II. Bestimmung der Winkel n mit Hülfe des Mondes.

1. Einleitung. Der erste Versuch, die Gestalt der Erde aus Beobachtungen des Mondes zu erhalten, rührt von J. A. Euler her. Sein Gedankengang war kurz folgender (vergl. die Abhandlungen der Bayer. Akademie der Wissenschaften Bd. V 1768): Der Mond wird von mehreren Stationen eines Meridianes aus bei seiner Kulmination beobachtet. Die Polhöhen müssen bekannt sein; ihre Komplemente heissen φ, während ψ die aus der Beobachtung erhaltenen Winkel zwischen den Visierlinien nach dem Monde und den Parallelen zur Erdaxe darstellen. „Eine aufmerksame Vergleichung dieser beiden Werte von φ und ψ paarweis genommen kann leicht zeigen, wie dieser Winkel ψ von jenem φ abhängt: das ist, man wird nicht ohne grosse Mühe diejenige Gleichung erraten können, welche auf eine allgemeine Art zwischen diesen beiden Winkel ψ und φ stattfinden müsste, zumal die Figur der Erde schon einigermassen bekannt ist."

Aus Figur 5, wo $GB = g$, $Bx = x$, $MG = h$, $GK = y$ gesetzt ist, nimmt Euler die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h - y}{g + x}$$

$$dx = dy \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Um aus der Differentialgleichung das Integral $\int d\psi \frac{\sin \omega}{\cos \omega}$ zu eliminieren ($\omega = \psi - \varphi$), nimmt er beispielsweise an, die Vergleichung der Winkel ψ und φ hätte zur Gleichung

$$\sin (\psi - \varphi) = n \sin (\psi - \alpha)$$

geführt, wobei n und α offenbar Konstante bedeuten und leitet damit kreisförmige Meridiane ab. Aus der Abhandlung folgt also, dass der Zusammenhang zwischen ψ und φ nicht der eben vorausgesetzt einfache sein kann.

Ehe wir weitergehen muss Eulers Standpunkt noch näher präcisiert werden. Er versuchte die Figur der Erde im Allgemeinen zu bestimmen und begnügte sich mit der Ermittelung eines Meridianes, „was ausreicht, wenn sonsten die Figur der Erde nicht gar zu unordentlich ist“. Seitdem ist es zur Gewissheit geworden, dass die Erde nicht der regelmässige Körper sein kann, für den sie so lange gehalten wurde.

Wenn man daher jetzt von der Benützung des Mondes zur Bestimmung der Erdgestalt im Detail spricht, so kann das nur auf zweierlei hinauslaufen: entweder den Radiusvektor des Beobachtungsortes zu ermitteln („individuelle Horizontalparallaxe“) oder den Winkel zu messen, den das Lot eines Orts mit der Vertikalebene des andern bildet.

Lässt man wie bisher bei der Bestimmung der Mondparallaxe die Hypothese zu, dass alle Lote eines Meridianes die Drehaxe treffen, so ergiebt sich dieselbe aus den Daten zweier Orte, d. i. aus dem ebenen Viereck Schwerpunkt — A — Mond — B. Sowie wir aber über die Erdgestalt keine bestimmte Voraussetzung machen, wird die Linie Schwerpunkt-Ort nicht im Meridian liegen, das Viereck nicht eben sein.

Helmert hat nun die Bestimmung der Parallaxe ohne Annahme einer besonderen Erdgestalt gegeben. Der Uebergang von dem Koordinatensystem mit dem Ursprung im Orte an der Oberfläche zu jenem, welches dem ersten parallel den Ursprung im Schwerpunkt der Erde hat, geschah nach Encke unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungen auf den Axen seien

$$-r \cdot \sin(B - \varphi), \quad 0, \quad -r \cos(B - \varphi)$$

— r Radiusvektor, φ geozentrische Breite —,

während Helmert dafür nimmt

$$r \sin\zeta \cdot \cos\alpha, \quad r \sin\zeta \cdot \sin\alpha, \quad r \cos\zeta$$

worin ζ die Zenitdistanz des geozentrischen Zenits, α dessen Azimut ist. Es werden nun Formeln für $a_1 - a$ und $z_1 - z$ aufgestellt, hierin sind a_1 z_1 beobachtet, a z den Mondtafeln entnommen — und zugleich Verbesserungen für die Tafelwerte des Stundenwinkels und der Deklination angebracht. Es lässt sich nun (vergl. hiezu Helmert, h. G. Bd. II S. 459) der Radiusvektor nur im Verein mit der Unsicherheit der Deklination ermitteln oder indirekt durch das sehr komplizierte Verfahren gleichzeitiger Bestimmung neuer Tafeln aus den betreffenden Beobachtungen, wenn bei der Neubearbeitung die geozentrischen Koordinaten der Station als drei von einander unabhängige Unbekannte eingeführt werden (s. auch das Bruns'sche Referat über Helmert h. G. II. Teil in der Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch. 1885, S. 190).

