumfang aber nicht eingespannt, so können die dort entstehenden tangentialen Spannungen, die sich durch die ganze Blechstärke hindurch gleichmäßig verteilen, maßgebend werden.

Ensslin [I, 13, 14] hat gezeigt, daß sich die ziemlich verwickelten Formeln für die Spannungen in ebenen Platten, die gleichmäßig durch $p \text{ kg/cm}^2$ oder durch eine Kraft von $P \text{ kg}$, gleichmäßig längs eines Kreisumfanges verteilt, belastet sind, auf die Form $\sigma = \varphi \cdot p \cdot \frac{r_a^2}{s^2}$ oder $\sigma = \varphi \cdot \frac{P}{s^2}$ bringen lassen, wodurch die Berechnung außerordentlich vereinfacht wird. Der Beiwert φ ist von der Art der Stützung und der Befestigung des Plattenrandes, sowie vom Halbmesserverhältnis $\frac{r_i}{r_a}$ kreisförmiger oder dem Achsenverhältnis $b:a$ länglicher Platten abhängig und kann den Abb. 65 und 72 entnommen werden. Zahlenwerte zur genauen Aufzeichnung der Kurven, sämtlich mit einer Querdehnungszahl $m = \frac{10}{3}$ berechnet, geben die beigefügten Zusammenstellungen.

Wie bei den Gefäßen können Rücksichten auf Abnutzung, Herstellung, Versand und Aufstellung größere Stärken notwendig machen als sich rechnermäßig ergeben.

A. Kreisförmige Platten.

1. Ebene, kreisrunde, am Umfang aufliegende Scheibe, gleichmäßig mit $p \text{ kg/cm}^2$ belastet, Abb. 61. Nach dem Verlauf der Radialspannungen, den die Linie $I-I$ der Abb. 63 wiedergibt, tritt die größte Biegespannung in der Plattenmitte auf. Sie beträgt

$$\sigma = \pm 1,24 p \cdot \frac{r_a^2}{s^2} \quad (62)$$

und sucht den Bruch längs eines Durchmessers zu erzeugen. Die Durchbiegung, die die Scheibe in der Mitte erfährt, ist

$$\delta = 0,7 p \cdot \frac{r_a^4}{s^3} \cdot \alpha. \quad (63)$$

2. Ebene, kreisrunde, am Umfang vollkommen eingespannte Platte, gleichmäßig mit p kg/cm² belastet, Abb. 62. Die größte Spannung tritt nach der Linie *II II* der Abb. 63 am eingespannten Umfang in radialer Richtung auf, sucht also einen Randraiß hervorzubringen. Sie ist

$$\sigma = \pm 0,75 \cdot p \cdot \frac{r_a^2}{s^2}. \quad (64)$$

Durchbiegung in der Plattenmitte:

$$\delta = 0,17 \cdot p \cdot \frac{r_a^4}{s^3} \cdot \alpha. \quad (65)$$

Ist der Rand einer Platte nicht vollkommen eingespannt, so liegt die Spannungskurve zwischen den Linien *I I* und *II II* der Abb. 63, parallel zu diesen verschoben.

3. Volle, kreisrunde Platte, am äußeren Umfange frei aufliegend, belastet durch eine zentrische, längs des Kreisumfanges $2\pi r_i$ gleichmäßig verteilte Last von P kg, Abb. 64, in der die Platte halb durchschnitten, perspektivisch dargestellt ist. Die größten Radialspannungen an der Plattenoberfläche und die Tangentialspannungen sind innerhalb des Gebietes vom Halbmesser r_i gleich groß:

$$\sigma = \varphi_1 \cdot \frac{P}{s^2}. \quad (66)$$

φ_1 kann in Abhängigkeit vom Verhältnis der Halbmesser $\frac{r_i}{r_a}$ der Abb. 65 entnommen werden.

