auf den Mond*) ein, wenn er in die Ebene AZ_aB tritt und zu gleicher Zeit auch in B, so befindet sich der beobachtete Mondort offenbar in der auf dem Horizont von B nicht senkrechten Ebene. Liegen nun zwei Orte A und B auf einem Rotationsellipsoid von bekannten Dimensionen, so geht eine in A unter dem Azimut a_{ab} gelegte Ebene auch durch den Punkt B. Wenn wir nun die in A eingestellten Durchgänge des Mondes durch Ebene AZ_aB in B gleichzeitig mit einem Universale beobachten würden, dessen Alhidadenaxe nicht lotrecht, sondern gegen die Vertikale um den Winkel n_b geneigt ist und dessen horizontale, auf der Alhidadenaxe senkrechte Visierlinie nach einem Punkte mit dem Azimut a'_{ba} weist, so sollten alle in A stattfindenden Durchgänge in demselben Zeitmomente in dem Instrument in B sichtbar sein, ohne dass es nötig wäre mit dem Fernrohre eine andere als eine kippende Bewegung zu machen.

Befinden sich dagegen A und B nicht auf dem vorausgesetzten Ellipsoid, so dass die unter dem gerechneten Azimut a_{ab} gelegte Ebene nicht durch B geht, so muss, um die gleichen Zeitmomente in B wie A aufzufassen, das Fernrohr in B um seine Alhidadenaxe gedreht werden und zwar um Beträge, welche verschieden sind 1. je nach der Uebereinstimmung der vorausgesetzten und wahren Erdgestalt und 2. je nach Zenitdistanz und Entfernung des Mondes in Bezug auf Punkt B.

3. Lösung des Problems. Wir stellen zuerst die Hauptrelation auf. In der Figur 6 ist HB der Horizont, BZ_b das Lot, BG die Spur der Ebene AZ_aB, M_1 der Ort des Mondes in dieser Ebene wie er in demselben Augenblick in A und B beobachtet wurde. Wir denken uns nun durch diesen momentanen Ort M_1 eine Kugel mit B als Mittelpunkt

*) Sollte genauer heissen: auf einen Punkt der Mondscheibe. Wir behalten die ungenaue Bezeichnung der Kürze wegen bei.

und legen durch BZ_b eine Ebene senkrecht zu AZ_aB; die Schnittlinie beider sei BZ'_b. Diese beiden Ebenen im Verein mit der Lot-Ebene durch M_1, d. i. BM_1Z_b bilden ein Dreikant und auf der Kugel ein bei Z'_b rechtwinkliges sphärisches Dreieck. In demselben ist Bogen $Z_bZ'_b = n_b$, $Z_bM_1 = z_1$ die beobachtete Zenitdistanz, während Winkel $Z'_bZ_bM_1 = 90^0 - (a_1 - a'_{ba})$, weil Ebene $Z_bZ'_bB$ senkrecht zu GB. Also

$$17) \qquad \sin (a_1 - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z_1}$$

Wenn wir nun den Mond ein anderes Mal bei seinem Durchgange durch die Ebene AZ_aB in B beobachten, so wird seine Entfernung eine andere geworden sein; legen wir aber wieder um B als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius BM_2, so geben die entsprechenden Ebenen ein sphärisches Dreieck, aus dem folgt

$$\sin (a_2 - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z_2}$$

Alle Beobachtungen in B, angestellt in den zugehörigen Sternzeiten in A, müssen das gleiche n_b liefern, wenn A und B auf dem vorausgesetzten Rotations-Ellipsoid liegen. Sei nun der Figur 6 B der ellipsoidisch angenommene Ort, B' der wahre. Vom letzteren aus wurde der Mond in M_1, $M_2 \cdots$ beobachtet. Die abgelesenen Azimute a'_1, $a'_2, \cdots$ differieren gegen jene a_1, a_2, $\cdots$ in B. Da die Horizonte der Orte B' und B parallel sein müssen, dürfen wir vorläufig alles in der Ebene HB liegend annehmen und die Untersuchung der Verschiebung von B' längs des Lotes einstweilen ausser Acht lassen. Da nun

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1 - a'_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2 - a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

— ε der Winkel der Verbindungslinien der Horizontalprojektion von M mit B und B' — so liessen sich schon aus zwei der vorliegenden Beobachtungen die Polarkoordinaten a und e der Projektion des wahren Orts auf den Horizont des ellipsoidischen bestimmen, wenn die a_1, a_2,… bekannt wären. Es ist nämlich $BM_1 = \frac{1}{\sin p'_1} = \Delta_1$ gesetzt:

$$18)\quad \begin{aligned} e \sin(a - a'_1) &= \Delta_1 \sin z_1 \sin \varepsilon_1 = c_1 \\ e \cdot \sin(a - a'_2) &= \Delta_2 \cdot \sin z_2 \cdot \sin \varepsilon_2 = c_2 \end{aligned}$$

Daher

$$\operatorname{tg}\left(a - \frac{a'_1 + a'_2}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{a'_2 - a'_1}{2} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}$$

$$e = \sec M : c_2$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{c_1 - c_2 \cos(a'_2 - a'_1)}{c_2 \sin(a'_2 - a'_1}$$

Die a_1, a_2, … könnten aus den Mondephemeriden entnommen werden, da ihre Beobachtungszeiten bekannt sind. Wir wollen jedoch hier einen andern Weg einschlagen, welcher gestattet, unsere in A erhaltenen Koordinaten des Mondes unmittelbar zu verwerten.

