Der gesuchte Winkel τ' der Ebene ABC mit Horizont von A, sowie die Seite im letzteren (h_a) folgt aus

$$\cos\tau' = \cos\tau\cdot\cos z + \sin\tau\cdot\sin z\cdot\cos h_b$$

$$\sin h_a = \frac{\sin h_b\cdot\sin\tau}{\sin\tau'}$$

Weil nun h_a gefunden worden, ist auch das Azimut der Schnittlinie der Ebenen ABC und Horizont von A bekannt, denn das Azimut der Schnittlinien der Horizonte beträgt aus dem gleichen Grunde wie oben

$$a'_{ab} + 90^0$$

Auf die gleiche Weise ergiebt sich aus den Resultaten der Beobachtungen in A, C und D der Winkel τ'' der Ebene ACD mit dem Horizont von A und das Azimut der Schnittlinie. Ebene ABC, ADC und der Horizont von A geben auf der Kugel um A ein sphärisches Dreieck, das Perpendikel auf die letztgenannte Seite den gesuchten Depressionswinkel μ_{ac}.

Der gleiche Gang ist bezüglich des Horizontes von C einzuschlagen; da sich die Resultate der verschiedenen Rechnungsstadien nicht zusammenfassen lassen, wurde von der ohne Einführung von Hülfswinkeln uneleganten Lösung hier abgesehen.

5. Entwicklungen für das Rotations-Ellipsoid. Um uns ein Urteil über die Beträge der Grössen n, ν u. s. f. zu bilden, leiten wir dieselben für ein Rotations-Ellipsoid ab. Es lässt sich hiebei des Zusammenhanges halber nicht vermeiden, genügend Bekanntes rekapitulieren zu müssen, wobei wir uns jedoch unter Verweisung auf Helmert, höh. Geod. Bd. I S. 135—36 und 183—84 der möchlichsten Kürze befleissigen wollen.

Ableitung von n. Statt der halben grossen Axe der Meridianellipse a_o soll stets die Einheit genommen werden. Für ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Ellipsoids, der Rotationsaxe als Z-Axe, der Meridian-Ebene von A als XZ Ebene folgt für die Koordinaten von A, B, K'_a und K'_b (vergl. Fig. 1):

$$x_a = \frac{\cos B_a}{W_a}, \qquad x_b = \frac{\cos B_b \cdot \cos L_{ab}}{W_b}$$

$$y_a = 0, \qquad y_b = \frac{\cos B_b \cdot \sin L_{ab}}{W_b}$$

$$z_a = \frac{(1 - e^2) \sin B_a}{W_a}, \qquad z_a = \frac{(1 - e^2) \sin B_b}{W_b}$$

$$x'_a = 0, \qquad x'_b = 0$$

$$y'_a = 0, \qquad y'_b = 0$$

$$z'_a = -\frac{e^2 \sin B_a}{W_a}, \qquad z'_b = \frac{-e^2 \sin B_b}{W_b}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

Der Uebergang von diesem Koordinatensystem zu einem andern mit A als Ursprung der Tangentialebene in A als $\xi\eta$ Ebene, der Normalen in A als ζ Axe — positiv nach unten — erfolgt durch:

$$\xi = (x - x_a) \cdot \sin B_a - (z - z_a) \cos B_a$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = -(x - x_a) \cos B_a - (z - z_a) \sin B_a.$$

Die Gleichung der Ebene Lot B Punkt A hat daher die Form:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

und wird bekannt, indem man sie auf die 3 Punkte A, B und K'_b anwendet. Es ergiebt sich aus ihr

$$\cos (90^0 - n_a) = \sin n_a = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Werte für A, B und C eingesetzt, folgt nach einigen Reduktionen, wobei z, a'_{ab}, a'_{ba} ihre frühere Bedeutung haben, während zur Abkürzung dient

$$D = \frac{\sin B_b}{W_b} - \frac{\sin B_a}{W_a}$$

$$\sin n_a = \frac{- e^2 \cdot D \cdot \cos B_a \sin L \cdot \sin a'_{ab}}{\sqrt{\frac{\sin^2 L}{W_a^2} + 2 e^2 \frac{D}{W_a} \cdot \sec B_b \cdot \sin z \cdot \sin^2 a'_{ab} \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0) + e^4 D^2 \cdot \sin^2 a'_{ab}}}$$