4. Zentrisch durchbrochene, kreisrunde Platte, Abb. 66, am äußeren und inneren Umfang vollkommen eingespannt, durch gleichmäßig verteilte Lasten P längs der Umfänge $2\pi r_i$ und $2\pi r_a$ belastet. Einer der Umfänge sei gestützt, der andere in der Lastrichtung beweglich. Die größten Biegespannungen

$$\sigma_i = \pm \varphi_2 \frac{P}{s^2} \quad (67)$$

treten am inneren Umfange in radialer Richtung auf und können an Hand der Kurve φ_2 , Abb. 65, ermittelt werden. Am äußeren Umfange ist

$$\sigma_a = \pm \varphi_3 \frac{P}{s^2}. \quad (68)$$

5. Eine zentrisch durchbrochene Kreisplatte, Abb. 67, am äußeren und inneren Umfange vollkommen eingespannt, am äußeren gestützt, trägt gleichmäßig verteilte Oberflächenlast von p kg/cm². Größte Biegespannung am äußeren Umfange

$$\sigma_a = \pm \varphi_4 \frac{p \cdot r_a^2}{s^2}, \quad (69)$$

während am inneren

$$\sigma_i = \pm \varphi_5 p \cdot \frac{r_a^2}{s^2} \quad (70)$$

herrscht, beide in radialer Richtung wirkend.

6. Platte, wie laufende Nummer 5, aber längs des inneren Umfanges gestützt, Abb. 68. Die größte Biegespannung am inneren Umfange wird

$$\sigma_i = \pm \varphi_6 \cdot p \cdot \frac{r_a^2}{s^2}. \quad (71)$$

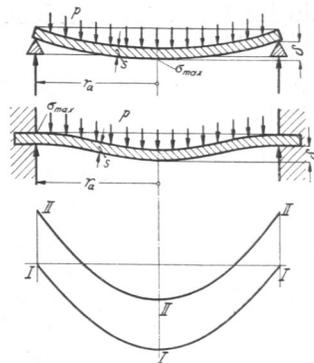


Abb. 61—63. Spannungsverteilung an kreisrunden, am Umfang frei aufliegenden, (*I—I*) und eingespannten Platten (*II—II*).

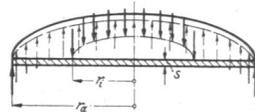


Abb. 64.

7. Zentrisch durchbrochene, kreisförmige Platte, am äußeren oder inneren Umfange durch eine gleichmäßig verteilte Randlast P belastet, am anderen frei gestützt, Abb. 69. Die größte, tangential gerichtete Umfangsspannung am Lochrande ist

$$\sigma = \varphi_7 \frac{P}{s^2}; \tag{72}$$

sie wird bei kleinem r_i rund doppelt so groß wie in der vollen, in der gleichen Weise belasteten Platte laufende Nummer 3. Durch eine selbst kleine zentrische Bohrung wird die im Fall 3 vorhandene Radialspannung Null, die Tangentialspannung dagegen verdoppelt!

