Bremiker in dessen „Studien über höhere Geodäsie“ S. 23 angegeben.

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die Formeln für jede beliebige Gestalt der Erdoberfläche Gültigkeit haben. Erachtet man jedoch die Allgemeinheit durch die Annahme $n < z$ und $180^0 - z$, $n < \nu$ (wie es bei der Uebereinstimmung mit einer ellipsoidischen Oberfläche im Grossen und Ganzen sicher zutrifft) als geschädigt, so hindert nichts die Tangente statt des Sinus einzuführen.

3. Fortsetzung. Die bisher entwickelten Formeln geben Aufschluss über die gegenseitige Lage zweier Punkte, ohne eine Beziehung zur Erdaxe zu enthalten. Es leuchtet auch sofort ein, dass sie nichts in Bezug auf jene aussagen können, da nur die der Axe parallele Schnittlinie der Meridiane, welche von den beiden Loten getroffen wird, in Betracht kam. So wie wir aber in 3 Punkten die Winkel n bekannt voraussetzen, lässt sich entscheiden, ob die drei Meridiane sich nach einer Geraden schneiden. Wiewohl nun, wenn dies nicht zutrifft, auf die Lage der Erdaxe nicht geschlossen werden kann, und auch beim Zusammenfallen die Identität mit der Axe nicht erwiesen ist, so erkennt man doch die Nützlichkeit des Kriteriums bei zahlreicher vorhandenen Punkten mit bekannten Winkeln n. Wir wollen desshalb noch einige zur Lösung nötige Formeln hier wiedergeben.

Der Flächenwinkel χ_{ba} der Azimutalebene AZ_aB mit dem Meridian von B findet sich aus Figur 2, wo Bogen $Z_bK_b'N$ den Meridian, $Z_b'Z_aA'$ die Azimutalebene vorstellt. Das sphärische Dreieck $NA'K_a'$ ist bei N rechtwinklig, Seite $NA' = 180^0 - a'_{ba}$, $\sphericalangle NA'K_a' = 90^0 - n_b$, $\sphericalangle A'K_a'N = 180^0 - \chi_{ba}$, mithin

$$7) \qquad \cos\chi_{ba} = \cos a'_{ba} \cdot \cos n_b$$

ω_{ba} sei der Winkel der Sehne mit der Schnittlinie zwischen der Ebene AZ_aB und dem Meridian von B. In Figur 2 bezeichnet AB die Sehne, Z_bBK_b' das Lot von B, BK_a' die eben genannte Schnittlinie. Die Kugel um B liefert ein sphärisches Dreieck, in welchem Bogen $K'_a K'_b$ im Meridian von B liegt.

Daher Seite $AK'_b = 90^0 - \mu_{ba}$

$\sphericalangle\ AK'_b K'_a = 180^0 - a_{ba}$

$\sphericalangle\ K'_b AK'_a = \nu$

$\sphericalangle\ AK'_a K'_b = \chi_{ba}$

Seite $K'_a K'_b = b_{ba}$ (von Hansen $B' - \Gamma$ genannt)

mithin

$$8)\qquad \sin \omega_{ba} = \cos \mu_{ba} \frac{\sin a_{ba}}{\sin \chi_{ba}}$$

$$= \sin b_{ba} \frac{\sin a_{ba}}{\sin \nu}$$

also

$$9)\qquad \sin b_{ba} = \cos \mu_{ba} \frac{\sin \nu}{\sin \chi_{ba}}$$

Aus Gl. 9) folgt mit Berücksichtigung von 6)

$$10)\qquad \sin b_{ba} = \frac{\sin n_b}{\sin \chi_{ba}}$$

und im Zusammenhalt mit Gl. 7)

$$11)\qquad \cos b_{ba} = \frac{\cos n_b \cdot \sin a'_{ba}}{\sin \chi_{ba}}$$

Die Gl.

$$12)\qquad tg\, b_{ba} = tg\, n_b : \sin a'_{ba}$$

sowie

$$13)\qquad tg\, \chi_{ba} = tg\, a'_{ba} \sec b_{ba}$$

hätten aus dem gleichen rechtwinklig sphärischen Dreieck unmittelbar gefunden werden können. Das Dreieck $K'_a NA'$ giebt endlich den Winkel zwischen den Schnittlinien der Ebene AZ_aB mit dem Horizont und Meridian von B, nämlich Seite $A'K'_a = \gamma_{ba}$

$$14)\qquad tg\, \gamma_{ba} = \operatorname{cotg} b_{ba} \cdot \sec a'_{ba} \cdot \sec n_b$$

Die Seite AA' in dem sphärischen Dreieck EAA' gleich μ'_{ab} gesetzt folgt zu

$$tg\, \mu'_{ba} = tg\, \mu_{ba} \cdot \sec \nu$$

Und analog (was von Gl. 6) an als überflüssig anzuschreiben unterlassen wurde)

15) $$tg\, \mu'_{ab} = tg\, \mu_{ab} \sec \nu.$$

Die Gl.

$$\omega_{ba} = \gamma_{ba} - \mu'_{ba}$$

kontrolliert die Richtigkeit der bisher gegebenen Formeln.