Wollte man nun in ähnlicher Weise wie oben versuchen, die Unsicherheit der Deklination durch gleichzeitige Beobachtungen zu eliminieren, so erkennt man rasch die Unmöglichkeit, hier neue oder vereinfachende Gesichtspunkte zu finden. Aber es tritt noch eine Schwierigkeit auf — abgesehen von denen der Beobachtung — sowie wir den Mond an zwei Orten eines Meridianes in der Kulmination beobachten, ist die Beobachtungs-Ebene des einen Orts Lotebene für den andern Stellen wir dagegen in A auf den Mond ein, wenn er in Ebene AZ_aB sich befindet, so ist diese Ebene nicht mehr senkrecht auf dem Horizont von B, sondern schliesst mit der Vertikalen den Winkel n_b ein. Dieser Umstand, welcher die allgemeine Bestimmung der Parallaxe erschwert, kommt uns zu gut, weil wir eben diesen Winkel finden wollen.

2. Grundgedanke des Verfahrens. Die Ebenen AZ_aB und BZ_bA sollen mit Hülfe des Mondes fixiert werden. Kennen wir in A das Azimut des Punktes B und stellen auf den Mond*) ein, wenn er in die Ebene AZ_aB tritt und zu gleicher Zeit auch in B, so befindet sich der beobachtete Mondort offenbar in der auf dem Horizont von B nicht senkrechten Ebene. Liegen nun zwei Orte A und B auf einem Rotationsellipsoid von bekannten Dimensionen, so geht eine in A unter dem Azimut a_{ab} gelegte Ebene auch durch den Punkt B. Wenn wir nun die in A eingestellten Durchgänge des Mondes durch Ebene AZ_aB in B gleichzeitig mit einem Universale beobachten würden, dessen Alhidadenaxe nicht lotrecht, sondern gegen die Vertikale um den Winkel n_b geneigt ist und dessen horizontale, auf der Alhidadenaxe senkrechte Visierlinie nach einem Punkte mit dem Azimut a'_{ba} weist, so sollten alle in A stattfindenden Durchgänge in demselben Zeitmomente in dem Instrument in B sichtbar sein, ohne dass es nötig wäre mit dem Fernrohre eine andere als eine kippende Bewegung zu machen.

Befinden sich dagegen A und B nicht auf dem vorausgesetzten Ellipsoid, so dass die unter dem gerechneten Azimut a_{ab} gelegte Ebene nicht durch B geht, so muss, um die gleichen Zeitmomente in B wie A aufzufassen, das Fernrohr in B um seine Alhidadenaxe gedreht werden und zwar um Beträge, welche verschieden sind 1. je nach der Uebereinstimmung der vorausgesetzten und wahren Erdgestalt und 2. je nach Zenitdistanz und Entfernung des Mondes in Bezug auf Punkt B.

3. Lösung des Problems. Wir stellen zuerst die Hauptrelation auf. In der Figur 6 ist HB der Horizont, BZ_b das Lot, BG die Spur der Ebene AZ_aB, M_1 der Ort des Mondes in dieser Ebene wie er in demselben Augenblick in A und B beobachtet wurde. Wir denken uns nun durch diesen momentanen Ort M_1 eine Kugel mit B als Mittelpunkt

*) Sollte genauer heissen: auf einen Punkt der Mondscheibe. Wir behalten die ungenaue Bezeichnung der Kürze wegen bei.

und legen durch BZ_b eine Ebene senkrecht zu AZ_aB; die Schnittlinie beider sei BZ'_b. Diese beiden Ebenen im Verein mit der Lot-Ebene durch M_1, d. i. BM_1Z_b bilden ein Dreikant und auf der Kugel ein bei Z'_b rechtwinkliges sphärisches Dreieck. In demselben ist Bogen $Z_bZ'_b = n_b$, $Z_bM_1 = z_1$ die beobachtete Zenitdistanz, während Winkel $Z'_bZ_bM_1 = 90^0 - (a_1 - a'_{ba})$, weil Ebene $Z_bZ'_bB$ senkrecht zu GB. Also

$$17) \qquad \sin(a_1 - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z_1}$$