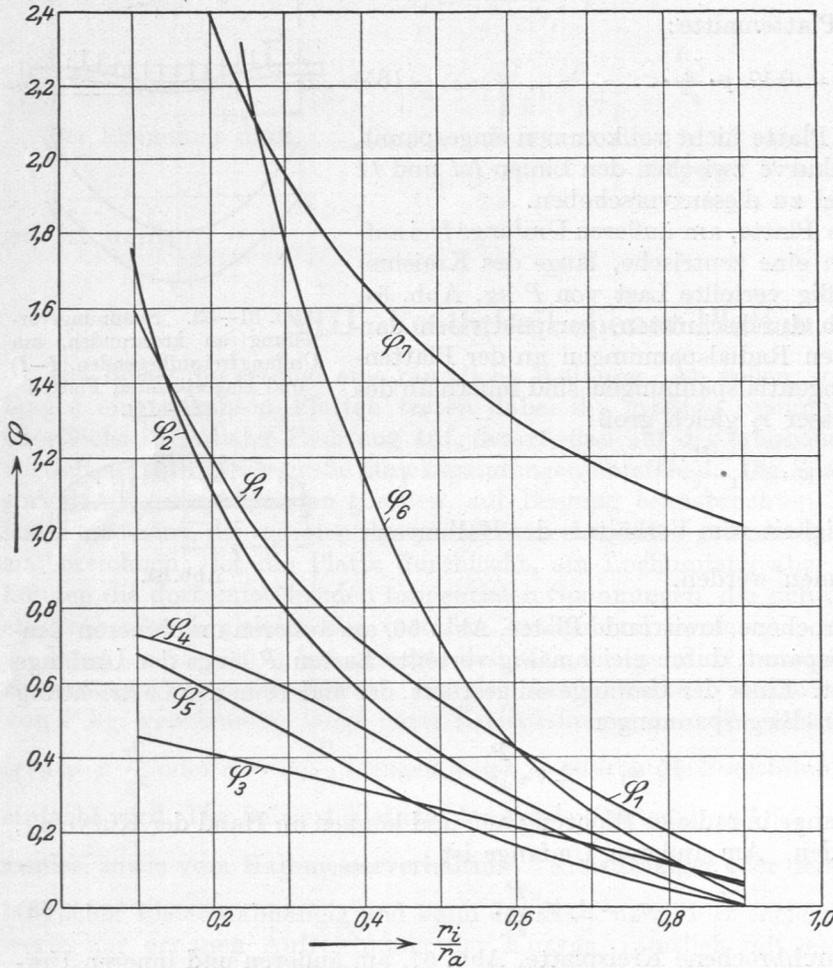


Abb. 65. Werte φ zur Berechnung ebener, kreisrunder Platten nach Ensslin.

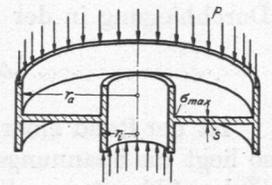


Abb. 66.

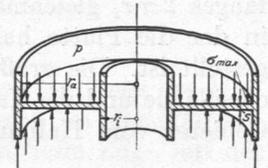


Abb. 67.

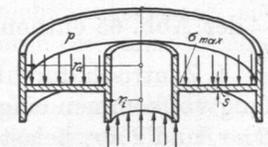


Abb. 68.

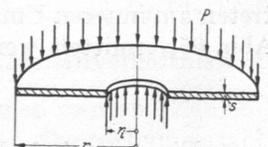


Abb. 69.

An flußeisernen, vollen und durchlochten kreisförmigen Platten hat Ensslin durch Messen der Durchbiegungen nachgewiesen, daß die Formeln gut mit der Wirklichkeit übereinstimmen, solange die bei ihrer Ableitung vorausgesetzte Verhältnigleichheit zwischen Spannungen und Formänderungen vorhanden ist.

Ein viel benutztes Näherungsverfahren zur Berechnung ebener Platten hat Bach angegeben. Man denke sich beispielweise eine kreisförmige, gleichmäßig belastete und am Rande frei aufliegende Platte, Abb. 70 oben, in ihrem gefährlichen Querschnitt, nämlich längs eines Durchmessers, eingespannt und durch die äußere Belastung und die Auflagerkräfte auf Biegung beansprucht. In der darunter stehenden Abbildung sind diese Kräfte zu ihren, ein Kräftepaar bildenden Mittelkräften zusammengefaßt. Die

Zusammenstellung 13. Werte φ zur Berechnung ebener kreisrunder Platten nach Ensslin.

