zu rechtfertigen, folgen hier einige Zahlen für $B_a = +45^0$, $B_b = -45^0$

$L = 90^0$	$\nu = 0^0 32' 36''$
$= 120$	$= 1 \quad 0 \quad 13$
$= 150$	$= 2 \quad 2 \quad 43$
$= 160$	$= 3 \quad 6 \quad 8$
$= 170$	$= 6 \quad 12 \quad 29$
$= 179^1/_2$	$= 97 \quad 40 \quad 29$

Da n immer klein bleibt, ν aber jeden Wert annehmen kann, zeigt Gl. 4) am deutlichsten, dass auch die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte alle Beträge zwischen 0^0 und 180^0 durchläuft.

6. Reduktion der Formeln für kleine Entfernungen. Um Helmert's Formeln für Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte und Flächenwinkel derselben — gültig für kleine Entfernungen — aus unseren strengen Formeln abzuleiten, transformieren wir zunächst den Ausdruck für $\sin n_a$. Wir stellen im Nenner ein völliges Quadrat her und haben nach Division mit $\sin a'_{ab}$ in demselben

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \; W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2}\left[\frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} - \frac{\sin^2 z \cos^2(a'_{ba} - 180^0)}{\cos^2 B_b}\right]$$

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \; W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2} \frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} \cdot \sin^2(a' - 180^0)$$

Bei kleinen Entfernungen kann man nun stets $e^2 D$ gegen $\frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \; W_a}$ vernachlässigen und hat daher

$$\sin n_a = -\frac{e^2 \cdot D \cos B_a \cdot \sin L}{\frac{1}{W_a} \cdot \frac{\sin L}{\sin a'_{ab}}}$$

Entwickeln wir nun D und W nach Potenzen von e^2 und bedenken, dass wir nur bis zu Gliedern 2. Ordnung incl. gehen wollen, so folgt, da

$$\frac{1}{W_a} = 1 + Gl_2$$

$$e^2 D = e^2 \left\{ \frac{\sin B_b}{W_b} - \frac{\sin B_a}{W_a} \right\} = e^2 (\sin B_b - \sin B_a) + Gl_2$$

$$\sin n = -2\, e^2 \cdot \cos B_a \cdot \sin a'_{ab} \cdot \sin \frac{B_b - B_a}{2} \cdot \cos \frac{B_b + B_a}{2}$$

Wir führen Mittelwerte ein

$$B = \tfrac{1}{2} (B_a + B_b)$$
$$a' = \tfrac{1}{2} (a'_{ab} + a'_{ba} - 180^0)$$

Nach dem Sinussatze ergiebt sich in Strenge

$$\frac{\sin 2a'}{\sin 2a'_{ab}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\sin^2 z - \sin^2 L \cos^2 B_a}}{\sqrt{\sin^2 z - \sin^2 L \cdot \cos^2 B_b}} + \frac{\cos B_a}{\cos B_b} \right]$$

und hier genau innerhalb obiger Grenzen

$$\sin 2\, a' = \sin 2\, a'_{ab} \cdot \cos \frac{B_b + B_a}{2} \cdot \cos \frac{B_b - B_a}{2} \sec B_b$$

ferner

$$\cos B_a \cdot \cos B_b = \cos^2 B + Gl_2$$

also

$$\sin a'_{ab} = \frac{\sin 2\, a' \cdot \sec a'_{ab} \cos B_b}{2 \cos \frac{1}{2} (B_b + B_a) \cdot \cos \frac{1}{2} (B_b - B_a)}$$

nun alles in Sekunden:

$$n = -\varrho'' \cdot e^2 \cos^2 B \sin 2\, a'\, tg\, \tfrac{1}{2} (B_b - B_a) \cdot \sec a'_{ab}$$

Unter s und ϱ_n die Entfernung der beiden Punkte und den Querkrümmungshalbmesser für die Mittelbreite verstanden, folgt

$$\text{tg}\, (B_b - B_a) = \cos a'_{ab}\, \text{tg} \left(\frac{s}{\varrho_n} \right)$$

$$n = -\varrho'' \frac{e^2\, s}{2 \varrho_n} \cdot \cos^2 B \cdot \sin 2\, a'$$

für die Azimutaldifferenz benutzen wir nicht die Gleichung (3), sondern vertauschen in (1) und (2) Tangente wie Sinus mit dem Bogen und haben:

$$a_{ab} - a'_{ab} = n \cdot \text{tg} \frac{z}{2}$$

Da endlich noch

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{s}{2\,\varrho_n}$$

$$a_{ab}-a'_{ab}=-\varrho''\,\frac{e^2\,s^2}{4\,\varrho^2_n}\cdot\cos^2 B\cdot\sin 2\,a'$$

Der Flächenwinkel nach Gleichung (4) ist

$$\sin\nu=\sqrt{\sin^2 n+\sin^2(a_{ab}-a'_{ab})}+\mathrm{Gl}_4$$

$$=\sin n\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}$$

$$=\sin n\cdot\sec\frac{z}{2}$$

$$\nu=-\varrho''\cdot\frac{e^2\,s}{2\,\varrho_n}\cdot\cos^2 B\cdot\sin 2\,a'.$$

Diese Formeln stimmen mit jenen Helmerts S. 187 und 188 überein, nur ist dort bei der Azimutaldifferenz a_0 statt ϱ_n gesetzt.

Wir fanden oben

$$\sin n_a=-e^2\,D\cdot\cos B_a\sin a'_{ab}\cdot W_a.$$

Analog wird

$$\sin n_b=-e^2\,D\cdot\cos B_b\sin a'_{ba}\cdot W_b$$

also auch, da bei kleinen Entfernungen in den Gl. 2 und 2* der Sinus mit dem Bogen vertauscht werden darf

$$a_{ab}-a_{ba}-(a'_{ab}-a'_{ba})=-\frac{e^2 D\cdot W_a}{\sin z}\left\{\cos B_a\cdot\sin a'_{ab}-\cos B_b\sin a'_{ba}\cdot\frac{W_b}{W_a}\right\}$$

Da nun

$$\frac{W_b}{W_a}=1+\mathrm{Gl}_2,$$

so folgt

$$a_{ab}-a_{ba}=a'_{ab}-a'_{ba}+\mathrm{Gl}_4\ ,$$

das ist Dalby's Satz.