Wenn wir nun den Mond ein anderes Mal bei seinem Durchgange durch die Ebene AZ_aB in B beobachten, so wird seine Entfernung eine andere geworden sein; legen wir aber wieder um B als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius BM_2, so geben die entsprechenden Ebenen ein sphärisches Dreieck, aus dem folgt

$$\sin(a_2 - a'_{ba}) = \frac{tg\, n_b}{tg\, z_2}$$

Alle Beobachtungen in B, angestellt in den zugehörigen Sternzeiten in A, müssen das gleiche n_b liefern, wenn A und B auf dem vorausgesetzten Rotations-Ellipsoid liegen. Sei nun der Figur 6 B der ellipsoidisch angenommene Ort, B' der wahre. Vom letzteren aus wurde der Mond in M_1, $M_2 \cdot\cdot$ beobachtet. Die abgelesenen Azimute $a'_1, a'_2, \cdots$ differieren gegen jene $a_1, a_2, \cdots$ in B. Da die Horizonte der Orte B' und B parallel sein müssen, dürfen wir vorläufig alles in der Ebene HB liegend annehmen und die Untersuchung der Verschiebung von B' längs des Lotes einstweilen ausser Acht lassen. Da nun

$$\varepsilon_1 = a_1 - a'_1$$
$$\varepsilon_2 = a_2 - a_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$-\varepsilon$ der Winkel der Verbindungslinien der Horizontalprojektion von M mit B und B' — so liessen sich schon aus zwei der vorliegenden Beobachtungen die Polarkoordinaten a und e der Projektion des wahren Orts auf den Horizont des ellipsoidischen bestimmen, wenn die a_1, a_2, $\cdots$ bekannt wären. Es ist nämlich $BM_1 = \frac{1}{\sin p'_1} = \varDelta_1$ gesetzt:

$$18) \quad \begin{aligned} e \sin (a - a'_1) &= \varDelta_1 \sin z_1 \sin \varepsilon_1 = c_1 \\ e \cdot \sin (a - a'_2) &= \varDelta_2 \cdot \sin z_2 \cdot \sin \varepsilon_2 = c_2 \end{aligned}$$

Daher

$$\operatorname{tg} \left(a - \frac{a'_1 + a'_2}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{a'_2 - a'_1}{2} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}$$

$$e = \sec M : c_2$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{c_1 - c_2 \cos (a'_2 - a'_1)}{c_2 \sin (a'_2 - a'_1}$$

Die a_1, a_2, ... könnten aus den Mondephemeriden entnommen werden, da ihre Beobachtungszeiten bekannt sind. Wir wollen jedoch hier einen andern Weg einschlagen, welcher gestattet, unsere in A erhaltenen Koordinaten des Mondes unmittelbar zu verwerten.

In Figur 7 ist AZ_aBM die Beobachtungsebene in A, $Z_bZ'_b = n_b$, das Viereck AK'_aBM also eben. Da wir die a_b und z_b kennen lernen wollen, welche in dem ellipsoidischen Ort B beobachtet worden wären, so sind als bekannt anzunehmen: die Sehne k, der Depressionswinkel μ_{ab} und der Winkel ω_{ba} zwischen Sehne und dem Schnitt der Ebene AZ_aB mit dem Meridian von B nach Formel 8 oder 9 S. 6.

Da wir die in A beobachteten Azimute und damit auch die Zenitdistanzen z_a (s. S. 25 u. f) zunächst als fehlerfrei voraussetzen wollen, so liesse sich, wenn $\varDelta_a$ ebenfalls genau bekannt wäre, zu jeder Zenitdistanz z_a die zugehörige z_b und somit nach Gl (17) auch das entsprechende Azimut des Mondes angeben. Nämlich

$$\sin m = \frac{k}{\varDelta_a} \cos (z_a - \mu_{ab})$$

19) $$z'_b = 90 + \mu_{ab} - \omega_{ba} + m - z_a$$

$$\cos z_b = \cos z'_b \cdot \cos n_b$$

— die Indices a und b bezeichnen die Zugehörigkeit zum betreffenden Orte, während die gleichartigen Grössen eines Ortes durch Ziffern unterschieden sind (i der allgemeine Repräsentant sämmtlicher Ziffern).