$r_i : r_a =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
φ_1	1,59	1,207	0,89	0,702	0,55	0,422	0,307	0,197	0,097
φ_2	1,75	1,125	0,79	0,565	0,407	0,282	0,194	0,115	0,047
φ_3	0,455	0,413	0,365	0,308	0,259	0,200	0,157	0,101	0,058
φ_4	0,727	0,67	0,58	0,47	0,36	0,248	0,15	0,07	0
φ_5	0,687	0,579	0,46	0,347	0,245	0,161	0,088	0,041	0
φ_6	4,73	2,805	1,79	1,154	0,712	0,412	0,268	0,12	0,015
φ_7	3,22	2,405	1,96	1,673	1,468	1,316	1,183	1,096	1,006

obere wirkt im Schwerpunkt der halbkreisförmigen Belastungsfläche, die untere in demjenigen der Halbkreislinie, längs welcher die Platte aufliegt. Die auf der Grundlage abgeleiteten Formeln haben die gleiche Form wie die oben angeführten:

$$\sigma = \varphi_0 \cdot p \cdot \frac{r^2}{s^2}, \tag{73}$$

wobei φ_0 als eine durch Versuche zu ermittelnde Berichtigungszahl aufzufassen ist, die wieder von der Art der Stützung, der Befestigung der Plattenränder, sowie vom Werkstoff abhängig ist. Nach solchen Versuchen von Bach kann φ_0 an gußeisernen Scheiben zu 1,2 bis 0,8 angenommen werden, je nachdem, ob die Stützung dem freien Aufliegen oder dem Eingespanntsein näher liegt. Bei zähem Flußeisen fand sich φ_0 , wenn die Platte frei auflag, gleich 0,75 bis 0,67, wenn dagegen die Scheibe am Rande eingespannt war und sich die größte Spannung am Scheibenrande ausbildete, gleich 0,5 bis 0,45.

Daß die erwähnte Berechnung nur eine angenäherte sein kann, geht aus der Betrachtung der Formänderungen, die die Scheiben erleiden, hervor. Durch die Belastung nehmen sie eine räumlich gewölbte Gestalt an, wobei sich auch die Form des gefährlichen Querschnittes ändert, also nicht, wie in der Ableitung an Hand der Abb. 70 vorausgesetzt ist, erhalten bleibt.

Stark gewölbte Platten, die wegen der gleichmäßigeren Inanspruchnahme des Baustoffes — entweder nur auf Druck oder nur auf Zug — vorteilhafter als ebene Platten sind, darf man in erster Annäherung als Teile von Zylindern oder Kugeln auffassen und unter sorgfältiger Einschätzung der Nebenwirkungen nach den Formeln für Gefäßwände berechnen. Einiges Nähere siehe unter Berechnung von Deckeln.

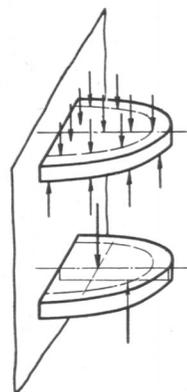


Abb. 70. Zur Berechnung ebener Platten nach Bach.

B. Elliptische und rechteckige Platten.

1. Elliptische Platte, mit einer großen Halbachse a , einer kleinen b , am Umfange vollkommen eingespannt, durch eine gleichmäßig verteilte Last von p kg/cm² belastet, Abb. 71. Größte Biegespannungen am eingespannten Rande in Richtung der kleinen Achse

$$\sigma = \pm \varphi_8 \cdot p \cdot \frac{b^2}{s^2}. \tag{74}$$

φ_8 ist der Abb. 72 oder der umstehenden Zusammenstellung zu entnehmen. In der Mitte der Platte herrscht in der gleichen Richtung

$$\sigma' = \pm \varphi_9 \cdot p \cdot \frac{b^2}{s^2}, \text{ senkrecht dazu } \sigma'' = \mp \varphi_{10} \cdot p \cdot \frac{b^2}{s^2}. \tag{75}$$

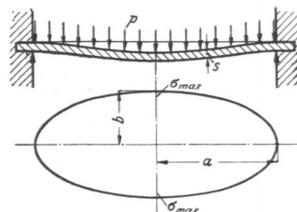


Abb. 71.