Endlich müssen wir noch den Winkel kennen lernen, welchen die Sehne zweier Orte mit dem im Meridian des einen Orts liegenden Schnitt der Ebene einschliesst, welche bestimmt ist durch jenen Ort und das Lot eines dritten Orts. In der Figur 3 wird der Fall erledigt für den Winkel ω'_c *) der Sehne AC mit dem Schnitt der Ebene Lot B Punkt C und dem Meridian von C nach Linie CK'_b. In dem sphärischen Dreieck, welches die Kugel um C mit den von den Linien AC, CZ_c, CK'_b herrührenden Ecken giebt, ist bekannt:

$$\text{Seite } AK'_c = 90^0 - \mu_{ca}$$
$$\text{Seite } K'_bK'_c = b_{cb}$$
$$\sphericalangle\, AK'_cK'_b = a_{ca}, \text{ daher}$$

16) $$\cos \omega'_c = \sin \mu_{ca} \cdot \cos b_{cb} + \cos \mu_{ca} \cdot \sin b_{cb} \cos a_{ca}$$

Setzen wir jetzt ein Rotationsellipsoid voraus und verbinden den Schnitt des Lotes von B mit der Axe in K'_b mit den Orten A und C, so entsteht dadurch ein Dreikant, von dem drei Seiten und ein Winkel bekannt sind, nämlich

$$\text{Seite } BK'_bC = 180^0 - (90^0 - \mu_{bc} + \omega_{cb})$$
$$\text{„ } BK'_bA = 180^0 - (90^0 - \mu_{ba} + \omega_{ab})$$
$$\text{„ } AK'_cC = 180^0 - (\omega'_c + \omega'_a)$$
$$\sphericalangle \text{ an } BK'_b = a_{bc} - a_{ba}.$$

Es ist also eine überschüssige Bestimmung vorhanden. Schneiden sich nun die 3 Meridiane, wie es allgemein der Fall sein wird, nach 3 verschiedenen Parallelen zur Erdaxe, so bleiben unsere Relationen 7)—16) gültig, die entsprechen-

*) Konsequenter Weise müsste der Winkel ω_{bca} bez. werden.

den Linien treffen sich aber nicht mehr in einem Punkte, und deshalb wird das sphärische Dreieck der überschüssigen Bestimmung nicht mehr genügen können. Obwohl wir nun 3 solcher Dreikante zur Verfügung haben, vermögen wir doch aus den Widersprüchen keinen andern Schluss auf die gegenseitige Lage zu ziehen als den einer besseren oder geringeren Uebereinstimmung der Geoidfläche mit einem Rotationskörper in streng mathematischem Sinne.

4. Fortsetzung. Da die Winkel n durch gleichzeitige Beobachtungen des Mondes zu finden sind, scheinen Beziehungen zwischen Orten, wo dies praktisch unmöglich ist, ausgeschlossen. Wie in diesem Falle vorgegangen werden muss, soll uns zunächst beschäftigen.

Seien A, B und C drei Orte und so gelegen, dass sowohl in B und A, als auch in B und C gleichzeitige Beobachtungen unter nicht zu kleinen Höhenwinkeln möglich sind. Sowie nun in B die Winkel der Azimutalebene BAZ_a und BCZ_c gegen das Lot dortselbst bestimmt sind und ebenso die Neigungen der anderen zwei Azimutalebenen gegen die Lote in A und C, lässt sich angeben: der Depressionswinkel der Sehne BA, jener von BC und also auch der Winkel der Ebene ABC mit dem Horizont von B sowie mit dem Horizont von A. Ferner müssen Beobachtungen zwischen A, C und D vorliegen, wo in A und D sowie in C und D gleichzeitig der Mond sichtbar ist. Ganz analog folgt aus diesen Beobachtungen der Winkel der Ebene ACD gegen den Horizont von A. Nun kennen wir in A die Lage dreier Ebenen, nämlich jene des Horizonts und der Ebenen ABC sowie ACD; die letzteren schneiden sich nach AC, daher lässt sich der Depressionswinkel μ_{ac} sowie das Azimut a_{ac} angeben.

Wir stellen die nötigen Formeln auf. Da von nun an in den Orten B und D die Winkel je zweier Ebenen mit dem Lote vorkommen, muss das n noch einen zweiten Index