Von den stets in überschüssiger Zahl vorhandenen Gl. (18) liefert jede bei Annahme gleicher Gewichte eine Fehlergleichung von der Form

$$\sin (a - a_i) \cdot de + e \cos (a - a_i) \cdot da + l_i = 0.$$

Es handelt sich noch um die Verschiebung von B' längs des Lotes. Sie findet sich, wenn z_i die gerechnete, z'_i die beobachtete Zenitdistanz ist, aus eben so viel Gl. wie oben, lautend

$$h = \frac{\varDelta_b \cdot \sin (z_i - z'_i)}{\sin z_i}$$

Obwohl nun der lineare Betrag derselben senkrecht zur Sehne ungefähr der gleiche wie der horizontale ($e \cdot \sin a$) sein dürfte, kann derselbe doch kaum konstatiert werden, weil in dem Dreieck, dem die Gl. entnommen, eine Seite immer gleich der Entfernung des Mondes vom Orte ist; es bleibt daher h ganz unbestimmt.

Da nun die Sehne k nach der ellipsoidischen Annahme genau bekannt ist und die zwei Koordinaten e und $\sphericalangle a$ die Lage des wahren Orts im Horizont des angenommenen festlegen, so ergiebt sich zunächst der Winkel zwischen der Sehne und Linie e, hiemit die weiteren Bestimmungsstücke des Dreiecks mit den Seiten e, wahre und ellipsoidische Sehne; daraus folgt a_{ab} genähert, wenn auch h unbekannt bleibt. Es ist nach Helmert, h. G. Bd. I S. 190, wenn $\overset{h}{a}_{ab} - a_{ab}$ die Azimutaldifferenz für die von A ausgehenden Ebenen bezeichnet, welche durch B' und den im Lot von B' um h verschobenen Punkt gehen, für $h = 1280$, bz. 1920 m in Maximo

$$a_{ab}^{h} - a_{ab} = 0\overset{''}{,}14 \text{ bz. } \cdot 0\overset{''}{,}21.$$

4. Wirkung eines Fehlers der Horizontalparallaxe. Es fragt sich zunächst, welchen Fehler ein den Ephemeriden zu entnehmender Wert für Δ_a, welcher unter einer ellipsoidischen Annahme aus dem geozentrischen gerechnet ist, in den Gl. 19 involviert. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung bei allen Erscheinungen, welche von der Mondparallaxe abhängen, weisen darauf hin, dass die Abstände des Geoids vom Sphäroid wenigstens an den uns zugänglichen Stellen einige Zehntausendstel des Erdhalbmessers oder einige Kilometer nicht übersteigen können (vergl. Bruns, die Figur der Erde S. 32). Es wird also $\Delta_i \sin z_i$, wenn wir von der allerunmittelbarsten Nähe des Zenits absehen, stets sehr gross sein gegenüber e, und das ist wesentlich zum Gelingen, weil u. a. auch der Einfluss einer falschen Reduktion vom geozentrischen Δ'_a zu demjenigen des Orts verschwindet.

Zunächst besteht zwischen einem Fehler in Δ_b wegen eines solchen in Δ_a die Beziehung

$$d\Delta_b = \left\{\frac{\Delta_a}{\Delta_b} - \frac{k \sin(z_a - \mu_{ab})}{\Delta_b}\right\} d\Delta_a$$

hier genügend genau

$$d\Delta_b = d\Delta_a.$$

Der mittleren Aequatorial - Horizontal - Parallaxe des Mondes wird meist eine Unsicherheit von $0\overset{''}{,}5$ beigelegt. Lassen wir diese Zahl zunächst auch für die den Tafeln zu entnehmenden Werte der A. H. P. in einem gegebenen Moment gelten, so ist rund

$$\frac{dp}{\sin p} = \frac{1}{7000}$$

und somit der Irrtum in e für

$$e = 7000\, m$$
$$e = \quad 1\, m.$$

Weniger günstig steht es mit $\frac{dm}{dp}$. Aus der ersten der Gl (19) folgt

$$dm = \operatorname{tg} m \cdot \frac{dp}{\sin p},$$

mithin unter obiger Annahme für $m = 1^0$

$$dm = 0{,}''5\,,$$

welcher Fehler ganz in dz'_b und auch in dz_b eingeht; ferner nach Gl. (17)

$$da_i = -\frac{\operatorname{tg} n \cdot \sec(a_i - a'_{ba})}{\sin^2 z_i} \cdot dz_i$$