2. Elliptische Platte, wie unter Nummer 8, aber am Rande frei aufliegend, Abb. 73. Größte Biegespannung in der Plattenmitte

$$\sigma = \pm \varphi_{11} \cdot p \cdot \frac{b^2}{s^2}. \tag{76}$$

3. Rechteckige Platte mit den Seitenlängen $2a$ und $2b$ ($a > b$), am Rande frei aufliegend, gleichmäßig durch p kg/cm² belastet, Abb. 74. Größte Biegespannung in der Plattenmitte in Richtung der kleinen Achse

$$\sigma = \pm \varphi_{12} \cdot p \cdot \frac{b^2}{s^2} \tag{77}$$

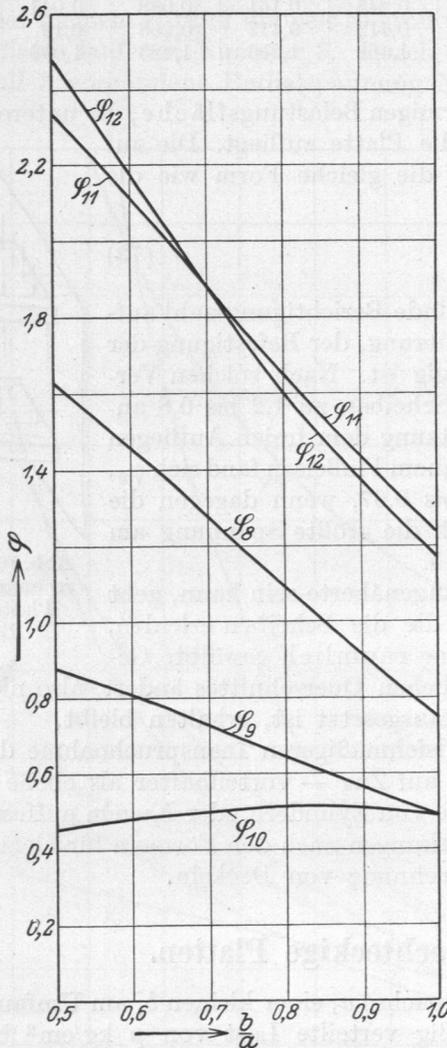


Abb. 72. Werte φ zur Berechnung elliptischer und rechteckiger Platten.

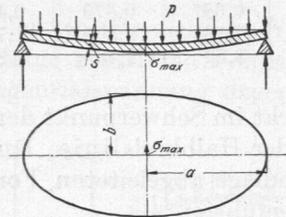


Abb. 73.

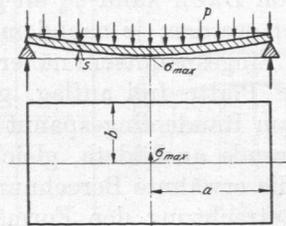


Abb. 74.

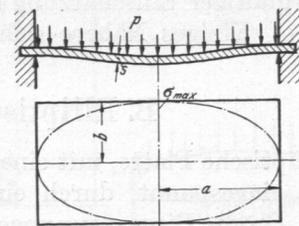


Abb. 75.

Zusammenstellung 14. Beiwerte zur Berechnung ebener elliptischer und rechteckiger Platten nach Ensslin.

$b : a$	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
φ_8	2	1,63	1,46	1,28	1,09	0,91	0,75
φ_9	1	0,875	0,81	0,732	0,648	0,566	0,488
φ_{10}	0,3	0,448	0,482	0,5	0,513	0,506	0,488
φ_{11}	3	2,34	2,12	1,89	1,65	1,44	1,24
φ_{12}	3	2,485	2,18	1,89	1,61	1,37	1,17

Für eine vollkommen eingespannte, gleichmäßig belastete, rechteckige Platte, Abb. 75, ist keine brauchbare Lösung bekannt. Ensslin empfiehlt, die größte Beanspruchung der Scheibe in der Mitte in erster Annäherung nach den Formeln für elliptische Platten zu berechnen. Die so ermittelte Biegebeanspruchung dürfte etwas zu niedrig ausfallen.