Der Nenner kann nie kleiner als der Zähler werden; es ergiebt sich n als positiver oder negativer kleiner Winkel. Die Bestimmung eines Maximum stösst auf erhebliche Schwierigkeiten, wesswegen ein genähert grösster Wert durch Probieren gefunden wurde. Punkte mit entgegengesetzt gleicher Polhöhe lieferten die grössten Beträge. Bei wachsendem L rückt a'_{ab} immer näher an 90^0, z an 180^0, und n erreicht den Maximalbetrag in der Nähe von $L = 170^0$. So findet sich für $B_a = + 45^0$, $B_b = - 45^0$ bei

$L = 60^0$	$n = 14' \; 35{,}3''$	$z = 104^0 \; 28' \; 39{,}1''$
$= 90$	$= 18 \; 49{,}1$	$= 120 \; 0 \; 0$
$= 120$	$= 21 \; 19{,}4$	$= 138 \; 35 \; 34{,}6$
$= 150$	$= 22 \; 35{,}7$	$= 158 \; 54 \; 33{,}8$
$= 160$	$= 22 \; 50{,}2$	$= 165 \; 53 \; 38{,}1$
$= 170$	$= 22 \; 56{,}7$	$= 172 \; 56 \; 0{,}4$
$= 179 \; 30'$	$= 15 \; 59{,}5$	$= 179 \; 34 \; 2{,}1$
$= 179 \; 58'$	$= 1 \; 29{,}1$	$= 179 \; 58 \; 11{,}1.$

Die Zeitdistanzen wurden angeschrieben zur Bestätigung der Zulässigkeit der Substitution

$$\sin n' = \frac{\sin n}{\sin z}$$

Die analytische Ableitung von ν gestaltet sich noch weit komplizierter, dagegen liefert die geometrische Anschauung (vgl. Helmert Bd. I S. 184) sehr leicht das Resultat, dass ν mit der Annäherung der Sehne an die Axe bis 180^0 wachsen kann.

Um die Substitution

$$\sin p = \frac{\sin n}{\sin \nu}$$

zu rechtfertigen, folgen hier einige Zahlen für $B_a = +45^0$, $B_b = -45^0$

$L = 90^0$	$\nu = 0^0 32' 36''$
$= 120$	$= 1 \quad 0 \quad 13$
$= 150$	$= 2 \quad 2 \quad 43$
$= 160$	$= 3 \quad 6 \quad 8$
$= 170$	$= 6 \quad 12 \quad 29$
$= 179^1/_2$	$= 97 \quad 40 \quad 29$

Da n immer klein bleibt, ν aber jeden Wert annehmen kann, zeigt Gl. 4) am deutlichsten, dass auch die Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte alle Beträge zwischen 0^0 und 180^0 durchläuft.

6. Reduktion der Formeln für kleine Entfernungen.

Um Helmert's Formeln für Azimutaldifferenz der Vertikalschnitte und Flächenwinkel derselben — gültig für kleine Entfernungen — aus unseren strengen Formeln abzuleiten, transformieren wir zunächst den Ausdruck für $\sin n_a$. Wir stellen im Nenner ein völliges Quadrat her und haben nach Division mit $\sin a'_{ab}$ in demselben

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \; W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2}\left[\frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} - \frac{\sin^2 z \cos^2(a'_{ba} - 180^0)}{\cos^2 B_b}\right]$$

$$\left[e^2 D + \frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \; W_a}\right]^2 + \frac{1}{W_a^2} \frac{\sin^2 L}{\sin^2 a'_{ab}} \cdot \sin^2(a' - 180^0)$$

Bei kleinen Entfernungen kann man nun stets $e^2 D$ gegen $\frac{\sin z \cdot \cos(a'_{ba} - 180^0)}{\cos B_b \; W_a}$ vernachlässigen und hat daher

$$\sin n_a = - \frac{e^2 \cdot D \cos B_a \cdot \sin L}{\frac{1}{W_a} \cdot \frac{\sin L}{\sin a'_{ab}}}$$

Entwickeln wir nun D und W nach Potenzen von e^2 und bedenken, dass wir nur bis zu Gliedern 2. Ordnung incl. gehen wollen, so folgt, da