Setzen wir $n = 12'$, $z_i = 1,\ 5,\ 10^0$, so wird

$$d\varepsilon = da_i = 6'',\ 0{,}''2,\ 0{,}''06.$$

Es bleibt noch $\frac{de}{d\varepsilon}$ zu ermitteln. Hiebei begegnen wir der Schwierigkeit, dass im Nenner des Wertes für e eine ebenfalls von ε abhängige Grösse steht, deren Zusammenhang mit ε nach Gl (18) kein einfacher ist. Wir vernachlässigen denselben. Dass der wahre Ort in der Sehne, bz. Azimutalebene des angenommenen liegt, scheint am leichtesten möglich bei Punkten genähert gleicher Polhöhe, wenn die Kreisform des Parallels schlecht zutrifft, ferner wenn die Lote der Orte einen sehr stumpfen Winkel bilden. (Der letztere Fall ist von selbst ausgeschlossen.)

Zur genäherten Schätzung der Genauigkeit genügt die Gleichung

$$de = e \cdot \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot d\varepsilon.$$

Nehmen wir für ε die Werte, welche die späteren Beispiele liefern (nämlich bei $n = 12'$, $e = 2{,}8$ Km rd) so wird

$$z = 1^0 \qquad de = 200\, m \text{ rd}$$
$$= 5^0 \qquad = 40 \text{ „ „}$$
$$= 10 \qquad = 0 \text{ „ „}$$

Zur Beleuchtung dieser Unsicherheiten bei Entfernungen, wo der Verbindungsbogen $^4/_5$ eines Quadranten beträgt, setzen wir die mittleren Fehler des Quadranten nach Bessels Bestimmungen in dem Astr. N. Nr. 333 und 438 hierher

508,7 bz. 498,23 *m*.

5. Wirkung der Beobachtungsfehler. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn unsere Voraussetzungen sich alle zutreffend erweisen würden. Aber schon die Unsicherheit der Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes nach den Ephemeriden oder Tafeln eines Ortes ist zu gering veranschlagt, allein nach obigen Zahlen stellt eine 2 bis 3 fache Vergrösserung derselben das Gelingen des Verfahrens noch nicht in Frage. Das vermag jedoch die ungenügende Präcision der Mondbeobachtung, welche auch noch in kleinen Zenitdistanzen erfolgen muss. Wenn es daher nicht gelingt nachzuweisen, dass Anomalien der Erdgestalt durch Beobachtungen mit dem erreichbaren Grade der Genauigkeit aufgedeckt werden können, so fällt das ganze Verfahren.

Zuerst einige Bemerkungen über die Ausführung der Beobachtungen. Da die Bewegung des Mondes von einem Orte aus gesehen innerhalb genügend kleiner Intervalle betrachtet eine stetige ist, so denken wir uns die Beobachtung desselben z. B. von A aus in mehreren benachbarten Azimutalebenen ausgeführt. Es kann nun aus den gleichen Beobachtungen sowohl auf ein zwischenliegendes Azimut als auf eine gegebene Zeit interpoliert werden (letzteres entsprechend einer Beobachtung in B in einem bestimmten Azimut), weil die Azimute der Mondörter in den auf dem Horizont nicht senkrechten Ebenen von den Azimuten derselben nicht allzu verschieden sind, und die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte, so lange die Zenitdistanz der Orte kleiner als 90^0, ebenfalls gering bleibt. Wählt man daher die Beobachtungszeiten in geeigneten Intervallen oder die Azimutalebenen der Einstellungen in entsprechenden Abständen, so muss die Stetigkeit in der Bewegung zum Ausdruck kommen und u. a. ein Mittel an die Hand geben, die abgelesenen Koordinaten zu verbessern. Da wir uns überdies den Mond bei seiner Kulmination auch stets beobachtet denken, so vereinfacht sich das Verfahren, weil nun der Stundenwinkel bekannt ist.