In Figur 7 ist AZ_aBM die Beobachtungsebene in A, $Z_bZ'_b = n_b$, das Viereck AK'_aBM also eben. Da wir die a_b und z_b kennen lernen wollen, welche in dem ellipsoidischen Ort B beobachtet worden wären, so sind als bekannt anzunehmen: die Sehne k, der Depressionswinkel μ_{ab} und der Winkel ω_{ba} zwischen Sehne und dem Schnitt der Ebene AZ_aB mit dem Meridian von B nach Formel 8 oder 9 S. 6.

Da wir die in A beobachteten Azimute und damit auch die Zenitdistanzen z_a (s. S. 25 u. f) zunächst als fehlerfrei voraussetzen wollen, so liesse sich, wenn Δ_a ebenfalls genau bekannt wäre, zu jeder Zenitdistanz z_a die zugehörige z_b und somit nach Gl (17) auch das entsprechende Azimut des Mondes angeben. Nämlich

$$\sin m = \frac{k}{\varDelta_a} \cos (z_a - \mu_{ab})$$

$$19) \qquad z'_b = 90 + \mu_{ab} - \omega_{ba} + m - z_a$$

$$\cos z_b = \cos z'_b \cdot \cos n_b$$

— die Indices a und b bezeichnen die Zugehörigkeit zum betreffenden Orte, während die gleichartigen Grössen eines Ortes durch Ziffern unterschieden sind (i der allgemeine Repräsentant sämmtlicher Ziffern).

Von den stets in überschüssiger Zahl vorhandenen Gl. (18) liefert jede bei Annahme gleicher Gewichte eine Fehlergleichung von der Form

$$\sin (a - a_i) \cdot de + e \cos (a - a_i) \cdot da + l_i = 0.$$

Es handelt sich noch um die Verschiebung von B' längs des Lotes. Sie findet sich, wenn z_i die gerechnete, z'_i die beobachtete Zenitdistanz ist, aus eben so viel Gl. wie oben, lautend

$$h = \frac{\varDelta_b \cdot \sin (z_i - z'_i)}{\sin z_i}$$

Obwohl nun der lineare Betrag derselben senkrecht zur Sehne ungefähr der gleiche wie der horizontale ($e \cdot \sin a$) sein dürfte, kann derselbe doch kaum konstatiert werden, weil in dem Dreieck, dem die Gl. entnommen, eine Seite immer gleich der Entfernung des Mondes vom Orte ist; es bleibt daher h ganz unbestimmt.

Da nun die Sehne k nach der ellipsoidischen Annahme genau bekannt ist und die zwei Koordinaten e und $\sphericalangle a$ die Lage des wahren Orts im Horizont des angenommenen festlegen, so ergiebt sich zunächst der Winkel zwischen der Sehne und Linie e, hiemit die weiteren Bestimmungsstücke des Dreiecks mit den Seiten e, wahre und ellipsoidische Sehne; daraus folgt a_{ab} genähert, wenn auch h unbekannt bleibt. Es ist nach Helmert, h. G. Bd. I S. 190, wenn $\overset{h}{a}_{ab} - a_{ab}$ die Azimutaldifferenz für die von A ausgehenden Ebenen bezeichnet, welche durch B' und den im Lot von B' um h verschobenen Punkt gehen, für $h = 1280$, bz. 1920 m in Maximo

$$a_{ab}^{h} - a_{ab} = 0\overset{''}{,}14 \text{ bz. } \cdot 0\overset{''}{,}21.$$

4. **Wirkung eines Fehlers der Horizontalparallaxe.** Es fragt sich zunächst, welchen Fehler ein den Ephemeriden zu entnehmender Wert für Δ_a, welcher unter einer ellipsoidischen Annahme aus dem geozentrischen gerechnet ist, in den Gl. 19 involviert. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung bei allen Erscheinungen, welche von der Mondparallaxe abhängen, weisen darauf hin, dass die Abstände des Geoids vom Sphäroid wenigstens an den uns zugänglichen Stellen einige Zehntausendstel des Erdhalbmessers oder einige Kilometer nicht übersteigen können (vergl. Bruns, die Figur der Erde S. 32). Es wird also $\Delta_i \sin z_i$, wenn wir von der allerunmittelbarsten Nähe des Zenits absehen, stets sehr gross sein gegenüber e, und das ist wesentlich zum Gelingen, weil u. a. auch der Einfluss einer falschen Reduktion vom geozentrischen Δ'_a zu demjenigen des Orts verschwindet.

Zunächst besteht zwischen einem Fehler in Δ_b wegen eines solchen in Δ_a die Beziehung

$$d\Delta_b = \left\{\frac{\Delta_a}{\Delta_b} - \frac{k \sin(z_a - \mu_{ab})}{\Delta_b}\right\} d\Delta_a$$

hier genügend genau

$$d\Delta_b = d\Delta_a.$$

Der mittleren Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes wird meist eine Unsicherheit von $0\overset{''}{,}5$ beigelegt. Lassen wir diese Zahl zunächst auch für die den Tafeln zu entnehmenden Werte der A. H. P. in einem gegebenen Moment gelten, so ist rund