Dieser Stundenwinkel ist jedoch nicht fehlerfrei; sein Einfluss auf das abgelesene Azimut muss zunächst ermittelt werden. Aus der Gl.

$$\sin z \cdot da = \cos \delta \cdot dt$$

folgt, da $\cos \delta$ sich nur um 0,1 von der Einheit entfernt, genähert

$$da = \frac{dt}{\sin z}$$

also für $z = 1, 5, 10^0$, wenn wir zugleich bedenken, dass der Fehler im Stundenwinkel sich aus der falschen Auffassung des Durchganges durch den Meridian sowie durch die Azimutalebene zusammensetzt — beide Unsicherheiten gleich gross entnommen *)

$$da = 81\, dt,\ 16\, dt,\ 8\, dt$$

Beobachtungen des Mondet an 5—7 Fäden bei der Kulmination geben mittlere Fehler des arithmetischen Mittels von $0^s\!,04$, also

$$da = 32'',\ 6'',\ 3''.$$

*) Analog wie bei Fixsternbeobachtungen im 1. Vertikal der schiefe Antritt an den Faden bei Anwendung des Chronographen ebenso genau bestimmt wird, wie bei der Registrierung im Meridian, glauben wir beim Monde dasselbe annehmen zu dürfen.

Diese Zahlen im Vergleich mit den weiter unten zu ermittelnden geben zu erkennen, dass, wenn sich die Genauigkeit der Mondbeobachtungen nicht erhöhen lässt, selbst in den günstigst gelagerten Fällen zweifelhafte Resultate zu Tage gefördert werden müssen.

Ob sich eine Steigerung der Sicherheit bei Beobachtungen mit dem Universaltransit erreichen lässt, vermag Verfasser nicht zu beurteilen, da ihm keine derartigen Versuchsreihen vorliegen. Gewichtige Stimmen sprechen sich dagegen aus. Vergl. die Verhandlungen der Permanenten Kommission für die Internationale Erdmessung zu Nizza 1887 S. 66—67 den Bericht Försters als Referent über die Verwertung der Mondbeobachtungen im Interesse der Geodäsie.

6. Die zu erwartenden Azimutalabweichungen. In Betreff der Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche verweisen wir auf Helmerts Bericht über Lotabweichungen in den eben genannten Verhandlungen der P. K. f. d. J. E. Hier sei nur hervorgehoben, dass selbst die Dimensionen des Clarke'schen Ellipsoids von 1880, die man gegenwärtig für die besten halten muss, wie die Kreisform überhaupt der Krümmung des Parallels stellenweise nur mit geringer Annäherung entspricht.

Die Grösse, welche zur Entdeckung der Anomalien führt, ist ε, der Unterschied zwischen ellipsoidisch gerechnetem und beobachtetem wahrem Azimut. Dieser Winkel wird um so merklicher, in je kleineren Zenitdistanzen die Beobachtung geschehen kann. Um uns eine geeignete Vorstellung zu verschaffen, folgen drei Beispiele. Es wurde bei diesen angenommen, dass zwei beliebig auf der Erdoberfläche herausgegriffene Orte beigegebener grosser Axe Rotations-Ellipsoide mit den Abplattungs-Verhältnissen $^1/_{280}$ bis $^1/_{310}$ entsprechen können. Die Zahlen sind gewiss nicht zu hoch gegriffen: legt doch die Ordnance Trigonometrical Survey, Principal

Triangulation 1 : 280,4 zu Grunde, während Beilage 11 der mehrerwähnten Verhandlungen anführt, dass zur Verifikation der bis jetzt gefolgerten Abplattung von $^1/_{263,6}$ in Russland (Polen) astronomisch geodätische Arbeiten unternommen wurden.

Wir machen nun im folgenden stets zwei Annahmen:

1. Im Punkt A ist im Azimut α_{ab} beobachtet worden unter der Voraussetzung die Abplattung sei die Bessel'sche, während sie $^1/_{280}$ beträgt.

2. Die Rechnung legt $\mathfrak{a} = {^1/_{280}}$ zu Grunde, während den thatsächlichen Verhältnissen $^1/_{310}$ entsprechen würde.

Als gerechnet ist das Azimut oder die Differenz bezeichnet, welche sich bei der angenommenen Abplattung ergäbe, als beobachtet jene Zahlen für das wahre $\mathfrak{a}$.

1. Beispiel: $B_a = +20^0$, $B_b = -20^0$, $L_{ab} = 20^0$

$\mathfrak{a} =$	$^1/_{280}$	$^1/_{299,15}$	$^1/_{310}$
$n_a = n_b =$	7′ 15,″8	6′ 47,″7	6′ 33,″4
$\alpha_{ab} - \alpha'_{ab} =$	10 21,3	9 41,3	9 20,9

Genäherter Abstand des wahren Orts B' von der Ebene AZ_aB

ad 1) 1,0, ad 2) 1,5 Km.

Beobachtete Zenitdistanz in A

	$z_i = 1^0$	$z_i = 5^0$	$z^i = 10^0$
ad 1) $\alpha_i - \alpha'_{ab}$			
ger.	6° 30′ 8″	1° 17′ 41″	0° 38′ 32″
beob.	6 29 37	1 17 34	0 38 29
$\varepsilon =$	31″	7″	3″
ad 2) $\alpha_i - \alpha'_{ab}$			
ger.	6° 57′ 5″	1° 23′ 1″	0° 41′ 11″
beob.	6 56 20	1 22 51	0 41 7
$\varepsilon =$	45″	10″	4″

2. Beispiel: $B_a = +20^0$, $B_b = 20^0$, $L_{ab} = 40^0$

$n_a = n_b =$	11′ 31″,5	10′ 47″,2	10′ 24″,5
$a_{ab} - a'_{ab} =$	13 54,4	13 0,8	12 33,5

Genäherter Abstand

ad 1) 1,5, ad 2) 2,3 Km.

	$z_i = 1^0$	$z_i = 5^0$	$z_i = 10^0$
ad 1) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	10° 21′ 20″	2° 3′ 19″	1° 1′ 10″
beob.	10 20 33	2 3 9	1 1 6
$\varepsilon =$	47″	10″	4″
ad 2) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	11° 4′ 28″	2° 11′ 47″	1° 5′ 22″
beob.	11 3 18	2 11 32	1 5 15
$\varepsilon =$	70″	15″	7″

3. Beispiel: $B_a = 0$, $B_b = +50^0$, $L_{ab} = 60^0$

$n_a =$	11′ 4″,7	10′ 22″,0	10′ 0″,2
$a_{ba} - a'_{ba} =$	11 41,9	10 56,9	10 33,8
$n_b =$	10′ 57″,8	10′ 15″,5	9′ 53″,9
$a_{ab} - a'_{ab} =$	11 34,6	10 50,0	10 27,1

Genäherter Abstand des Ortes A' von Ebene BZ_bA

ad 1) 1,6, ad 2) 2,5 Km.

	$z_i = 1^0$	$z_i = 5^0$	$z_i = 10^0$
ad 1) $a_i - a'_{ab}$			
ger.	9° 50′ 35″	1° 57′ 16″	0 58 11
beob.	9 49 44	1 57 6	0 58 7
$\varepsilon =$	51″	10″	4″
ad 2) $a_i - a'_{ae}$			
ger.	10° 31′ 37″	2° 5′ 20″	1 2 11
beob.	10 30 20	2 5 4	1 2 3
$\varepsilon =$	77″	16″	8″

In B kann der Mond unter den günstigsten Verhältnissen noch in 32^0 Zenitdistanz beobachtet werden. Unter den beiden oben gemachten Annahmen folgt

$$\varepsilon = 1{,}''7 \quad bz\ 2{,}''6$$

$$z_i = 42^0 \qquad = 1{,}3 \qquad 2{,}1$$

(während $dt = 0{,}^s04$ ein $da = 1{,}1$ bz $0{,}9$ veranlasst.

Bei den Rechnungen ist eine genähert mittlere Mondparallaxe zu Grunde gelegt. Sei M'_1 die Projektion von M_1 auf den Horizont von B, M''_1 der Fusspunkt des Lotes von M'_1 auf die Spur der Ebene AZ_aB, B' der wahre Ort, $B'M'''_1$ parallel zu BM''_1, so findet man

$$BM'_1 \quad = \frac{\sin z_1}{\sin p_1} = \Delta_1 \sin z_1$$

$$BM''_1 \quad = \Delta_1 \cdot \sin z_1 \cos (a_1 - a'_{ba})$$

$$M'_1M''_1 = \Delta_1 \sin z_1 \sin (a_1 - a'_{ab})$$

daher das Azimut des Mondes im ellipsoidischen Ort B

$$a'_{ba} + arc\,\mathrm{tg}\,\frac{M'_1M''_1}{BM''_1}$$

(denselben Wert liefert selbstverständlich auch Gl. 17), während im wahren Ort B' kommt:

$$a'_{ba} + arc\,\mathrm{tg}\,\frac{M'_1M''_1 - M''_1M'''_1}{B'M''_1}$$

$M''_1M'''_1$ der Abstand des wahren Orts B' von AZ_aB (a'_{ba} bedeutet noch das Azimut im ellipsoidischen Ort).

Wenn also beide Orte so liegen, dass ihre Polhöhen innerhalb der Grenzen der Monddeklination bleiben, so zeigt der Vergleich der letzt ermittelten Zahlen mit den Resultaten von S. 26, dass zwar gröbere Abweichungen konstatiert werden können, geringe jedoch ebenso wie eine präzise Bestimmung erst möglich sind, wenn die Beobachtungen eine grössere Schärfe erreichen.

Wie wenig verwertbar der Mond in grösseren Zenitdistanzen ist, um die Neigung der Azimutalebene zu fixieren, folgt auch aus der Differentiation der Gl. 17. Sie liefert

$$\frac{dn}{\cos^2 n} = \sin(a_i - a') \frac{dz_i}{\cos^2 z_i} + \cos(a_i - a') \operatorname{tg} z_i \, da_i$$

und ist ohne Daten nicht bestimmt. Für kleine Winkel $a_i - a'$, wie sie bei Zenitdistanzen von mehr als 5^0 auftreten, folgt jedoch genau, wenn

$$da_i = dz_i = 1''$$

$z = 5^0$	$dn = 0'',1$
$= 30$	$= 0,6$
$= 45$	$= 1,0$
$= 60$	$= 1,8$
$= 85$	$= 12$ ca.

Es drängt sich noch die Frage auf, ob man die Abweichungen nicht künstlich durch Annahme eines wenig wahrscheinlichen $\mathfrak{a}$ vergrössern soll. Dieselbe ist jedoch zu verneinen. Selbst bei grösserer Genauigkeit der Beobachtungen wird der oben schematisch angedeutete Rechnungsgang nicht schon das erste Mal zum Ziele führen, sondern erst die Wiederholungen der Rechnungen mit neu gewonnenen Werten n, a und a' sowie den entsprechend neu interpolierten Mondazimuten und Zenitdistanzen werden allmälig bewirken, dass alle der Gl. 17 genügen. Setzt man ein unwahrscheinliches $\mathfrak{a}$ voraus, so sind die ersten Rechnungsstadien vergeblich gewesen.

7. Schluss. Fassen wir das Vorstehende nochmals kurz zusammen. Gegenüber den bisher angegebenen Verfahreu, welche alle mehr oder minder der Mondtafeln bedürfen, bietet die Gl. 17 den Vorteil, dass sie frei ist von aller Theorie des Mondes. Dieser Vorteil ist jedoch nur ein scheinbarer. Denn sowie man dieselbe verwerten will, muss konstatiert werden, welches Azimut im einen Ort unter Voraussetzung einer bestimmten Erdgestalt dem abgelesenen des andern Orts entspricht. Um jenes zu erhalten, bedürfen wir der Parallaxe. Wenn nun auch ein Fehler in der Entfernung des Mondes vom einen Ort auf die lineare Polarkoordinate des wahren (andern) Orts im Horizont des angenommenen ohne jeden Einfluss bleibt, so zeigen die Betrachtungen S. 24, dass das gleiche für das Azimut nicht zutrifft.

Man könnte zwar die Lösung auch in der Weise versuchen, dass man, nachdem die Gleichungen (17) z. B. in A nicht dasselbe n_a liefern, in B das Azimut a_{ba} etwas variieren lässt und demgemäss in A Azimut und Zenitdistanz aus den vorliegenden Beobachtungen neu interpoliert. Wir kennen auch das zu a_{ba} gehörige a'_{ab}, weil sich aus den Gl. 1 und 2 immer n eliminieren lässt. Würden nunmehr alle Gl. 17 befriedigt, so gienge die Lot-Ebene des einen Orts durch den andern und die Lösung wäre erfolgt. Allein wir sehen auch sofort hin, dass Anfangs jeder Anhalt fehlt, wie denn die Azimute abzuändern sind, so dass es fraglich erscheint, ob dieser mod. proc. zum Ziele führt.

Wir dürfen endlich nicht unterlassen, auf die Schwierigkeiten korrespondierender Beobachtungen hinzuweisen, sowie auf die Unmöglichkeit, Unsicherheit in der Erfassung des Mondrandes u. a. wegzuschaffen, da ein Vertauschen der Observatoren wegen räumlicher wie zeitlicher Verhältnisse wohl ausgeschlossen ist.